

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»  
Институт вычислительной математики  
и информационных технологий

---

Конюхов В.М., Чекалин А.Н., Конюхов И.В.

**ЧИСЛЕННОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И  
МЕТОД ПЛАНИРОВАНИЯ  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ  
ЭКСПЕРИМЕНТОВ**

Учебное пособие

Вестфалика

2022

УДК 517.673  
ББК 22.193  
К65

*Рекомендовано Учебно-методической комиссией  
Института вычислительной математики и информационных технологий*

**Рецензенты:**

кандидат физ.-мат. наук, доцент, заместитель директора по научной деятельности Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского федерального университета Тумаков Дмитрий Николаевич,

доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта Казанского федерального университета Карчевский Евгений Михайлович.

**Конюхов В.М., Чекалин А.Н., Конюхов И.В.**

**К65** Численное моделирование и метод планирования вычислительных экспериментов: учебное пособие / В.М. Конюхов, А.Н. Чекалин, И.В. Конюхов. Казань: Вестфалика, 2022. – 32 с.

Учебная пособие предназначено для студентов, специализирующихся в области прикладной математики, информатики и математического моделирования. В пособии изложены материалы лекций по спецкурсу «Математическое моделирование и численные методы» для студентов кафедры прикладной математики Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского федерального университета

*Многие вопросы, затронутые в пособии, активно обсуждались с сотрудниками Казанского федерального университета. В пособии широко используются материалы монографии [3], редактирование рукописи которой было выполнено А.М. Елизаровым. Авторы с благодарностью учли его замечания, равно, как и пожелания других сотрудников университета.*

© Конюхов В.М., Чекалин А.Н., Конюхов И.В., 2022 г.

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>5</b>
<b>1 Теория планирования вычислительного эксперимента</b>	<b>7</b>
1.1 Основные определения . . . . .	7
1.2 Полный факторный эксперимент . . . . .	10
1.3 Ортогональное планирование второго порядка . . . . .	13
<b>2 Задачи оптимизации полимерного вытеснения</b>	<b>17</b>
2.1 Постановки оптимизационных задач . . . . .	17
2.2 Оптимизация технологии полимерного вытеснения . . . . .	20
<b>3 Задачи оптимизации гидрогелевого заводнения</b>	<b>25</b>
3.1 Постановки оптимизационных задач . . . . .	25
3.2 Оптимизация технологии гидрогелевого заводнения . . . . .	27
<b>Литература</b>	<b>31</b>



# Предисловие

В пособии изложены материалы лекций по спецкурсу «Математическое моделирование и численные методы» для студентов кафедры прикладной математики Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского федерального университета, специализирующихся в области математического моделирования.

Компьютерное моделирование и метод вычислительного эксперимента являются необходимым и сравнительно дешевым инструментом как научных исследований (см. [3]), так и проектирования оптимальных технологических схем разработки пластов. В ряде случаев (например, при использовании физико-химических методов воздействия на пласт) решение указанных задач невозможно без предварительного компьютерного моделирования и проведения многовариантных расчетов. Для сокращения объема вычислений при выборе оптимальных технологий целесообразно использовать методы планирования экстремальных экспериментов. Эти методы широко применяются при физическом моделировании различных процессов, но не вошли в достаточной мере в практику вычислительного эксперимента.

Целью данной учебно-методической разработки являются краткое описание метода планирования эксперимента на основе работ [1], [2] и демонстрация его использования на примере определения оптимальных технологических параметров при полимерном и гидрогелевом заводнении нефтяных пластов. Показано, что решение оптимальных задач в рамках этой теории может быть получено при сравнительно небольшом объеме вычислений.

Представленные методы решения конкретных прикладных задач направлены на выработку у студентов навыков самостоятельного выполнения математических выкладок. Эти задачи могут служить основой для семинарских занятий, курсовых и дипломных работ и ориентированы на достижение понимания студентами физической сущности изучаемых теоретических положений.

Пособие рассчитано на студентов старших курсов физико-математических факультетов, знакомых с общими университетскими курсами естественно-научного цикла. Оно будет полезно также и аспирантам соответствующих специальностей.



# Глава 1

## Теория планирования вычислительного эксперимента

### 1.1 Основные определения

Задачей экспериментального исследования являются установление связей между различными факторами, выявление закономерностей, характеризующих влияние многих показателей на ход изучаемого процесса. Многие исследования сводятся к решению экстремальных задач, направленных на отыскание оптимальных условий протекания процессов. Нужно подобрать такие значения факторов, которые обеспечили бы максимальную (или минимальную) величину параметра оптимизации (функции отклика).

Существуют два различных подхода к решению задач подобного рода. В первом из них решению экстремальных задач предшествует всестороннее исследование механизма процесса. Основываясь на результатах такого исследования, создается теория процесса, с помощью которой будут решаться экстремальные задачи. В другом случае при решении технических (технологических) задач системы, подлежащие оптимизации, как правило, оказываются столь сложными, что не поддаются теоретическому изучению в разумные сроки, и тогда экстремальные задачи решаются экспериментально, при неполном знании механизма явлений.

**Планирование эксперимента** – это метод выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью. При этом существенно следующее:

- 1) стремление к минимизации общего числа опытов;
- 2) одновременное варьирование всех переменных по специальным правилам;
- 3) использование математического аппарата, формализующего действия экспериментатора;
- 4) выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованное решение.

ние после каждой серии экспериментов.

При описании объекта исследования удобно пользоваться его представлением как кибернетической системы. Кибернетическую модель называют «черным ящиком» (рис. 1.1), на вход которого поступают величины, влияющие на процесс – факторы  $x_i$ , а на выходе получают параметры, характеризующие объект исследования, – показатели процесса (при решении оптимизационных задач – параметры оптимизации). В результате проведения эксперимента необходимо найти математическую модель объекта исследования, под которой понимается уравнение  $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ , связывающее показатель  $y$  процесса с воздействующими факторами  $x_i$ . Здесь  $\varphi$  – функция отклика, а  $y$  является параметром процесса, подлежащим оптимизации. Геометрический образ, соответствующий функции  $\varphi$ , называется поверхностью отклика, а каждое выбранное значение фактора  $x_i$  – уровнем.

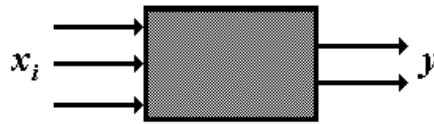


Рис. 1.1. Кибернетическая модель объекта исследования

Факторы могут быть количественными и качественными (различные реагенты, кислоты, приборы и пр.), хотя граница между ними условна. Каждый фактор имеет область определения. Фактор считается заданным, если задана область его определения. Факторы должны быть управляемыми, то есть их значения можно задавать и поддерживать в течение всего эксперимента на нужном уровне. Факторы – это независимые переменные, которые не являются случайными величинами. Точность их определения должна быть достаточно высокой. При выборе величины каждого фактора должны быть учтены определенные ограничения:

- 1) принципиальные ограничения, которые не могут быть нарушены (например, для температуры – абсолютный нуль);
- 2) технико-экономические ограничения, связанные со стоимостью сырья, временем проведения эксперимента и т. п.;
- 3) ограничения, связанные с конкретными условиями проведения эксперимента – существующей аппаратурой, технологией и т. п.

При планировании экстремального эксперимента очень важно, с одной стороны, выбрать основные факторы, влияющие на изучаемый процесс, а с другой – определить признак, по которому оптимизируется процесс (параметр оптимизации). Он должен полностью соответствовать проводимому исследованию. Параметр оптимизации должен иметь количественную оценку, причем заданному набору значений факторов должно соответствовать



одно значение параметра оптимизации, однако обратное утверждение может не выполняться. При неполном знании механизма изучаемых явлений аналитическое выражение функции отклика, как правило, неизвестно. Поэтому приходится ограничиваться ее полиномиальным представлением вида

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i \neq j}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \dots,$$

называемым уравнением регрессии, коэффициенты  $b_i$  и  $b_{ij}$  которого определяются по результатам экспериментов.

На первой стадии планирования в качестве математической модели, которой является уравнение регрессии, берется полином первой степени:

$$y = \sum_{i=0}^n b_i x_i = b_0 x_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n, \quad (1.1)$$

где  $x_0 = 1$ . Если для определения коэффициентов уравнения было проведено  $N$  опытов (экспериментов), то при  $N > n$  число уравнений будет больше числа неизвестных. В этом случае, вообще говоря, не существует таких значений  $b_i$ , которые бы точно удовлетворяли всем уравнениям, и для определения коэффициентов регрессии используется метод наименьших квадратов, согласно которому  $b_i$  выбираются из условия минимума среднеквадратического отклонения (невязки) между аналитическими и экспериментальными значениями параметра оптимизации.

Обозначим значение  $i$ -го фактора в  $k$ -м опыте через  $x_{ik}$ , а соответствующее наблюдаемое значение параметра оптимизации (зависимая переменная) – через  $y_k$ . Тогда из условия минимума функции

$$S = \sum_{k=1}^N \left[ y_k - \sum_{i=0}^n b_i x_{ik} \right]^2$$

получается система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=0}^n b_i \left\{ \sum_{k=1}^N x_{ik} x_{jk} \right\} = \sum_{k=1}^N x_{jk} y_k, \quad j = \overline{0, n}, \quad (1.2)$$

в результате решения которой находятся коэффициенты  $b_i$  уравнения регрессии (1.1).

Набор точек  $\chi_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk})$ ,  $k = \overline{1, N}$ , или матрица

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{n1} \\ \dots & & \\ x_{1N} & \dots & x_{nN} \end{pmatrix}$$

называется планом эксперимента. Точки набора не обязательно должны быть различными. Эксперимент считается активным, если при его проведении

имеет место построение (выбор) плана, и пассивным – в противном случае. План эксперимента надо выбрать так, чтобы решение системы (1.2) было наиболее простым и чтобы коэффициенты  $b_i$  вычислялись независимо друг от друга. Если столбцы матрицы эксперимента будут попарно ортогональны, т. е.

$$\sum_{k=1}^N x_{ik} x_{jk} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (1.3)$$

то матрица системы (1.2) будет диагональной:

$$b_j \sum_{k=1}^N x_{jk}^2 = \sum_{k=1}^N x_{jk} y_k, \quad j = \overline{1, n}.$$

План, для которого выполняется условие (1.3), называется ортогональным.

Для упрощения расчетов значения исследуемых факторов преобразуются в условные единицы – кодовые значения, изменяющиеся от  $-1$  до  $+1$ . Пусть  $\mathbf{x}_i \in [\mathbf{x}_{i \min}, \mathbf{x}_{i \max}]$ . Обозначим через  $\mathbf{x}_i^{\text{cp}}$  центр эксперимента

$$\mathbf{x}_i^{\text{cp}} = (\mathbf{x}_{i \max} + \mathbf{x}_{i \min}) / 2.$$

Тогда

$$\mathbf{x}_{i \max} = \mathbf{x}_i^{\text{cp}} + h_i, \quad \mathbf{x}_{i \min} = \mathbf{x}_i^{\text{cp}} - h_i,$$

где  $h_i = 0.5 (\mathbf{x}_{i \max} - \mathbf{x}_{i \min})$ .

Введем новое значение

$$\bar{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^{\text{cp}}) / h_i.$$

Очевидно,  $\bar{\mathbf{x}}_i \in [-1, 1]$ . Введенные кодовые значения будем использовать в дальнейшем изложении, опуская в их обозначениях черту сверху.

## 1.2 Полный факторный эксперимент

Эксперимент, в котором уровни каждого фактора комбинируются со всеми уровнями других факторов, называют полным факторным экспериментом.

Для реализации первой стадии планирования экстремального эксперимента достаточно варьировать факторы на двух уровнях каждый: на верхнем –  $(+1)$  и нижнем –  $(-1)$ . Тогда общее число экспериментов будет равно  $2^n$  (число уровней в степени количества факторов). Составим матрицу планирования и вектор наблюдений  $\mathbf{y}$  для двухфакторного эксперимента (табл. 1.1):

В этом случае уравнение регрессии запишется в виде

$$y = b_0 + b_1 \mathbf{x}_1 + b_2 \mathbf{x}_2 + b_{12} \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2,$$

Табл. 1.1. Двухфакторный эксперимент

$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$	$\mathbf{y}$
+1	-1	-1	+1	$y_1$
+1	+1	-1	-1	$y_2$
+1	-1	+1	-1	$y_3$
+1	+1	+1	+1	$y_4$

а его коэффициенты определяются соотношениями, полученными умножением столбца  $\mathbf{y}$  на соответствующий столбец  $\mathbf{x}$ :

$$b_0 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4), \quad b_1 = \frac{1}{4}(-y_1 + y_2 - y_3 + y_4),$$

$$b_2 = \frac{1}{4}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4), \quad b_{12} = \frac{1}{4}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4).$$

Матрица планирования для трех факторов, показанная в табл. 1.2, строится аналогично.

Табл. 1.2. Трехфакторный эксперимент

$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$	$\mathbf{y}$
+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	$y_1$
+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	$y_2$
+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	$y_3$
+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	$y_4$
+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	$y_5$
+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	$y_6$
+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	$y_7$
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$y_8$

После вычисления коэффициентов регрессии производится статистический анализ уравнения регрессии. Прежде всего оценивается значимость коэффициентов регрессии. Для этого подсчитываются дисперсии  $S^2\{b_i\}$ , характеризующие погрешности определения коэффициентов  $b_i$ :

$$S^2\{b_i\} = S^2\{\mathbf{y}\} / N,$$

где  $S^2\{\mathbf{y}\}$  – дисперсия вектора наблюдений. Если эта величина известна, то доверительный интервал  $\Delta b_i$  может быть определен по критерию Стьюдента  $\Delta b_i = \Upsilon S^2\{b_i\}$ , где  $\Upsilon$  – табличное значение критерия Стьюдента

при том значении степени свободы  $f_y$ , при котором была определена ошибка эксперимента  $S\{\mathbf{y}\}$ . Коэффициент регрессии считается значимым, если он по абсолютной величине превосходит численное значение доверительного интервала при соответствующем (чаще всего 5%) уровне значимости.

Далее вычисляется остаточная дисперсия, характеризующая рассеяние точек относительно найденного уравнения регрессии. Для этого находится остаточная сумма квадратов

$$S_o = \sum_{k=1}^N (\bar{y}_k - y_k)^2,$$

где  $\bar{y}_k$  – величина, предсказанная уравнением регрессии. Остаточная дисперсия (или дисперсия адекватности)  $S_r^2$  определяется как отношение значения  $S_o$  к числу степеней свободы  $f_r = N - (n + 1)$ :  $S_r^2 = S_o / f_r$ .

После этого по критерию Фишера  $\Phi = S_r^2 / S^2\{\mathbf{y}\}$  оценивается адекватность модели. Если величина  $\Phi$  при степенях свободы  $f_y$  и  $f_r$  не превосходит табличного значения  $\Phi_t$ , то модель считается адекватной для заданного уровня значимости. Значение  $S^2\{\mathbf{y}\}$  составляется из дисперсии повторных наблюдений каждого  $i$ -го опыта

$$S^2\{y_i\} = \sum_{k=1}^{n_i} (y_{ki} - \bar{y}_i)^2 / (n_i - 1),$$

имеющего степень свободы  $(n_i - 1)$ , и дисперсии всего эксперимента, полученной в результате усреднения дисперсий всех опытов:

$$S^2\{y\} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{n_i} (y_{ki} - \bar{y}_i)^2 / f_y,$$

где  $f_y = \sum_{i=1}^N (n_i - 1)$  – число степеней свободы. Отметим, что усреднять дисперсии можно только тогда, когда они однородны. Однородность дисперсий также определяется по критерию Фишера. Если отношение большей и меньшей дисперсий опыта  $\Phi = S_{\max}^2 / S_{\min}^2$  при соответствующих степенях свободы не превосходит критического значения  $\Phi_t$ , то дисперсии однородны. При неоднородности дисперсий воспроизводимость следует или увеличить на число повторных опытов, или изменить интервалы варьирования регулируемых параметров.

Анализ полученных результатов дает возможность принять обоснованное решение по проведению дальнейшего исследования: либо удовлетвориться полученными результатами, либо повторить первую стадию планирования с другим шагом варьирования факторов, либо перейти ко второй фазе планирования – к планированию второго порядка.

### 1.3 Ортогональное планирование второго порядка

На второй фазе планирования доминирующими становятся коэффициенты регрессии, характеризующие эффекты взаимодействия между факторами. В этом случае функция отклика может быть определена полиномом второго порядка. Но тогда каждая независимая переменная должна принимать не менее трех значений, т. е. варьироваться на трех уровнях (степень полинома на единицу меньше числа уровней факторов).

В соответствии с общей идеей шагового эксперимента такое планирование может быть получено путем добавления некоторого количества специально расположенных точек к "ядру", образованному при планировании для линейного приближения. Такие планы называются композиционными или последовательными.

Например, для трехфакторного эксперимента композиционный план составляется следующим образом:  $2^3$  точек из ядра планирования полного факторного эксперимента,  $2 \times 3 = 6$  – шесть "звездных" точек с координатами  $(\pm\alpha, 0, 0)$ ,  $(0, \pm\alpha, 0)$ ,  $(0, 0, \pm\alpha)$  и точка в центре эксперимента. Такое планирование называется центральным композиционным планированием второго порядка. В этом случае каждый фактор, вообще говоря, варьируется на 5 уровнях:  $(-\alpha, -1, 0, 1, +\alpha)$ . Итак, общее число точек при  $k$  факторах будет

$$N = 2^k + 2k + 1 = N_0 + 2k + 1.$$

Нетрудно убедиться, что матрица планирования, приведенная в первых шести столбцах табл. 1.3, не является ортогональной (например, перемножив первый и шестой столбцы). Для получения ортогонального планирования второго порядка нужно выполнить некоторые преобразования квадратичных переменных и специальным образом выбрать величину звездного плеча  $\alpha$ . Введем преобразование

$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i^2 - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_{ij}^2 = \mathbf{x}_i^2 - \bar{\mathbf{x}}_i^2 = \mathbf{x}_i^2 - c,$$

при котором в столбцах с коэффициентами при квадратичных членах вычитается среднее значение  $c = \bar{\mathbf{x}}_i^2$  по столбцу. Тогда

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{x}_{0j} \mathbf{x}'_{ij} = N \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_{ij}^2 \mathbf{x}'_i = 0.$$

После этого преобразования пятый и шестой вектор–столбцы коэффициентов матрицы при квадратичных членах пока остались неортогональными

Табл. 1.3. Матрица планирования при  $k = 2$ 

$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_1^2$	$\mathbf{x}_2^2$	$\mathbf{x}'_1$	$\mathbf{x}'_2$
+1	-1	-1	+1	+1	+1	$1 - c$	$1 - c$
+1	+1	-1	-1	+1	+1	$1 - c$	$1 - c$
+1	-1	+1	-1	+1	+1	$1 - c$	$1 - c$
+1	+1	+1	+1	+1	+1	$1 - c$	$1 - c$
+1	$-\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	$\alpha^2 - c$	$-c$
+1	$+\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	$\alpha^2 - c$	$-c$
+1	0	$-\alpha$	0	0	$\alpha^2$	$-c$	$\alpha^2 - c$
+1	0	$+\alpha$	0	0	$\alpha^2$	$-c$	$\alpha^2 - c$
+1	0	0	0	0	0	$-c$	$-c$

Табл. 1.4. Матрица планирования при  $k = 3$ 

$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}'_1$	$\mathbf{x}'_2$	$\mathbf{x}'_3$
+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+0.27	+0.27	+0.27
+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+0.27	+0.27	+0.27
+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+0.27	+0.27	+0.27
+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+0.27	+0.27	+0.27
+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+0.27	+0.27	+0.27
+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+0.27	+0.27	+0.27
+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+0.27	+0.27	+0.27
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+0.27	+0.27	+0.27
+1	-1.215	0	0	0	0	0	0	0.745	-0.73	-0.73
+1	+1.215	0	0	0	0	0	0	0.745	-0.73	-0.73
+1	0	-1.215	0	0	0	0	0	-0.73	0.745	-0.73
+1	0	+1.215	0	0	0	0	0	-0.73	0.745	-0.73
+1	0	0	-1.215	0	0	0	0	-0.73	-0.73	0.745
+1	0	0	+1.215	0	0	0	0	-0.73	-0.73	0.745
+1	0	0	0	0	0	0	0	-0.73	-0.73	-0.73

друг другу. Их коэффициенты показаны в седьмой и восьмой колонках табл. 1.3 Из условия их ортогональности между собой и первым столбцом

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{x}'_{ij} \mathbf{x}'_{kj} = N_0 (1 - c)^2 - 4(\alpha^2 - c) c + (2k - 4) c^2 + c^2,$$

$$N_0 + 2\alpha^2 - NC = 0,$$

определяются параметры  $c$  и  $\alpha$ :

$$c = \sqrt{N_0/N}, \quad \alpha = \sqrt{0.5 \left( \sqrt{N N_0} - N_0 \right)}.$$

Итак, величина  $\alpha$  звездного шага может быть подсчитана при любом значении  $k$  заранее. Например, при  $k = 2$ :  $N_0 = 4$ ,  $N = 9$ ,  $c = 2/3$ ,  $\alpha = 1$ . При  $k = 3$ :  $N_0 = 8$ ,  $N = 15$ ,  $c = \sqrt{8/15} \approx 0.73$ ,  $\alpha \approx 1.215$ , а матрица планирования приведена в табл. 1.4.

Теперь в силу ортогональности матрицы планирования коэффициенты регрессии  $b_i$  определяются независимо друг от друга:

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^N \mathbf{x}_{ij} y_j}{\sum_{j=1}^N \mathbf{x}_{ij}^2}. \quad (1.4)$$

После вычисления этих коэффициентов в уравнении регрессии следует перейти от вспомогательных переменных  $\mathbf{x}'_i$  к переменным  $\mathbf{x}_i$ . Значения факторов, оптимизирующих функцию отклика, определяются из системы уравнений, полученной из условия экстремума этой функции.





## Глава 2

# Задачи оптимизации полимерного вытеснения

### 2.1 Постановки оптимизационных задач

При полимерном воздействии в пласт закачивается водный раствор с заданной концентрацией химреагента. Если его адсорбция необратима, то задний фронт концентрации двигается быстрее переднего, что связано с потерей полимера на переднем фронте. При недостаточном количестве полимера в оторочке задний фронт может догнать передний, полимер не достигнет добывающей скважины и прирост нефтеотдачи (по отношению к нефтеотдаче при обычном заводнении) будет незначительным. Если же оторочка слишком велика, то добывающая скважина обводнится до заданного предельного значения и будет в связи с этим отключена прежде, чем к ней успеет подойти задний фронт.

Очевидно, что при фиксированном количестве  $V$  загустителя увеличение оторочки приводит к снижению истинной концентрации  $c(x, z, \tau)$  полимера в закачиваемом растворе, причем чем меньше величина  $c$  (при прочих равных условиях), тем меньше прирост нефтеотдачи пласта. Следовательно, для заданного значения  $V$  можно выбрать такую технологию закачки полимера, при которой нефтеотдача будет максимальной.

Выберем в качестве параметра оптимизации  $y$  величину  $\Delta\eta$ , представляющую собой разность коэффициентов нефтеотдачи  $\eta_{\text{п}}$  и  $\eta_{\text{в}}$  при полимерном и обычном заводнениях. Соответствующее оптимальное значение  $V_0$  можно найти согласно методике планирования экстремальных экспериментов. Для удобства введем относительные безразмерные переменные: концентрацию полимера  $C = c/c^*$  и величину оторочки загустителя, выраженную в долях порового объема  $V_{\text{п}}$  коллектора:  $t = V/(c^*V_{\text{п}})$ , где  $c^*$  – начальная концентрация полимера в водном растворе. Соответствующая задача оптимизации полимерного вытеснения формулируется следующим образом.

**Задача I.** По заданному объему  $V$  полимерной оторочки найти такие значения  $t$  и  $C$ , при которых прирост нефтеотдачи  $\Delta\eta$  будет максимальным.

Установим границы изменения  $C \in [C_{\min}, C_{\max}]$  и  $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$ , в рамках которых проводится  $N$  расчетов искомой функции  $\Delta\eta(t, C)$  в некоторых точках  $\chi_k = (t_k, C_k)$  факторного пространства вычислительного эксперимента,  $k = 1, N$ . Значения  $\eta_{\text{п}}$  и  $\eta_{\text{в}}$  найдем из решения системы уравнений [3] в заданных точках  $(t_k, C_k)$  при полимерном вытеснении и в точке  $\chi_0 = (0, 0)$  при обычном заводнении. Здесь  $t_k$  и  $C_k$  – значения переменных (факторов)  $t$  и  $C$  в  $k$ -м расчете. Набор точек  $\chi_k$  составляет план эксперимента.

В соответствии с методикой планирования эксперимента вместо ”натурных” значений факторов введем соответствующие кодовые значения  $\mathbf{x}_1 \in [-1, 1]$  и  $\mathbf{x}_2 \in [-1, 1]$ :

$$\mathbf{x}_1 = 2(t - 0.5(t_{\max} + t_{\min})) / (t_{\max} - t_{\min}),$$

$$\mathbf{x}_2 = 2(C - 0.5(C_{\max} + C_{\min})) / (C_{\max} - C_{\min}).$$

В качестве уравнения регрессии возьмем полином второй степени

$$\Delta\eta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = B_0 + B_1 \mathbf{x}_1 + B_2 \mathbf{x}_2 + B_3 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 + B_4 \mathbf{x}_1^2 + B_5 \mathbf{x}_2^2. \quad (2.1)$$

Определение коэффициентов этого полинома требует варьирования факторов на трех уровнях. Матрица ортогонального планирования двухфакторного эксперимента с центром в точке  $(0, 0)$  приведена в табл. 1.3, в которой  $\mathbf{x}_0 = 1$  – фиктивная переменная, вторая и третья колонки содержат кодовые значения факторов  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$ , при которых выполняются расчеты в вычислительном эксперименте.

Коэффициенты регрессии  $B_i$  определяются независимо друг от друга по формуле (1.4) при  $N = 9$ , так что

$$B_1 = \frac{1}{6}(-y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6),$$

$$B_2 = \frac{1}{6}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4 - y_7 + y_8),$$

$$B_3 = \frac{1}{4}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4), \quad B_4 = \frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^6 y_k - 2 \sum_{k=7}^9 y_k\right), \quad (2.2)$$

$$B_5 = \frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^4 y_k + y_7 + y_8 - 2(y_5 + y_6 + y_9)\right), \quad B_0 = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^9 y_k - \frac{2}{3}(B_4 + B_5).$$

После вычисления коэффициентов  $B_i$ , перейдя в уравнении регрессии (2.1) от вспомогательных переменных  $\mathbf{x}_i$  к ”натурным” переменным  $t$  и  $C$ , будем иметь

$$\Delta\eta(t, C) = A_0 + A_1 t + A_2 C + A_3 t C + A_4 t^2 + A_5 C^2. \quad (2.3)$$

Учитывая, что  $V = Ct$ , исключим из соотношения (2.3) концентрацию  $C$  и из условия минимума функции  $\Delta\eta(t)$  получим уравнение для отыскания оптимального размера оторочки  $t_o$ :

$$2A_0 t_o^4 + A_1 t_o^3 - A_2 V t_o - 2A_5 V = 0. \quad (2.4)$$

Определив  $t_o$  из уравнения (2.4) и оптимальную концентрацию полимера  $C_o = V/t_o$ , из уравнения регрессии (2.3) найдем максимальный прирост нефтеотдачи  $\Delta\eta_o = \Delta\eta(t_o, C_o)$  при заданном значении количества  $V$  закачиваемого полимера.

С помощью уравнения (2.4) нетрудно найти связь между оптимальными размером полимерной оторочки  $t_o$  и концентрацией  $C_o$ . Исключив величину  $V$  из уравнения (2.4) и решив полученное квадратное уравнение, получим

$$t_o = -0.25A_1/A_4 + \sqrt{(0.25A_1/A_4)^2 + 0.5C_o(A_1 + 2A_5)/A_4}. \quad (2.5)$$

Как показали вычислительные эксперименты, как правило, в качестве  $t_o$  можно взять некоторое среднее значение  $t_{cp}$ , вычисленное с помощью соотношения (2.5) для  $C \in [C_{min}, C_{max}]$ . Тогда  $C_o = V/t_{cp}$ , а величина  $\Delta\eta_{max}$  определяется из уравнения регрессии (2.3) непосредственно через  $V$  (при  $V \in [C_{min} t_{cp}, C_{max} t_{cp}]$ ):

$$\Delta\eta_{max} = D_0 + D_1 V + D_2 V^2, \quad (2.6)$$

где  $D_0 = A_0 + A_1 t_{cp} + A_4 t_{cp}^2$ ,  $D_1 = A_3 + A_2/t_{cp}$ ,  $D_2 = A_5/t_{cp}^2$ . Из равенства (2.6) нетрудно оценить прирост нефтеотдачи  $\Delta\eta$  при увеличении количества  $V$  закачиваемого полимера на величину  $\Delta V$ :

$$\Delta\eta = (D_1 + 2VD_2)\Delta V. \quad (2.7)$$

Очевидно, существует предельное значение  $V$ , выше которого увеличивать количество закачиваемого реагента экономически нецелесообразно. Тогда, например, может быть рассмотрена следующая задача оптимизации, в которой величина  $V$  заранее неизвестна.

**Задача II.** *Найти оптимальный объем полимерной оторочки  $V_o$ , обеспечивающий дополнительную добычу не менее  $M$  кубометров нефти на каждую тонну полимера.*

Пусть технико-экономическими расчетами установлено, что каждый кубометр полимера должен обеспечить дополнительную добычу не менее  $M$  кубометров нефти. Тогда будем иметь

$$\frac{\Delta\eta}{\Delta V} = \left( \frac{\Delta Q_{II} \cdot 100}{(1 - S_*)V_{II}} \right) / \left( \frac{\Delta V}{c^*V_{II}} \right) = \frac{Mc^*}{1 - S_*}, \%$$

где  $S^*$  – начальная (связанная) водонасыщенность пласта, а  $\Delta Q_n$  – количество дополнительно добытой нефти. В этом случае оптимальное количество  $V_o$  закачиваемого полимера может быть определено из уравнения (2.7)

$$V_o = (Mc^*/(1 - S_*) - D_1) / D_2. \quad (2.8)$$

Следует заметить, что если оптимальное значение  $V_o$  окажется вне интервала  $(C_{\min}t_{\text{ср}}, C_{\max}t_{\text{ср}})$ , внутри которого справедливо равенство (2.6), то необходимо провести новый вычислительный эксперимент для доопределения функции  $\Delta\eta_{\max}(V)$  в требуемом интервале изменения  $V$ .

## 2.2 Оптимизация технологии полимерного вытеснения

В соответствии с описанной методикой определения оптимальной технологии закачки полимера проведен вычислительный эксперимент для трехслойного пласта, у которого верхний и нижний слои имеют одинаковую проницаемость и разделены слабопроницаемым пропластком, проницаемость которого в 5 раз меньше. При расчетах использовались линейные зависимости вязкости воды и необратимой адсорбции от концентрации полимера. Полимерное воздействие начиналось при обводненности добывающей скважины  $\theta = 85\%$ . Предельная обводненность  $\bar{\theta} = 96\%$ .

**1. Двухфакторное планирование.** Пусть коэффициент Генри является постоянным ( $\Gamma = 0.1$ ) и в эксперименте варьируются только концентрация и объем оторочки закачиваемого полимера:  $C \in [0.6, 1.4]$  и  $t \in [0.4, 0.8]$ . Результаты расчетов приведены в табл. 2.1.

Табл. 2.1. Варианты расчетов для плановых точек эксперимента

к	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t$	0.4	0.8	0.4	0.8	0.4	0.8	0.6	0.6	0.6
$C$	0.6	0.6	1.4	1.4	1.0	1.0	0.6	1.4	1.0
$\Delta\eta$	3.5	7.0	5.1	9.5	4.2	8.4	5.8	7.9	6.9

С помощью соотношений (2.2) вычислим коэффициенты уравнения регрессии (2.1) и запишем

$$\Delta\eta = 6.889 + 2.017x_1 + 1.033x_2 + 0.225x_1x_2 - 0.583x_1^2 - 0.033x_2^2. \quad (2.9)$$

Для оценки доверительных интервалов коэффициентов этого уравнения был проведен дополнительный расчет при  $t = 0.6$  и  $C = 1.0$  с уменьшенными в два раза шагами по пространственным переменным и получена оценка

$S^2\{\mathbf{y}\} = 0.0478$ . Вычисление доверительных интервалов коэффициентов показало, что все коэффициенты значимы, кроме  $B_5$ , т. к.

$$|B_5| < |\Delta B_5| = 1.86\sqrt{(0.5 \cdot 0.0478)} \approx 0.288,$$

а табличное значение критерия Стьюдента  $\Upsilon = 1.86$  при 5%-м уровне значимости [1]). Таким образом, в уравнении регрессии остается пять первых слагаемых. Определим остаточную дисперсию

$$S_o = 0.25 \sum_{k=1}^9 (\Delta\eta_k - y_k)^2 = 0.00718$$

и критерий Фишера  $\Phi = 0.00718/0.0478 \approx 0.15$ . Отсюда следует адекватность представления результатов вычислительного эксперимента полиномом (2.9). Перейдя к натурным значениям факторов с помощью замены переменных  $x_1 = 5(t - 0.6)$  и  $C = 2.5(C - 1)$ , получим

$$\Delta\eta = -5.30 + 24.76t + 0.90C + 2.81Ct - 14.78t^2. \quad (2.10)$$

Запишем уравнение (2.5) для определения оптимального размера полимерной оторочки:  $t_o = 0.425 + \sqrt{0.1802 - 0.03086C}$ . Нетрудно убедиться, что при  $C \in [0.6, 1.4]$  и  $t_o \in [0.80, 0.83]$  оптимальное значение оторочки находится в окрестности границы области изменения  $t$ . В этом случае использование уравнения регрессии может привести к значительной погрешности определения  $\Delta\eta$ . Для уточнения уравнения регрессии в окрестности  $t_o$  можно было бы провести новый вычислительный эксперимент с центром в точке  $t = 0.8$ , т. е. при  $t \in [0.6, 1.0]$  и  $C \in [0.6, 1.4]$ . Однако с учетом того, что при  $C \in [0.6, 1.4]$  в качестве оптимальной величины оторочки с незначительной погрешностью можно взять  $t_o = 0.8$ , зависимость  $\Delta\eta = a_0 + a_1C + a_2C^2$  при  $t = 0.8$  может быть определена по расчетным значениям  $\Delta\eta$ , приведенным в табл. 2.1 в столбцах с номерами  $k = 2, 4, 6$ . Итак, при оптимальной оторочке  $t_o = 0.8$  прирост нефтеотдачи при различных  $C \in [0.6, 1.4]$  может быть определен из уравнения

$$\Delta\eta_{\max} = 4.34 + 5.00C - 0.94C^2.$$

Так как  $C = V/0.8$ , то  $\Delta\eta_{\max}$  выражается непосредственно через  $V$  (при  $V \in [0.5, 1.1]$ ):

$$\Delta\eta_{\max} = 4.34 + 6.25V - 1.47V^2. \quad (2.11)$$

Например, для  $V = 0.56$  при оптимальной технологии ( $t_o = 0.8, C = 0.7$ ) прирост нефтеотдачи  $\Delta\eta_{\max} = 7.4$ , т. е. в 1.4 раза больше по сравнению с  $\Delta\eta$  в варианте 3, в котором закачано такое же количество полимера (табл. 2.1). Этот пример показывает, что недостаточная величина оторочки существенно снижает эффективность полимерного заводнения. Для оптимизационной

задачи I соотношение (2.11) позволяет определить максимальный прирост нефтеотдачи.

Для решения задачи оптимизации II по формуле (2.8) определим оптимальное количество закачиваемого в пласт загустителя (в эксперименте  $c^* = 0.1\%$ ,  $S_* = 0.2$ ):

$$V_o = 2.12 - 0.42M. \quad (2.12)$$

Это равенство справедливо при  $M \in [23, 39]$ , иначе  $V$  окажется вне интервала  $[0.5, 1.1]$ . Если заданное  $M < 23$ , то соотношение (2.12) дает приближенное значение  $V$ , которое следует уточнить, проведя новый вычислительный эксперимент с центром в точке, близкой к  $[0.8, C_o/0.8]$ . Например, пусть  $M = 14$ . Тогда  $C = 1.53/0.8 \approx 0.9$ , и вычислительный эксперимент должен быть проведен при  $t_o \in [0.6, 1.0]$  и  $C \in [1.4, 2.4]$  с использованием ранее выполненных расчетов в точках  $[0.6, 1.4]$  и  $[0.8, 1.4]$ . Если  $M > 39$ , то возможны два варианта: или значение  $V_o$  найдется (с помощью нового вычислительного эксперимента), или оно вообще не существует. В последнем случае делается вывод, что для пласта данной структуры полимерное воздействие не обеспечивает необходимого прироста конечной нефтеотдачи и, следовательно, оно не эффективно (при оценке эффективности только по конечной нефтеотдаче).

**2. Трехфакторное планирование.** При решении задач оптимизации для различных  $\Gamma$  (т. е. для различных типов полимеров) функция отклика имеет вид  $\Delta\eta = \Delta\eta(t, C, \Gamma)$ . В этом случае составляется план эксперимента для трех факторов. Матрица центрального композиционного планирования второго порядка состоит из  $N = 15$  точек при  $\alpha \approx 1.215$  (табл. 1.4). Транспонированный вектор–столбец  $y$ , который содержит результаты расчетов при  $t \in [0.4, 0.5]$ ,  $C \in [0.6, 1.4]$ ,  $\Gamma \in [0.02, 0.1]$ , приведен в табл. 2.2.

Табл. 2.2. Расчетные значения  $\Delta\eta$  для плановых точек эксперимента

$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	$y_{10}$	$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	$y_{14}$	$y_{15}$
4.8	7.7	7.5	10.4	3.5	7.0	5.1	9.5	4.9	9.1	5.8	9.0	8.5	6.7	7.8

В силу ортогональности матрицы планирования коэффициенты регрессии определяются по формуле (1.4) при  $N = 15$ :

$$\begin{aligned} \Delta\eta = & 7.153 + 1.717 \mathbf{x}_1 + 1.222 \mathbf{x}_2 - 0.684 \mathbf{x}_3 + \\ & + 0.112 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 + 0.262 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_3 - 0.162 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3 - \\ & - 0.500(\mathbf{x}_1^2 - 0.73) - 0.229(\mathbf{x}_2^2 - 0.73) - 0.094(\mathbf{x}_3^2 - 0.73). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Оценка доверительных интервалов коэффициентов этого уравнения показала незначимость коэффициента  $b_{33} = -0.094$ . Вычисленное значение остаточной дисперсии  $S_o^2 = 0.0159$  подтверждает по критерию Фишера адекватность представления результатов вычислительного эксперимента полученным полиномом.

Перейдя в уравнении регрессии (2.13) к натурным значениям факторов  $\mathbf{x}_1 = 5(t - 0.6)$ ,  $\mathbf{x}_2 = 2.5(C - 1)$ ,  $\mathbf{x}_3 = 25(\Gamma - 0.06)$ , будем иметь

$$\Delta\eta = -5.27 + 22.32t + 6.95C - 5.62\Gamma - 0.70Ct - 2.25t\Gamma - \\ -31.12C\Gamma + 35.00tC\Gamma - 12.5t^2 - 1.43C^2.$$

После несложных преобразований получим соотношение для определения оптимального размера оторочки

$$t_o = 0.892 - 0.090\Gamma - 0.315C + 1.410C\Gamma + 0.130C^2.$$

Очевидно, что зависимость  $t_o(C, \Gamma)$  является убывающей функцией от  $\Gamma$ . Например,  $t_o \in [0.80, 0.82]$  при  $C \in [0.6, 1.4]$  и  $\Gamma = 0.06$ , а при  $\Gamma = 0.02$   $t_o \in [0.74, 0.77]$ . В то же время, как показал анализ, функция отклика  $\Delta\eta$  при фиксированном значении  $V$  менее чувствительна к величине  $t$  при малых значениях  $\Gamma$ . Например, при  $V \in [0.48, 1.05]$

$$\Delta\eta(0.75, V/0.75, 0.02) - \Delta\eta(0.8, V/0.8, 0.02) < 0.09;$$

при всех  $V \in [0.45, 1.04]$  имеем

$$\Delta\eta(0.75, V/0.75, 0.02) - \Delta\eta(0.6, V/0.6, 0.02) < 0.14.$$

Такое поведение  $\Delta\eta$  связано с тем, что при малых  $\Gamma$  увеличение  $t$  (при  $t \geq 0.6$  и прочих равных условиях) приводит к росту нефтеотдачи в основном за счет менее проницаемого пропластка, а в более проницаемом слое изменение нефтеотдачи значительно меньше, что обусловлено образованием там оторочки полимера, уже близкой к оптимальной величине. Например, в вариантах расчетов 3 и 4, в которых  $\Gamma = 0.02$ , а  $t = 0.4$  и  $t = 0.8$ , прирост нефтеотдачи в менее проницаемом пропластке составил 6.6 пунктов против 1.7 пунктов в более проницаемом пропластке. Итак, с незначительной погрешностью в качестве оптимальной величины оторочки возьмем  $t = 0.8$ . Тогда при  $V \in [0.5, 1.1]$  и  $\Gamma \in [0.02, 0.1]$  будем иметь

$$\Delta\eta_{\max} = 4.59 + 7.99V - 7.42\Gamma - 3.90V\Gamma - 2.23V^2, \quad (2.14)$$

$$V_o = 1.79 - 0.87\Gamma - 0.028M. \quad (2.15)$$

Для заданной области изменения  $V$  величина  $M \in [25 - 31\Gamma, 46 - 31\Gamma]$ .

*Замечание.* Как было показано выше, при значениях  $\Gamma$ , близких к 0.02, нефтеотдача при  $t \in [0.6, 0.8]$  изменяется весьма незначительно (практически в пределах погрешности расчетов). Но другая важная характеристика разработки – время  $T$  эксплуатации нефтяного пласта – существенно зависит от  $t$  и незначительно зависит от  $C$  и  $\Gamma$ . Действительно, при  $t = 0.4$ :  $T \in [1.32, 1.37]$  (варианты расчетов  $k = 1, 3, 5, 7$ ); при  $t = 0.6$ :  $T \in [1.51, 1.54]$  ( $k = 11, 12, 13, 14, 15$ ); при  $t = 0.8$ :  $T \in [1.69, 1.73]$  ( $k = 2, 4, 6, 8$ ). Отсюда следует, что если по критерию  $\Delta\eta_{\max}$  оптимальное значение может быть выбрано из некоторого интервала  $(t_{\min}, t_{\max})$ , то, учитывая зависимость времени эксплуатации пласта от  $t$ , в качестве  $t_o$  следует взять наименьшее значение  $t_{\min}$ . Поэтому  $t_o = 0.6$  при  $\Gamma \sim 0.02$ , и для  $V \in [0.36, 0.84]$  будем иметь

$$\Delta\eta_{\max} = 3.624 + 10.88V - 6.97\Gamma - 16.87V\Gamma - 3.97V^2,$$

$$V_o = 1.33 - 0.016M, \quad M \in [31, 60].$$

Итак, при заданных величинах  $M$  и  $\Gamma$  из равенства (2.15) определяется оптимальное количество закачиваемого полимера. Для оптимальной технологии ( $t = 0.8, C = V_o/0.8$ ) из соотношения (2.14) вычисляется ожидаемый максимальный прирост конечной нефтеотдачи  $\Delta\eta_{\max}$ .



# Глава 3

## Задачи оптимизации гидрогелевого заводнения

### 3.1 Постановки оптимизационных задач

Очевидно, эффективность гидрогелевого заводнения существенно зависит от объемов закачки первого и второго химреагентов, и естественным образом возникает вопрос о выборе величин  $t_1$  и  $t_2$  их оторочек. Обозначим через  $\Delta\eta$  прирост нефтеотдачи пласта при гидрогелевом вытеснении по отношению к нефтеотдаче при обычном заводнении. Тогда  $\Delta\eta = \Delta\eta(t_1, t_2)$ . Построение такой зависимости на основе расчетов с помощью модели пятикомпонентной фильтрации [3], проведенных согласно методике планирования экстремальных экспериментов [2], позволяет найти величины оптимальных оторочек, обеспечивающих максимальный прирост конечной нефтеотдачи при тех или иных ограничениях.

Для составления плана двухфакторного эксперимента устанавливаются границы изменения величин  $t_1$  и  $t_2$ , в которых реализуются расчеты:

$$t_1 \in (t_{1\min}, t_{1\max}), \quad t_2 \in (t_{2\min}, t_{2\max}).$$

Затем с помощью модели [3] проводятся вычисления искомой функции  $\Delta\eta(t_1, t_2)$  в девяти точках  $\chi_k = (t_{1,k}, t_{2,k})$  факторного пространства и в центральной точке  $t_{1,0} = 0$  и  $t_{2,0} = 0$  – для обычного заводнения.

Уравнение регрессии определяется полиномом второй степени

$$\Delta\eta(t_1, t_2) = B_0 + B_1 t_1 + B_2 t_2 + B_3 t_1 t_2 + B_4 t_1^2 + B_5 t_2^2, \quad (3.1)$$

коэффициенты которого находятся на основе результатов расчетов, проведенных в соответствии с планом эксперимента.

Рассмотрим три типа оптимизационных задач.

**Задача I.** При заданном объеме суммарной оторочки  $V = t_1 + t_2$  найти такие значения  $t_1$  и  $t_2$ , чтобы прирост нефтеотдачи был максимальным.

Для определения оптимальной оторочки  $t_{2o}$  второго компонента подставим значение  $t_1 = V - t_2$  в уравнение (3.1), продифференцируем полученное соотношение по  $t_2$ , приравняем результат к нулю и после несложных вычислений получим

$$t_{2o} = \frac{B_2 - B_1 + (B_3 - 2B_4) V}{2(B_3 - B_4 - B_5)}. \quad (3.2)$$

Тогда оптимальная величина  $t_{1o}$  оторочки первого компонента

$$t_{1o} = V - t_{2o}. \quad (3.3)$$

Из уравнения регрессии (3.1) вычисляется ожидаемый прирост нефтеотдачи при заданной величине  $V$ :

$$\Delta\eta_o = \Delta\eta(t_{1o}, t_{2o}). \quad (3.4)$$

Для контроля полученных результатов необходимо провести расчет по математической модели [3] при  $t_{1o}$ ,  $t_{2o}$ .

**Задача II.** При заданной суммарной стоимости  $M$  закачиваемого объема обоих химреагентов и известной стоимости  $M_1$  и  $M_2$  закачки одного кубометра каждого из них найти такие величины оторочек  $t_1$  и  $t_2$ , чтобы прирост нефтеотдачи был максимальным.

Обозначим через  $Q_i$  количество  $i$ -го компонента, закачанного в пласт. Тогда

$$M = M_1 Q_1 + M_2 Q_2.$$

В этом соотношении перейдем к величинам оторочек, выраженным в долях порового объема коллектора:  $t_i = Q_i / (c_i^* V_{\text{п}})$ , где  $c_i^*$  – истинная концентрация закачиваемого  $i$ -го химреагента,  $V_{\text{п}}$  – объем пор пласта. Введя обозначения:  $\alpha = (c_2^* M_2) / (c_1^* M_1)$ ,  $V = M / (c_1^* M_1 V_{\text{п}})$ , запишем

$$V = t_1 + \alpha t_2.$$

По аналогии с задачей оптимизации  $I$  получим

$$t_{2o} = \frac{B_2 - \alpha B_1 + (B_3 - 2\alpha B_4) V}{2(\alpha(B_3 - \alpha B_4) - B_5)}, \quad t_{1o} = V - \alpha t_{2o},$$

а затем из уравнения (3.4) вычислим ожидаемый прирост нефтеотдачи.

**Задача III.** Зная стоимости  $M_1$ ,  $M_2$  и стоимость  $M_n$  кубометра нефти, найти такие значения  $t_1$  и  $t_2$ , которые обеспечили бы максимальную прибыль, т. е. максимум функционала

$$F = M_n \Delta Q_n - M_1 Q_1 - M_2 Q_2, \quad (3.5)$$

где  $\Delta Q_n$  – прирост объема добычи нефти.

В этом функционале перейдем к величинам оторочек  $t_i$  и к приращению нефтеотдачи  $\Delta\eta = (100 \cdot \Delta Q_n) / (V_{\text{п}} (1 - S_*))$ , выраженным, соответственно, в долях порового объема и в процентах, полагая для простоты, что начальная и связанная водонасыщенности равны, т. е.  $S(0, x, z) = S_*$ . Далее, введя обозначения

$$A_i = (100 \cdot c_i^* M_i) / ((1 - S_*) M_H), \quad \varphi = 100F / ((1 - S_*) M_H V_H),$$

из соотношения (3.5) получим

$$\varphi = \Delta\eta - A_1 t_1 - A_2 t_2. \quad (3.6)$$

С учетом уравнения регрессии (3.1) для приращения  $\Delta\eta$  максимум функции онала  $\varphi$  достигается при значениях  $t_{1o}$  и  $t_{2o}$ , определяемых из линейной системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (B_1 - A_1) + B_3 t_2 + 2B_4 t_1 = 0, \\ (B_2 - A_2) + B_3 t_1 + 2B_5 t_2 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы

$$t_{1o} = \frac{2B_5 (B_1 - A_1) - B_3 (B_2 - A_2)}{B_3^2 - 4B_4 B_5},$$

$$t_{2o} = \frac{2B_4 (B_2 - A_2) - B_3 (B_1 - A_1)}{B_3^2 - 4B_4 B_5}$$

дает искомые оптимальные значения оторочек гелеобразующих компонентов, если  $t_{1o} \in (t_{1\min}, t_{1\max})$  и  $t_{2o} \in (t_{2\min}, t_{2\max})$ . Теперь из уравнений (3.4) и (3.6) можно найти ожидаемую максимальную прибыль от применения гидрогелевой технологии вытеснения нефти. В случае нарушения хотя бы одного из этих условий следует установить новые границы изменения  $t_1$  и  $t_2$  и провести новый вычислительный эксперимент (подчеркнем, что это относится и к задачам I и II типов).

Поскольку подход к решению задач оптимизации для всех типов постановок одинаков, то в качестве примера рассмотрим определение оптимальных технологических параметров гидрогелевого заводнения при заданном объеме суммарной оторочки гидрогеля  $V = t_1 + t_2$ .

## 3.2 Оптимизация технологии гидрогелевого заводнения

Для решения оптимизационной задачи выполним вычислительные эксперименты в пятислойном пласте, для которого в [3] проводилось сравнение эффективности методов обычного, полимерного и гидрогелевого заводнений. Положим для определенности  $V = 0.5$ . Установим границы для объемов оторочек гелеобразующих компонентов в расчетах:  $t_1 \in [0.1, 0.3]$  и  $t_2 \in [0.1, 0.5]$ . В этом случае  $V \in [0.2, 0.8]$ . Результаты расчетов, проведенных согласно плану эксперимента, представлены в табл. 3.1.

Уравнение регрессии, найденное согласно приведенной в разделе 1.1 методики планирования экспериментов, в терминах "натурных" переменных  $t_1$  и  $t_2$  записывается в виде

Табл. 3.1. Варианты расчетов для плановых точек эксперимента

к	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t_1$	0.1	0.3	0.1	0.3	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2
$t_2$	0.1	0.1	0.5	0.5	0.3	0.3	0.1	0.5	0.3
$\Delta\eta$	5.5	6.0	12.1	13.5	11.5	12.1	5.7	13.3	11.8

$$\Delta\eta = 0.21 + 6.95t_1 + 52.84t_2 + 12.00t_1t_2 - 16.30t_1^2 - 61.95t_2^2. \quad (3.7)$$

Из соотношений (3.2) и (3.3) определим оптимальные значения оторочек  $t_{1o}$  и  $t_{2o}$  при  $V = 0.5$ :  $t_{1o} = 0.12$ ,  $t_{2o} = 0.38$ . Так как эти значения находятся внутри установленных границ изменения факторов, то из уравнения регрессии (3.7) получим  $\Delta\eta_o = 12.6$ . Проведенное контрольное вычисление при  $t_1 = 0.12$ ,  $t_2 = 0.38$  по математической модели пятикомпонентной фильтрации [3] показало, что результаты совпадают с точностью 0.1%.

Интересно сравнить полученное значение  $\Delta\eta_o$  с данными в табл. 3.1. Оказалось, что прирост нефтеотдачи при оптимальных значениях оторочек при  $V = 0.5$  даже выше, чем при  $V = 0.6$  в вариантах 3 и 6. Заметим, что при  $V = 0.6$  оптимальные значения  $t_{1o} = 0.2$ ,  $t_{2o} = 0.4$  и  $\Delta\eta_o = 13.1$  определяются из тех же уравнений (3.2), (3.3), (3.7), что и при  $V = 0.5$ .

Существенное увеличение равномерности вытеснения нефти во всех слоях при создании гидрогелевой оторочки по сравнению с обычным заводнением пласта наглядно демонстрируют данные табл. 3.2. В ней приведены значения объема закачки  $t^o$  в долях порового объема пласта, коэффициентов нефтеотдачи  $\eta_i^o$  его отдельных слоев и  $\eta^o$  пласта в целом, а также водонефтяного фактора. Результаты соответствуют оптимальному варианту при суммарной величине оторочки  $V = 0.5$ .

Табл. 3.2. Характеристики разработки пятислойного пласта при обычном (1) и гидрогелевом (2) способах заводнения

№	$\eta_1^o$	$\eta_2^o$	$\eta_3^o$	$\eta_4^o$	$\eta_5^o$	$\eta^o$	$t^o$	ВНФ
1	27.8	60.6	51.6	59.2	45.0	47.0	1.877	5.00
2	49.1	68.2	66.2	68.1	51.9	<b>59.7</b>	<b>0.734</b>	<b>1.94</b>

Из таблицы видно, что если при обычном заводнении разброс нефтеотдачи по слоям превышает 30 пунктов, то при гидрогелевом – менее 20. При этом в результате создания оторочки загустителя нефтеотдача наименее проницаемого первого слоя возросла на 21.3 пункта. Произошло резкое сокращение (почти в 2.6 раза) объема закачки, что привело к снижению ВНФ в 3.2 раза. Все это говорит о весьма высокой эффективности гидрогелевого заводнения.

Полученные результаты показывают, что методы компьютерного моделирования в сочетании с теорией планирования экстремальных экспериментов позволяют эффективно решать оптимизационные задачи для различных технологий разработки пластов сложной структуры. Такой подход также целесообразно применять для сокращения общего объема расчетов в тех случаях, когда анализ влияния различных факторов и параметров исследуемого процесса требует проведения многовариантных вычислительных экспериментов.



# Литература

- [1] *Львовский Н.Е.* Статистические методы построения эмпирических формул. – М.: Наука, 1982. – 224 с.
- [2] *Налимов В.В., Чернова И.А.* Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. – М.: Наука, 1965. – 340 с.
- [3] *Чекалин А.Н., Колюхов В.М., Костерин А.В.* Двухфазная многокомпонентная фильтрация в нефтяных пластах сложной структуры. – Казан. гос. ун-т, Казань, 2009. – 140 с.

---

Подписано в печать 23.11.2022. Формат 60x84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать ризографическая.  
Усл. печ. л. 2. Тираж 50. Заказ № 2311/6.  
Отпечатано с готового оригинал-макета  
в типографии «Вестфалика» (ИП Колесов В.Н.)  
420111, г. Казань, ул. Московская, 22. Тел.: 292-98-92  
e-mail: westfalika@inbox.ru

---