УДК 517.5

АСИМПТОТИКА МОДУЛЕЙ ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ[1]

С. Р. Насыров (Казань, РФ)
snasyrov@.kpfu.ru

Рассмотрим двусвязную плоскую область D с невырожденной границей. Одной из ее важнейших характеристик является конформный модуль $m(D)$. По определению, если D конформно эквивалентна кольцу $\{r_1 < |z| < r_2\}$, то

$$m(D) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Модуль можно вычислить и с помощью аппарата экстремальных длин. Так, $m(D) = \lambda(\Gamma)$, где $\lambda(\Gamma)$ — это экстремальная длина семейства кривых Γ, соединяющих в D ее граничные компоненты. Кроме того, $m(D) = 1/\lambda(\Gamma')$, где Γ' — семейство кривых, разделяющих в D граничные компоненты. Наконец, $m(D) = 1/\mathrm{Cap}(C)$, где $\mathrm{Cap}(C)$ — это конформная емкость конденсатора, полем которого является область D, а пластинами — граничные компоненты D.

Модули двусвязных областей как в случае полигональных границ, так и для произвольных областей, в последние десятилетия являются объектом интенсивного изучения (см., напр., [1], [2]).

Модуль инвариантен относительно конформных отображений, а при квазиконформных отображениях он квазиинвариантен: если f — H-квазиконфомное отображение области D на $\widetilde{D}$, то

$$\frac{1}{H}\, m(D) \le m(\widetilde{D}) \le H\, m(D).$$

Одним из простейших H-квазиконформных отображений является растяжение вдоль оси абсцисс $f_H : x+iy \mapsto Hx+iy$, $H > 1$. Проф. М. Вуоринен поставил задачу: исследовать, как конформный модуль области D искажается под действием отображения f_H, в частности, какова асимптотика модуля при $H \to \infty$?

Сначала рассмотрим произвольную двусвязную область D, удовлетворяющую условиям:

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00762 и 12-01-97015_р_поволжье.).

1) D имеет конечную площадь S;

2) дополнение D состоит из двух компонент связности C_1 и C_2, одна из которых ограничена и содержит две точки $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ такие, что $|x_1 - x_2| = \delta$;

3) $\operatorname{dist}(C_1, C_2) = d$.

Нетрудно установить следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $D_H = f_H(D)$. *Тогда*

$$\frac{d^2}{SH} \le m(D_H) \le \frac{S}{4\delta^2 H}.$$

Как следствие, получаем, что в предположениях теоремы 1

$$m(D_H) \simeq H^{-1}, \quad H \to \infty.$$

Нашей задачей будет нахождение достаточно широкого класса областей D, для которых $m(D_H) \sim \mathrm{const} \cdot H^{-1}$, $H \to \infty$, и определение мультипликативной константы в этом условии через геометрические характеристики области D или ее границы.

Для решения этой задачи наряду с модулями двусвязных областей нам понадобится рассматривать конформные модули четырехсторонников, т. е. жордановых областей с четырьмя различными отмеченными точками (вершинами) на границе. Эти точки делят границу области на четыре жордановых дуги. Одна их пар противоположных (непересекающихся) дуг называется горизонтальными сторонами четырехсторонника, а другая — вертикальными. Если конформно отобразить четырехсторонник G на прямоугольник $\Pi := [0, a] \times [0, b]$ так, чтобы горизонтальные стороны перешли G в горизонтальные стороны прямоугольника, а вертикальные — в вертикальные, то по определению конформный модуль G равен

$$m(G) := \frac{b}{a}.$$

Конформный модуль G равен экстремальной длине семейства кривых, соединяющих в G вертикальные стороны и обратен величине экстремальной длины семейства кривых, соединяющих в G горизонтальные стороны. Он инвариантен относительно конформных отображений и квазиинвариантен относительно квазиконформных, в частности, при отображении растяжения f_H.

Нетрудно видеть, что искажение модуля G при отображении f_H зависит от того, как линии, переходящие в горизонтальные отрезки, соединяющие вертикальные стороны прямоугольника Π, расположены относительно оси абсцисс, точнее, какие углы образует касательная к этим кривым с осью абсцисс. Чем горизонтальнее эти кривые, тем сильнее уменьшается модуль четырехсторонника.

В случае симметричной относительно оси абсцисс двусвязной области D, ограниченной жордановыми кривыми, ее модуль в два раза меньше модуля четырехсторонника D^+, который является верхней половиной D (вершинами D^+ являются точки пересечения границы D с осью абсцисс, а горизонтальными сторонами — отрезки этой оси, входящие в состав границы ∂D^+). Если к тому же D симметрична и относительно оси ординат, то модуль D в четыре раза меньше модуля части области D, расположенной в первой четверти; вертикальными сторонами соответствующего четырехсторонника будут отрезки положительных частей осей координат, содержащеся в D. Это можно доказать с использованием принципа симметрии.

В дальнейшем основным объектом нашего исследования будет двусвязная область D, симметричная относительно оси абсцисс, с границей, состоящей из двух кривых

$$\Gamma_1 = \{x + iy : |y| = f(x),\ a \le x \le b\},$$

$$\Gamma_2 = \{x + iy : |y| = g(x),\ c \le x \le d\},$$

$c < a < b < d$. Здесь

(i) функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$,

(ii) функция g непрерывна на отрезке $[c, d]$,

(iii) $f(x) < g(x)$, $x \in [a, b]$,

(iv) $f(x) > 0$, $x \in (a, b)$, $g(x) > 0$, $x \in (c, d)$,

(v) $f(a) = f(b) = g(c) = g(d) = 0$.

Обозначим $D_H = f_H(D)$.

Теорема 2. *При* $H \to \infty$

$$m(D_H) \sim \frac{1}{2cH}, \quad \textit{где} \quad c = \int_a^b \frac{dx}{g(x) - f(x)}\,.$$

Доказательство теоремы 2 основано на изучении асимптотики модуля четырехсторонника D^+. Сначала исследуется случай, когда

D^+ ограничена ломаными. В этом случае часть $\widetilde{D}^+$ области D^+, лежащую в полосе $\{a \le x \le b\}$, можно разбить на конечное число трапеций T^j, $1 \le j \le n$. Асимптотика модуля трапеции (как четырехсторонника с отмеченными точками — вершинами трапеции) при растяжении f_H описывает нетрудно доказываемая

Лемма 1. *Пусть трапеция T имеет вид*

$$T = \{(x, y) \,:\, \alpha_1 x + \beta \le y \le \alpha_2 x + \beta,\, x_1 \le x \le x_2\},$$

где $\alpha_1 < \alpha_2$, $0 < x_1 < x_2$. Тогда

$$m(f_H(T)) \sim \frac{1}{H}\,\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\ln x_2 - \ln x_1}, \quad H \to \infty.$$

Следующая лемма показывает, что часть D^+, лежащая вне полосы $\{a \le x \le b\}$ не влияет на асимптотику модуля.

Лемма 2. *Пусть $D^+_H = f_H(D^+)$, $\widetilde{D}^+_H = f_H(\widetilde{D}^+)$. Тогда*

$$m(D^+_H) \sim m(\widetilde{D}^+_H), \quad H \to \infty.$$

В лемме 3 оказывается, что при больших H асиптотика модуля растянутого многоугольника $\widetilde{D}^+_H$ может быть получена из асимптотики трапеций T^j, растянутых отображением f_H.

Лемма 3. *Имеет место эквивалентность*

$$m^{-1}(\widetilde{D}^+_H) \sim \sum_{j=1}^{n} m^{-1}(T^j_H), \quad H \to \infty,$$

где $T^j_H = f_H(T^j)$.

Справедливость лемм 2 и 3 устанавливается с помощью теорем о связи сходимости последовательностей областей со сходимостью последовательностей конформных отображений, установленных Каратеодори, Радо, Г.Д. Суворовым, и их обобщений. Возможность применения этих чисто качественных результатов для изучения асимптотики модулей была впервые использована в [2].

Из лемм 1–3 следует справедливость теоремы 2 для полигональных областей. Общий случай устанавливается аппроксимацией.

С помощью теоремы 2 можно получить, в частности, асимптотику модуля растянутого кругового концентрического кольца при растяжении. Отметим, что при растяжении кольца граничные окружности переходят в эллипсы, которые не будут софокусными, поэтому не удается в явном виде установить конформное отображение растянутого кольца на концентрическое кольцо.

Теорема 3. *Если* $D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$, *то*

$$m(D_H) \sim \frac{1}{kH}, \quad H \to \infty, \quad \text{где}$$

$$k = \frac{1}{R^2 - r^2}\left(\pi r^2 + 2R^2 \arcsin\frac{r}{R} + 2r\sqrt{R^2 - r^2}\right).$$

Теорема 2 допускает обобщения на более широкие классы областей. Ее утверждение справедливо, когда, например, внешняя компонента границы неограничена (функция g определена на всей оси) или в случае, когда граничные кривые содержат вертикальные участки. В частных случаях, когда граничные кривые области D являются прямоугольниками со сторонами, параллельными координатным осям или ромбами с вершинами на этих осях, асимптотические формулы для модуля $m(D_H)$ были получены в работах [2], [3].

Пример. В качестве тестового примера нами была рассмотрена область D, которая получается из полосы $\{|y| < 1\}$ выбрасыванием квадрата $\{|x| + |y| \leq 1/2\}$. Теорема 2 дает

$$(m(D_H))^{-1} \sim (8\ln 2)H, \quad H \to \infty.$$

Использование интегралов Кристоффеля-Шварца позволяет получить приближенное значение модуля. Численные эксперимент показывает, что при H, близких к 20, значение $(m(D_H))^{-1}$ отличается от $(8\ln 2)H$ менее, чем на 1%. При этом, при нахождение модуля с помощью интегралов Кристоффеля-Шварца при больших H используются эллиптические интегралы первого рода $K(k)$ с параметром k, чрезвычайно близким к единице. Так, при H, больших 20, величина $1-k$ становится меньше 10^{-17}, и компьютер отказывается вычислять значение модуля.

В связи с этим интересной задачей является, на наш взгляд, оценка относительной погрешности приближенной формулы

$$m(D_H) \approx \frac{1}{2cH}$$

при больших H.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kühnau R.* The conformal module of quadrilaterals and of rings. In: Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory, Vol. 2. North Holland, Amsterdam: Elsevier, 2005. P. 99–129.

2. *Nasyrov S. R.* Riemann-Schwarz reflection principle and asymptotics of modules of rectangular frames. arXiv:1305.6605 [math.CV]. 13pp.

3. *Даутова Д. Н.* Асимптотика модулей ромбовидных окон. Материалы Двенадцатой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения–2013». Труды математического центра им. Н.И.Лобачевского. Т.47. Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2013. С. 39–40.