МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 35, № 5 (1984)

ОБ ОДНОЙ КОНСТРУКЦИИ В ТЕОРИИ ПРОЕКТИВНЫХ АЛГЕБР

С. Н. Тронин

Эта заметка возникла из наблюдения, что теорема 3 из [1] вместе с мономорфизмом φ из [2] позволяет сделать вывод о том, что если A — поле нулевой характеристики, B — конечно порожденная проективная A-алгебра размерности Крулля 2, то B изоморфна $A[X_1, X_2]$. Здесь под проективной алгеброй понимается произвольный A-ретракт алгебры многочленов, а условие «стабильной свободности» $B[Z_1, \ldots, Z_r] \simeq A[Y_1, \ldots, Y_{r+2}]$ является излишним. Мы построим гомоморфизмы φ и ψ из [2] непосредственно и в более общей ситуации. Все рассматриваемые кольца обладают единицей, ассоциативны, коммутативны, если нет иных предположений, кольцо A коммутативно во всех случаях.

Предложение 1. *Пусть K — не обязательно коммутативная A-алгебра с фильтрацией $K = K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots$, $K_0 = A \oplus K_1$, B и C — некоторые A-алгебры, также не обязательно коммутативные. Допустим следующее:*

(а) *C — алгебра с отделимой фильтрацией $C = C_0 \supset C_1 \supset \ldots$, причем $C_n = C^n \oplus C_{n+1}$ для всех n, $C^0 = A$ и существуют согласованные с фильтрациями гомоморфизмы A-алгебр*

$$\pi_0\colon\ K \to C,\quad \vartheta_0\colon\ C \to K,\quad \pi_0\vartheta_0 = 1_C.$$

(б) *Существуют гомоморфизмы A-алгебр*

$$\pi\colon\ K \to B,\quad \vartheta\colon\ B \to K,\quad \pi\vartheta = 1_B,$$

причем, если положить $B_n = \pi(K_n)$ *для всех* n, *то* $B = A \oplus B_1$, *фильтрация на* B *отделима и* $B_n = B_1 B_{n-1}$ *при* $n = 1, 2, \ldots$

(в) *Существуют множества элементов* $\{x_\alpha \mid x_\alpha \in B_1, \alpha \in \mathfrak{A}\}$, $\{y_\alpha \mid y_\alpha \in C^1, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *такие, что*

(в$_1$) $\bar{x}_\alpha$ *порождают* A*-алгебру* $gr(B)$, $\bar{y}_\alpha$ — A*-алгебру* $gr(C)$. *Здесь* B *берется с* B_1*-адической, а* C — *с заданной фильтрацией, черта означает взятие соответствующего элемента в ассоциированной алгебре.*

(в$_2$) *Для каждого* $\alpha \in \mathfrak{A}$ $y_\alpha - \pi_0 \vartheta(x_\alpha) \in C_2$, $x_\alpha - \pi\vartheta_0\pi_0\vartheta(x_\alpha) \in B_2$.

Если эти условия выполнены, то гомоморфизмы

$$\psi = \pi\vartheta_0\colon C \to B, \quad \varphi = \pi_0\vartheta\colon B \to C$$

являются мономорфизмами, согласованными с фильтрациями, причем $gr(\psi)$ *и* $gr(\varphi)$ — *взаимно обратные биекции. Если* C *полна в соответствующей топологии, то* B *также полна, и тогда* φ *и* ψ — *изоморфизмы.*

Доказательство. Чтобы показать, что φ и ψ согласованы с фильтрациями, достаточно убедиться, что согласован ϑ. Это следует из $K = A \oplus K_1$ и $B = A \oplus B_1$. Далее, можно считать, что все x_α содержатся в $B_1 \setminus B_2$. В самом деле, из $x_\alpha \in B_2$ и условия (в$_2$) следует $y_\alpha = 0$. Условие $B_n = B_1 B_{n-1}$ означает, что $gr(B)$ порождается как A-алгебра A-модулем $gr^1(B) = B_1/B_2$, т. е. теми $\bar{x}_\alpha$, для которых $x_\alpha \notin B_2$. Случай, когда все x_α принадлежат B_2, тривиален: тогда $B = A$ и $C = A$. Следовательно, можно без потери общности отбросить $x_\alpha \in B_2$ и соответствующие y_α.

По определению, $gr(\psi)(\bar{y}_\alpha) = \overline{\pi\vartheta_0(y_\alpha)}$. Так как

$$\pi\vartheta_0(y_\alpha) \equiv \pi\vartheta_0\pi_0\vartheta(x_\alpha) \bmod B_2,$$
$$\pi\vartheta_0\pi_0\vartheta(x_\alpha) \equiv x_\alpha \bmod B_2,$$

то $gr(\psi)(\bar{y}_\alpha) = \bar{x}_\alpha$. С другой стороны,

$$gr(\varphi)(\bar{x}_\alpha) = \overline{\pi_0\vartheta(x_\alpha)} = \bar{y}_\alpha.$$

Значит, $gr(\varphi)$ и $gr(\psi)$ биективно переводят друг на друга множества образующих $gr(B)$ и $gr(C)$, и вследствие этого являются взаимно обратными биекциями. Ввиду отделимости фильтраций φ и ψ — мономорфизмы (см [3, гл. 3, § 2, следствие 1 из теоремы 1, стр. 209]). Пусть C — полная алгебра. Тогда по следствию 2 из той же теоремы ψ биективен. Это дает полноту B, а следовательно, биективность φ.

Следствие 1. *Пусть* $K = A[[X]]$, $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$, π: $K \to B$, ϑ: $B \to K$ — *гомоморфизмы* A-*алгебр*, $\pi\vartheta = 1_B$ *и* $\operatorname{Ker}(\pi) \subset ((X))$. *Тогда* $B \simeq \hat{S}_A(P)$ — *пополнению симметрический алгебры проективного* A-*модуля* P. *В частности, если* A — *поле, то все* A-*ретракты* $K[[X]]$ *изоморфны алгебрам степенных рядов.*

Доказательство. Пусть $f_i = \vartheta\pi(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда для всех i $f_i(f_1, \ldots, f_n) = f_i$ и из условия $\operatorname{Ker}(\pi) \subset ((X))$ следует, что f_i не имеют свободных членов. Пусть v_i — линейная часть f_i. Легко видеть, что $v_i(v_1, \ldots, v_n) = v_i$. Возьмем в качестве C пополнение $A[v_1, \ldots, v_n] \subset K$. Из тождеств $v_i(v_1, \ldots, v_n) = v_i$ следует, что $A[v_1, \ldots, v_n] \simeq S_A(P)$, где P конечно порожден и проективен. Поэтому C есть пополнение симметрической алгебры. Соответствие $X_i \mapsto v_i$ определяет проекцию π_0: $K \to C$, и если ϑ_0: $C \to K$ — естественное вложение, то $\pi_0\vartheta_0 = 1_C$. Оба этих гомоморфизма согласованы с фильтрациями. Условие $\operatorname{Ker}(\pi) \subset ((X))$ обеспечивает выполнение требований пункта (б) предложения 1. Пусть $x_i = \pi(X_i)$, $y_i = \pi_0(X_i)$, тогда проверка условий пункта (в) сводится к проверке включений $v_i - f_i(v_1, \ldots, v_n) \in ((v_1, \ldots, v_n))^2$, $f_i - v_i(f_1, \ldots, f_n) \in ((f_1, \ldots, f_n))^2$ которые очевидны ввиду того, что $f_i = v_i + q_i$, $q_i \in ((X_1, \ldots, X_n))^2$ и $f_i = v_i(f_1, \ldots, f_n) + q_i(f_1, \ldots, f_n)$. Теперь первая часть утверждения следует из предложения 1.

Допустим, что A — поле. Тогда $A[[X]]$ локально и включение $\operatorname{Ker}(\pi) \subset ((X))$ выполняется всегда.

Почти все рассуждения, проведенные при доказательстве следствия 1, можно дословно повторить для проективной алгебры B, взяв $K = A[X]$. Всегда можно найти X, π и ϑ такие, что $\operatorname{Ker}(\pi) \subset (X)$, или, что равносильно, $f_i = \vartheta\pi(X_i)$ не имеют свободных членов (см., например, [4, стр. 497—498]). Пусть снова v_i — линейные части f_i, $C = A[v_1, \ldots, v_n] \simeq S_A(P)$, π_0, ϑ_0, x_i, y_i определяются так же, как при доказательстве следствия 1, тогда условия предложения 1 выполнены и существуют согласованные с фильтрациями мономорфизмы φ и ψ. Если отождествить B с $A[f_1, \ldots, f_n]$, то

$$\psi(v_i) = v_i(f_1, \ldots, f_n), \quad \varphi(f_i) = f_i(v_1, \ldots, v_n).$$

Доказательство теоремы 3.4 из [4] можно интерпретировать как доказательство биективности φ и ψ при $n = 1$.

При $n \geqslant 2$ без труда строятся примеры небиективных φ и ψ.

Следствие 2. *Пусть A — поле нулевой характеристики, B — конечно порожденная проективная A-алгебра размерности Крулля 2. Тогда $B \simeq A[X_1, X_2]$.*

Доказательство. В теореме 3 из [1] требуется совершенность поля, вложимость B в $A[Y_1, Y_2]$, конечная порожденность, регулярность B, факториальность $B \otimes_A \bar{A}$ и сепарабельность расширения полей частных B и $A[Y_1, Y_2]$. Все условия выполнены: вложимость обеспечивает φ, факториальность B доказана еще в [5, стр. 493, предложение 7], нулевая характеристика дает сепарабельность.

Предложение 2. *Допустим, что каждый конечно порожденный проективный A-модуль свободен, а для конечно порожденной проективной A-алгебры B можно найти X, π, ϑ такие, что для всех i полная степень f_i не превосходит 2. Тогда $B \simeq S_A(P)$.*

Доказательство. Условие на A дает возможность линейной заменой переменных привести $f_1, \ldots$ $\ldots, f_n$ к виду

$$f_1 = X_1 + q_1, \ \ldots,$$
$$f_m = X_m + q_m, \ q_1, \ldots, q_m, f_{m+1}, \ldots, f_n \in (X)^2.$$

Если проследить, что произойдет при этом со слагаемыми степени 2, то окажется, что в $f_1, \ldots, f_m$ коэффициенты при X_iX_j, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, обратятся в нуль, а в $f_{m+1}, \ldots$ $\ldots, f_n$ обратятся в нуль коэффициенты при тех X_iX_j, в которых либо $i > m$, либо $j > m$. Гомоморфизм φ, как уже отмечалось, переводит f_i в $f_i(X_1, \ldots, X_m, 0, \ldots, 0)$, откуда следует, что $f_1, \ldots, f_m$ переходят в $X_1, \ldots, X_m$, т. е. φ — биекция. Поскольку это так, то $f_1, \ldots, f_m$ порождают $A[f_1, \ldots, f_n]$ и ψ также является биекцией.

В заключение укажем на связь между теорией проективных алгебр и гипотезой о якобиане (проблеме Кэлера), которую можно установить с помощью φ и ψ. Будем рассматривать π и ϑ такие, что $f_i = \vartheta\pi(X_i) = X_i + q_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $q_1, \ldots, q_m, f_{m+1}, \ldots, f_n \in (X)^2$.

Матрица Якоби полиномов $f_1, \ldots, f_n$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 + Q_{11}(X) & Q_{12}(X) \\ Q_{21}(X) & Q_{22}(X) \end{pmatrix},$$

где 1 обозначает единичную $m \times m$-матрицу, и элементы матриц $Q_{ij}(X)$ не имеют свободных членов. Алгебру $S_A(P)$ мы отождествляем с $A[X_1, \ldots, X_m]$, тогда $\varphi\psi$ становится эндоморфизмом $A[X_1, \ldots, X_m]$, переводящим X_i в $f_i(X_1, \ldots, X_m, 0, \ldots, 0)$, и матрица $\mathcal{J}(X) = 1 + Q_{11}(X_1, \ldots, X_m, 0, \ldots, 0)$ будет матрицей Якоби этого эндоморфизма. Пусть A — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Ясно, что $\varphi\psi$ есть биекция тогда и только тогда, если отображения φ и ψ биективны. В самом деле, из биективности $\varphi\psi$ следует, что $S_A(P)$ — ретракт B. Но так как это области и их размерности равны, то ретракция будет изоморфизмом. Если гипотеза о якобиане справедлива, то биективность $\varphi\psi$ равносильна обратимости матрицы $\mathcal{J}(X)$. В настоящее время известно несколько более слабых результатов (см., например, [6—10]), из которых можно получить ввиду вышесказанного ряд критериев биективности φ и ψ. Сформулируем некоторые из них.

Предложение 3. *Сохраняются сделанные выше предположения. Равносильны следующие утверждения:*

(а) φ *и* ψ — *биекции.*

(б) $\mathcal{J}(X)$ *обратима и* $\varphi\psi$ *индуцирует нормальное расширение полей частных.*

(в) $\mathcal{J}(X)$ *обратима и кольцо* $S_A(P)$ *цело над образом* $\varphi\psi$.

Если же мы имеем дело с полем комплексных чисел и известно, что для $1 \leqslant i \leqslant m$ *полные степени* $f_i(X_1, \ldots, X_m, 0, \ldots, 0)$ *не превосходят тройки, то условие* (а) *вытекает из обратимости матрицы* $\mathcal{J}(X) + \mathcal{J}(Y)$, *где* $X = \{X_1, \ldots, X_m\}$ *и* $Y = \{Y_1, \ldots, Y_m\}$ — *непересекающиеся множества переменных.*

Доказательство. Если выполнено (а), то (б) следует из [6, стр. 477, теорема 38]. Обратное справедливо по [7, стр. 101, теорема 2] или по [8, стр. 438, теорема 3.7]. Равносильность (а) и (в) следует из [9, стр. 245, теорема 8]. Последнее утверждение вытекает из результата работы [10].

Заметим, что нам неизвестны примеры, в которых φ и ψ не были бы одновременно либо биективны, либо не биективны.

Казанский государственный университет

Поступило 17.XII.1982

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Russel P., On affine-ruled rational surfaces, Math. Ann., 255, № 3 (1981), 287—302.

[2] Тронин С. Н., О некоторых достаточных условиях изоморфности проективных алгебр симметрическим, Пятый Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей, Тезисы сообщ., Новосибирск, 1982, 132—133.

[3] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, М., «Мир», 1971.

[4] Costa D., Retracts of polynomial rings, J. Algebra, 44, № 2 (1977), 492—502.

[5] Артамонов В. А., Орбиты группы $GL(r, k[x_1, \ldots, x_n])$, Изв. АН СССР, Сер. матем., 38, № 3 (1974), 484—494.

[6] Wang S. S.-S., A Jacobian criterion for separability, J. Algebra, 65, № 2 (1980), 453—494.

[7] Razar M., Polynomial maps with constant Jacobian, Israel J. Math., 23, № 2—3 (1979), 97—106.

[8] Wright D., On the Jacobian conjecture, Illinois J. Math., 25, № 3 (1981), 423—440.

[9] Wang S. S.-S., Extension of derivations, J. Algebra, 69, № 1 (1981), 240—246.

[10] Ягжев А. В., О проблеме Кэлера, Сиб. матем. ж., 21, № 5 (1980), 141—150.