Дорогие студенты, вы зашли в так называемую "Виртуальную аудиторию," в которой к каждому вторнику и каждой пятнице я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

volodinstudent@gmail.com

Естественно, вам придется, оформлять результаты решений в более пристойней форме (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). Особенно следует оставлять большие пространства сверху и снизу фотографируемого листа. В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply'ем.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Занятие 56

Замена переменных (I).

1^0. Замена переменных в выражениях, содержащих обыкновенные производные.

На этом занятии мы будем рассматривать выражения вида

$$A = \Phi(x, y;\, y'_x, y''_x,\, \ldots),$$

где Φ – некоторая функция от переменной x, функции $y = y(x)$ и ее производных по x. Обычно такие выражения имеют смысл дифференциальных уравнений, решение которых производится с помощью замены переменных – вместо x и y вводятся новые переменные t и u. Рассмотрим два способа введения новых переменных.

1). Прямая замена:

$$x = f(t, u),\ \ y = g(t, u), \tag{1}$$

где $u = u(t)$ – новая функция, замещающая $y = y(x)$, а t – новая переменная. Метод замены состоит в выражении $y'_x, y''_x, \ldots$ через $t, u;\ u'_t, u''_t, \ldots$

«Обратим» равенства (1), вводя функции $t = t(x, y)$ и $u = u(x, y)$. Продифференцируем равенства (1) по переменной x, учитывая, что $y = y(x)$, и что $u = u(t)$ есть сложная функция от x, так как $t = t(x, y(x))$.

Как обычно, f'_1, f'_2 и g'_1, g'_2 будут означать производные функций $f(t,u)$ и $g(t,u)$ по соответствующим аргументам: $t \to 1$, $u \to 2$.

Итак, дифференцируем (1).

$$1 = f'_1 t'_x + f'_2 u'_t \cdot t'_x, \tag{2}$$

$$y'_x = g'_1 t'_x + g'_2 u'_t \cdot t'_x. \tag{3}$$

Из первого уравнения находим

$$t'_x = [f'_1 + f'_2 u'_t]^{-1} \tag{4}$$

и подставляем во второе уравнение:

$$y'_x = \frac{g'_1 t'_x + g'_2 u'_t}{f'_1 + f'_2 u'_t}.$$

Таким образом, в выражении A мы можем заменить x, y и y'_x на новую переменную t, функцию $u(t)$ и ее производную u'_t.

Чтобы заменить производную y''_x, продифференцируем теперь (2) и (3) по x, не забывая, что $f'_1 = f'_1(t,u)$, $f'_2 = f'_2(t,u)$, $g'_1 = g'_1(t,u)$, $g'_2 = f'_1(t,u)$; $u'_t = u'_t(t)$, $t'_x = t'_x(x)$.

Итак, ищем формулу для замены y''_x, дифференцируя сначала (2) по x :

$$0 = (f''_{11} \cdot t'_x + f''_{12} \cdot u'_t\, t'_x)\, t'_x + f'_1\, t''_{xx} + (f''_{21} \cdot t'_x + f''_{22} \cdot u'_t\, t'_x)\, u'_t\, t'_x + f'_2\, (u''_{tt}\, (t'_x)^2 + u'_t\, t''_{xx}).$$

Теперь дифференцируем по x (3):

$$y''_{xx} = (g''_{11} \cdot t'_x + g''_{12} \cdot u'_t\, t'_x)\, t'_x + g'_1\, t''_{xx} + (g''_{21} \cdot t'_x + g''_{22} \cdot u'_t\, t'_x)\, u'_t\, t'_x + g'_2\, (u''_{tt}\, (t'_x)^2 + u'_t\, t''_{xx}).$$

Подставляем в эти уравнения полученное ранее t'_x (см. формулу (4)), находим из первого уравнения t''_{xx} и подставляем во второе. Теперь все готово, чтобы y''_{xx} заменить на u''_{tt}.

Естественно, в конкретных примерах все выглядит не так громоздко, даже в том случае, когда заменяются более старшие, чем вторая, производные от $y(x)$.

Следующий пример иллюстрирует типичную замену переменных при решении дифференциальных уравнений.

Пример 1. *Преобразовать уравнение*

$$y'\, y''' - 3\,(y'')^2 = x,$$

приняв y за новую независимую переменную, а x – за функцию.

Решение. В этом примере мы имеем простейшую замену $x = u, \quad y = t$.

Дифференцируя $x = u$ по x, получаем $1 = u'_t \cdot t'_x$, откуда находим $t'_x = 1/u'_t$. Дифференцируя $y = t$ по x, получаем $y'_x = t'_x$. Таким образом, имеем замену для первой производной: $y'_x = 1/u'_t$.

Дифференцируя это равенство и используя $t'_x = 1/u'_t$, получаем формулу для замены второй производной:

$$y''_{xx} = -\frac{u''_{tt} \cdot t'_x}{(u_t)^2} = -\frac{u''_{tt}}{(u'_t)^3}.$$

Наконец, дифференцируя последнее равенство по x, получаем замену для третьей производной:

$$y'''_{xxx} = -\frac{u'''_{ttt} \cdot t'_x - 3\,(u'_t)^2 \cdot u''_{tt} \cdot t'_x \cdot u''_{tt}}{(u'_t)^6} = -\frac{u'''}{(u')^4} + \frac{3\,(u'')^2}{(u')^5}.$$

Так как в предложенной задаче требовалось заменить функцию $y = y(x)$ на функцию $x = x(y)$, то в терминах последней функции полученные формулы замены $u = x$ приобретают вид

$$y' = \frac{1}{x'}, \quad y'' = -\frac{x''}{(x')^3}, \quad y''' = -\frac{x'''}{(x')^4} + \frac{3\,(x'')^2}{(x')^5}.$$

Подставляя эти формулы для y', y'', y''' в исходное уравнение $y'\,y''' - 3\,(y'')^2 = x$, получаем новое, преобразованное уравнение

$$x''' + x\,(x')^5 = 0.$$

Рассмотрим еще один пример на запись дифференциальных уравнений в полярных координатах.

Пример 2. *Преобразовать уравнение*

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{x + y}{x - y},$$

к полярным координатам $r = r(\varphi)$, полагая

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{5}$$

В этой замене роль t играет $\varphi = \varphi(x)$, а роль u – функция $r = r(\varphi)$. Чтобы заменить $y' = y'_x$ на $r' = r'_\varphi$, возьмем производные по x от обеих частей равенств (5):

$$1 = -r\,\sin\varphi\cdot\varphi'_x + \cos\varphi\cdot r'_\varphi\cdot\varphi'_x,$$

$$y'_x = r\cos\varphi\cdot\varphi'_x + \sin\varphi\cdot r'_\varphi\cdot\varphi'_x.$$

Из первого уравнения находим $\varphi'_x = [\,r'_\varphi\,\cos\varphi - r\sin\varphi\,]^{-1}$ и подставляем во второе уравнение. В результате получаем формулу для замены y'_x :

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{r\cos\varphi + r'\sin\varphi}{r'_\varphi\,\cos\varphi - r\sin\varphi}.$$

Таким образом, после преобразования исходное уравнение приобретает вид

$$\frac{r\cos\varphi + r'\sin\varphi}{r'_\varphi\,\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi.}$$

Несложные преобразования, основанные на перемножении числителей и знаменателей в этом уравнении, приводят к окончательному виду уравнения в полярных координатах:

$$\frac{d\,r}{d\,\varphi}\, = \,r.$$

Очевидно, что общее решение этого уравнения есть функция $r\, = \,C\,\mathrm{e}^{\varphi}$, где C – произвольная постоянная.

2). Обратная замена.

В выражении

$$A = \Phi(x, y;\, y'_x, y''_x,\, \ldots),$$

где Φ – некоторая функция от переменной x, функции $y = y(x)$ и ее производных по x, требуется перейти к новым переменным t и u, используя замену (x, y) переменных в неявной форме:

$$t = f(x, y),\;\; u = g(x, y), \tag{6}$$

где $u = u(t)$, а $x = x(t, u),\;\; y = y(t, u)$.

Понятно, что запись A в новых переменных сопряжена с решением уравнений (6) относительно x и y, но иногда этого можно избежать, если воспользоваться следующими выкладками.

Дифференцируем оба уравнения в (6) по x :

$$t'_x = f'_x + f'_y y'_x, \tag{7}$$

$$u'_t \cdot t'_x = g'_x + g'_y y'_x. \tag{8}$$

Производную t'_x из первого уравнения подставляем во второе и решаем его относительно y'_x :

$$y'_x = \frac{u'_t\, f'_x - g'_x}{g'_y - u'_t\, f'_y}.$$

Если удается найти $x = x(t, u)$ и $y = y(t, u)$, то, подставив их в правую часть последнего уравнения, а потом все это в A, получим решение поставленной задачи на замену переменных в части x, y и y'_x. Последующие производные, как и в случае простой замены, находятся с помощью составления уравнений, определяемых дифференцированием уравнений (7) и (8).

2^0. Замена независимых переменных в выражениях, содержащих частные производные.

Аналогично выражению A в обыкновенных производных, рассмотрим выражение, содержащее частные производные:

$$A = \Phi(x, y, z;\, z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy},\, \ldots),$$

где $z = z(x, y)$ – известная функция.

1). Прямая замена:

$$x = f(u, v),\;\; y = g(u, v),$$

определяет новую функцию $z = z(f(u, v), g(u, v))$ от независимых переменных u и v. Задача состоит в замене частных производных $z(x, y)$ по x и y в выражении A на производные функции

$$z = z(f(u, v), g(u, v)) \tag{9}$$

по u и v.

Первые производные находятся довольно просто. Они находятся из системы уравнений, полученной дифференцированием (9) по u и v :

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial u}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial v}. \tag{11}$$

Из этой системы находим z'_x, z'_y и подставляем в A.

Три вторых производных z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy} в конкретных примерах проще находить, вычисляя производные по u и v от найденных

$$z'_x = z'_x(f'_u,\, f'_v;\, g'_u,\, g'_v), \qquad z'_y = z'_y(f'_u,\, f'_v;\, g'_u,\, g'_v),$$

но можно составить для их определения систему уравнений, дифференцируя (10) по u и v, а потом (11) по v :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial u}\right)\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial u}\right)\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial v}\right)\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right)\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial v}\right)\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right)\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

Из этой системы находим z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy} и подставляем в A.

Не откладывая в долгий ящик, давайте сразу решим задачу обратной замены, а потом рассмотрим примеры, иллюстрирующие методы замены переменных.

2). Обратная замена:

$$u = f(x, y), \;\; v = g(x, y).$$

При такой замене функцию $z = z\,(u, v) = z\,(f(x, y),\, g(x, y))$ от новых независимых переменных u и v следует дифференцировать по x и y :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}, \tag{10$'$}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}. \tag{11$'$}$$

Штрихи в нумерации этих формул проставлены для того, что сравнить их с формулами (10) и(11): по виду это те же самые формулы (10) и (11) с заменой x на u и u на x, а также y на v и v на y. Таким образом, для вывода формул замены вторых производных можно воспользоваться соответствующими формулами прямой замены с перестановками $x \Leftrightarrow u$ и $y \Leftrightarrow v$. Понятно, что все равно придется решать исходные уравнения $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ относительно x и y. Рассмотрим пример на обратную замену, показав как свести задачу обратной замены к прямой.

Пример 3. *Принимая u и v за независимые переменные, преобразовать уравнение*

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2}\, \frac{\partial z}{\partial y} = xy$$

если $\quad u = \ln x,\ \ v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$.

Решение. Уравнения замены представляют собой монотонно возрастающие функции от x и y, причем эти уравнения легко разрешить относительно x и y.

$$x = \mathrm{e}^u, \qquad \mathrm{e}^v = y + \sqrt{1+y^2} \implies y = \frac{\mathrm{e}^{2v} - 1}{2\mathrm{e}^v} = \mathrm{sh} v. \tag{12}$$

Тем не менее, давайте совершим переход к новым переменных в рамках обратной замены, когда дифференцировать по x и y. следует функцию

$$z = z\,(u, v) = z\,(f(x, y),\ g(x, y)) = z(\ln x,\ \ln(y + \sqrt{1+y^2}))$$

Дифференцируем (см.($10'$) и ($11'$)):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{1}{x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right) \Big/ (y + \sqrt{1+y^2}).$$

Убирая нулевые слагаемые и упрощая выражение в конце второго уравнения, получаем необходимые для замены формулы

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Подставим эти преобразованные производные в исходное дифференциальное уравнение

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2}\, \frac{\partial z}{\partial y} = xy \implies \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = xy.$$

Используя найденные ранее выражения (12) для x и y в терминах новых переменных u и v, получаем уравнебние в новых переменных:

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \mathrm{e}^u \mathrm{sh} v.$$

Задание 56

Решение следующих задач, взятых из задачника Демидовича, высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий с большими полями вверху и внизу. Некоторые из этих задач могут показаться достаточно сложными, особенно та, что отмечена звездочкой, но, зато, их решение оцениваются более высоким баллом.

3434. *Преобразовать уравнение*

$$x^2 y'' + x\, y' + y = 0$$

к новым переменным t *и* u, *если* $y = u,\ x = \mathrm{e}^t,\ u = u(t)$.

3440. *Преобразовать уравнение*

$$(1 + x^2)^2 y'' = y$$

к новым переменным t *и* u, *если*

$$x = \operatorname{tg} t, \quad y = \frac{u}{\cos t}, \quad u = u(t).$$

3450*. *Преобразовать* $d^2y/d\,x^2$ *к полярным координатам*

$x = r\,\cos\varphi,\ y = r\,\sin\varphi;\ r = r(\varphi)$.

3458. *Преобразовать уравнение*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

к новым переменным ξ *и* η, *если*

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y, \quad z = z(\xi, \eta).$$

Найти общее решение преобразованного уравнения.

3506*. *Показать, что уравнение*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2(y-x)\frac{\partial z}{\partial y} + x^2y^2z = 0$$

не меняет своего вида после преобразования $x = uv$, $y = 1/v$ *к независимым переменным* u *и* v.