

К вопросу о дифракции низкочастотного электромагнитного поля на проводящих объектах ЭЭС

Белашов В. Ю., доктор физ.-матем. наук

Казанский (Приволжский) федеральный институт, Казань

Представлен теоретический анализ и даны количественные оценки вклада поля дифракции электромагнитных волн на симметричных проводящих объектах в суммарное поле СНЧ-ОНЧ диапазона вблизи источников, которыми могут служить отдельные элементы электроэнергетических систем. Полученные в виде достаточно простых и удобных для практического использования соотношений результаты представляют интерес при решении комплекса задач, связанных с различными аспектами проблем электромагнитной совместности, помехозащищенности и безопасности в электроэнергетике.

Ключевые слова: поля дифракции, электромагнитные волны, электромагнитная совместимость, помехозащищенность.

Изучение низкочастотных (диапазон СНЧ-ОНЧ — $10 \div 10\,000$ Гц) электромагнитных (ЭМ) полей, генерируемых элементами электроэнергетических систем (ЭЭС), и исследование воздействия ЭМ полей естественного и искусственного происхождения на различные структуры ЭЭС представляет интерес при решении комплекса задач, связанных с различными аспектами проблем электромагнитной совместимости, помехозащищенности и безопасности жизнедеятельности в электроэнергетике [1]. При этом изучение структуры и интенсивности ЭМ поля вблизи объектов различной, подчас довольно сложной, конфигурации (строений, трубопроводов, открытых кабельных линий и т. п.) требует анализа суммарной картины, представляющей собой суперпозицию поля источника и поля, являющегося результатом дифракции на соответствующем объекте. Цели работы — теоретический анализ и получение количественных оценок вклада поля дифракции ЭМ волн на проводящих объектах цилиндрической и сферической формы в суммарное поле вблизи источников, которыми могут служить отдельные элементы ЭЭС. При анализе ограничимся допущениями: 1) объекты, на которых изучается поле, — идеально проводящие, что допустимо в условиях низкой проводимости земли, часто имеющей место в реальных условиях; 2) волны СНЧ-ОНЧ диапазона — плоские монохроматические, так как рассматривается малый участок волновой зоны.

Дифракция на цилиндрическом объекте

Предполагаем, что в случае низкой проводимости земли с некоторым приближением

допустимо свести задачу к оценке вклада поля, вызванного дифракцией на идеально проводящем цилиндре бесконечной длины (последнее справедливо, поскольку результирующее поле исследуется на расстояниях от объекта, много меньших его линейных размеров).

Введем цилиндрическую систему координат так, что ось x совпадает с осью цилиндра (рис. 1). Пусть для падающей волны $E_0 \parallel x$, $k \perp x$ (стоит задача оценки максимального вклада дифракционной составляющей) угол α отсчитываем от направления k . В этом случае поле имеет компоненты E_x , H_r , H_α . С учетом геометрии задачи величину E_x определим из волнового уравнения для E : $\Delta E - (1/\nu_{ph}^2)(\partial^2 E / \partial t^2) = 0$. Компонента E_{xc} вторичного поля, обусловленного дифракцией, $E_c = E - E_0$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

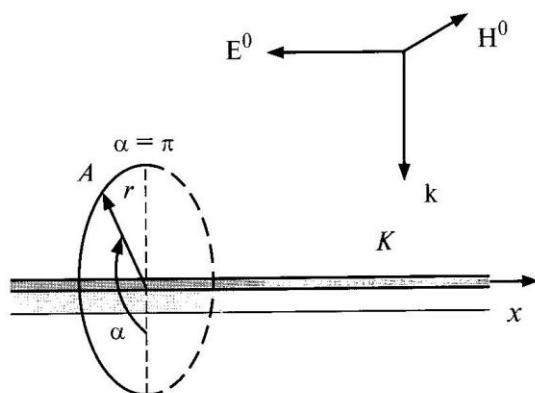


Рис. 1. Схема постановки задачи дифракции на цилиндрическом объекте:

A — точка, в которой вычисляется поле; K — цилиндрический объект

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_c}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_c}{\partial \alpha^2} + k^2 E_c = 0. \quad (1)$$

Разделив переменные в уравнении (1), получим [2]:

$$E_v''(r) + (1/r) E_v'(r) + (k^2 - v^2/r^2) E_v(r) = 0; \quad (2)$$

$$E_v''(\alpha) + v^2 E_v(\alpha) = 0, \quad (3)$$

где $v^2 = C$ — постоянная разделения.

Уравнение (2) — уравнение Бесселя, решение которого в общем случае можно записать в следующем виде:

$$E_c = C_1 H_v^{(1)}(kr) + C_2 H_v^{(2)}(kr),$$

причем второй член описывает сходящуюся волну, которой в реальных (рассматриваемых) условиях не существует.

В области малых значений r (вблизи объекта, где $r \ll \lambda$), применяя граничное условие $r \rightarrow 0$, запишем функцию E_c в виде произведения

$$E_c = \epsilon_0 f_1(r) f_2(\alpha), \quad (4)$$

где $f_1(r)$ — степенная функция, описывающая затухание волны при увеличении r ; $f_2(\alpha)$ — некоторая функция, определяющая осциллирующее распределение вектора \mathbf{E}_c “внутри” огибающей — степенной функции.

Поскольку в рассматриваемом диапазоне ($f \approx 10^1 \div 10^4$ Гц) $k \approx 10^{-4} \div 10^{-7}$ и, соответственно, $(kr) \ll 1$, для удовлетворения условия (4) в качестве решения уравнения (2) следует выбрать функцию Ханкеля для малых значений аргумента [2, 3]:

$$E_v(r) = H_v^{(1)}(kr) = (1/i\pi) \Gamma(v) (kr/2)^{-v} \\ (v \neq -1, -2, \dots). \quad (5)$$

Уравнение (3) имеет решение $E_v(\alpha) = A_v \exp(iv\alpha) + B_v(\alpha) \exp(-iv\alpha)$. Параметр v — целый и, согласно (5), положительный. Учитывая, что общее решение уравнения (1) $E_c(r, \alpha) = \sum_v E_v(r) E_v(\alpha)$, имеем:

$$E_c(r, \alpha) = \epsilon_0 \sum_{v=0}^{\infty} (A_v e^{iv\alpha} + B_v e^{-iv\alpha}) H_v^{(1)}(kr).$$

Коэффициенты A_v , B_v нетрудно найти из граничного условия на поверхности идеально проводящего цилиндра $\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_0 = 0$ при $r = a$

(где a — радиус цилиндра), используя свойство ортогональности $\exp(im\alpha)$:

$$A_v = i^v J_v(ka)/H_v^{(1)}(ka), \quad B_v = i^v J_v(ka)/H_v^{(1)}(ka).$$

Таким образом, полное электрическое поле

$$E_x(r, \alpha) = \epsilon_0 \left\{ \exp(ikr \cos\alpha) - \sum_v \frac{J_v(ka)}{H_v^{(1)}(ka)} \times \right. \\ \left. \times H_v^{(1)}(kr) (i^v e^{iv\alpha} + i^{-v} e^{-iv\alpha}) \right\}. \quad (6)$$

Компоненту H_α найдем из первого уравнения Максвелла:

$$H_\alpha = -(1/ik) \partial E_x / \partial r = -\epsilon_0 \left\{ \cos\alpha \exp(ikr \cos\alpha) - \right. \\ \left. - \sum_v \frac{J_v(ka)}{H_v^{(1)}(ka)} \frac{dH_v^{(1)}(kr)}{d(kr)} (i^{v-1} e^{iv\alpha} + i^{-v-1} e^{-iv\alpha}) \right\}. \quad (7)$$

Составляющая H_r при $0 \leq \alpha \leq \pi$ рассчитывается аналогично.

Полученные соотношения (6) и (7) позволяют оценить вклад дифракционной части в суммарное поле, принимаемое антенной:

$$\delta E_x(r, k) = E_{xc}/(E_{x0} + E_{xc}); \\ \delta H_\alpha(r, k) = H_{ac}/(H_{a0} + H_{ac}).$$

Проведенные оценки влияния дифракции на цилиндрическом объекте для волн с частотами $10 \div 10000$ Гц при $a = 1$ см, $r = 1 \div 30$ м позволили получить следующие аналитические зависимости относительных оценок от пространственных координат и k :

$$\delta E_x(r, k)|_{\alpha=\pi} = e^{ikr} (k/2r)^2; \\ \delta H_\alpha|_{\alpha=\pi} = ie^{ikr} k/2r^3. \quad (8)$$

Формулы (8) позволяют легко рассчитать относительный вклад дифракционной составляющей в суммарное ЭМ поле вблизи проводящего объекта цилиндрической формы.

Дифракция на сферическом объекте

Рассмотрим теперь вклад в суммарное ЭМ поле поля дифракции на объекте сферической формы. Пусть однородная плоская волна, векторы которой имеют амплитуды

$$\dot{E}_m^0 = x_0 \dot{A} e^{-ik_0 z}, \quad \dot{H}_m^0 = y_0 (\dot{A} / \dot{W}_0) e^{-ik_0 z},$$

падает на сферическое тело с проницаемостями ϵ , μ ; проницаемости среды — ϵ_0 и μ_0

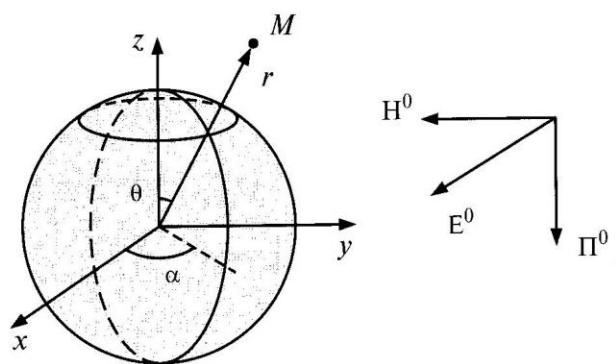


Рис. 2. Схема постановки задачи дифракции на сферическом объекте:

M — точка, в которой вычисляется поле

(рис. 2). Необходимо построить решения для внешнего поля дифракции (внутреннее поле дифракции в рассматриваемой постановке задачи нас не интересует), которые можно получить тем же способом, что и в предыдущем разделе — путем разложения падающей волны по подходящим функциям и составления аналогичных разложений с неопределенными коэффициентами для поля дифракции. Последние найдем при наложении соответствующих граничных условий. Отметим, однако, что реализация такого подхода в случае сферической геометрии оказывается более сложной.

Будем использовать сферические гармоники \Re , Θ , \Im . Однородное уравнение Гельмгольца, описывающее поле, в сферических координатах будет иметь следующий вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + k^2 u = 0. \quad (9)$$

Подстановка $u(r, \vartheta, \alpha) = \Re(r)\Theta(\vartheta)\Im(\alpha)$ с последующим умножением всех членов уравнения (9) на $r^2 \sin^2 \vartheta / (\Re \Theta \Im)$ дает:

$$\frac{\sin^2 \vartheta}{\Re} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Re}{\partial r} \right) + \frac{\sin \vartheta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\Im} \frac{\partial^2 \Im}{\partial \alpha^2} + k^2 r^2 \sin^2 \vartheta = 0.$$

Приравнивая третий член, зависящий только от α , $-m^2$, получаем два уравнения, одно из которых делится на $\sin^2 \vartheta$ [3]. Далее члены, зависящие только от r , приравниваем p^2 . В результате получаем три обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Re} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Re}{dr} \right) + k^2 r^2 = 0, \quad \frac{\partial^2 \Im}{\partial \alpha^2} + m^2 \Im = 0, \\ \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} = -p^2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Если $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, то $u(r, \vartheta, \alpha + 2\pi) = u(r, \vartheta, \alpha)$, поэтому $m = 0, 1, 2, \dots$. Выполняя во втором уравнении системы (10) замену $t = \cos \vartheta$, получаем

$$\frac{d}{dt} \left[(1-t^2) \frac{d\Theta}{dt} \right] + \left(p^2 - \frac{m^2}{1-t^2} \right) \Theta = 0 \quad (-1 < t < 1).$$

Ограничеными решениями последнего уравнения являются присоединенные функции Лежандра $P_n^{(m)}(t)$. При этом собственные значения, отвечающие этим собственным функциям $p^2 = n(n+1)$, [4]:

$$T(t) = P_n^{(m)}(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, m \leq n),$$

где $P_n(t)$ — полиномы Лежандра [3]. Отсюда следует, что $\Theta(\vartheta) = P_n^{(m)}(\cos \vartheta)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$).

Первое из уравнений (10) после дифференцирования выражения в круглых скобках и выполнения замен $p = n(n+1)$, $\Re(r) = \rho(r)/\sqrt{kr}$ приводится к виду

$$\frac{d^2 \rho}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\rho}{dr} + \left[k^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 / r^2 \right] \rho = 0,$$

а это не что иное, как уравнение Бесселя порядка $n + 1/2$ относительно функции $\rho(kr)$ [3]. Таким образом, решением первого уравнения системы (10) является функция

$$\begin{aligned} \Re(r) &= \frac{1}{\sqrt{kr}} [AJ_{n+1/2}(kr) + BN_{n+1/2}(kr)] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{kr}} [PH_{n+1/2}^{(1)}(kr) + QH_{n+1/2}^{(2)}(kr)]. \end{aligned}$$

Окончательное решение уравнения (9):

$$u(r, \vartheta, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{kr}} \left\{ AJ_{n+1/2}(kr) + BN_{n+1/2}(kr) \right\} \times \left\{ PH_{n+1/2}^{(1)}(kr) + QH_{n+1/2}^{(2)}(kr) \right\} \times P_n^{(m)}(\cos \vartheta) \left\{ C \cos ma + D \sin ma \right\} \times \left\{ R e^{ima} + S e^{-ima} \right\}.$$

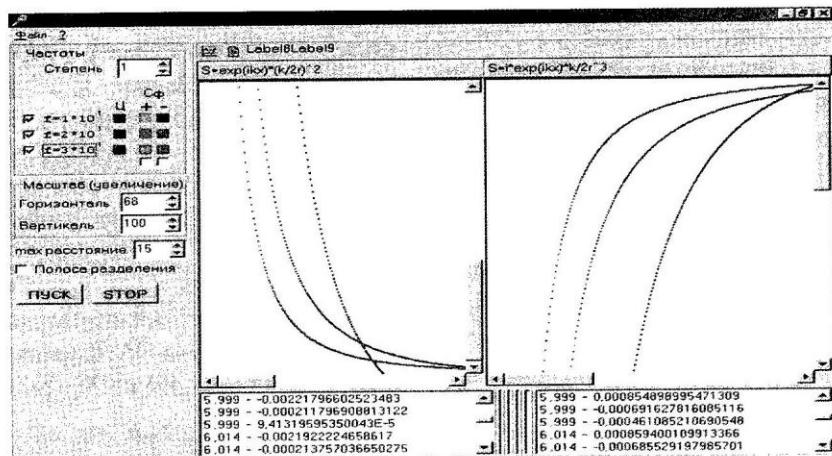


Рис. 3. Результаты моделирования вклада дифракционной составляющей в суммарное поле в частотном диапазоне $f = 10 - 30$ Гц

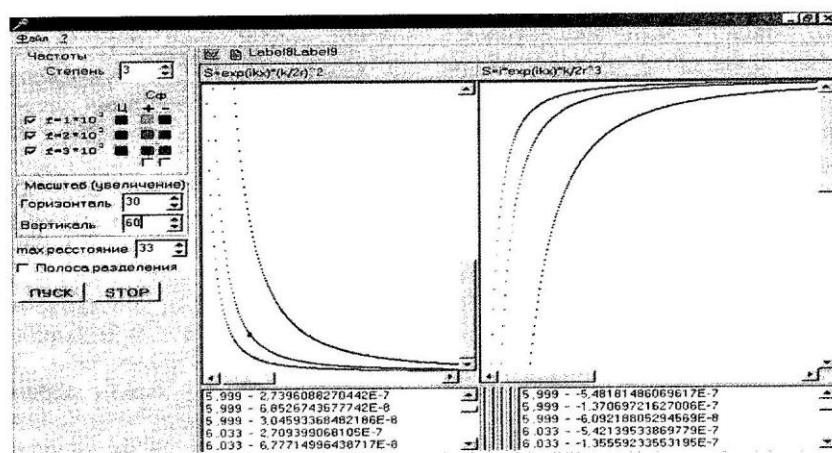


Рис. 4. То же, что и на рис. 3, для частотного диапазона $f = 1 - 3$ кГц

Пользуясь известными рекуррентными соотношениями для сферической и модифицированной сферической функций Бесселя I рода [3], можно получить решение для внешнего поля дифракции [5]:

$$\dot{E}_m = \dot{A} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (c_n^M M_{on} + i c_n^N N_{en}), \quad r > R; \quad (11)$$

$$\dot{H}_m = -\frac{\dot{A}}{W} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (b_n^N M_{en} - i b_n^M N_{on}), \quad r > R, \quad (12)$$

где

$$M_{o,e} = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} J_{n+1/2}(kr) \left[\pm \alpha_0 \frac{1}{\sin \vartheta} P_n^{(1)}(\cos \vartheta) \cos \alpha - \alpha_0 \frac{d}{d\vartheta} P_n^{(1)}(\cos \vartheta) \sin \alpha \right];$$

$$N_{o,e} = \frac{1}{k_0 r} \times \\ \times \left\{ r_0 n(n+1) \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} H_{n+1/2}^{(2)}(k_0 r) P_n^{(1)}(\cos \vartheta) \sin \alpha + \right. \\ \left. + \alpha_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{k_0 r} H_{n+1/2}^{(2)}(k_0 r) \right]' \frac{d}{d\vartheta} P_n^{(1)}(\cos \vartheta) \cos \alpha \pm \right. \\ \left. \pm \alpha_0 \frac{1}{\sin \vartheta} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{k_0 r} H_{n+1/2}^{(2)}(k_0 r) \right]' P_n^{(1)}(\cos \vartheta) \cos \alpha \right\}.$$

Индексы o и e в последних формулах соответствуют выбору соответственно верхнего и нижнего вариантов двойного знака и тригонометрической функции. Коэффициенты в круглых скобках формул (11), (12) определяются выражениями, приведенными в [5]. Формулы (11), (12) позволяют рассчитать поле вне сферы радиуса R для волн СНЧ-ОНЧ диапазона.

Количественные оценки

Для получения количественных оценок вклада дифракционного поля в суммарную картину выполнялось численное моделирование дифракции с помощью специально разработанной на основе алгоритмов, предложенных в [3], программы DIFFRACT [5]. На рис. 3 и 4 приведены примеры результатов моделирования дифракции на проводящем цилиндре для падающих ЭМ волн с частотами 10 – 30 Гц и 1 – 3 кГц соответственно. Дифракционное поле для сферического проводящего объекта имеет качественно такой же характер: модули его компонент вне сферы убывают экспоненциально с ростом r , причем, как и в случае дифракции на объекте цилиндрической формы, амплитуды составляющих вблизи объекта зависят обратно пропорционально от частоты падающей волны. Однако, в отличие от случая дифракции на цилиндре, вклад в суммарное поле дифракционного поля на сферическом объекте оказывается при тех же условиях практически на порядок большим.

Полученные результаты, несмотря на некоторую идеализацию задачи, позволяют сделать заключение о некотором искажении низкочастотного поля в результате дифракции, увеличивающемся с уменьшением частоты по законам (8), (11), (12), однако эти искажения ввиду их относительной малости должны учитываться лишь при построении высокочувствительных к внешним воздействиям систем. Примером такой системы может служить разработанный мобильный экспериментальный комплекс для исследования ЭМ полей в широком диапазоне частот [6 – 8]. С помощью этого комплекса были проведены измерения ЭМ полей вблизи электроустановок на предприятиях энергетики и промышленности, а также вблизи ЛЭП различного напряжения [9], при этом результаты обработки и анализа экспериментальных данных в целом подтвердили теоретические результаты и результаты, приведенные в [10] для ЛЭП с различными конструктивными особенностями.

Выводы

1. Результаты, полученные для объектов, обладающих высокой степенью симметрии, могут служить основой при изучении структуры и интенсивности ЭМ поля вблизи объектов более сложной конфигурации (строений, трубопроводов, открытых кабельных

линий и т. п.), отдельные участки которых геометрически симметричны. Во всех случаях при этом необходим анализ суммарной картины, представляющей собой суперпозицию поля источника и поля, являющегося результатом дифракции на соответствующем объекте, или суперпозицию дифракционных полей отдельных его элементов.

2. Результаты представляют интерес для решения задач, связанных с различными аспектами проблем ЭМС, помехозащищенности и безопасности жизнедеятельности в электроэнергетике.

Список литературы

1. Хабигер, Э. Электромагнитная совместимость. Основы её обеспечения в технике: Пер. с нем. / И. П. Кужекин; Под ред. Б. К. Максимова. — М.: Энергоатомиздат, 1995. — 304 с.
2. Белашов, В. Ю. Оценка влияния дифракции на кабеле на характеристики естественного электромагнитного поля КНЧ-ОНЧ-диапазона, принимаемого антенной / В. Ю. Белашов // Геомагнетизм и аэрономия. — 1984. — № 5. — С. 851 – 853.
3. Белашов, В. Ю. Специальные функции и алгоритмы их вычисления / В. Ю. Белашов. — Магадан: МПУ, 1997. — 36 с.
4. Никольский, В. В. Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский. — М.: Наука, 1973. — 544 с.
5. Белашов, В. Ю. Задачи дифракции электромагнитных волн в курсе электродинамики: компьютерное моделирование / В. Ю. Белашов, И. А. Александров // II Межд. научно-метод. конф. “Новые технологии в преподавании физики: школа и вуз” 13 – 16 марта 2000 г. Сб. докл. — М.: МПГУ, 2000. — С. 89.
6. Асадуллин, А. И., Исследование ЭМ полей, генерируемых электрооборудованием и элементами ЭЭС. Ч. 2. Мобильный экспериментальный комплекс для исследования ЭМ полей в широком диапазоне частот / А. И. Асадуллин, В. Ю. Белашов // Изв. вузов. Проблемы энергетики. — 2012. — № 1 – 2. — С. 46 – 59.
7. Белашов, В. Ю. Мобильный экспериментальный комплекс для исследования электромагнитных полей, генерируемых электрооборудованием и элементами электроэнергетических систем / В. Ю. Белашов, А. И. Асадуллин // Промышленная энергетика. — 2012. — № 8. — С. 52 – 55.
8. Belashov, V. Yu. The Mobile Experimental Complex for studying of electromagnetic fields generated in a wide frequency range in an industrial environment / V. Yu. Belashov, A. I. Asadullin // Proc. of the 2014 Int. Symp. on Electromagn. Compatibility (EMC Europe 2014), Gothenburg, Sweden, Sept. 1 – 4, 2014. P. 1209 – 1213.
9. Белашов, В. Ю. Экспериментальные исследования ЭМ полей, генерируемых в широком диапазоне частот на предприятиях энергетики и промышленности / В. Ю. Белашов, А. И. Асадуллин, Ю. А. Рылов // Изв. Вузов. Проблемы энергетики. — 2013. — № 7 – 8. — С. 54 – 59.

10. Pilatowicz, A. Radio noise level due to electric power lines and its relation to line design parameters / A. Pilatowicz // Space Science Reviews. 1983. — Vol. 35. — P. 43 – 48.

References

1. Khabiger E., Kuzhekin I. P., Maximova B. K. Elektromagnitnaya sovmestimost'. Osnovy ee obespecheniya v tekhnike (Electromagnetic compatibility. Fundamentals of its provision in technology), Moscow, Energoatomizdat, 1995, 304 p.
2. Belashov V. Yu. Geomagnetizm i aeronomiya (Geomagnetism and aeronomiya), 1984, No. 5, pp. 851 – 853.
3. Belashov V. Yu. Spetsial'nye funktsii i algoritmy ikh vychisleniya (Special functions and algorithms for their computation), Magadan, MPU, 1997, 36 p.
4. Nikolskii V. V. Elektrodinamika i rasprostranenie radiovoln (Electrodynamics and radio wave propagation), Moscow, Nauka, 1973, 544 p.
5. Belashov V. Yu., Alexandrov I. A. Zadachi difraktsii elektromagnitnykh voln v kurse elektrodinamiki: kompyuternoe modelirovaniye (Problems of diffraction of electromagnetic waves in the course of electrodynamics: computer modeling), II Int. Scientific method. Conference "New technologies in teaching physics: school and university", March 13 – 16, 2000, The Collection of Materials, Moscow, Moscow State Pedagogical University, 2000, p. 89.
6. Asadullin A. I., Belashov V. Yu. Izv. vuzov. Problemy energetiki (Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Power engineering: research, equipment, technology), 2012, No. 1 – 2, pp. 46 – 59.
7. Belashov V. Yu., Asadullin A. I. Promyshlennaya energetika (Industrial power engineering), 2012, No. 8, pp. 52 – 55.
8. Belashov V. Yu., Asadullin A. I. The Mobile Experimental Complex for studying of electromagnetic fields generated in a wide frequency range in an industrial environment, Proc. of the 2014 Int. Symp. on Electromagn. Compatibility (EMC Europe 2014), Gothenburg, Sweden, Sept. 1 – 4, 2014, pp. 1209 – 1213.
9. Belashov V. Yu., Asadullin A. I., Rylov Yu. A. Izv. vuzov. Problemy energetiki (Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Power engineering: research, equipment, technology), 2013, No. 7 – 8, pp. 54 – 59.
10. Pilatowicz A. Radio noise level due to electric power lines and its relation to line design parameters, Space Science Reviews, 1983, Vol. 35, pp. 43 – 48.

vybelashov@yahoo.com

On the problem of diffraction of a low-frequency electromagnetic field on the conductive objects of EPS

Belashov V. Yu.

A theoretical analysis and quantitative estimates of the contribution of the field of diffraction of electromagnetic waves on symmetric conductive objects to the total field of the ELF-VLF range near the sources (which can be the elements of electric power systems) are presented. The results obtained in the form of quite simple relationships convenient for practical applications appeared useful in solving problems attributed to electromagnetic compatibility, noise immunity and safety in the power industry.

Keywords: diffraction field, electromagnetic waves, electromagnetic compatibility, noise immunity.