Дорогие студенты, вы зашли в так называемую “Виртуальную аудиторию,” в которой к каждому вторнику и каждой пятнице я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

volodinstudent@gmail.com

Естественно, вам придется, оформлять результаты решений в более пристойней форме (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). Особенно следует оставлять большие пространства сверху и снизу фотографируемого листа. В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply’ем.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Занятие 49

Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.

Итак, после определения равномерной сходимости функционального ряда и изучения методов доказательства или опровержения данной сходимости, перейдем к методам исследования функции вида

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \tag{1}$$

где слагаемые (функции) $a_n(x),\ n = 1, 2, \ldots,$ определены на некотором множестве E числовой оси R.

Нас будут интересовать решения следующих задач.

$\mathbf{1^0}$. Какие условия надо наложить на функции $a_n(x),\ x \in E$, и тип сходимости ряда (1), чтобы $S(x)$ была непрерывной функцией?

$\mathbf{2^0}$. В каком случае вычисление предела $\lim_{x\to a} S(x)$ можно производить с помощью вычисления аналогичных пределов для каждого $a_n(x),\ n = 1, 2, \ldots,$ с последующим суммирование числового ряда соответствующих пределов?

$\mathbf{3^0}$. При каких условиях на функции $a_n(x),\ x \in E$, и тип сходимости ряда (1) интеграл от функции $S(x)$ можно вычислять посредством интегрирования каждого $a_n(x),\ n = 1, 2, \ldots$?

4^0. Каким свойством должны обладать функции $a_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, и каковы должны быть условия на тип сходимости ряда (1), чтобы вычисление производной от $S(x)$ сводилось к вычислению производных от $a_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$?

Все эти задачи решаются с помощью доказательства равномерной сходимости исходного ряда и сходимости ряда, полученного после применения соответствующих математических операций над функциями $a_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Условия, обеспечивающие возможность решения сформулированных задач с помощью почленных операций над рядом (1), формулируются в виде следующих утверждений и приведем примеры на проверку этих условий. Заметим, что **все эти условия в равномере относятся к операциям над функциональными последовательностями** $\{ f_n(x) \}$.

1^0. *Сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций есть функция непрерывная.*

Следующее замечание может оказаться весьма полезным при доказательстве непрерывности функции $S(x)$.

Если ряд (1) *сходится равномерно на сегменте* $[\, a + \delta,\, b\,]$ *при* $\forall \delta > 0$, $\;a + \delta < b$, *то сумма* $S(x)$ *есть непрерывная функция на открытом интервале* $(\, a,\, b\,)$.

Пример 1. *Доказать непрерывность на отрезке* $E = [\, a,\, b\,]$, $\;a > 0$, *функции*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}}\,.$$

Решение. Функции

$$a_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}}, \qquad n = 1,\, 2, \ldots, \tag{2}$$

очевидно, непрерывны на отрезке $[\, a,\, b\,]$. Докажем равномерную сходимость ряда (2).

Это знакочередующийся ряд Лейбница с монотонно убывающими положительными функциями

$$y_n(x) = \frac{1}{x^2 + \sqrt{n}}, \qquad n = 1,\, 2, \ldots.$$

Следовательно, равномерную сходимость ряда (2) можно доказать, используя равномерную сходимость последовательности остаточных членов. Имеем

$$|\, r_n(x)\,| \le |a_n(x)| = \frac{1}{x^2 + \sqrt{n}} \le \frac{1}{a^2 + \sqrt{n}},$$

так что мажоранта последовательности $\{ r_n(x) \}$ монотонно сходится к нулю при $n \to \infty$.

Равномерная сходимость ряда (2) установлена, и поэтому $S(x)$ является непрерывной функцией на отрезке $[a, b]$, $\quad a > 0$.

$\mathbf{2^0}$. *Если ряд (1) сходится равномерно в некоторой окрестности точки $x = a$ и существуют конечные пределы $\alpha_n = \lim_{x\to a} a_n(x)$ при любом $n = 1, 2, \ldots$, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

сходится и имеет место равенство

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n.$$

Пример 2. *Найти предел*

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{x^n+1}\,. \tag{3}$$

Решение. Ряд (3) сходится равномерно в любой окрестности $U(1 - 0) = (0, \delta]$, расположенной слева от точки $x = 1$. В этом легко убедится, используя свойство ряда (3) как ряда Лейбница:

$$|\, r_n(x)\, | \le |a_n(x)| = \frac{x^n}{n(x^n+1)} \le \frac{1}{n} \downarrow 0.$$

Далее, существуют пределы

$$\lim_{x\to 1-0} a_n(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{x^n+1} = \frac{(-1)^n}{2n} = \alpha_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и ряд из этих пределов сходится условно, как числовой ряд Лейбница. Следовательно, можно заносить предел под знак суммы:

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{x^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = -\frac{\ln 2}{2}$$

(последнее равенство для вычисления суммы взято из справочника).

$\mathbf{3^0}$. *Равномерно сходящейся на отрезке* $[\,a,\,b\,]$ *ряд из непрерывных на* $[\,a,\,b\,]$ *функций* $a_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ *можно почленно интегрировать по любому отрезку* $[\,\alpha,\,\beta\,] \subseteq [\,a,\,b\,]$, *то есть*

$$\int_\alpha^\beta \left[\sum_{n=1}^\infty a_n(x)\right] d\,x = \sum_{n=1}^\infty \int_\alpha^\beta a_n(x) d\,x,$$

и при этом ряд из функций

$$f_n(x) = \int_{x_0}^x a_n(t) d\,t, \qquad x_0 \in [\,a,\,b\,],$$

равномерно сходится на отрезке $[\,a,\,b\,]$.

Пример 3. *Доказать, что функция*

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty n\,\mathrm{e}^{-n\,x} \tag{4}$$

непрерывна при $x > 0$ *и вычислить интеграл*

$$\int_{\ln 2}^{\ln 5} f(x)\,d\,x.$$

Решение. Покажем, что ряд (4) равномерно сходится на интервале $[\delta,\,\infty)$ при $\forall \delta > 0$ (см. замечание в конце пункта $\mathbf{1^0}$), откуда будет следовать возможность его почленного интегрирования по любому отрезку $[\,a,\,b\,] \subset (0,\,\infty)$.

Для общего члена $a_n(x)$ ряда (4) справедлива очевидная оценка сверху $a_n(x) \le n\,\mathrm{e}^{-n\,\delta}$. Покажем теперь, что мажорирующий числовой ряд

$$\sum_{n=1}^\infty n\,\mathrm{e}^{-n\,\delta}$$

сходится. Используем признак Даламбера:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{(n+1)\,\mathrm{e}^{-(n+1)\,\delta}}{n\,\mathrm{e}^{-n\,\delta}} = \mathrm{e}^{-\delta} < 1,$$

так как $\delta > 0$.

Теперь может вычислять интеграл, почленно интегрируя ряд (4):

$$\int_{\ln 2}^{\ln 5} f(x)\,d\,x = \sum_{n=1}^\infty n \int_{\ln 2}^{\ln 5} \mathrm{e}^{-n\,x} d\,x =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\,x}\Big|_{\ln 2}^{\ln 5} = \sum_{n=1}^{\infty} (\,2^{-n} - 5^{-n}\,) = \frac{3}{4}.$$

4⁰. *Ели общий член $a_n(x)$ ряда (1) имеет* **непрерывную** *производную при любом $n = 1,\,2, \ldots$ на отрезке $[\,a,\,b\,]$, ряд* **из производных**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\,a_n(x)}{d\,x}$$

сходится равномерно *на $[\,a,\,b\,]$, а ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

сходится хотя бы в одно точке $x_0 \in [\,a,\,b\,]$, то исходный ряд (1)сходится равномерно на $[\,a,\,b\,]$, его сумма $S(x)$ имеет непрерывную производную и

$$\frac{d}{d\,x}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{d\,x} a_n(x).$$

Пример 4. *Найти множество E на числовой оси* R, *на котором определена функция*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2} \tag{5}$$

и исследовать ее на дифференцируемость на E.

Решение. Ряд (5) сходится (условно) при любом $x \in \mathrm{R}$, как ряд Лейбница с монотонно стремящимися к нулю слагаемыми.

Ряд из производных

$$2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + x^2)^2}$$

сходится равномерно и абсолютно на $E = \mathrm{R}$, ибо обладает сходящимся мажорирующим рядом, составленным из максимальных значений его общих членов:

$$\max_{x \in \mathrm{R}} \frac{2x}{(n + x^2)^2} = 2\frac{\sqrt{n/3}}{(n + n/3)^2} \;\propto\; \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Задание 49

Решение следующих задач, взятых из задачника Кудрявцев, Кутасов и др., высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий с большими полями вверху и внизу. Некоторые из этих задач могут показаться достаточно сложными, особенно та, что отмечена звездочкой, но, зато, их решение оцениваются более высоким баллом.

19.4 *Доказать, что функция*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$$

непрерывна на R *и вычислить*

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,d\,x.$$

19.8(1) *Найти множество* E, *на котором определена функция*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^2}$$

и исследовать ее непрерывность на том множестве.

19.9(2) *Найти множество* E, *на котором определена функция*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^3 \mathrm{e}^{-nx}$$

и исследовать ее дифференцируемость на том множестве.

19.10 *Доказать возможность почленного дифференцирования на* R *ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 \ln^2(n+1)}\,.$$

19.40(4) *Найти предел*

$$\lim_{x\to+0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}.$$

19.24* *Справедливо ли равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}\,d\,x = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^4}\right) d\,x?$$