ОБ ОЦЕНКЕ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ, УЛУЧШАЮЩАЯ НЕРАВЕНСТВО ПОЛИА-СЕГЁ

Р. Г. Салахудинов[1] , Л. И. Гафиятуллина[2]

1 *rsalakhud@gmail.com*; Казань, Россия
2 *gafiyat@gmail.com*; Казань, Россия

Пусть G — односвязная область на плоскости. Одной из важных физических характеристик области в математической физике является функционал

$$\mathbf{P}(G) := 2\int_G u(x,G)\,\mathrm{d}A,$$

называемый жесткостью кручения, здесь $u(x,G)$ — функция напряжения, которая удовлетворяет уравнению $\triangle u = -2$ в G и граничному условию $u=0$. (см., например, [1], [2]).

Пусть $\rho(x,G)$ – функция расстояния от точки x до границы области G. Пусть $\rho(G) := \sup \rho(x,G) : x \in G$ — радиус наибольшего круга, содержащегося в G.

Геометрический функционал, определяемый равенством

$$\mathrm{I}_p(G) = \int\limits_G \rho(x,G)^p \mathrm{d}A,$$

называется евклидовым моментом области относительно границы порядка p, ($p > -1$).

Обозначим через $G(\mu)$ — множество уровня, где $0 \le \mu \le \rho(G)$. Через $\mathbf{L}(G)$ обозначим длину границы области G. Пусть

$$l(\mu) = \mathbf{L}(G(\mu)),\, l(\rho(G)) = \lim_{\mu\to\rho(G)} l(\mu).$$

Г. Полиа и Г. Сеге [1] показали, что для любой выпуклой области справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(G) \ge \frac{1}{2}\mathbf{A}(G)\rho(G)^2, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}(G)$ — площадь области G. Равенство в (1) достигается для круга.

Разработанный в [3] метод позволил обосновать неравенство, улучщающее оценку (1):

Теорема 1. *Пусть G – выпуклая область ограниченной площади и $l(\rho(G)) \ne 0$, тогда*

$$\mathbf{P}(G) > \frac{1}{2}\mathbf{A}(G)\rho(G)^2 + \frac{5}{12} l(\rho(G))\rho(G)^3. \tag{2}$$

Экстримальными областями в (2) являются несжимаемые области.

Теорема 2. *Пусть G — выпуклая область на плоскости ограниченной площади, тогда при $\infty > q \ge p \ge 0$*

$$\mathbf{P}(G) \ge \frac{1}{2(q+2)}\left[\frac{(p+1)(p+2)}{\rho(G)^{p-2}}\mathrm{I}_p(G) + \frac{11q+10-6p}{6} l(\rho(G))\rho(G)^3 + \pi q \rho(G)^4\right] \tag{3}$$

Равенство в (3) *достигается для круга.*

Список литературы

1. Полиа Г. и Г. Сегё. *Изопериметрические неравенства в математической физике*. — М.: Физматгиз, 1962. – С. 336

2. Н. Х. Арутюнян. Кручение упругих тел. – М.: Физматгиз, 1963. – 688с.

3. Салахудинов Р. Г. *Изопериметрические свойства евклидовых граничных моментов односвязной области //* — Изв.ВУЗов. Математика. — 2-13, №8, с. 66-79.

ИНВАРИАНТЫ НА КЛАССАХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЖЕСТКИХ ФРЕЙМОВ

В. В. Севостьянова[1]

1 *berlua@mail.ru*; Самарский университет, г. Самара, Россия

Пусть $\mathbb{H}^d$ — гильбертово пространство размерности d над вещественным или комплексным полем $\mathbb{F}$.

Определение 1. Набор векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ в пространстве $\mathbb{H}^d$ будем называть фреймом, если существуют константы $0 < a \leqslant b < \infty$, такие, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^d$,

$$a\|\mathbf{x}\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\langle \mathbf{x}, \varphi_j \rangle|^2 \leqslant b\|\mathbf{x}\|^2.$$

Эквивалентно, конечный фрейм в $\mathbb{H}^d$ можно определить как произвольный полный набор векторов: $\operatorname{span}\{\varphi_j\}_{j=1}^n = \mathbb{H}^d$ ([1]).

Оператором *синтеза* фрейма $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ из $\mathbb{H}^d$ называется $\Phi : \mathbb{F}^n \to \mathbb{H}^d$, $\Phi\mathbf{x} := \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbf{x}(j)\varphi_j$, где $\mathbf{x}(j)$ — j-я координата $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$. Матрица оператора синтеза Φ — $d \times n$-матрица, столбцами которой являются векторы фрейма. Оператором *анализа* называется оператор $\Phi^* : \mathbb{H}^d \to \mathbb{F}^n$, для которого $(\Phi^*\mathbf{y})(j) = \langle \varphi_j, \mathbf{y} \rangle$, $j = 1, \dots, n$. Подробнее о фреймах см. [2,3,4]

Если $a = b$, то имеет место равенство $\Phi\Phi^* = a\mathbf{I}$, и такие фреймы называются *a-жесткими*. 1-жесткие фреймы будем называть *фреймами Парсеваля*. Обозначим через $\mathscr{X}_{d,n}$ многообразие фреймов Парсеваля в $\mathbb{F}^{dn}$. Можно показать, что многообразие $\mathscr{X}_{d,n}$ гладкое и неприводимое, см. [2].

На множестве фреймов можно ввести различные классы эквивалентности.

Определение 2. Фреймы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ называются *унитарно эквивалентными*, если существует унитарное преобразование $\mathbf{U}$, переводящее векторы одного фрейма в векторы другого: $\psi_i = \mathbf{U}\varphi_i$, $\forall i$.

Хорошо известно, что матрицы Грама двух систем векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ совпадают тогда и только тогда, когда эти системы унитарно эквивалентны. Тогда унитарно эквивалентные фреймы однозначно определяются значениями скалярных произведений $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$, $i \leqslant j$.