ГЛАВА 10. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§1. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Одна из основных задач линейной алгебры — задача решения ***линейного уравнения***

$$\mathcal{A}x = y.$$

Здесь

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$$

есть линейный оператор, y — заданный элемент пространства $\mathbf{Y}_m$, а x — искомый элемент пространства $\mathbf{X}_n$.

Будем считать, что уравнение

$$\mathcal{A}x = y$$

имеет решение, и опишем структуру всех его возможных решений, т. е. получим представление *общего решения уравнения*.

Пусть x^1, x^2 — два решения уравнения

$$\mathcal{A}x = y$$

при одной и той же правой части y. Тогда, очевидно,

$$\mathcal{A}(x^1 - x^2) = 0,$$

т. е.

$$x^1 - x^2 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}).$$

.

Фиксируем некоторое решение x^0 уравнения

$$\mathcal{A}x = y.$$

Его называют ***частным решением неоднородного уравнения***:

$$\mathcal{A}x^0 = y.$$

Любое другое решение x уравнения $\mathcal{A}x = y$ имеет вид

$$x = x^0 + \widetilde{x}, \quad \widetilde{x} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}).$$

Действительно,

$$\mathcal{A}\widetilde{x} = \mathcal{A}(x - x^0) = \mathcal{A}x - \mathcal{A}x^0 = y - y = 0,$$

т. е.

$$\widetilde{x} = x - x^0 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}).$$

Имеем

$$x = x^0 + \widetilde{x}, \quad \widetilde{x} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}).$$

Пусть

$$\varphi^1,\, \varphi^2,\, \ldots,\, \varphi^p \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$$

есть некий базис в $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$**. Тогда**

$$x = x^0 + \sum_{k=1}^{p} c_k \varphi^k.$$

Это ***общее решение неоднородного уравнения*****.**

.

Меняя коэффициенты $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_p$ в

$$x = x^0 + \sum_{k=1}^{p} c_k \varphi^k,$$

можно получить любое решение уравнения

$$\mathcal{A}x = y.$$

.

Векторы

$$\varphi^1,\ \varphi^2,\ \ldots,\ \varphi^p$$

называют *фундаментальной системой решений однородного уравнения*

$$\mathcal{A}x = 0.$$

Вектор

$$\widetilde{x} = \sum_{k=1}^{p} c_k \varphi^k$$

называют *общим решением однородного уравнения*.

Итак, общее решение

$$x = x^0 + \widetilde{x}$$

неоднородного уравнения

$$\mathcal{A}x = y$$

есть сумма какого-либо частного решения x^0 этого уравнения и общего решения $\widetilde{x}$ однородного уравнения

$$\mathcal{A}x = 0.$$

§2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ

При фактическом построении решений уравнения

$$\mathcal{A}x = y, \quad \mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m,$$

нужно ввести некоторые базисы

$$\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{X}_n, \quad \mathcal{Q}_m = \{q^k\}_{k=1}^m \subset \mathbf{Y}_m$$

и перейти к СЛАУ относительно коэффициентов ξ разложения

$$x = \mathcal{E}_n \xi,$$

считая известными коэффициенты η разложения

$$y = \mathcal{Q}_m \eta.$$

.

Подставим

$$x = \mathcal{E}\xi, \quad y = \mathcal{Q}\eta$$

в

$$\mathcal{A}x = y.$$

Получим

$$\mathcal{A}\mathcal{E}\xi = \mathcal{Q}\eta,$$

или

$$\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}\xi = \eta.$$

Т. е.

$$A_{eq}\xi = \eta,$$

где A_{eq} — матрица оператора $\mathcal{A}$.

.

Более подробная запись уравнения

$$A_{eq}\xi = \eta$$

дает

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(eq)} \xi_j = \eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Подчеркнем, что коэффициенты $a_{ij}^{(eq)}$ этой системы уравнений (элементы матрицы оператора $\mathcal{A}$) и столбец правой части $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ предполагаются известными, а числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ требуется найти.

Получим необходимые и достаточные условия существования решения $x \in \mathbb{C}^n$ СЛАУ

$$Ax = b,$$

где $A = A(m,n)$ — заданная прямоугольная матрица с комплексными, вообще говоря, элементами, b — заданный вектор из $\mathbb{C}^m$.

Обозначим через

$$(A, b)$$

матрицу размера

$$m \times (n+1),$$

получающуюся присоединением к матрице A столбца b, ее принято называть ***расширенной матрицей системы***

$$Ax = b.$$

.

<u>Теорема Кронекера — Капелли.</u> **Для того, чтобы система уравнений**

$$Ax = b$$

имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц A **и** (A, b) **совпадали:**

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A, b).$$

.

Доказательство. Добавление столбца не уменьшает ранга матрицы:

$$\operatorname{rank}(A) \leqslant \operatorname{rank}(A, b).$$

Ранг сохраняется,

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A, b),$$

тогда и только тогда, когда b есть линейная комбинация столбцов матрицы A. Последнее эквивалентно тому, что существует вектор $x \in \mathbb{C}^n$, являющийся решением системы

$$Ax = b. \ \square$$

Леопольд Кронекер (Leopold Kronecker; 1823 — 1891) — немецкий математик.

Альфредо Капелли (Alfredo Capelli; 1858 — 1916) — итальянский математик.

Матричная теорема Фредгольма. Для того, чтобы система линейных уравнений

$$Ax = b$$

имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения однородной системы уравнений

$$zA = 0$$

выполнялось равенство

$$zb = 0.$$

Здесь b — вектор столбец, z — вектор строка.

.

<u>Доказательство.</u> Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть

$$r = \operatorname{rank}(A).$$

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что первые r строк матрицы A линейно независимы. Понятно, что тогда и первые r строк матрицы (A, b) линейно независимы.

.

Если k-я строка матрицы A линейно выражается через ее первые r строк, то существует вектор

$$z \neq 0$$

такой, что

$$zA = 0.$$

По условию теоремы для этого вектора $z \neq 0$ кроме

$$zA = 0$$

выполняется еще и равенство

$$zb = 0,$$

но это означает, что k-я строка матрицы (A, b) линейно выражается через ее первые r строк, т. е.

$$\operatorname{rank}(A, b) = r.$$

.

Таким образом,

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A, b),$$

и по теореме Кронекера — Капелли система

$$Ax = b$$

имеет решение.

.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть СЛАУ имеет решение, т. е. существует вектор $x \in \mathbb{C}^n$ такой, что

$$Ax = b.$$

Тогда для любого $z \in \mathbb{C}^m$ справедливо равенство

$$zAx = zb.$$

Очевидно, что если

$$zA = 0,$$

то

$$zb = 0. \quad \square$$

Эрик Ивар Фредгольм (Erik Ivar Fredholm; 1866 — 1927) —

шведский математик.

.

<u>Пример.</u> **Дана симметричная матрица**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

порядка n. **Найти** $\operatorname{rank}(A)$ **и описать условия на вектор** $b \in \mathbb{R}^n$, **необходимые и достаточные для разрешимость СЛАУ**

$$Ax = b.$$

Будем трактовать матрицу A как линейный оператор

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Опишем его ядро.

Рассматривая однородную систему уравнений

$$Ax = 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

заметим, что ее i-е уравнение, $i = 2, 3, \ldots, n-1$, записывается так:

$$-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = 0.$$

Равенство

$$-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = 0$$

перепишем в виде

$$x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i, \quad i = 2,\, 3,\, \ldots,\, n-1.$$

Отсюда вытекает, что

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \cdots = x_n - x_{n-1}.$$

Из первого и последнего уравнений системы

$$Ax = 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

имеем

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_n - x_{n-1} = 0.$$

.

Итак

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \cdots = x_n - x_{n-1}$$

и

$$x_2 - x_1 = 0, \quad x_n - x_{n-1} = 0,$$

следовательно,

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Любое решение системы

$$Ax = 0$$

имеет вид

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Значит, $\mathrm{Ker}(A)$ — одномерное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$ векторов вида

$$x^1 = c(1,\ \ldots, 1),$$

где c — произвольное вещественное число.

.

Итак

$$\operatorname{def}(A) = 1,$$

и из формулы

$$\operatorname{def}(A) + \operatorname{rank}(A) = n$$

получаем, что

$$\operatorname{rank}(A) = n - 1.$$

Далее, поскольку матрица A симметрична, применяя матичную теорему Фредгольма, получаем, что для разрешимости системы

$$Ax = b$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$(x^1)^T b = 0,$$

где x^1 — любое решение уравнения

$$Ax = 0.$$

.

Мы получили, что

$$x^1 = c(1, \ldots, 1).$$

Запишем условие

$$(x^1)^T b = 0$$

более подробно:

$$(x^1)^T b = x_1^1 b_1 + x_2^1 b_2 + \cdots + x_n^1 b_n = cb_1 + cb_2 + \cdots + cb_n = 0.$$

Таким образом, необходимым и достаточным условием разрешимости системы уравнений $Ax = b$ является равенство

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 0.$$

§3. ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ СЛАУ

Опишем элементарный способ построения общего решения СЛАУ

$$Ax = b.$$

Начнем с построения частного решения системы

$$Ax = b.$$

Предположим, что условие разрешимости выполнено и положим

$$r = \operatorname{rank}(A, b).$$

.

Приведем матрицу

$$(A, b)$$

к такому виду, что главный минор порядка r этой матрицы будет отличен от нуля, а все строки преобразованной матрицы (A, b), начиная с $(r+1)$-й есть линейные комбинации первых r строк.

Эти преобразования приводят к эквивалентной системе линейных уравнений, причем последние $m-r$ уравнений преобразованной системы — следствия первых r уравнений:

$$\begin{cases} \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases} \\ a_{r+11}x_1 + \ldots + a_{r+1n}x_n = b_{r+1}, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Отбросим эти последние уравнения, а в оставшихся r уравнениях перенесем слагаемые, содержащие переменные с $(r+1)$**-й** до n**-й** (эти переменные принято называть ***свободными***), в правую часть:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Придадим любые значения свободным переменным в системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Чаще всего, нет никаких причин не брать их равными нулю:

$$x_{r+1} = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0.$$

В результате получим систему из r уравнений с r неизвестными, определитель которой по построению отличен от нуля:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1, \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r. \end{cases}$$

Решив эту крамеровскую систему уравнений, найдем

$$x_1, \ \ldots, \ x_r.$$

Таким образом, будет построен вектор

$$x = (x_1, \ \ldots, \ x_r, \ x_{r+1}, \ \ldots, \ x_n),$$

являющийся решением системы

$$Ax = b.$$

<u>Пример.</u> Найдем частное решение системы уравнений

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8,$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20.$$

Имеем

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 20 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A, b) = 2.$$

Чтобы найти частное решение исходной системы, достаточно решить систему из первых двух ее уравнений:

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8.$$

придавая x_3, x_4 произвольные значения. Положим $x_3 = x_4 = 0$:

$$x_1 - x_2 = 4,$$

$$x_1 + x_2 = 8.$$

Находим

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 2,$$

следовательно, решение исходной системы:

$$x = (6,\ 2,\ 0,\ 0).$$

Обратимся теперь к задаче построения фундаментальной системы решений однородной системы уравнений

$$Ax = 0.$$

Пусть

$$\operatorname{rank}(A) = r.$$

Вследствие

$$\dim(\operatorname{Ker}(A)) = n - \operatorname{rank}(A)$$

достаточно построить любые

$$n - r$$

линейно независимых решений. Естественно, предположим, что

$$n > r.$$

Приведем систему уравнений

$$A(m,n)\,x(n,1)=0$$

к эквивалентной системе вида

$$A(r,r)\,x(r,1)+B(r,(n-r))\,y((n-r),1)=0.$$

Здесь $A(r,r)$ — невырожденная матрица, столбец

$$y((n-r),1)$$

соответствует свободным переменным.

.

Выберем векторы

$$y^1((n-r),1), \quad y^2((n-r),1), \ \ldots, \quad y^{n-r}((n-r),1)$$

так, чтобы они были линейно независимы (проще всего их взять как векторы стандартного базиса пространства $\mathbb{C}^{(n-r)}$).

.

По этим векторам из уравнений

$$A(r,r)\,x^k(r,1) = -B(r,(n-r))\,y^k((n-r),1), \quad k=1,\ \ldots,\ n-r,$$

однозначно определятся векторы

$$x^k(r,1), \quad k=1,\ \ldots,\ n-r.$$

.

Образуем теперь векторы $z^k(n,1)$, приписывая к компонентам векторов $x^k(r,1)$ компоненты векторов $y^k((n-r),1)$:

$$z^k(n,1) = (x^k(r,1),\ y^k((n-r),1)), \quad k = 1,\ \ldots,\ n-r.$$

По построению

$$A(m,n)\, z^k(n,1) = 0, \quad k = 1,\ \ldots,\ n-r,$$

кроме того, очевидно, векторы

$$z^k(n,1), \quad k = 1,\ \ldots,\ n-r,$$

линейно независимы, так как векторы

$$y^k((n-r),1), \quad k = 1,\ \ldots,\ n-r,$$

линейно независимы.

Таким образом, векторы

$$z^k, \quad k = 1, \ \ldots, \ n - r,$$

образуют фундаментальную систему линейно независимых решений однородной системы уравнений

$$Ax = 0.$$

Пример. Найдем фундаментальную систему решений однородной системы уравнений

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0.$$

Ранг матрицы этой системы равен двум. Поэтому нужно построить два линейно независимых решения этой системы.

.

Последнее уравнение системы — следствие первых двух. Полагая

$$x_3 = 1, \quad x_4 = 0$$

в уравнениях

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$$

получим

$$x_1 - x_2 = -1,$$

$$x_1 + x_2 = -2,$$

откуда

$$x_1 = -3/2, \quad x_2 = -1/2.$$

.

Полагая же

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 1$$

в уравнениях

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$$

будем иметь

$$x_1 - x_2 = 1,$$

$$x_1 + x_2 = -3,$$

откуда

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -2.$$

Поэтому векторы

$$x^1 = (-3/2,\ -1/2,\ 1,\ 0),$$

$$x^2 = (-1,\ -2,\ 0,\ 1)$$

образуют фундаментальную систему решений системы уравнений

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0.$$

Любой вектор

$$x = c_1(-3/2,\ -1/2,\ 1,\ 0) + c_2(-1,\ -2,\ 0,\ 1),$$

где c_1, c_2 — произвольные числа, есть решение системы

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0,$$

и наоборот, любое ее решение представимо в этом виде при некоторых $c_1,\ c_2$.