И.Б.Бадриев, О.А.Задворнов

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено учебно-методическим Советом по прикладной математике и информатике Учебно-методического объединения по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 010200 “Прикладная математика и информатика” и по направлению 510200 “Прикладная математика и информатика”

Казань
Казанский государственный университет
имени В.И.Ульянова-Ленина
2007

УДК 519.6
ББК 22.193+22.162
И92

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Казанского государственного университета
Научный редактор
Доктор физико-математических наук, профессор КГУ А.Д.Ляшко
Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор МГУ А.В.Гулин,
Доктор физико-математических наук, профессор МФТИ Е.И.Леванов

Бадриев И.Б., Задворнов О.А.
И92 Итерационные методы решения вариационных неравенств в гильбертовых пространствах. Учебное пособие. Издание 2-е, исправленное и дополненное. – Казань: Казанский государственный университет, 2007. – 152 с.

ISBN 978-98180-445-8

Пособие посвящено изучению итерационных методов решения вариационных неравенств второго рода с операторами монотонного типа и недифференцируемыми функционалами в гильбертовых пространствах. Подобные вариационные неравенства возникают, в частности, при математическом моделировании широких классов задач механики сплошной среды.

Предназначено для студентов старших курсов университетов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области применения методов математического моделирования.

УДК 519.6
ББК 22.193+22.162

ISBN 978-98180-445-8

Оглавление

Предисловие ко второму изданию.

Во втором издании учебного пособия исправлены опечатки и неточности, допущенные в первом издании. В методических целях несколько расширена часть доказательств. В третью главу добавлен материал, посвященный итерационным методам нижней релаксации и регуляризации поиска неподвижных точек нерастягивающих операторов.

Мы благодарны всем читателям, приславшим свои отклики. Особую признательность выражаем проф. Карчевскому М.М., сделавшему ряд полезных замечаний, которые мы максимально постарались учесть при подготовке настоящего издания.

Бадриев И.Б., Задворнов О.А.

Введение.

Настоящее учебное пособие посвящено построению и исследованию итерационных методов решения вариационных неравенств второго рода

$$u \in M: \quad (Au, \eta - u) + F(\eta) - F(u) \geq (f, \eta - u) \qquad \forall\, \eta \in M$$

с оператором A монотонного типа (псевдомонотонным, обратно сильно монотонным, сильно монотонным) и выпуклым, вообще говоря, недифференцируемым функционалом F на выпуклом замкнутом множестве M в гильбертовом пространстве V.

Такие вариационные неравенства возникают, в частности, при математическом моделировании широких классов задач механики сплошной среды. Однако, имеющиеся литературные источники посвящены, в основном, изложению приближенных методов решения вариационных неравенств с линейными операторами. Данное пособие, написанное по материалам специальных курсов, читавшихся авторами на протяжении ряда лет студентам старших курсов факультета вычислительной математики и кибернетики Казанского государственного университета, специализирующихся в области численных методов решения задач математической физики, призвано восполнить этот пробел. В пособии мы ограничиваемся случаем вариационных неравенств в гильбертовых пространствах. Однако, необходимо отметить, что некоторые из результатов, приведенных в пособии, имеют место и для рефлексивных банаховых пространств.

Сначала дается изложение основных результатов функционального и выпуклого анализа, включая такие специальные вопросы, как производная Гато функционала, теория монотонных и псевдомонотонных операторов, субдифференциальное исчисление. Этот материал приведен в настоящем пособии для замкнутости изложения, с одной стороны, и постольку, поскольку разные его части содержатся в многочисленных пособиях по функциональному анализу и монографиях, с другой стороны. При этом требуется знание лишь элементарных основ функционального анализа.

Это позволяет избежать ссылок на известные результаты классического функционального анализа, не говоря уже о его специальных разделах. Естественно, мы не претендуем на полноту изложения основ функционального анализа, а ограничиваемся лишь теми результатами, которые будут нужны в дальнейшем. При этом доказательства некоторых из этих результатов мы намеренно приводим специально приспособленными для случая гильбертова пространства, хотя они и являются следствием более общих теорем (теорема Хана-Банаха, теорема об отделимости выпуклых множеств, теорема Банаха-Штейнгауза и т.д.). Затем эти результаты применяются при исследовании итерационных методов.

В первой главе приведены элементы теории гильбертовых пространств: основные определения, результаты о проекции на замкнутое выпуклое множество и на подпространство, теорема об ортогональном разложении и теорема Рисса-Фишера о представлении линейных непрерывных функционалов, свойства выпуклых функционалов. Доказываются результаты, связанные со слабой сходимостью (в частности, теорема об ограниченности слабо сходящейся последовательности, теорема о существовании слабо сходящейся подпоследовательности у ограниченной последовательности и т.д.). Рассматриваются основные свойства слабо полунепрерывных снизу функционалов, вводится понятие проксимального отображения и изучаются его свойства. Наконец, устанавливаются результаты о разрешимости вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами.

Во второй главе собраны некоторые результаты выпуклого анализа: вводится понятие производной Гато функционала и устанавливаются основные ее свойства, доказываются теоремы существования для задач на минимум функционала. Приводятся результаты об эквивалентности этих задач вариационным неравенствам. Доказаны теоремы об отделимости выпуклых множеств. Значительное внимание уделено также вопросам субдифференциального исчисления. Доказаны теоремы о субдифференцировании суммы функционалов и субдифференцировании сложной функции.

Последующие главы посвящены построению и исследованию итерационных процессов решения вариационных неравенств второго рода с операторами монотонного типа в гильбертовых пространствах.

В третьей главе рассматривается метод последовательных приближений для поиска неподвижных точек операторов в гильбертовом пространстве. Устанавливается слабая сходимость метода последовательных приближений к некоторой неподвижной точке асимптотически регулярного нерастягивающего оператора в предположении о существовании у него неподвижной точки. Доказывается асимптотическая регулярность жестко нерастягивающего оператора также в предположении о наличии у него неподвижной точки. Затем для сжимающего отображения устанавливается существование единственной неподвижной точки и сильная сходимость к ней последовательных приближений. Эти результаты используются впоследствии при исследовании сходимости итерационных методов решения изучаемых вариационных неравенств.

В четвертой главе рассматриваются проективные итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода, которые позволяют свести исходное вариационное неравенство к вариационному неравенству с оператором канонического изоморфизма.

Исследование сходимости этого метода основано на сведении его к методу последовательных приближений для отыскания неподвижной точки оператора перехода итерационного метода. Благодаря использованию понятия проксимального отображения удается выписать явный вид оператора перехода. Доказано неравенство, более сильное, чем неравенство нерастягиваемости, что и позволило получить результаты о сходимости метода.

Сначала рассматриваются неравенства с обратно сильно монотонными операторами. Доказывается слабая сходимость последовательности итерационных приближений к решению изучаемого вариационного неравенства. В случае, когда оператор является сильно монотонным и липшиц-непрерывным, доказана сильная сходимость метода.

Затем рассмотрен метод итеративной регуляризации для вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами, позволяющий свести исходную задачу к вариационному неравенству второго рода с оператором канонического изоморфизма вместо исходного псевдомонотонного оператора и регуляризованным функционалом. Доказана слабая сходимость итерационной последовательности. Особую привлекательность данный метод имеет в случае, когда регуляризованный функционал становится дифференцируемым. Следует отметить, что путем незначительной модификации доказательства можно доказать сходимость итерационного метода и без регуляризации.

Наконец, в пятой главе изучаются итерационные методы для решения вариационных неравенств в случае, когда функционал имеет специальный вид – является суперпозицией выпуклого функционала и линейного непрерывного оператора. Исследуется сходимость метода как для обратно сильно монотонных, так и сильно монотонных операторов. В последнем случае удается получить более сильные результаты о сходимости метода.

Так же, как и в четвертой главе, исследование сходимости метода основано на сведении его к методу последовательных приближений для отыскания неподвижной точки оператора перехода итерационного метода. Благодаря использованию понятия проксимального отображения удается выписать явный вид оператора перехода. Доказано неравенство, более сильное, чем неравенство нерастягиваемости, что и позволило получить результаты о сходимости метода.

Как уже отмечалось выше, рассматриваемые в пособии вариационные неравенства возникают при решении многих прикладных задач. Отметим здесь, в частности, стационарные задачи фильтрации аномальных жидкостей (нефтей), следующих нелинейному разрывному закону фильтрации с предельным градиентом (см. [1], [2], [23], [25], [29]), задачи об определении границ предельно равновесных целиков остаточной вязкопластической нефти (см. [14] – [18]), задачи об определении положения равновесия мягких сетчатых оболочек (см. [4], [9], [30]), задачи течения жидкостей Бингама (см. [12], [26]), теории взрыва (см. [19], [22]) и др. В ряде работ, в том числе, в работах авторов, проводилось применение рассмотренных в пособии методов к решению некоторых из указанных выше задач. Изучение этого материала, вопросы конечномерной аппроксимации заслуживают, на наш взгляд, отдельного рассмотрения. Необходимо отметить, что рассмотренные в настоящем пособии методы, естественно, применимы для этих аппроксимаций, а также для аппроксимаций вариационных неравенств в банаховых пространствах, причем, очевидно, имеют место результаты о сильной сходимости рассматриваемых методов.

В пособии принята сквозная нумерация параграфов (без указания номера главы). При этом двойные номера теорем, лемм, следствий, примеров, замечаний, определений и формул содержат сначала номер параграфа, а затем – порядковый номер нумеруемого объекта. Нумерация же ссылок – своя в каждой главе.

Для удобства читателей окончания теорем, лемм, следствий, примеров и замечаний обозначаются значком ■, а окончания определений – значком ♢.

Мы благодарим профессора Анатолия Дмитриевича Ляшко, а также участников руководимого им научно-методического семинара за полезные замечания, которые были учтены в работе над настоящим пособием.

Мы были бы весьма благодарны читателям, приславшим свои замечания и предложения по данному пособию по E-mail:

Ildar.Badriev@ksu.ru или Oleg.Zadvornov@ksu.ru.

В заключение хотим отметить, что некоторые из результатов, приведенных в последних двух главах пособия были получены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 03-01-00380, 06-01-00633, 07-01-00674).

Глава 1

Элементы функционального анализа

В данной главе содержатся элементы теории гильбертовых пространств. Приводятся основные определения и доказываются некоторые результаты, используемые в дальнейшем. Доказательства некоторых из этих результатов мы приводим специально приспособленными для случая гильбертова пространства, хотя они и являются следствием более общих теорем функционального анализа.

Рассматриваются проекции на замкнутое выпуклое множество и на подпространства, устанавливаются свойства этих проекций. Доказываются теорема об ортогональном разложении, теорема Рисса-Фишера о представлении линейных непрерывных функционалов и теорема Хана-Банаха о продолжении линейных непрерывных функционалов. Затем вводятся в рассмотрение выпуклые функционалы и изучаются их свойства. Доказываются результаты, связанные со слабой сходимостью (в частности, теорема об ограниченности слабо сходящейся последовательности и теорема о существовании слабо сходящейся подпоследовательности у ограниченной последовательности и т.д.). Затем приводятся основные свойства слабо полунепрерывных снизу функционалов, вводятся так называемые проксимальные отображения и изучаются их свойства. Наконец, устанавливаются результаты о разрешимости вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами.

1 Гильбертовы пространства. Проекция на выпуклое замкнутое множество.

Определение 1.1. *Непустое множество V элементов (векторов) u, v, $w, \ldots$ называется действительным линейным (векторным) пространством, если выполнены следующие условия:*

I. Для любых двух элементов $u, v \in V$ определен третий элемент из V, называемый их суммой и обозначаемый $u + v$, причем

I.1) $u + v = v + u$ (коммутативность);

I.2) $u + (v + w) = (u + v) + w$ (ассоциативность);

I.3) в V существует такой элемент 0, что $u + 0 = u$ для всех $u \in V$ (существование нуля);

I.4) для каждого $u \in V$ существует такой элемент $-u$, что $u + (-u) = 0$ (существование противоположного элемента);

II. Для любого действительного числа α и любого элемента $u \in V$ определен элемент $\alpha\, u \in V$ (произведение элемента u на число α), причем

II.1) $\alpha(\beta\, u) = (\alpha\, \beta)\, u$ (ассоциативность);

II.2) $1 \cdot u = u$;

II.3) $(\alpha + \beta)\, u = \alpha\, u + \beta\, u$ (дистрибутивность относительно сложения чисел);

II.4) $\alpha\, (u + v) = \alpha\, u + \alpha\, v$ (дистрибутивность относительно сложения векторов). $\diamondsuit$

В дальнейшем вместо $u + (-v)$ будем писать $u - v$. Благодаря ассоциативности сложения и умножения на число в выражениях вида $u + (v + w)$, $(u + v) + w$, $\alpha(\beta\, u)$, $(\alpha\, \beta)\, u$ скобки будем опускать.

Определение 1.2. *Система векторов $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ линейного пространства V называется линейно-независимой, если из равенства*

$$\alpha_1\, u_1 + \alpha_1\, u_1 + \cdots + \alpha_n\, u_n = 0$$

следует, что $\alpha_k = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$.

Линейное пространство V называется конечномерным пространством размерности n, если в нем существует линейно-независимая система векторов $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ такая, что любой элемент $u \in V$ может быть представлен в виде линейной комбинации элементов этой системы:

$$u = \sum_{k=1}^{n} c_k\, u_k\,.$$

Указанная линейно–независимая система векторов называется базисом в V. $\diamondsuit$

Ясно, что все элементы линейно-независимой системы – ненулевые.

Определение 1.3. *Действительное линейное пространство V называется нормированным, если на нем определен функционал* [1]*) $\| \cdot \|$ (норма), удовлетворяющий следующим условиям:*

I. $\|u\| \geq 0$ для любого $u \in V$, причем $\|u\| = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$;

II. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ для любых $u, v \in V$ (неравенство треугольника);

III. $\|\alpha\, u\| = |\alpha|\, \|u\|$ для любого $u \in V$ и любого числа α. $\diamondsuit$

Из неравенства треугольника вытекает следующее часто используемое неравенство:

$$\Big| \|u\| - \|v\| \Big| \leq \|u - v\| \qquad \forall\, u, v \in V. \tag{1.1}$$

Определение 1.4. *Будем говорить, что последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится сильно к $u \in V$ при $n \to +\infty$, если $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n - u\| = 0$. В дальнейшем сильную сходимость будем обозначать следующим образом: $u_n \to u$ при $n \to +\infty$.* $\diamondsuit$

Отметим, что предел сходящейся последовательности определяется единственным образом. Действительно, пусть

$$\lim_{n \to +\infty} \|u_n - u\| = 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \|u_n - v\| = 0.$$

Тогда

$$\|v - u\| \leq \lim_{n \to +\infty} \big[\, \|v - u_n\| + \|u_n - u\| \,\big] = 0,$$

т.е. $u = v$.

Определение 1.5. *Последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset V$ называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0(\varepsilon)$, такой что*

$$\| \, u_n - u_m \, \| \leq \varepsilon \qquad \forall\, n, m \geq n_0(\varepsilon). \, \diamondsuit$$

Нетрудно проверить, что сильно сходящаяся последовательность является фундаментальной. Обратное, вообще говоря, неверно. Действительно, рассмотрим линейное пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций. Введем на нем норму по по формуле

$$\|u\| = \int\limits_0^1 |\, u(x) \,|\, dx.$$

[1]) Под функционалом мы понимаем отображение на множество вещественных чисел R^1.

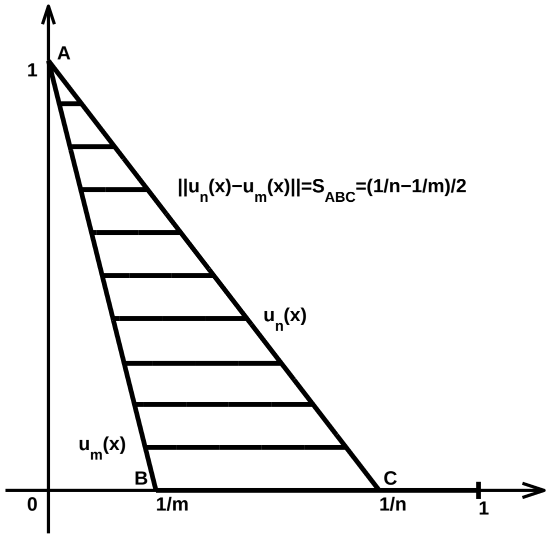

Рис. 1.1:

Рассмотрим последовательность непрерывных функций (см. рис. 1.1) $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$,

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & 1/n \le x \le 1, \\ -n\,x + 1, & 0 \le x \le 1/n. \end{cases}$$

При $m \ge n$ имеем

$$u_n(x) - u_m(x) = \begin{cases} 0, & 1/n \le x \le 1, \\ -n\,x + 1, & 1/m \le x \le 1/n, \\ (m-n)\,x, & 0 \le x \le 1/m, \end{cases}$$

следовательно,

$$\|u_n - u_m\| = \int\limits_0^1 |\,u_n(x) - u_m(x)\,|dx = \int\limits_{1/m}^{1/n} (-n\,x+1)dx + \int\limits_0^{1/n} (m-n)\,x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \le \frac{1}{2\,n} \le \varepsilon \ \text{ при } \ m \ge n \ge n_0 \ge \frac{1}{2\,\varepsilon}\,,$$

т.е. последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ является фундаментальной. С другой стороны, эта последовательность, как нетрудно проверить, сходится по указанной норме к разрывной функции

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x = 0 \le 1/n, \end{cases}$$

не принадлежащей введенному выше нормированному пространству, т.е. в этом пространстве последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ не является сходящейся.

Определение 1.6. *Линейное нормированное пространство V называется полным, если любая фундаментальная последовательность элементов из V сходится сильно.* $\diamondsuit$

Определение 1.7. *Действительное линейное пространство V называется евклидовым, если на $V \times V$ [2]) определен функционал $(\cdot,\cdot)$ (скалярное произведение), удовлетворяющий следующим условиям:*

I. $(u,v) = (v,u)$ для любых $u,v \in V$ (симметричность);

II. $(\alpha\, u + \beta\, v, w) = \alpha\,(u,w) + \beta\,(v,w)$ для любых $u,v,w \in V$ и любых чисел α,β (линейность);

III. $(u,u) \geq 0$ для любого $u \in V$, причем $(u,u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$. $\diamondsuit$

В любом евклидовом пространстве можно ввести задать норму по формуле $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$. Для проверки этого утверждения установим, что справедлива

Лемма 1.1. *Пусть $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$. Тогда для любых $u,\eta \in V$ справедливо неравенство Коши-Буняковского [3])*

$$\Big|(u,\eta)\Big| \leq \|u\|\,\|\eta\|.$$

Доказательство. Если $\eta = 0$, то требуемое неравенство, очевидно, имеет место. Предположим поэтому, что $\eta \neq 0$. Тогда для произвольного числа λ имеем

$$0 \leq \|u - \lambda\,\eta\|^2 = \|u\|^2 - 2\,\lambda\,(u,\eta) + \lambda^2\,\|\eta\|^2.$$

Полагая в этом неравенстве $\lambda = (u,\eta)/\|\eta\|^2$, получим

$$0 \leq \|u\|^2 - 2\,|(u,\eta)|^2/\|\eta\|^2 + |(u,\eta)|^2\,\|\eta\|^2/\|\eta\|^4 = \|u\|^2 - |(u,\eta)|^2/\|\eta\|^2,$$

откуда и вытекает необходимое неравенство. $\blacksquare$

Из неравенства Коши-Буняковского для любых $u,\eta \in V$ имеем

$$\|u+\eta\|^2 = \|u\|^2 + 2\,(u,\eta) + \|\eta\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\,\|u\|\,\|\eta\| + \|\eta\|^2 = (\|u\| + \|\eta\|)^2\,,$$

откуда следует неравенство треугольника. Проверка остальных аксиом нормы не представляет особого труда.

---

[2]) Для множеств X, Y через $X \times Y$ обозначается множество (называемое прямым произведением X и Y) всевозможных пар $\{x,y\}$, где $x \in X$, $y \in Y$.

[3]) В англоязычной литературе это неравенство называется неравенством Шварца.

Непосредственно из определения скалярного произведения и соответствующей ему нормы вытекает так называемое тождество параллелограмма [4]) :

$$\left\| \frac{u+\eta}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-\eta}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\,\|u\|^2 + \frac{1}{2}\,\|\eta\|^2 \qquad \forall\, u, \eta \in V. \tag{1.2}$$

Определение 1.8. *Элементы u, η из V называются ортогональными, если $(u, \eta) = 0$.*

Элемент $u \in V$ называется ортогональным к множеству $M \subset V$, если он ортогонален любому $\eta \in M$. При этом записывают $u \perp M$. $\diamondsuit$

Определение 1.9. *Полное евклидово пространство V называется гильбертовым.* $\diamondsuit$

Лемма 1.2. *В конечномерном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис, т.е. векторы, его составляющие, являются единичными (их нормы равны 1) и попарно ортогональными.*

Доказательство. Пусть V_n – конечномерное евклидово пространство размерности n, т.е. в нем существует базис $\{u_k\}_{k=1}^{n}$. При помощи процесса Грама-Шмидта по этому базису можно построить ортонормированную систему векторов $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ следующим образом.

Поскольку система $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ линейно независима, то $u_1 \neq 0$. Пусть $e_1 = u_1/\|u_1\|$. Для $k = 2, 3, \ldots n$ положим

$$e_k = \tilde{e}_k/\|\tilde{e}_k\|\,, \qquad \tilde{e}_k = u_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{k\,j}\, e_j\,,$$

где коэффициенты $\alpha_{k\,m}$ определяются из условия ортогональности $\tilde{e}_k$ векторам e_m, $m = 1, 2, \ldots k-1$:

$$0 = (\tilde{e}_k, e_m) = (u_k, e_m) + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{k\,j}\,(e_j, e_m) = (u_k, e_m) + \alpha_{k\,m},$$

т.е. $\alpha_{k\,m} = -(u_k, e_m)$. При этом векторы u_k, $k = 1, 2, \ldots n$, являются линейными комбинациями векторов e_k, $k = 1, 2, \ldots n$:

$$u_k = e_k\,\|\tilde{e}_k\| - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{k\,j}\, e_j, \qquad k = 1, 2, \ldots n.$$

[4]) В случае, когда $V = R^2$ это тождество означает, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.

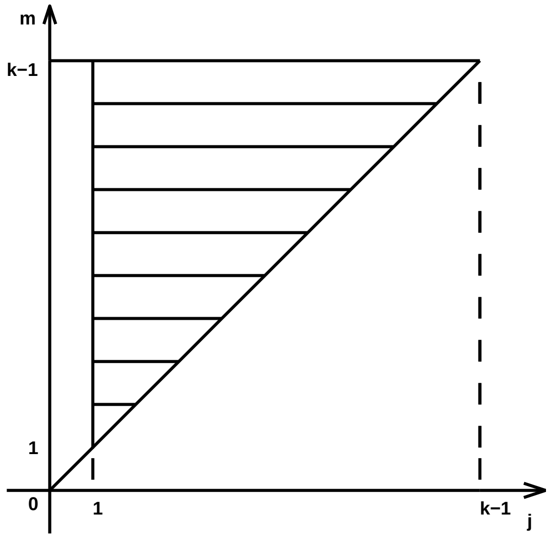

Рис. 1.2:

Поэтому любой элемент из V_n, являющийся линейной комбинацией векторов u_k, $k = 1, 2, \dots n$, является и линейной комбинацией векторов e_k, $k = 1, 2, \dots n$. Кроме того, нетрудно проверить, что любая ортонормированная система векторов является линейно-независимой, а значит, построенная нами ортонормированная система является базисом в V.

Для завершения доказательства установим, что все элементы $\tilde{e}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, отличны от нуля. Имеем, что $e_1 = u_1/\|u_1\| = \beta_{11} u_1$, а значит,

$$\tilde{e}_2 = u_2 + \alpha_{21} e_1 = u_2 + \alpha_{21} \beta_{11} u_1 \neq 0,$$

поскольку $\tilde{e}_2$ – линейная комбинация элементов u_1, u_2 с ненулевым коэффициентом при u_2. Далее, $e_2 = \tilde{e}_2/\|\tilde{e}_2\| = \beta_{21} u_1 + \beta_{22} u_2$. Пусть

$$e_j = \sum_{m=1}^{j} \beta_{j\,m} u_m, \quad \tilde{e}_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k-1.$$

Докажем, что эти соотношения имеют место и для $j = k$. Имеем

$$\tilde{e}_k = u_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{k\,j} e_j = u_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{k\,j} \sum_{m=1}^{j} \beta_{j\,m} u_m .$$

Меняя местами порядок суммирования (пределы индексов суммирования изменятся при этом в соответствии с рис. 1.2), получим, что

$$\tilde{e}_k = u_k + \sum_{m=1}^{k-1} \left(\sum_{j=m}^{k-1} \alpha_{k\,j} \beta_{j\,m} \right) u_m = u_k + \sum_{m=1}^{k-1} \tilde{\beta}_{k\,m} u_m \neq 0,$$

ибо $\tilde{e}_k$ является линейной комбинацией линейно-независимых элементов u_m, $m = 1, 2, \ldots, k$ с ненулевым коэффициентом при u_k. При этом

$$e_k = u_k/\|\tilde{e}_k\| + \sum_{m=1}^{k-1} \tilde{\beta}_{k\,m}\, u_m/\|\tilde{e}_k\| = \sum_{m=1}^{k} \beta_{k\,m}\, u_m\,,$$

и в силу метода математической индукции получаем требуемое. ■

Определение 1.10. *Множество $M \subset V$ называется выпуклым, если для любых u, η из M и любого числа $\lambda \in [0,1]$*

$$\lambda\, u + (1 - \lambda)\, \eta \in M.$$

Пустое множество считается выпуклым по определению. $\diamondsuit$

Если V – конечномерное евклидово пространство, то выпуклость множества M означает, что для произвольных точек из M отрезок, их соединяющий, принадлежит M.

Определение 1.11. *Множество $M \subset V$ называется замкнутым, если предел любой сходящейся сильно последовательности элементов из M принадлежит этому множеству. Пустое множество считается замкнутым по определению.*

Замыканием $\overline{M}$ множества M называется объединение M с множеством всех его предельных точек (т.е. пределов сходящихся последовательностей из M). $\diamondsuit$

Определение 1.12. *Замкнутым и открытым шаром радиуса r с центром в точке u называются, соответственно, множества* [5]

$$B_r(u) = \{\,\eta \in V:\ \|\eta - u\| \le r\,\}\,,\ B_r^{\circ}(u) = \{\,\eta \in V:\ \|\eta - u\| < r\,\}. \diamondsuit$$

Определение 1.13. *Точка u_0 называется внутренней точкой множества M, если M содержит некоторый шар*

$$B_r(u_0) = \{u \in M : \|u - u_0\| \le r\,,\ r > 0\}\,.$$

Множество всех внутренних точек M обозначается через $\operatorname{int} M$. $\diamondsuit$

[5] Из неравенства (1.1) вытекает, что замкнутый шар действительно является замкнутым множеством.

Теорема 1.1. *Пусть M – выпуклое, замкнутое множество. Тогда для всякого $v \in V$ существует единственный элемент u из M такой, что*

$$\|u - v\| = \inf_{\eta \in M} \|\eta - v\| \; . \tag{1.3}$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что поскольку величина $\|\eta - v\|$ ограничена снизу (нулем), то существует

$$d = \inf_{\eta \in M} \|\eta - v\| \; .$$

Согласно определению точной нижней грани найдется минимизирующая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset M$:

$$d = \lim_{n \to +\infty} \|u_n - v\| \; . \tag{1.4}$$

Так как M выпукло, то $\dfrac{u_n + u_m}{2} \in M$, и, следовательно,

$$\|(u_n + u_m)/2 \; - v\,\| \geq d \qquad \forall\, n, m \geq 1.$$

Из тождества параллелограмма (1.2) имеем:

$$\left\| \frac{u_n - u_m}{2} \right\|^2 = \left\| \frac{u_n - v - (u_m - v)}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\,\|u_n - v\|^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\|u_m - v\|^2 - \left\| \frac{u_n + u_m}{2} \; - v \right\|^2 \leq \frac{1}{2}\,\|u_n - v\|^2 + \frac{1}{2}\,\|u_m - v\|^2 - d^2.$$

Устремляя n и m к $+\infty$, получим $\lim\limits_{n,\, m \to +\infty} \|u_n - u_m\,\| = 0$, т.е. последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ фундаментальна, а потому она сходится сильно к некоторому $u \in V$. Но множество M замкнуто, следовательно, $u \in M$. При этом $d \leq \|u - v\,\| \leq \|u - u_n\,\| + \|u_n - v\,\|$, поэтому в силу (1.4)

$$d \leq \|u - v\,\| \leq \lim_{n \to +\,\infty} \|u - u_n\,\| + \lim_{n \to +\,\infty} \|u_n - v\,\| = \lim_{n \to +\,\infty} \|u_n - v\,\| = d,$$

откуда вытекает, что

$$\|u - v\,\| = d = \inf_{\eta \in M} \|\eta - v\| \; ,$$

а значит, u – решение задачи (1.3).

Докажем теперь единственность решения задачи (1.3). Предположим, что $u_1, u_2 \in M$ – элементы, такие, что

$$\|v-u_1\| = \|v-u_2\| = \inf_{\eta\in M} \|v-\eta\| = d.$$

Тогда $(u_n+u_m)/2 \in M$ в силу выпуклости множества M, и поэтому

$$\|(u_1+u_2)/2 \, - v \,\| \geq d.$$

Пользуясь тождеством параллелограмма (1.2), получаем

$$\left\| \frac{u_1-u_2}{2} \right\|^2 = \left\| \frac{u_1-v-(u_2-v)}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\,\|u_1-v\|^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\,\|u_2-v\|^2 - \left\| \frac{u_1+u_2}{2} \, - v \right\|^2 \leq \frac{d^2}{2} + \frac{d^2}{2} - d^2 = 0,$$

и значит, $u_1 = u_2$. ■

Определение 1.14. *Элемент $u \in M$, являющийся решением задачи (1.3), называется проекцией точки v на множество M.*

Отображение $P_M : V \to M$ [6]), сопоставляющее элементу $v \in V$ его проекцию $P_M v = u$ на множество M, называется оператором проектирования на M. ◇

Теорема 1.2. *Пусть M – выпуклое множество. Тогда для любого $v \in V$ задача (1.3) эквивалентна вариационному неравенству*

$$u \in M: \quad (u-v, \eta-u) \geq 0 \qquad \forall\, \eta \in M, \tag{1.5}$$

Доказательство. Пусть $u \in M$ – решение задачи (1.3). Для произвольных $\eta \in M$, $t \in (0,1)$ в силу выпуклости M имеем, что

$$w = (1-t)\,u + t\,\eta = u + t\,(\eta-u) \in M,$$

следовательно,

$$\|u-v\|^2 \leq \|w-v\|^2 = \|u-v+t\,(\eta-u)\|^2 =$$

$$= \|u-v\|^2 + t^2\,\|\eta-u\|^2 + 2\,t\,(u-v,\eta-u) \qquad \forall\, \eta \in M,$$

[6]) Под записью $A : X \to Y$ мы понимаем задание отображения (оператора) A, определенного на множестве X со значениями в множестве Y.

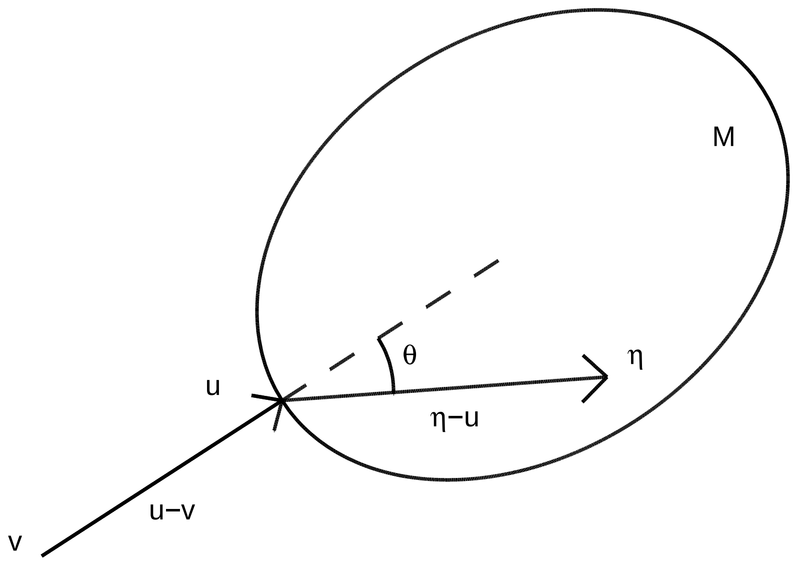

Рис. 1.3: Проекция на выпуклое замкнутое множество

откуда вытекает, что

$$t\,\|\eta-u\|^2+2\,(u-v,\eta-u)\geq 0\qquad\forall\,\eta\in M.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $t\to+0$, получаем, что u – решение задачи (1.5).

Пусть теперь u – решение задачи (1.5). Тогда

$$0\leq(u-v,\eta-u)=(u-v,\eta-v+v-u)=$$
$$=(u-v,\eta-v)-\|u-v\|^2\qquad\forall\,\eta\in M,$$

следовательно,

$$\|u-v\|^2\leq(u-v,\eta-v)\leq\|u-v\|\,\|\eta-v\|\qquad\forall\,\eta\in M,$$

откуда вытекает, что u – решение задачи (1.3). $\blacksquare$

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что для любых элементов $|\,(u,\eta)\,|\,/(\|u\|\,\|\eta\|)\leq 1$, следовательно, найдется такой угол $\theta\in[0,\pi]$, что $\cos\theta=(u,\eta)/(\|u\|\,\|\eta\|)$.Этот угол называют углом между элементами u,η (если u и η ортогональны, то угол между ними равен $\pi/2$).

Неравенство (1.5), следовательно, означает, что угол между векторами $u-v$ и $\eta-u$ должен быть не больше $\pi/2$ (т.е. острым) для всех $\eta\in M$ (см. рис. 1.3).

Из теорем 1.1, 1.2 вытекает следующая теорема об отделимости.

Теорема 1.3. *Пусть M– выпуклое, замкнутое множество, $v \notin M$. Тогда существуют такие ненулевой элемент $y \in V$ и число $\varepsilon > 0$, что*

$$\sup_{\eta \in M}(y, \eta) \le (y, v) - \varepsilon.$$

Доказательство. Поскольку M – выпуклое, замкнутое множество, то существует проекция $u \in M$ элемента v на множество M, причем в силу теоремы 1.2 элемент u является решением вариационного неравенства

$$(u - v, \eta - u) \ge 0 \qquad \forall\, \eta \in M.$$

Имеем

$$0 \le (u - v, \eta - u) = -(v - u, \eta - v + v - u) =$$
$$= -\|v - u\|^2 - (v - u, \eta - v) \qquad \forall\, \eta \in M,$$

откуда, обозначив $\varepsilon = \|v - u\|^2 = \|y\|^2 > 0$, $y = v - u$ ($y \ne 0$, поскольку $v \notin M$, $u \in M$), получаем:

$$(y, \eta) \le (y, v) - \varepsilon \qquad \forall\, \eta \in M.$$

Из этого неравенства и вытекает необходимое утверждение. ■

2 Проекция на подпространство. Линейные непрерывные функционалы.

Определение 2.1. *Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_H$ и нормой $\| \cdot \|_H$. Оператор $A : V \to H$ называется:*

– ограниченным, если для любого $R > 0$ существует $C_R > 0$, такое, что

$$\|Au\|_H \le C_R \qquad \forall\, u \in B_R(0); \tag{2.1}$$

– линейным, если

$$A(\alpha\, u + \beta\, \eta) = \alpha\, A(u) + \beta\, A(\eta) \qquad \forall\, u, \eta \in V, \forall\, \alpha, \beta \in R^1;$$

– непрерывным, если $Au_n \to Au$ в H при $u_n \to u$ в V. ♢

Для линейного оператора $A : V \to H$ ограниченность эквивалентна существованию такой постоянной $c > 0$, что

$$\|Au\|_H \le c\,\|u\| \qquad \forall\, u \in V. \tag{2.2}$$

Действительно, очевидно, что из (2.2) вытекает (2.1). Пусть теперь выполнено (2.1). Допустим, что (2.2) не имеет места, т.е. существует такой элемент $u^* \neq 0$, что $\|Au^*\|_H > c\,\|u^*\|$ для любого $c > 0$. Выберем в этом неравенстве $c = 4\,C_R/R$ и положим $u = R\,u^*/(2\,\|u^*\|)$. Ясно, что с одной стороны, $u \in B_R(0)$, а с другой стороны,

$$\|Au\|_H = \|Au^*\|_H \,\frac{R\,u^*}{2\,\|u^*\|} > c\,\|u^*\|\,\frac{R\,u^*}{2\,\|u^*\|} = 2\,C_R > C_R\,,$$

что противоречит (2.1).

В соответствии с определением 2.1 функционал $F : V \to R^1$ будет непрерывным, если

$$\lim_{u_n \to u} F(u_n) = F(u),$$

а линейный функционал $F : V \to R^1$ – ограниченным, если существует такая постоянная $c > 0$, что

$$|F(\eta)| \le c\,\|\eta\| \qquad \forall\,\eta \in V.$$

Определение 2.2. *Множество $L \subset V$ называется линейным многообразием, если оно содержит любые линейные комбинации своих элементов. Замкнутое линейное многообразие называется подпространством V.* $\diamondsuit$

Непосредственно из определения вытекает, что если $L \subset V$ – линейное многообразие, то оно содержит нулевой элемент.

Теорема 2.1 (об ортогональном разложении). *Пусть L – подпространство V, $v \in V$. Тогда существуют такие элементы $v_1 \in L$, $v_2 \perp L$, что $v = v_1 + v_2$ (см. рис. 1.4). Это ортогональное разложение единственно.*

Доказательство. Поскольку L – подпространство V, то оно замкнуто. Кроме того, множество L, очевидно, выпукло. Поэтому в силу теоремы 1.1 существует единственный элемент $v_1 \in L$, являющийся проекцией v на L. Для v_1 по теореме 1.2 выполнено неравенство

$$(v_1 - v, \eta - v_1) \ge 0 \qquad \forall\,\eta \in L.$$

Пусть u – произвольный элемент из L, тогда $v_1 \pm u \in L$. Полагая в предыдущем неравенстве $\eta = v_1 \pm u$, $v_2 = -(v_1 - v)$, получим

$$\mp\,(v_2, u) \ge 0 \qquad \forall\,u \in L,$$

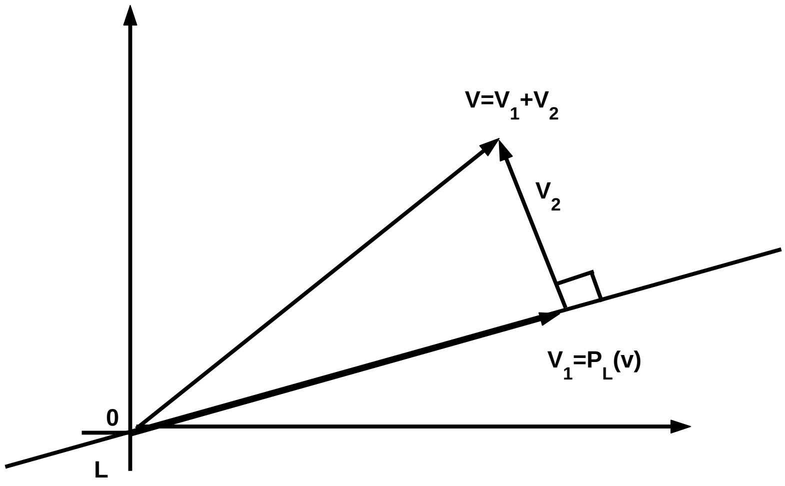

Рис. 1.4: Проекция на подпространство

откуда следует, что

$$(v_2, u) = 0 \qquad \forall\, u \in L.$$

Поскольку $v = v_1 + v_2$, то мы получили существование ортогонального разложения.

Установим его единственность. Пусть $v = u_1 + u_2$, где $u_1 \in L$, $u_2 \perp L$. Тогда $u_1 - v_1 \in L$, и, следовательно, $(u_1 - v_1) \perp (u_2 - v_2)$.

Далее, имеем

$$0 = \|v - v\|^2 = \|(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2)\|^2 = \|u_1 - v_1\|^2 + \|u_2 - v_2\|^2,$$

и поэтому $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$. ■

Лемма 2.1. *Пусть L – подпространство V. Тогда оператор P_L линеен, и (см. рис. 1.4)*

$$\|P_L(u)\| \leq \|u\| \qquad \forall\, u \in V.$$

Доказательство. В силу теоремы 1.2 элементы u, $P_L(u)$ удовлетворяют неравенству

$$(P_L(u) - u, \eta - P_L(u)) \geq 0 \qquad \forall\, \eta \in L.$$

Полагая в этом неравенстве $\eta = 0 \in L$, получаем:

$$\|P_L(u)\|\, \|u\| \geq (P_L(u), u) \geq \|P_L(u)\|^2,$$

откуда и вытекает соотношение $\|P_L(u)\| \leq \|u\|$.

Докажем теперь линейность оператора P_L. Пусть u_1, u_2 – произвольные элементы из V, α, β – произвольные числа, $P_L(u_1)$, $P_L(u_2)$ – проекции на L элементов u_1, u_2 соответственно. В силу теоремы 2.1 существуют элементы $w_1 \perp L$, $w_2 \perp L$ такие, что

$$u_1 = P_L(u_1) + w_1, \quad u_2 = P_L(u_2) + w_2.$$

Далее,

$$(\alpha\, w_1 + \beta\, w_2, \eta) = \alpha\, (w_1, \eta) + \beta\, (w_2, \eta) = 0 \qquad \forall\, \eta \in L\,,$$

т.е. $\alpha\, w_1 + \beta\, w_2 = w \perp L$; при этом справедливо разложение

$$\alpha\, u_1 + \beta\, u_2 = u + w, \quad u = \alpha\, P_L(u_1) + \beta\, P_L(u_2) \in L\,.$$

С другой стороны, имеет место разложение

$$\alpha\, u_1 + \beta\, u_2 = u_* + w_*,\ u_* = P_L(\alpha\, u_1 + \beta\, u_2) \in L,\ w_* \perp L\,.$$

В силу единственности такого разложения имеем, что

$$u_* = P_L(\alpha\, u_1 + \beta\, u_2) = u = \alpha\, P_L(u_1) + \beta\, P_L(u_2),$$

т.е. P_L – линейный оператор. ■

Лемма 2.2. *Скалярное произведение непрерывно по обоим аргументам, т.е. если $u_n \to u$ при $n \to +\infty$, $\eta_m \to \eta$ при $m \to +\infty$, то $(u_n, \eta_m) \to (u, \eta)$ при $n, m \to +\infty$.*

Доказательство. Поскольку последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится, то она ограничена [7]), т.е. $\|u_n\| \le c$, $n = 1, 2, \ldots$ Поэтому

$$|(u_n, \eta_m) - (u, \eta)| \le |(u_n, \eta_m) - (u_n, \eta)| + |(u_n, \eta) - (u, \eta)| \le$$

$$\le \|u_n\|\, \|\eta_m - \eta\| + \|\eta\|\, \|u_n - u\| \le$$

$$\le c\, \|\eta_m - \eta\| + \|\eta\|\, \|u_n - u\| \to 0 \ \text{ при } \ n, m \to +\infty. ■$$

Лемма 2.3. *Линейный функционал $F : V \to R^1$ непрерывный в какой-либо точке $u \in V$, является непрерывным всюду на V.*

[7]) Это следует из того, что если $u_n \to u_0$ при $n \to +\infty$, то в силу (1.1) для некоторого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0(\varepsilon)$, такой, что $\|u_n\| \le \|u_0\| + \varepsilon$, $n \ge n_0(\varepsilon)$.

Доказательство. Пусть η – произвольная точка V, и $\eta_n \to \eta$ при $n \to +\infty$, тогда $u_n = \eta_n + u - \eta \to u$, следовательно,

$$F(\eta_n) = F(u_n - u + \eta) = F(u_n) - F(u) + F(\eta) \to F(\eta) \quad \text{при } n \to +\infty\,,$$

т.е. F является непрерывным в точке η. ∎

Лемма 2.4. *Линейный функционал $F : V \to R^1$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Доказательство. Непрерывность линейного ограниченного функционала в нуле устанавливается без труда. Тогда из леммы 2.3 следует, что он непрерывен всюду на V.

Наоборот, пусть F непрерывен, и допустим, что он не ограничен, т.е.

$$\forall\, c > 0 \quad \exists\, u_c \in V \ : \quad |F(u_c)| > c\,\|u_c\|.$$

Ясно, что $u_c \neq 0$. Значит, для каждого $n = 1, 2, \ldots$ найдется такое $u_n \in V$, что выполнено неравенство $|F(u_n)| > n^2\,\|u_n\|$, поэтому

$$|F(v_n)| = \frac{|F(u_n)|}{n\,\|u_n\|} > n, \ \text{где } v_n = \frac{u_n}{n\,\|u_n\|}\,.$$

Очевидно, что $v_n \to 0$ при $n \to +\infty$, следовательно, в силу непрерывности F в нуле, $|F(v_n)| \to 0$ при $n \to +\infty$, что противоречит последнему неравенству. Таким образом, F ограничен. ∎

Заметим, что в бесконечномерных пространствах существуют линейные неограниченные, а следовательно, не являющиеся непрерывными, функционалы (см., например, [3, стр. 61]).

Обозначим множество линейных непрерывных на V функционалов через V^*. Под нулевым будем понимать функционал, равный нулю на всех элементах из V. Определим на V^* операции сложения, а также умножения на число следующим образом:

$$(F + G)(u) = F(u) + G(u), \quad (\alpha\, F)(u) = \alpha\, F(u) \quad \forall\, u \in V,\ \forall\, \alpha \in R^1.$$

Нетрудно установить, что множество V^* является линейным пространством. Введем на V^* норму по формуле

$$\|F\|_{V^*} = \sup_{\eta \in V,\, \eta \neq 0} \frac{|F(\eta)|}{\|\eta\|}\,.$$

Аксиомы нормы проверяются достаточно просто. Непосредственно из определения нормы функционала следует, что

$$|F(\eta)| \le \|F\|_{V^*} \, \|\eta\| \qquad \forall\, \eta \in V. \tag{2.3}$$

Справедлива следующая

Теорема 2.2 (Рисса-Фишера). *Для любого линейного непрерывного функционала $F \in V^*$ существует единственный элемент $w \in V$ такой, что*

$$F(\eta) = (w, \eta) \qquad \forall\, \eta \in V, \tag{2.4}$$

а также $\|F\|_{V^*} = \|w\|$.

Обратно, каждый элемент $w \in V$ определяет линейный непрерывный функционал $F_w \in V^*$ такой, что $\|F_w\|_{V^*} = \|w\|$, и

$$F_w(\eta) = (w, \eta) \qquad \forall\, \eta \in V.$$

Доказательство. Пусть L – ядро функционала F, т.е.

$$L = \operatorname{Ker} F = \{\eta \in V : \ F(\eta) = 0\}\, ^{8)}.$$

Это множество, в силу того, что F – линейный и непрерывный функционал, является подпространством пространства V.

Если $L = V$, то $F = 0$, и можно взять $w = 0$.

Пусть $L \ne V$. Тогда найдется по крайней мере один такой элемент $u_0 \in V$, что $F(u_0) \ne 0$. Согласно теореме 2.1 существуют такие $u_1 \in L$, $u_2 \perp L$, что $u_0 = u_1 + u_2$. Так как $L = \operatorname{Ker} F$, то

$$F(u_0) = F(u_1) + F(u_2) = F(u_2) \ne 0.$$

Далее, для произвольного $\eta \in V$ имеем, что

$$F\left(\eta - \frac{F(\eta)}{F(u_2)}\, u_2\right) = F(\eta) - \frac{F(\eta)}{F(u_2)}\, F(u_2) = 0,$$

т.е. элемент $\eta - \dfrac{F(\eta)}{F(u_2)}\, u_2$ принадлежит L, а значит, он ортогонален u_2, следовательно,

$$0 = \left(u_2, \eta - \frac{F(\eta)}{F(u_2)}\, u_2\right) = (u_2, \eta) - \frac{F(\eta)}{F(u_2)}\, (u_2, u_2) \qquad \forall\, \eta \in V.$$

---

[8]) От английского слова kernel - ядро.

Отсюда

$$F(\eta) = \frac{(u_2, \eta)}{(u_2, u_2)} F(u_2) = \left(u_2 \frac{F(u_2)}{(u_2, u_2)}, \eta \right) = (w, \eta) \qquad \forall \eta \in V,$$

где

$$w = u_2 \frac{F(u_2)}{(u_2, u_2)}.$$

Таким образом, элемент $w \in V$ удовлетворяет соотношению (2.4).

Докажем, что $\|F\|_{V^*} = \|w\|$. Действительно, поскольку

$$|F(\eta)| = |(w, \eta)| \leq \|w\| \, \|\eta\| \qquad \forall \eta \in V,$$

то

$$\|F\|_{V^*} = \sup_{\eta \in V, \eta \neq 0} \frac{|F(\eta)|}{\|\eta\|} \leq \|w\|.$$

С другой стороны, пользуясь неравенством (2.3), имеем

$$\|w\|^2 = (w, w) = F(w) \leq \|F\|_{V^*} \|w\|,$$

откуда вытекает, что $\|w\| \leq \|F\|_{V^*}$, а значит, $\|F\|_{V^*} = \|w\|$.

Установим, наконец, единственность элемента w. Пусть существует $w_1 \in V$, такой, что

$$F(\eta) = (w_1, \eta) \qquad \forall \eta \in V.$$

Тогда $(w - w_1, \eta) = 0$ для любого $\eta \in V$, откуда при $\eta = w - w_1$ следует, что $w = w_1$.

Обратное утверждение теоремы очевидно. ■

Теорема Рисса-Фишера устанавливает взаимно-однозначное соответствие между V и V^*, сохраняющее норму и согласованное с операциями (сложением и умножением на действительное число) в V и V^*. Поэтому в дальнейшем мы будем их отождествлять.

Определение 2.3. *Оператор, ставящий в соответствие произвольному линейному непрерывному функционалу из V^* единственный элемент из V, называется оператором канонического изоморфизма.* ♢

Пример 2.1. *Пусть $V = R^1$. Множество линейных непрерывных функционалов в этом случае – это множество прямых, проходящих через начало координат. Каждая из таких прямых однозначно определяется углом наклона к оси абсцисс, который изменяется на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$; прямой, проходящей через начало координат, ставится* *во взаимно-однозначное соответствие число a – тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс. При этом прямая задается соотношением $F(x) = a\,x$, и $\|F\|_{V^*} = |a|$.* ■

Пусть $A : V \to H$ – линейный непрерывный оператор. Рассмотрим функционал $F : V \to R^1$, определяемый при фиксированном $y \in H$ соотношением

$$F(\eta) = (A\eta, y)_H \qquad \forall\, \eta \in V.$$

Функционал F, как нетрудно проверить, является линейным и непрерывным. По теореме Рисса-Фишера 2.2 существует такой однозначно определяемый элемент $u = u(y) \in V$, что

$$F(\eta) = (A\eta, y)_H = (u, \eta) \qquad \forall\, \eta \in V,$$

следовательно, определен оператор, ставящий в соответствие произвольному $y \in H$ элемент $u(y)$. Очевидно, этот оператор является линейным и непрерывным.

Определение 2.4. *Оператор $A^* : H \to V$, задаваемый формулой*

$$(A^*y, \eta) = (A\eta, y)_H \qquad \forall\, \eta \in V,\ \forall\, y \in H,$$

называется сопряженным к A оператором.

Если $H = V$ и $A = A^*$, то оператор A называется самосопряженным. ♢

Пример 2.2. *Пусть $V = R^n$, $H = R^m$, $A : V \to H$ – матрица порядка $m \times n$. Тогда для произвольных векторов $\eta \in V$, $y \in H$ имеем*

$$(A\eta, y)_H = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \eta_j\, y_i = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, \eta_i\, y_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a^*_{ij}\, y_j\, \eta_i = (A^*y, \eta),$$

где $a^*_{i\,j} = a_{j\,i}$, т.е. $A^* = A^T$ – транспонированная к A матрица. Самосопряженному оператору (при $n = m$) соответствует симметричная матрица ($a^*_{i\,j} = a_{j\,i} = a_{i\,j}$). ■

Теорема 2.3 (Хана-Банаха). *Пусть L – подпространство V, F – линейный непрерывный функционал, определенный на L. Тогда существует линейный непрерывный функционал G, определенный на V, являющийся расширением F, т.е.*

$$G(\eta) = F(\eta) \qquad \forall \eta \in L, \tag{2.5}$$

и сохраняющий норму:

$$\|G\|_{V^*} = \sup_{\eta\in V,\eta\neq 0} \frac{|G(\eta)|}{\|\eta\|} = \sup_{\eta\in L,\eta\neq 0} \frac{|F(\eta)|}{\|\eta\|} = \|F\|_{L^*}\,.$$

Доказательство. Пусть $\eta \in V$ – произвольный элемент,$P_L(\eta) \in L$ – проекция η на L (существующая в силу теоремы 1.1). Рассмотрим функционал G, задаваемый соотношением

$$G(\eta) = F(P_L(\eta)) \qquad \forall\,\eta \in V.$$

Функционал G, очевидно, линеен, поскольку оператор P_L согласно лемме 2.1 является линейным. Кроме того, при доказательстве этой же леммы установлено, что $\|\,P_L(\eta)\,\| \le \|\eta\|$ для любого $\eta \in V$, следовательно,

$$|\,G(\eta)\,| = |\,F(P_L(\eta))\,| \le \|F\|_{L^*}\,\|\,P_L(\eta)\,\| \le \|F\|_{L^*}\,\|\eta\| \qquad \forall\,\eta \in V, \quad (2.6)$$

а значит, функционал G непрерывен. Он удовлетворяет (2.5), поскольку $P_L(\eta) = \eta$, если $\eta \in L$.

Далее, с учетом (2.5) имеем

$$\|F\|_{L^*} = \sup_{\eta\in L,\eta\neq 0} \frac{|F(\eta)|}{\|\eta\|} = \sup_{\eta\in L,\eta\neq 0} \frac{|G(\eta)|}{\|\eta\|} \le \sup_{\eta\in V,\eta\neq 0} \frac{|G(\eta)|}{\|\eta\|} = \|G\|_{V^*},$$

так как точная верхняя грань по более широкому множеству может быть только больше.

С другой стороны, в силу (2.6)

$$\|G\|_{V^*} = \sup_{\eta\in V,\,\eta\neq 0} \frac{|G(\eta)|}{\|\eta\|} \le \|F\|_{L^*},$$

т.е. $\|F\|_{L^*} = \|G\|_{V^*}$. ■

Следствие 2.1. *Для любого ненулевого элемента $u_0 \in V$ существует такой линейный непрерывный функционал F_0, что*

$$\|F_0\|_{V^*} = 1, \quad F_0(u_0) = \|u_0\,\|.$$

Доказательство. Пусть L – подпространство, задаваемое формулой

$$L = \left\{\eta \in V : \eta = t\,u_0,\; t \in R^1\,\right\}.$$

Определим на L функционал F :$F(\eta) = t\,\|u_0\,\|$. Этот функционал линеен, непрерывен, $F(u_0) = \|u_0\,\|$,

$$|F(\eta)| = |\,t\,|\,\|u_0\,\| = \|\eta\| \qquad \forall\,\eta \in L,$$

так что $\|F\|_{L^*} = 1$. Продолжая F на все V с сохранением нормы, получим требуемый функционал F_0. ■

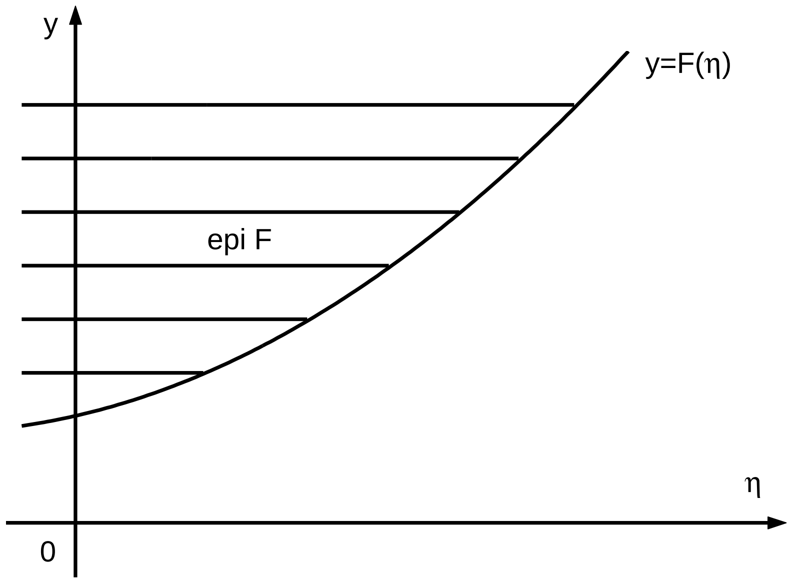

Рис. 1.5: Надграфик функционала F.

3 Выпуклые функционалы и их свойства.

С каждым функционалом $F : V \to R^1$ можно связать два множества

$$\operatorname{dom} F = \{\eta \in V : F(\eta) < +\infty\}\,^{9}),$$

$$\operatorname{epi} F = \Big\{\{\eta, a\} \in V \times R^1 : F(\eta) \le a\Big\}\,^{10}).$$

Первое из этих множеств называется эффективной областью определения функционала F, второе – его надграфиком (см. рис. 1.5).

Определение 3.1. *Функционал* $F : V \to R^1$ *называется собственным, если* $\operatorname{dom} F \neq \emptyset$, *и* $F(\eta) > -\infty$ *для всех* $\eta \in V$. $\diamondsuit$

Определение 3.2. *Функционал* $F : V \to R^1$ *называется выпуклым, если его надграфик* $\operatorname{epi} F$ *является выпуклым множеством.* $\diamondsuit$

Пусть V, H – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_V$ и $(\cdot,\cdot)_H$ соответственно. Введем на множестве $V \times H$ операции сложения и умножения на число по формулам

$$\{u, y\} + \{v, h\} = \{u + v, y + h\},$$

[9]) От английского слова domain - область.
[10]) От английского слова epigraph - надграфик.

$$\alpha\,\{u,y\}=\{\alpha\,u,\alpha\,y\}\qquad \forall\,u,v\in V,\,\forall\,y,h\in H,\,\forall\,\alpha\in R^1.$$

При этом нетрудно убедиться в том, что $V\times H$ – линейное пространство. Более того, легко проверить, что

$$(\{u,y\},\{v,h\})_{V\times H}=(u,v)_V+(y,h)_H\qquad \forall\,u,v\in V,\,\forall\,y,h\in H$$

является скалярным произведением в $V\times H$, а пространство $V\times H$ полно, т.е. является гильбертовым.

В случае, когда $H=R^1$, скалярное произведение в $V\times R^1$ задается формулой

$$(\{u,a\},\{v,b\})_{V\times R^1}=(u,v)_V+a\,b\qquad \forall\,u,v\in V,\,\forall\,a,b\in R^1.$$

Последняя конструкция будет неоднократно встречаться нам в дальнейшем.

Лемма 3.1. *Функционал $F:V\to R^1$ является выпуклым тогда и только тогда, когда для всех $u,\eta\in V$ и любого числа $\lambda\in[0,1]$ справедливо неравенство Иенсена*

$$F(\lambda\,u+(1-\lambda)\,\eta)\le\lambda\,F(u)+(1-\lambda)\,F(\eta).$$

Доказательство. Пусть F – выпуклый функционал, т.е. множество $\operatorname{epi}F$ выпукло. Если $F(u)=+\infty$ или $F(\eta)=+\infty$, то неравенство Иенсена, очевидно, выполнено. Предположим поэтому, что

$$F(u)\le a<+\infty,\quad F(\eta)\le b<+\infty.$$

Точки $\{u,a\}$, $\{\eta,b\}$ принадлежат $\operatorname{epi}F$, следовательно, в силу выпуклости $\operatorname{epi}F$

$$\lambda\,\{u,a\}+(1-\lambda)\,\{\eta,b\}=\{\lambda\,u+(1-\lambda)\,\eta,\lambda\,a+(1-\lambda)\,b\}\in\operatorname{epi}F,$$

т.е.

$$F(\lambda\,u+(1-\lambda)\,\eta)\le\lambda\,a+(1-\lambda)\,b.$$

Если функционал F принимает в точках u и η конечные значения, то, полагая $a=F(u)$, $b=F(\eta)$ (очевидно, что $\{u,\,F(u)\}\in\operatorname{epi}F$, $\{\eta,F(\eta)\}\in\operatorname{epi}F$), получим, что неравенство Иенсена выполнено. Если же $F(u)=-\infty$ или $F(\eta)=-\infty$, то нужно соответственно устремить a или b к $-\infty$, и окажется, что и в этом случае неравенство Иенсена также имеет место.

Наоборот, пусть для F выполнено неравенство Иенсена. Пусть точки $\{u, a\}$, $\{\eta, b\}$ принадлежат $\operatorname{epi} F$, т.е. $F(u) \le a$, $F(\eta) \le b$. Тогда

$$F(\lambda\, u + (1-\lambda)\,\eta) \le \lambda\, F(u) + (1-\lambda)\, F(\eta) \le \lambda\, a + (1-\lambda)\, b,$$

а это означает, что

$$\lambda\,\{u, a\} + (1-\lambda)\,\{\eta, b\} \in \operatorname{epi} F.$$

Поэтому $\operatorname{epi} F$ – выпуклое множество, т.е. F – выпуклый функционал. ■

Пример 3.1. *Из неравенства Иенсена вытекает, что индикаторная функция выпуклого множества M*

$$I_M(\eta) = \begin{cases} \;\;0, & \eta \in M, \\ +\infty, & \eta \notin M \end{cases}$$

является выпуклой. ■

Пример 3.2. *Пусть $A : V \to V$ – линейный, ограниченный, самосопряженный, неотрицательный [11]) оператор. Тогда функционал $F : V \to R^1$, $F(\eta) = (A\eta, \eta)$ является выпуклым.*

Действительно, для всех w, z из V имеем

$$(Aw, w) - (Az, z) - 2\;(Az, w - z) = (A(w - z), w - z) \ge 0,$$

или,

$$F(w) \ge F(z) + 2\;(Az, w - z) \qquad \forall\, w, z \in V.$$

Следовательно, для любых $z, u, \eta \in V$ и любого числа $\lambda \in [0, 1]$

$$F(u) \ge F(z) + 2\;(Az, u - z)\,, \tag{3.1}$$

$$F(\eta) \ge F(z) + 2\;(Az, \eta - z)\,. \tag{3.2}$$

Полагая $z = \lambda\, u + (1-\lambda)\,\eta$, умножая (3.1) на λ, (3.2) – на $1-\lambda$ и складывая получившиеся неравенства, имеем:

$$\lambda\, F(u) + (1-\lambda)\, F(\eta) \ge F(z) + 2\;(Az, \lambda\, u + (1-\lambda)\,\eta - z) =$$

$$= F(\lambda\, u + (1-\lambda)\eta),$$

т.е. F – выпуклый функционал. ■

Укажем еще некоторые свойства выпуклых функционалов.

---

[11]) Линейный оператор $A : V \to V$ называется неотрицательным, если $(A\eta, \eta) \ge 0$ для всех $\eta \in V$.

Лемма 3.2. *Пусть* $F_1, F_2 : V \to R^1$ *– выпуклые функционалы,* λ_1, λ_2 *– неотрицательные числа. Тогда функционал* $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ *также является выпуклым.*

Доказательство. Справедливость данного утверждения непосредственно следует из неравенства Иенсена. ■

Лемма 3.3. *Пусть* $F : V \to R^1$ *– собственный выпуклый функционал. Тогда* F *является непрерывным в точке* $u_0 \in V$ *в том и только том случае, когда* F *ограничен сверху в некотором шаре* $B_r(u_0)$.

Доказательство. Если функционал F непрерывен в точке $u_0 \in V$, то он, очевидно, ограничен сверху на некотором шаре $B_r(u_0)$.

Пусть, наоборот, F ограничен сверху на шаре $B_r(u_0)$:

$$F(u) \le c < +\infty \qquad \forall\, u \in B_r(u_0).$$

Заменяя, если нужно, $B_r(u_0)$ на $B_r(u_0) - u_0 = B_r(0)$ [12]) и $F(u)$ на $F(u+u_0) - F(u_0)$, можно считать, что $u_0 = 0$, и $F(0) = 0$. Выберем $0 < \varepsilon \le c$ и положим

$$U_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{c}\, B_r(0) = \{\, \eta \in V : \|\eta\| \le \frac{\varepsilon}{c}\, r \,\}.$$

Покажем, что для $u \in U_\varepsilon$ выполняется неравенство $|F(u)| \le \varepsilon$, что, в силу произвольности ε, и означает непрерывность функционала F в нуле.

Действительно, пусть $u \in U_\varepsilon$. Тогда $\frac{c}{\varepsilon}\, u \in B_r(0)$, и $F\left(\frac{c}{\varepsilon}\, u\right) \le c$, следовательно, в силу неравенства Иенсена

$$F(u) = F\left(\frac{\varepsilon}{c}\,\frac{c}{\varepsilon}\, u + \left(1 - \frac{\varepsilon}{c}\right) 0\right) \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{c} F\left(\frac{c}{\varepsilon}\, u\right) + \left(1 - \frac{\varepsilon}{c}\right) F(0) \le \frac{\varepsilon}{c}\, c = \varepsilon.$$

С другой стороны, $-\frac{c}{\varepsilon}\, u \in B_r(0)$, а значит, $F\left(-\frac{c}{\varepsilon}\, u\right) \le c$. Далее, поскольку

$$0 = \frac{1}{1+\varepsilon/c}\, u + \frac{\varepsilon/c}{1+\varepsilon/c}\left(-\frac{c}{\varepsilon}\, u\right)$$

[12]) Для множеств M, N и числа $\lambda \in R^1$ через $M+N$, λM и $\lambda + M$ мы обозначаем множества всех элементов вида $u+\eta$, λu и $\lambda + u$ соответственно, где $u \in M$, $\eta \in N$ – произвольные элементы.

и

$$\frac{1}{1+\varepsilon/c} + \frac{\varepsilon/c}{1+\varepsilon/c} = 1,$$

то в силу неравенства Иенсена

$$0 = F(0) \le \frac{1}{1+\varepsilon/c} F(u) + \frac{\varepsilon/c}{1+\varepsilon/c} F\left(-\frac{c}{\varepsilon}u\right).$$

Тогда

$$F(u) \ge \frac{-\varepsilon/c}{1+\varepsilon/c}(1+\varepsilon/c) F\left(-\frac{c}{\varepsilon}u\right) \ge -\frac{\varepsilon}{c}c = -\varepsilon.$$

Таким образом, $|F(u)| \le \varepsilon$ для всех u, $\|u\| \le \varepsilon r/c$, т.е. функционал F непрерывен в нуле. ■

Определение 3.3. *Выпуклый функционал* $F : V \to R^1$ *называется строго выпуклым, если из равенства*

$$F(\alpha u + (1-\alpha)\eta) = \alpha F(u) + (1-\alpha) F(\eta), \quad \alpha \in (0,1), \tag{3.3}$$

следует что $u = \eta$. $\diamondsuit$

Можно дать и другое определение строго выпуклого функционала.

Лемма 3.4. *Выпуклый функционал* $F : V \to R^1$ *является строго выпуклым тогда и только тогда, когда из равенства*

$$F\left(\frac{u+\eta}{2}\right) = \frac{F(u)+F(\eta)}{2} \tag{3.4}$$

следует что $u = \eta$.

Доказательство. Очевидно, что для строго выпуклого функционала из равенства (3.4) следует, что $u = \eta$.

Докажем обратное утверждение. Пусть для u, η выполнено равенство (3.3). Если $\alpha \in (0, 1/2)$, т.е. $2\alpha \in (0,1)$, то

$$\alpha u + (1-\alpha)\eta = 2\alpha \frac{u+\eta}{2} + (1-2\alpha)\eta,$$

следовательно, в силу (3.3)

$$\alpha F(u) + (1-\alpha) F(\eta) = F(\alpha u + (1-\alpha)\eta) \le$$

$$\le 2\alpha F\left(\frac{u+\eta}{2}\right) + (1-2\alpha) F(\eta) \le$$

$$\leq \alpha F(u) + \alpha F(\eta) + (1 - 2\alpha) F(\eta) = \alpha F(u) + (1 - \alpha) F(\eta).$$

Отсюда следует, что

$$2\alpha F\left(\frac{u+\eta}{2}\right) + (1 - 2\alpha) F(\eta) = \alpha F(u) + \alpha F(\eta) + (1 - 2\alpha) F(\eta),$$

т.е. справедливо равенство (3.4), а значит, $u = \eta$.

Если же $\alpha \in (1/2, 1)$, то, полагая $\mu = 1 - \alpha \in (0, 1/2)$ и применяя проведенные выше рассуждения для μ, снова получим, что $u = \eta$. ■

Пример 3.3. *Функционал $F : V \to R^1$, $F(u) = \|u\|^2$ является строго выпуклым.*

Действительно, как это следует из примера 3.2 с $A = E$ [13]), функционал F является выпуклым. Далее, из тождества параллелограмма (1.2) вытекает, что

$$\left\|\frac{u+\eta}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-\eta}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|\eta\|^2 \quad \forall\, u, \eta \in V.$$

Поэтому, если

$$\left\|\frac{u+\eta}{2}\right\|^2 = F\left(\frac{u+\eta}{2}\right) = \frac{F(u) + F(\eta)}{2} = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|\eta\|^2,$$

то $u = \eta$, т.е. F – строго выпуклый функционал. ■

4 Слабая сходимость.

Определение 4.1. *Будем говорить, что последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset V$ сходится слабо к $u \in V$ при $n \to +\infty$, если*

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n - u, \eta) = 0 \qquad \forall\, \eta \in V.$$

В дальнейшем слабую сходимость будем обозначать следующим образом: $u_n \rightharpoonup u$ при $n \to +\infty$. ♢

Название "слабая сходимость" оправдывается следующим результатом.

Лемма 4.1. *Если $u_n \to u$ при $n \to +\infty$, то $u_n \rightharpoonup u$ при $n \to +\infty$.*

[13]) Через $E : V \to V$ мы обозначаем единичный, или тождественный оператор, т.е. $Au \equiv u$ для любого $u \in V$.

Доказательство. Для любого $\eta \in V$ имеем

$$|(u_n, \eta) - (u, \eta)| \leq \|\eta\| \, \|u_n - u\| \to 0 \ \text{ при } \ n \to +\infty. \blacksquare$$

Замечание 4.1. *Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.*

Действительно, пусть l_2 – множество бесконечномерных векторов

$$\eta = (\, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k^2 < +\infty.$$

Напомним, что необходимым признаком сходимости ряда является стремление к нулю его общего члена, следовательно, для $\eta \in l_2$

$$\lim_{k \to +\infty} \eta_k = 0. \tag{4.1}$$

Проверим, что l_2 – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, \eta) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \, \eta_k.$$

Нетрудно убедиться в том, что все аксиомы скалярного произведения выполнены. Докажем, что пространство l_2 полно.

Пусть $\left\{u^{(n)}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ – фундаментальная последовательность, т.е. для любого, $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0(\varepsilon)$, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(u_k^{(n)} - u_k^{(m)}\right)^2 \leq \varepsilon \quad \forall\, m, n \geq n_0(\varepsilon). \tag{4.2}$$

Из (4.2) следует, что для $k = 1, 2, \ldots$

$$\left(u_k^{(n)} - u_k^{(m)}\right)^2 \leq \varepsilon \qquad \forall\, m, n \geq n_0(\varepsilon),$$

т.е. последовательности $\left\{u_k^{(n)}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ фундаментальны для всех k. Положим

$$u_k = \lim_{k \to +\infty} u_k^{(n)}, \quad u = (\, u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots).$$

Покажем, что $u \in l_2$, и $u^{(n)} \to u$ при $n \to +\infty$. Из (4.2) вытекает, что для любого фиксированного N

$$\sum_{k=1}^{N} \left(u_k^{(n)} - u_k^{(m)}\right)^2 \leq \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq n_0(\varepsilon).$$

При $m \to +\infty$ (поскольку в этой сумме конечное число слагаемых) получаем

$$\sum_{k=1}^{N} \left(u_k^{(n)} - u_k\right)^2 \le \varepsilon \quad \forall N, \forall n \ge n_0(\varepsilon).$$

При $N \to +\infty$ имеем, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(u_k^{(n)} - u_k\right)^2 \le \varepsilon \quad \forall n \ge n_0(\varepsilon). \tag{4.3}$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(u_k - u_k^{(n)} + u_k^{(n)}\right)^2 \le$$

$$\le 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(u_k - u_k^{(n)}\right)^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(u_k^{(n)}\right)^2 < +\infty,$$

т.е. $u \in l_2$. Из (4.3) вытекает, что $u^{(n)} \to u$ при $n \to +\infty$. Итак, l_2 – полное пространство.

Рассмотрим теперь последовательность $\left\{u^{(n)}\right\}_{n=1}^{+\infty}$,

$$u_k^{(n)} = \begin{cases} 1 & k = n, \\ 0 & k \ne n. \end{cases}$$

Эта последовательность слабо сходится к нулю при $n \to +\infty$, так как в силу (4.1) для любого $\eta \in l_2$ имеем, что $(u^{(n)}, \eta) = \eta_n \to 0$ при $n \to +\infty$.

С другой стороны, легко видеть, что $\left\|u^{(n)} - u^{(m)}\right\| = \sqrt{2}$ для всех $n \ne m$, т.е. последовательность $\left\{u^{(n)}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ не является фундаментальной, а тем более, сильно сходящейся. ■

Тем не менее, в конечномерном гильбертовом пространстве слабая сходимость совпадает с сильной, о чем свидетельствует

Лемма 4.2. *Пусть V_n – конечномерное гильбертово пространство, $u_m \rightharpoonup u$ при $m \to +\infty$. Тогда $u_m \to u$ при $m \to +\infty$.*

Доказательство. Пусть V_n – конечномерное евклидово пространство размерности n, $u_m \rightharpoonup u$ при $m \to +\infty$. В силу леммы 1.2 в V существует ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^{n}$. Тогда

$$u_m = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(m)} e_j, \ m = 1, 2, \ldots, \qquad u = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(0)} e_j.$$

Имеем, что

$$(u_m, \eta) = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^{(m)} e_j\,, \eta \right) \to (u, \eta) = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^{(0)} e_j\,, \eta \right) \qquad \forall\, \eta \in V.$$

Отсюда, полагая $\eta = e_k$, $\;k = 1, 2, \ldots, n$, получим для $k = 1, 2, \ldots, n$, что $c_k^{(m)} \to c_k^{(0)}$ при $m \to +\infty$, а это означает, что $u_m \to u$ при $m \to +\infty$, поскольку

$$\|u_m - u\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{n} \left(c_j^{(m)} - c_j^{(0)} \right) e_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(c_j^{(m)} - c_j^{(0)} \right)^2 \to 0$$

при $m \to +\infty$. ■

Лемма 4.3. *Пусть* $u_n \rightharpoonup u$, $\|u_n\| \to \|u\|$ *при* $n \to +\infty$. *Тогда* $u_n \to u$ *при* $n \to +\infty$.

Доказательство. Имеем

$$\|u - u_n\|^2 = \|u\|^2 - 2(u, u_n) + \|u_n\|^2 \to 0 \text{ при } \; n \to +\infty. \blacksquare$$

Лемма 4.4. *Предел слабо сходящейся последовательности определяется единственным образом.*

Доказательство. Пусть $u_n \rightharpoonup u$, $u_n \rightharpoonup w$ при $n \to +\infty$, тогда

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n, \eta) = (u, \eta) = (w, \eta) \qquad \forall\, \eta \in V.$$

Полагая здесь $\eta = u - w$, получим, что $\|u - w\|^2 = 0$, т.е. $u = w$. ■

Лемма 4.5. *Пусть* $A : V \to V$ *– линейный непрерывный оператор,* $u_n \rightharpoonup u$ *при* $n \to +\infty$. *Тогда* $Au_n \rightharpoonup Au$ *при* $n \to +\infty$.

Доказательство. Для любого $\eta \in V$ имеем

$$\lim_{n \to +\infty} (Au_n, \eta) = \lim_{n \to +\infty} (u_n, A^*\eta) = (u, A^*\eta) = (Au, \eta). \blacksquare$$

Лемма 4.6. *Пусть* $L_n \subseteq V$ *– конечномерное подпространство размерности* n, $u_m \rightharpoonup u$ *в* V *при* $m \to +\infty$. *Тогда* $P_{L_n}(u_m) \to P_{L_n}(u)$ *при* $m \to +\infty$.

Доказательство. Из леммы 2.1 вытекает, что оператор проектирования P_L является линейным и непрерывным. Поэтому в силу леммы 4.5 $v_m = P_{L_n}(u_m) \rightharpoonup P_{L_n}(u) = v$ при $m \to +\infty$. Но $\left\{ v_m \right\}_{m=1}^{+\infty} \subset L_n$, $v \in L_n$, а значит, согласно лемме 4.2 $v_m \to v$ при $m \to +\infty$. ■

В дальнейшем нам потребуется

Теорема 4.1 (о вложенных шарах). *В гильбертовом пространстве любая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет единственную общую точку.*

Доказательство. Пусть $B_{r_n}(u_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, – последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, $r_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Последовательность центров этих шаров фундаментальна, так как при $m > n$ имеем, что $u_m \in B_{r_m}(u_m) \subset B_{r_n}(u_n)$, следовательно, $\|u_n - u_m\| \leq r_n$. Поэтому последовательность их центров имеет предел u. Тогда u – общая точка для всех шаров. Действительно, шар $B_{r_n}(u_n)$ содержит все точки последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$, за исключением, быть может, точек $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Но так как шар $B_{r_n}(u_n)$ замкнут, то $u \in B_{r_n}(u_n)$ для каждого n.

Если бы существовала другая точка w, общая для всех шаров, то мы имели бы, что $\|u-w\| \leq \|u-u_n\| + \|w-u_n\| \leq 2\,r_n$, откуда при $n \to +\infty$ (т.е. при $r_n \to 0$) следует, что $u = w$. ■

Лемма 4.7. *Пусть $\{F_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – последовательность непрерывных линейных на V функционалов, и существуют постоянная $c > 0$ и замкнутый шар $B_r(u_0)$ такие, что $|F_n(u)| \leq c$ для всех $u \in B_r(u_0)$, $n = 1, 2, \ldots$ (т.е. последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{+\infty}$ равномерно ограничена на $B_r(u_0)$). Тогда последовательность $\{\|F_n\|_{V^*}\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена.*

Доказательство. Возьмем любое $u \in V$, $u \neq 0$, тогда получаем, что элемент $u_0 + r\,u/\|u\|$ принадлежит шару $B_r(u_0)$. Следовательно,

$$c \geq \left| F_n\left(\frac{ru}{\|u\|} + u_0\right)\right| = \left|\frac{r}{\|u\|}F_n(u) + F_n(u_0)\right| \geq \frac{r}{\|u\|}|F_n(u)| - c.$$

Отсюда вытекает, что $|F_n(u)| \leq 2\,c\,\|u\|/r$, поэтому $\|F_n\|_{V^*} \leq 2\,c/r$. ■

Теорема 4.2. [14]) *Пусть последовательность $\left\{|F_n(u)|\right\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена при каждом фиксированном $u \in V$. Тогда ограничена и последовательность $\left\{\|F_n\|_{V^*}\right\}_{n=1}^{+\infty}$.*

Доказательство. Пусть утверждение теоремы неверно. Тогда по лемме 4.7 последовательность $\left\{|F_n(u)|\right\}_{n=1}^{+\infty}$ не ограничена ни на каком за-

[14]) Данное утверждение представляет из себя принцип равномерной ограниченности Банаха - Штейнгауза для линейных непрерывных функционалов в гильбертовом пространстве.

мкнутом шаре. Рассмотрим шар $B_{r_0}(u_0)$. На нем $\left\{|F_n(u)|\right\}_{n=1}^{+\infty}$ не ограничена. Поэтому найдутся точка u_1 и номер n_1 такие, что $\|u_0 - u_1\| \le r_0$ и $|F_{n_1}(u_1)| > 1$. Ввиду непрерывности F_{n_1} найдется шар $B_{r_1}(u_1) \subseteq B_{r_0}(u_0)$, $r_1 < \dfrac{r_0}{2}$, такой, что $|F_{n_1}(u)| > 1$ для всех $u \in B_{r_1}(u_1)$. На $B_{r_1}(u_1)$ последовательность $\left\{ |F_n(u)| \right\}_{n=1}^{+\infty}$ также не ограничена, следовательно, можно найти $u_2 \in B_{r_1}(u_1)$ и $n_2 > n_1$ такие, что $\|u_1 - u_2\| \le r_1$ и $|F_{n_2}(u_2)| > 2$. Продолжая эти рассуждения, получаем последовательность вложенных шаров

$$B_{r_0}(u_0) \supset B_{r_1}(u_1) \supset \ldots \supset B_{r_k}(u_k) \supset \ldots,$$

радиусы которых стремятся к нулю, и для каждого $B_{r_k}(u_k)$ выполнено неравенство $|F_{n_k}(u)| > k$. По теореме о вложенных шарах 4.1 найдется их общая точка $u^* \in B_{r_k}(u_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда $|F_{n_k}(u^*)| > k$ для $k = 1, 2, \ldots$, и последовательность $\left\{ |F_n(u^*)| \right\}_{n=1}^{+\infty}$ не ограничена, а это противоречит условию теоремы. ■

Теорема 4.3. *В гильбертовом пространстве любая слабо сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{ u_n \}_{n=1}^{+\infty}$ слабо сходится. Определим последовательность линейных непрерывных функционалов $\{F_n\}_{n=1}^{+\infty}$ по правилу $F_n(u) = (u_n, u)$, $u \in V$. Тогда числовая последовательность $\left\{|F_n(u)|\right\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится и, следовательно, ограничена при каждом фиксированном $u \in V$. В силу теоремы 4.2 последовательность $\left\{ \|F_n\|_{V^*} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена и, поскольку $\|F_n\|_{V^*} = \|u_n\|$ согласно теореме Рисса-Фишера 2.2, то получаем утверждение настоящей леммы. ■

Следствие 4.1. *Пусть $u_n \to u$, $\eta_m \rightharpoonup \eta$ при $n, m \to +\infty$. Тогда $(u_n, \eta_m) \to (u, \eta)$ при $n, m \to +\infty$.*

Доказательство. Поскольку последовательность $\{\eta_m\}_{m=1}^{+\infty}$ сходится слабо, то она ограничена, т.е. $\|\eta_m\| \le c$, $m = 1, 2, \ldots$. Поэтому

$$|(u_n, \eta_m) - (u, \eta)| \le |(u_n, \eta_m) - (u, \eta_m)| + |(u, \eta_m) - (u, \eta)| \le$$

$$\le \|u_n - u\|\,\|\eta_n\| + |(u, \eta_m) - (u, \eta)| \le$$

$$\le c\,\|u_n - u\| + |(u, \eta_m) - (u, \eta)| \to 0 \quad \text{при} \ n, m \to +\infty. \blacksquare$$

Имеет место в некотором смысле "обратный" к теореме 4.3 результат.

Теорема 4.4. *Пусть последовательность* $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *ограничена:*

$$\|u_n\| \le c, \qquad \forall\, n = 1, 2, \dots$$

Тогда она обладает слабо сходящейся подпоследовательностью.

Доказательство. Числовая последовательность $\{\,(u_1, u_n)\,\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена, поскольку

$$|\,(u_1, u_n)\,| \le \|u_1\|\,\|u_n\| \le c\,\|u_1\|.$$

Поэтому из $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ можно так выбрать подпоследовательность

$$u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}, \dots,$$

чтобы числовая последовательность

$$\left(u_1, u_1^{(1)}\right), \left(u_1, u_2^{(1)}\right), \dots, \left(u_1, u_n^{(1)}\right), \dots$$

сходилась.

Аналогично, из $\{u_n^{(1)}\}_{n=1}^{+\infty}$ можно так выбрать подпоследовательность

$$u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \dots, u_n^{(2)}, \dots,$$

чтобы сходилась числовая последовательность

$$\left(u_2, u_1^{(2)}\right), \left(u_2, u_2^{(2)}\right), \dots, \left(u_2, u_n^{(2)}\right), \dots$$

При этом последовательность

$$\left(u_1, u_1^{(2)}\right), \left(u_1, u_2^{(2)}\right), \dots, \left(u_1, u_n^{(2)}\right), \dots$$

также сходится.

Продолжая указанный процесс, получим такую систему последовательностей:

$$u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}, \dots,$$

$$u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \dots, u_n^{(2)}, \dots,$$
$$\dots \qquad \dots \qquad \dots$$

(каждая из которых содержится в предыдущей), что последовательность $\left\{\left(u_m, u_n^{(k)}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится для $m = 1, 2, \dots, k$. Тогда, взяв "диагональ"

$$u_1^{(1)}, u_2^{(2)}, \dots, u_k^{(k)}, \dots,$$

мы получим такую последовательность элементов из V, что

$$\left(u_n, u_1^{(1)}\right), \left(u_n, u_2^{(2)}\right), \ldots$$

сходится для всех n, ибо $\left\{u_k^{(k)}\right\}_{k=n+1}^{+\infty}$ – подпоследовательность последовательности $\left\{u_j^{(n+1)}\right\}_{j=1}^{+\infty}$.

Обозначим $v_k = u_k^{(k)}$. Рассмотрим линейное многообразие M, порожденное элементами $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ (т.е. M – это множество всевозможных линейных комбинаций указанных элементов). Поскольку числовая последовательность $\left\{(u_n, v_k)\right\}_{k=1}^{+\infty}$ сходится при любом n, то последовательность $\left\{(w, v_k)\right\}_{k=1}^{+\infty}$ сходится для любого $w \in M$. Обозначим

$$F(w) = \lim_{k\to+\infty}(w, v_k) \qquad \forall\, w \in M.$$

При этом, если

$$w = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, u_j,$$

то

$$F(w) = \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, u_j, v_k\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left[\alpha_j \lim_{k\to+\infty}(u_j, v_k)\right] = \sum_{j=1}^{m} \left[\alpha_j\, F(u_j)\right]. \tag{4.4}$$

Проверим, что F – линейный непрерывный на M функционал. Действительно, пусть w_1, w_2 – произвольные элементы из M, т.е.

$$w_1 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, u_j, \qquad w_2 = \sum_{i=1}^{l} \beta_i\, u_i.$$

Тогда для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in R^1$ имеем:

$$\gamma_1\, w_1 + \gamma_2\, w_2 = \sum_{j=1}^{m} \gamma_1\, \alpha_j\, u_j + \sum_{i=1}^{l} \gamma_2\, \beta_i\, u_i$$

и с учетом (4.4) получаем

$$F(\gamma_1\, w_1 + \gamma_2\, w_2) = \sum_{j=1}^{m} \left[\gamma_1\, \alpha_j\, F(u_j)\right] + \sum_{i=1}^{l} \left[\gamma_2\, \beta_i\, F(u_i)\right] =$$

$$= \gamma_1\, F(w_1) + \gamma_2\, F(w_2),$$

т.е. F – линейный на M функционал.

Далее, по условию настоящей теоремы $\|u_n\| \le c$, $n = 1, 2, \ldots$, следовательно (с учетом того, что $\{v_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – это подпоследовательность последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$),

$$|\,(w, v_k)\,| \le \|w\|\,\|v_k\,\| \le c\,\|w\|,\ k = 1, 2, \ldots \qquad \forall\, w \in M.$$

Поэтому

$$|\,F(w)\,| = \lim_{k\to+\infty} |\,(w, v_k)\,| \le c\,\|w\| \qquad \forall\, w \in M, \tag{4.5}$$

т.е. F – непрерывный на M функционал.

Замыкая множество M (т.е. присоединяя к нему пределы всех сходящихся последовательностей из M), получим подпространство L. Пусть w – предел некоторой последовательности $\{w_m\}_{m=1}^{+\infty}$ элементов из M.

Докажем, что числовая последовательность $\big\{F(w_m)\big\}_{m=1}^{+\infty}$ является фундаментальной. Действительно, учитывая ограниченность последовательности $\big\{v_k\big\}_{k=1}^{+\infty}$, имеем

$$\Big|\,F(w_m) - F(w_n)\,\Big| = \Big|\lim_{k\to+\infty}(w_m, v_k) - \lim_{k\to+\infty}(w_n, v_k)\Big| =$$

$$= \Big|\lim_{k\to+\infty}(w_m - w_n, v_k)\Big| \le c\,\|w_m - w_n\|.$$

Из полученного неравенства и следует фундаментальность числовой последовательности $\big\{F(w_m)\big\}_{m=1}^{+\infty}$, ибо фундаментальной в силу своей сходимости является последовательность $\{w_m\}_{m=1}^{+\infty}$.

Итак, последовательность $\big\{F(w_m)\big\}_{m=1}^{+\infty}$ имеет предел. Обозначим его снова через $F(w)$. Проверим, что распространеный на L указанным выше способом функционал F по-прежнему является линейным и непрерывным. Достаточно проверить это для множества пределов всех сходящихся последовательностей из M. Пусть $w_n \to w$, $\eta_n \to \eta$ при $n \to +\infty$. Поскольку при этом для любых чисел α, β

$$\lim_{n\to+\infty}[\,\alpha\, w_n + \beta\,\eta_n] = \alpha\, w + \beta\,\eta,$$

то

$$F(\alpha\, w + \beta\,\eta) = \lim_{n\to+\infty} F(\alpha\, w_n + \beta\,\eta_n) =$$

$$= \alpha \lim_{n\to+\infty} F(w_n) + \lim_{n\to+\infty} \beta\, F(\eta_n) = \alpha\, F(w) + \beta\, F(\eta).$$

Далее, в силу (4.5)

$$|\,F(w)\,| = \lim_{n\to+\infty} |\,F(w_n)\,| \le \lim_{n\to+\infty} c\,\|w_n\| = c\,\|w\|,$$

что и требовалось доказать.

Пусть G – линейный непрерывный функционал, построенный согласно теореме Хана-Банаха 2.3, т.е. $G(\eta) = F(P_L(\eta))$, $\eta \in V$. В соответствии с теоремой Рисса-Фишера 2.2 существует такой элемент $v \in V$, что

$$G(\eta) = (v, \eta) \qquad \forall\, \eta \in V.$$

Тогда с учетом того, что последовательность $\{v_k\}_{k=1}^{+\infty}$ принадлежит L, и, следовательно,

$$(\eta, v_k) = (P_L(\eta), v_k) + (\eta_\perp\,, v_k) = (P_L(\eta), v_k) \quad \forall\, \eta \in V,$$

имеем, что

$$\lim_{k\to+\infty}(\eta, v_k) = \lim_{k\to+\infty}(P_L(\eta), v_k) = F(P_L(\eta)) = G(\eta) = (\eta, v) \quad v \in V,$$

что и означает слабую сходимость последовательности $\{v_k\}_{k=1}^{+\infty}$ к v при $k \to +\infty$. ■

Следствие 4.2. *Если все слабо сходящиеся подпоследовательности ограниченной последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ имеют один и тот же предел u_*, то и вся последовательность слабо сходится к u_*.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть существуют $w \in V$, $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$, такие, что

$$|\,(w, u_{n_k}) - (w, u_*)\,| > \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.6}$$

В силу теоремы 4.4 последовательность $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ обладает слабо сходящейся подпоследовательностью, пределом которой по предположению является элемент u_*, что противоречит неравенству (4.6). ■

Определение 4.2. *Множество M называется слабо замкнутым, если предел любой слабо сходящейся последовательности элементов из M принадлежит этому множеству.* ♢

Теорема 4.5. *Пусть M – выпуклое множество. Тогда необходимым и достаточным условием сильной замкнутости множества M является его слабая замкнутость.*

Доказательство. Предположим сначала, что множество M является слабо замкнутым, и пусть $\left\{u_n\right\}_{n=1}^{+\infty} \subset M$, $u_n \to u_0$ при $n \to +\infty$. Тогда $u_n \rightharpoonup u_0$ при $n \to +\infty$, следовательно, $u_0 \in M$.

Наоборот, пусть M сильно замкнуто, $\left\{u_n\right\}_{n=1}^{+\infty} \subset M$, $u_n \rightharpoonup u_0$ при $n \to +\infty$. Поскольку M – выпуклое замкнутое множество, то определена проекция $u \in M$ элемента u_0 на множество M, причем в силу теоремы 1.2 проекция u является решением вариационного неравенства

$$(u - u_0, \eta - u) \geq 0 \qquad \forall\, \eta \in M,$$

откуда при $\eta = u_n$, имеем, что $(u - u_0, u_n - u) \geq 0$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to +\infty$, получим, что

$$0 \geq (u_0 - u, u_0 - u) = \|u_0 - u\|^2\,,$$

т.е. $u_0 = u \in M$. ■

5 Различные виды непрерывности и монотонности.

В данном разделе содержатся некоторые определения, часто используемые в дальнейшем.

Определение 5.1. *Оператор $A : V \to V$ называется:*

– радиально непрерывным в точке u, если для любого $\eta \in V$

$$\lim_{t \to 0}\, (A(u + t\,\eta), \eta) = (Au, \eta)\,;$$

– хеминепрерывным в точке u, если для любых $\eta, v \in V$

$$\lim_{t \to 0}\, (A(u + t\,\eta), v) = (Au, v)\,;$$

– деминепрерывным в точке u, если для любой последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$, сходящейся сильно к $u \in V$ при $n \to +\infty$, последовательность $\{Au_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится слабо к Au при $n \to +\infty$;

– непрерывным в точке u, если для любой последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$, сходящейся сильно к $u \in V$ при $n \to +\infty$, последовательность $\{Au_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится сильно к Au при $n \to +\infty$ [15]);

[15]) Определение непрерывного оператора дано было нами ранее, в п. 2. Здесь мы напоминаем его с целью сравнения с другими видами непрерывности.

– липшиц - непрерывным (непрерывным по Липшицу) с константой $L > 0$*, если для любых* $u, \eta \in V$

$$\|Au - A\eta\| \le L\,\|u - \eta\|. \diamondsuit$$

Нетрудно проверить, что имеют место следующие импликации: A – липшиц - непрерывный оператор $\Rightarrow$ A – непрерывный оператор $\Rightarrow$ A – деминепрерывный оператор $\Rightarrow$ A – хеминепрерывный оператор $\Rightarrow$ A – радиально непрерывный оператор. Обратные импликации, вообще говоря, не имеют места.

Определение 5.2. *Оператор* $A : V \to V$ *называется:*
– монотонным, если

$$(Au - A\eta, u - \eta) \ge 0 \qquad \forall\, u, \eta \in V;$$

– строго монотонным, если A *– монотонный оператор, и из равенства*

$$(Au - A\eta, u - \eta) = 0$$

следует, что $u = \eta$*;*
– сильно монотонным с константой $\mu > 0$*, если*

$$(Au - A\eta, u - \eta) \ge \mu\,\|u - \eta\|^2 \qquad \forall\, u, \eta \in V;$$

– обратно сильно монотонным [16]*) с константой* $\sigma > 0$*, если*

$$\sigma\,\|Au - A\eta\|^2 \le (Au - A\eta, u - \eta) \qquad \forall\, u, \eta \in V;$$

– псевдомонотонным, если A *– ограниченный оператор, и для любой последовательности* $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$*, слабо сходящейся к* u *в* V *при* $n \to +\infty$*, из неравенства* [17]*)*

$$\limsup_{n\to+\infty}\,(Au_n, u_n - u) \le 0$$

следует, что

$$\liminf_{n\to+\infty}\,(Au_n, u_n - \eta) \ge (Au, u - \eta) \qquad \forall\, \eta \in V. \diamondsuit$$

---

[16]) Такое название связано с тем, что если оператор A имеет обратный, то A^{-1} – сильно монотонный оператор.

[17]) Напомним, что верхним (нижним) пределом последовательности называется наибольший (наименьший) из частичных ее пределов.

Очевидно, что обратно сильно монотонный оператор с константой σ является монотонным и непрерывным по Липшицу с константой $L = 1/\sigma$. Имеют также место следующие импликации: A – сильно монотонный оператор $\Rightarrow A$ – строго монотонный оператор $\Rightarrow A$ – монотонный оператор. Обратные импликации, вообще говоря, не имеют места.

В дальнейшем неоднократно будет использоваться

Лемма 5.1. *Для произвольных числовых последовательностей* $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *и* $\{b_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *выполнены неравенства*

$$\limsup_{k\to+\infty}(a_k + b_k) \le \limsup_{k\to+\infty} a_k + \limsup_{k\to+\infty} b_k\,,$$

$$\liminf_{k\to+\infty}(a_k + b_k) \ge \liminf_{k\to+\infty} a_k + \liminf_{k\to+\infty} b_k\,,$$

$$\limsup_{k\to+\infty}(-a_k) = -\liminf_{k\to+\infty} a_k\,.$$

Справедливость этой леммы следует непосредственно из определения верхних и нижних пределов.

Лемма 5.2. *Псевдомонотонный оператор* $A : V \to V$ *является деминепрерывным.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится сильно к u в V при $n \to +\infty$, тогда, поскольку A – ограниченный оператор, последовательность $\{Au_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена в V, и в силу теоремы 4.4 у нее существует по крайней мере одна слабо сходящаяся подпоследовательность. Пусть $\{Au_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ – произвольная слабо сходящаяся подпоследовательность: $Au_{n_k} \rightharpoonup \chi$ в V при $k \to +\infty$. Тогда (принимая во внимание ограниченность Au_{n_k} и сильную сходимость u_{n_k} к u) получаем, что

$$\limsup_{k\to+\infty}\,(Au_{n_k}, u_{n_k} - u) = 0,$$

следовательно, в силу следствия 4.1 и псевдомонотонности оператора A, имеем, что

$$\liminf_{k\to+\infty}\,(Au_{n_k}, u_{n_k} - \eta) = (\chi, u - \eta) \ge (Au, u - \eta) \qquad \forall\,\eta \in V.$$

Полагая в последнем неравенстве $\eta = u \pm w$, где w – произвольный элемент из V, получим, что

$$(\chi - Au, w) = 0 \qquad \forall\,w \in V,$$

т.е. $\chi = Au$. Поскольку подпоследовательность $\{Au_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ была произвольной, то в силу следствия 4.2 вся последовательность $\{Au_n\}_{n=1}^{+\infty}$ слабо сходится к Au. ■

Лемма 5.3. *Ограниченный, монотонный, радиально непрерывный оператор $A : V \to V$ является псевдомонотонным.*

Доказательство. Пусть $u_n \rightharpoonup u$ в V при $n \to +\infty$, и

$$\limsup_{n\to+\infty} (Au_n, u_n - u) \leq 0.$$

Из монотонности A вытекает, что $(Au_n, u_n - u) \geq (Au, u_n - u)$ для любого n, следовательно,

$$\liminf_{n\to+\infty} (Au_n, u_n - u) \geq \liminf_{n\to+\infty} (Au, u_n - u) = \lim_{n\to+\infty} (Au, u_n - u) = 0,$$

и, таким образом,

$$\lim_{n\to+\infty} (Au_n, u_n - u) = 0. \tag{5.1}$$

Пусть $w = (1-\lambda)\, u + \lambda\, v = u + \lambda\, (v - u)$, где v – произвольный элемент из V, $\lambda \in (\,0, 1\,)$. В силу монотонности A

$$0 \leq (Au_n - Aw, u_n - w) = (Au_n - Aw, u_n - u - \lambda\, (v - u)).$$

Поэтому

$$\lambda\, (Au_n, u - v) \geq -\, (Au_n, u_n - u) + (Aw, u_n - u) - \lambda\, (Aw, v - u),$$

откуда благодаря (5.1)

$$\lambda \liminf_{n\to+\infty}(Au_n, u - v) \geq -\, \lambda\, (Aw, v - u).$$

Разделим обе части этого неравенства на $\lambda > 0$, тогда с учетом (5.1) получим

$$\liminf_{n\to+\infty}(Au_n, u_n - v) = \liminf_{n\to+\infty} [(Au_n, u_n - u) + (Au_n, u - v)] \geq$$

$$\geq \liminf_{n\to+\infty}(Au_n, u_n - u) + \liminf_{n\to+\infty}(Au_n, u - v) = \liminf_{n\to+\infty}(Au_n, u - v) \geq$$

$$\geq (A(u + \lambda\, (v - u)), u - v) \quad \forall\, v \in V,\ \forall\, \lambda \in (\,0, 1\,).$$

Устремляя в этом неравенстве λ к нулю, учитывая радиальную непрерывность A, получим, что

$$\liminf_{n\to+\infty}(Au_n, u_n - v) \geq (Au, u - v) \qquad \forall\, v \in V,$$

т.е. A – псевдомонотонный оператор. ■

Определение 5.3. *Оператор $A : V \to V$ называется:*
– сжимающим с коэффициентом сжатия L, если он липшиц-непрерывен с постоянной $L < 1$;
– нерастягивающим, если он липшиц-непрерывен с постоянной $L = 1$;
– жестко нерастягивающим [18]), если

$$\|Au - A\eta\|^2 \le (Au - A\eta, u - \eta) \qquad \forall\, u, \eta \in V. \diamondsuit$$

Жестко нерастягивающий оператор является обратно сильно монотонным с постоянной $\sigma = 1$, а потому – нерастягивающим.

Определение 5.4. *Пусть M – некоторое подмножество V. Оператор A называется коэрцитивным на M, если существует такой элемент $\eta_0 \in M$, что*

$$(A\eta, \eta - \eta_0) \ge \rho(\|\eta\|)\, \|\eta\| \quad \forall\, \eta \in M, \qquad \lim_{\xi \to +\infty} \rho(\xi) = +\infty. \diamondsuit$$

Определение 5.5. *Пусть M – некоторое подмножество V. Оператор A называется асимптотически регулярным на M, если для любого u из M последовательность $\left\{A^{n+1}u - A^n u\right\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к нулю при $n \to +\infty$. [19])* $\diamondsuit$

Приведем теперь примеры возникающих на практике операторов и функционалов, удовлетворяющих некоторым из приведенных выше определений.

Пусть $V = R^n$ со скалярным произведением $(u, v) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i v_i$. Для $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$ определим функцию $g : [0, +\infty) \to R^1$ по формуле

$$g(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 \le \xi \le \beta, \\ \alpha\,(\xi - \beta), & \xi \ge \beta. \end{cases} \tag{5.2}$$

Определим оператор $A : V \to V$ следующим образом:

$$Au = \begin{cases} g(\|u\|)\, u/\|u\|\,, & \|u\| \ne 0, \\ 0\,, & \|u\| = 0, \end{cases} \tag{5.3}$$

[18]) В англоязычной литературе firmly nonexpansive (см., например, [40]).
[19]) Через A^2u мы обозначаем $A(Au)$, и по индукции определяется A^n.

Лемма 5.4. *Оператор A, определенный с помощью (5.3), удовлетворяет условию*

$$\|Au - Av\|^2 \leq \alpha\,(Au - Av, u - v) \qquad \forall\, u, v \in V; \tag{5.4}$$

т.е. A – обратно сильно монотонный с константой $1/\alpha > 0$.

Доказательство. Поскольку неравенство (5.4) симметрично относительно u и v, то достаточно рассмотреть 3 случая:

1. $\|u\| \leq \beta$, $\|v\| \leq \beta$;
2. $\|u\| > \beta \geq \|v\|$;
3. $\|u\| > \beta$, $\|v\| > \beta$.

В первом случае $Au = Av = 0$, следовательно, неравенство (5.4), очевидно, выполнено.

Во втором случае имеем, что $Av = 0$, поэтому

$$\alpha\,(Au - Av, u - v) - \|Au - Av\|^2 = \alpha\,(Au, u - v) - \|Au\|^2 =$$

$$= \alpha\,\left(\frac{g(\|u\|)}{\|u\|}\,, u - v\right) - g^2\,(\|u\|) = \alpha\, g(\|u\|)\,\left[\|u\| - \,\frac{(u, v)}{\|u\|}\,\right] -$$

$$-g^2\,(\|u\|) \geq \alpha^2\,(\,\|u\| - \beta)\,(\,\|u\| - \|v\|\,) - \alpha^2\,(\,\|u\| - \beta)^2 \geq$$

$$\geq \alpha^2\,(\,\|u\| - \beta)^2 - \alpha^2\,(\,\|u\| - \beta)^2 = 0.$$

Наконец, в третьем случае

$$\alpha\,(Au - Av, u - v) - \|Au - Av\|^2 = \alpha\,\left(\frac{g(\|u\|)}{\|u\|}\,u - \frac{g(\|v\|)}{\|v\|}\,v, u - v\right) -$$

$$-\left(\frac{g(\|u\|)}{\|u\|}\,u - \frac{g(\|v\|)}{\|v\|}\,v, \frac{g(\|u\|)}{\|u\|}\,u - \frac{g(\|v\|)}{\|v\|}\,v\right) =$$

$$= \alpha\,\Big[\,g(\|u\|)\,\|u\| + g(\|v\|)\,\|v\|\,\Big] - \alpha\,\Big[\,g(\|u\|)\,\|v\| + g(\|v\|)\,\|v\|\,\Big]\,\frac{(u, v)}{\|u\|\,\|v\|}\; -$$

$$-g^2\,(\|u\|) - g^2\,(\|v\|) + 2\,g(\|u\|)\,g(\|v\|)\,\frac{(u, v)}{\|u\|\,\|u\|}\; =$$

$$= \alpha^2\,(\,\|u\| - \beta)\,\|u\| + \alpha^2\,(\,\|v\| - \beta)\,\|v\| - \alpha^2\,(\,\|u\| - \beta)^2 - \alpha^2\,(\,\|v\| - \beta)^2 +$$

$$+\alpha^2\Big[2(\|u\| - \beta)(\|v\| - \beta) - (\|u\| - \beta)\|v\| - (\|v\| - \beta)\|u\|\Big]\,\frac{(u, v)}{\|u\|\|v\|} =$$

$$= \alpha^2 (\|u\| - \beta)(\|u\| - \|u\| + \beta) + \alpha^2 (\|v\| - \beta)(\|v\| - \|v\| + \beta) +$$

$$+\alpha^2 \Big[(\|u\| - \beta)(\|v\| - \beta - \|v\|) + (\|v\| - \beta)(\|u\| - \beta - \|u\|)\Big] \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|} =$$

$$= \alpha^2 \beta (\|u\| + \|v\| - 2\beta) - \alpha^2 \beta (\|u\| + \|v\| - 2\beta) \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|} \geq$$

$$\geq \alpha^2 \beta (\|u\| + \|v\| - 2\beta) \left[1 - \frac{|(u,v)|}{\|u\|\,\|v\|} \right] \geq 0. \blacksquare$$

Лемма 5.5. *Пусть M – непустое подмножество V, тогда оператор A коэрцитивен на M.*

Доказательство. Пусть u_0 – произвольный элемент из M; тогда

$$(Au, u - u_0) \geq (Au, u) - \|Au\|\|u_0\| = g(\|u\|)\|u\| - g(\|u\|)\|u_0\| =$$

$$= \left(g(\|u\|) - \frac{g(\|u\|)\|u_0\|}{\|u\|} \right) \|u\| \geq \alpha\ (\|u\| - \beta - \|u_0\|)\, \|u\| = \rho(\|u\|)\|u\|.$$

Здесь $\rho(t) = \alpha\,(t - \beta - \|u_0\|)$, и, очевидно, $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(t) = +\infty$. $\blacksquare$

Рассмотрим теперь пример обратно сильно монотонного оператора в бесконечномерном пространстве, возникающего, например, в задачах теории фильтрации, теории мягких оболочек и т.д.

Пусть Ω – ограниченная область в R^m, $m \geq 1$ с липшиц-непрерывной границей Γ, $V = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ – пространство Соболева [20]) со скалярным произведением и соответствующей ему нормой:

$$(u,v)_V = \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla v)\, dx, \quad \|u\|_V = \left[\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx \right]^{1/2} \qquad u, v \in V, \qquad (5.5)$$

где $(\cdot,\cdot)$ и $|\cdot|$ – соответственно скалярное произведение и норма в пространстве R^m.

Определим форму $a : V \times V \to R^1$ следующим образом:

$$a(u,\eta) = \int\limits_\Omega (A(\nabla u), \nabla \eta)\, dx \qquad u, \eta \in V, \qquad (5.6)$$

где A – оператор, определенный в (5.3).

[20]) Определение и основные свойства пространств Соболева можно найти, например, в [28], [32].

Из неравенства $|A(\nabla u)| \le \alpha\,|\nabla u|$ получаем

$$|a(u,\eta)| \le \left[\int\limits_\Omega |A(\nabla u)|^2\,dx\right]^{1/2} \left[\int\limits_\Omega |\nabla\eta|^2\,dx\right]^{1/2} \le$$

$$\le \alpha\,\|u\|_V\|\eta\|_V < +\infty. \tag{5.7}$$

Зафиксируем $u \in V$ и рассмотрим функционал $F_u : V \to R^1$, $F_u(\eta) = a(u,\eta)$. Из определения (5.6) следует линейность, а из неравенства (5.7) – ограниченность этого функционала. В силу леммы 2.4 имеем $F_u \in V^*$. Далее, по теореме Рисса-Фишера 2.2 найдется единственный элемент $u^* \in V$, такой, что

$$(u^*,\eta)_V = F_u(\eta) \qquad \forall\,\eta \in V. \tag{5.8}$$

Таким образом, каждому $u \in V$ поставлен в соответствие элемент $u^* \in V$; определим оператор $T : V \to V$, $Tu = u^*$. Из предыдущего равенства (5.8) получаем:

$$(Tu,\eta)_V = a(u,\eta) \qquad \forall\,\eta \in V. \tag{5.9}$$

Лемма 5.6. *Оператор T, определенный в (5.9), удовлетворяет условию*

$$\|Tu - Tv\|_V^2 \le \alpha\,(Tu - Tv, u - v)_V \qquad \forall\,u,v \in V, \tag{5.10}$$

т.е. T – обратно сильно монотонный оператор с константой $1/\alpha > 0$.

Доказательство. Из определения оператора T и неравенства (5.4) получаем

$$\alpha\,(Tu - Tv, u - v)_V = \int\limits_\Omega \alpha\,(A(\nabla u) - A(\nabla v), \nabla u - \nabla v)\,dx \ge$$

$$\ge \int\limits_\Omega |A(\nabla u) - A(\nabla v)|^2\,dx. \qquad \forall\,u,v \in V; \tag{5.11}$$

Далее, пользуясь (5.9), имеем

$$|\,(Tu - Tv,\eta)_V\,| = \left|\int\limits_\Omega (A(\nabla u) - A(\nabla v), \nabla\eta)\,dx\right| \le$$

$$\le \left[\int\limits_\Omega |A(\nabla u) - A(\nabla v)|^2\,dx\right]^{1/2} \left[\int\limits_\Omega |\nabla\eta|^2\,dx\right]^{1/2} \qquad \forall\,\eta \in V.$$

Выберем в предыдущем неравенстве $\eta = Tu - Tv$, тогда получим

$$\|Tu - Tv\|_V^2 \le \left[\int\limits_\Omega |A(\nabla u) - A(\nabla v)|^2\,dx\right]^{1/2} \|Tu - Tv\|_V.$$

Таким образом,

$$\|Tu - Tv\|_V^2 \le \int\limits_\Omega |A(\nabla u) - A(\nabla v)|^2\,dx,$$

и, пользуясь неравенством (5.11), получаем (5.10). ■

Определение 5.6. *Функционал $F : V \to R^1$ называется липшиц-непрерывным (непрерывным по Липшицу) с константой $L > 0$, если*

$$|F(u) - F(\eta)| \le L\,\|u - \eta\| \qquad \forall\, u, \eta \in V. \diamondsuit$$

Определение 5.7. *Функционал $F : V \to R^1$ называется коэрцитивным , если*

$$\lim_{\|\eta\| \to +\infty} F(\eta) = +\infty. \diamondsuit \tag{5.12}$$

Приведем теперь пример выпуклого, липшиц-непрерывного функционала, возникающего, например, в задачах теории фильтрации.

Определим функционал $F : V \to R^1$ соотношением

$$F(\eta) = \int\limits_\Omega (|\nabla\eta| - \beta)^+\,dx\ ,\ \text{где } a^+ = (|a| + a)/2, \beta > 0\,.$$

Для произвольных $a, b \in R^1$ выполнено неравенство

$$|a^+ - b^+| = ||a| + a - |b| - b|/2 \le (||a| - |b|| + |a - b|)/2 \le |a - b|,$$

следовательно, в силу неравенства Коши-Буняковского получаем

$$|F(u) - F(v)| \le \int\limits_\Omega |(|\nabla u| - \beta)^+ - (|\nabla v| - \beta)^+|\,dx\ \le$$

$$\le \int\limits_\Omega |\,|\nabla u| - |\nabla v|\,|\,dx \le \int\limits_\Omega |\nabla u - \nabla v|\,dx\ \le$$

$$\le \left[\int\limits_\Omega 1^2\,dx\right]^{1/2} \left[\int\limits_\Omega |\nabla u - \nabla v|^2\,dx\right]^{1/2} = \sqrt{\mathrm{mes}\,\Omega}\ \|u - v\|_V.$$

Таким образом, F – липшиц-непрерывный функционал с постоянной $L = \sqrt{\text{mes}\,\Omega}$.

Далее, для произвольных $a, b \in R^1$ и $0 \le \lambda \le 1$ выполнено неравенство

$$|\lambda a + (1-\lambda)b| \le \lambda|a| + (1-\lambda)|b|,$$

пользуясь которым, получаем

$$(\lambda a + (1-\lambda)b)^+ \le \lambda a^+ + (1-\lambda)b^+\,.$$

Отсюда с учетом того, что $a^+ \ge b^+$ при $a \ge b$, имеем

$$F(\lambda u + (1-\lambda)v) = \int\limits_\Omega \left(\,|\nabla(\lambda u + (1-\lambda)v)| - \beta\right)^+\,dx \le$$

$$\le \int\limits_\Omega (\lambda\,|\nabla u| + (1-\lambda)\,|\nabla v| - \beta)^+\,dx =$$

$$= \int\limits_\Omega (\lambda(|\nabla u| - \beta) + (1-\lambda)(|\nabla v| - \beta))^+\,dx \le$$

$$\le \int\limits_\Omega \left[\lambda(|\nabla u| - \beta)^+ + (1-\lambda)(|\nabla v| - \beta)^+\right] dx = \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v),$$

т.е. F – выпуклый функционал.

6 Слабо полунепрерывные снизу функционалы.

Определение 6.1. *Функционал $F : V \to R^1$ называется слабо полунепрерывным снизу в точке $u_0 \in V$, если для любой слабо сходящейся к u_0 последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$*

$$F(u_0) \le \liminf_{n\to+\infty}\, F(u_n).$$

Функционал F называется слабо полунепрерывным снизу на V, если он слабо полунепрерывен снизу в любой точке $u \in V$. $\diamondsuit$

Лемма 6.1. *Функционал F, $F(u) = \|u\|$ является слабо полунепрерывным снизу на V.*

Доказательство. Пусть $u_n \rightharpoonup u_0$ в V при $n \to +\infty$. Тогда

$$\|u_0\|^2 = (u_0, u_0) = \lim_{n\to+\infty}(u_n, u_0) \le \liminf_{n\to+\infty}\left[\|u_n\|\|u_0\|\right] = \|u_0\|\,\liminf_{n\to+\infty}\|u_n\|,$$

откуда и следует требуемое утверждеие. $\blacksquare$

Теорема 6.1. *Функционал $F : V \to R^1$ является слабо полунепрерывным снизу на V тогда и только тогда, когда лебегово множество функционала F*

$$E_\alpha = \{u \in V : F(u) \le \alpha\}$$

слабо замкнуто для любого действительного α.

Доказательство. Пусть множество E_α слабо замкнуто для любого действительного α. Пусть $u_n \rightharpoonup u_0$ в V при $n \to +\infty$, докажем, что тогда

$$F(u_0) \le \liminf_{n\to+\infty} F(u_n) = b. \tag{6.1}$$

Допустим противное, т.е. предположим, что $F(u_0) > b$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$, такое, что

$$F(u_0) > b + \varepsilon. \tag{6.2}$$

Поскольку

$$b = \liminf_{n\to+\infty} F(u_n),$$

то существует подпоследовательность $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$, для которой

$$F(u_{n_k}) < b + \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6.3}$$

Но по предположению множество

$$E_{\alpha_1} = \left\{u \in V : F(u) \le b + \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \quad \alpha_1 = b + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

слабо замкнуто, и, так как $u_{n_k} \rightharpoonup u_0$ в V при $k \to +\infty$, то из неравенства (6.3) следует, что $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty} \subset E_{\alpha_1}$, а потому $u_0 \in E_{\alpha_1}$, т.е.

$$F(u_0) \le b + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Это неравенство противоречит неравенству (6.2). Полученное противоречие доказывает слабую полунепрерывность снизу F, если $b > -\infty$. При $b = -\infty$ любому числу α соответствует подпоследовательность $\{u_{n_m}\}_{m=1}^{+\infty}$, такая, что $F(u_{n_m}) < \alpha$. Поэтому $u_0 \in E_\alpha$, и в силу произвольности α имеем, что $F(u_0) = -\infty$.

Наоборот, пусть функционал F является слабо полунепрерывным снизу на V. Покажем, что множество E_α слабо замкнуто для любого действительного α. Рассмотрим произвольную последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ из E_α, слабо сходящуюся в V к элементу $u_0 \in V$ при $n \to +\infty$. Поскольку функционал F является слабо полунепрерывным снизу на V, а значит, и в точке u_0, то выполнено соотношение (6.1). Но $F(u_n) \leq \alpha$ для любого n, а потому и $b \leq \alpha$. Следовательно, $F(u_0) \leq b \leq \alpha$, т.е. $u_0 \in E_\alpha$. ∎

Еще одну характеризацию слабо полунепрерывных снизу функционалов дает

Теорема 6.2. *Функционал $F : V \to R^1$ является слабо полунепрерывным снизу на V тогда и только тогда, когда его надграфик слабо замкнут.*

Доказательство. Определим на $V \times R^1$ функционал φ при помощи соотношения $\varphi(u, a) = F(u) - a$.

Докажем, что F является слабо полунепрерывным снизу на V тогда и только тогда, когда функционал φ является слабо полунепрерывным снизу на $V \times R^1$.

Действительно, пусть F слабо полунепрерывен снизу на V, $u_n \rightharpoonup u_0$ в V, $\alpha_n \to \alpha_0$ при $n \to +\infty$. Имеем

$$\liminf_{n\to+\infty} [F(u_n) - \alpha_n] \geq F(u_0) - \alpha_0,$$

откуда

$$\liminf_{n\to+\infty} \varphi(u_n, \alpha_n) = \liminf_{n\to+\infty} [F(u_n) - \alpha_n] \geq F(u_0) - \alpha_0 = \varphi(u_0, \alpha_0).$$

Наоборот, пусть φ слабо полунепрерывен снизу на $V \times R^1$, $u_n \rightharpoonup u_0$ в V при $n \to +\infty$. Тогда

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) = \liminf_{n\to+\infty} \varphi(u_n, 0) \geq \varphi(u_0, 0) = F(u_0).$$

Далее, согласно теореме 6.1 функционал φ является слабо полунепрерывным снизу на $V \times R^1$ тогда и только тогда, когда лебегово множество

$$E_r = \{\{u, a\} \in V \times R^1 : \varphi(u, a) \leq r\}$$

слабо замкнуто для любого действительного r. Множество E_r является сдвигом на вектор $(0, r)$ множества $\operatorname{epi} F$, и, следовательно, оно слабо замкнуто тогда и только тогда, когда надграфик F слабо замкнут. ∎

Определение 6.2. *Функционал $F : V \to R^1$ называется полунепрерывным снизу в точке $u_0 \in V$, если для любой сильно сходящейся к u_0 последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$*

$$F(u_0) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n).$$

Функционал $F : V \to R^1$ называется полунепрерывным снизу на V, если он полунепрерывен снизу в любой точке $u \in V$. $\diamondsuit$

Теорема 6.3. *Выпуклый и полунепрерывный снизу функционал $F : V \to R^1$ является слабо полунепрерывным снизу.*

Доказательство. Очевидным образом видоизменяя доказательство теорем 6.1, 6.2, получаем, что функционал $F : V \to R^1$ является полунепрерывным снизу на V тогда и только тогда, когда его лебегово множество E_α замкнуто для любого действительного α и надграфик F также является замкнутым. Но надграфик выпуклого функционала F по определению является выпуклым множеством. Тогда согласно теореме 4.5 надграфик функционала F является слабо замкнутым множеством. Используя теперь теорему 6.2, получим, что функционал F является слабо полунепрерывным снизу. $\blacksquare$

Пример 6.1. *Индикаторная функция выпуклого замкнутого множества (см. пример 3.1) слабо полунепрерывна снизу.*

Действительно, индикаторная функция выпуклого замкнутого множества выпукла и, как нетрудно проверить, полунепрерывна снизу. Поэтому в силу теоремы 6.3 она является слабо полунепрерывной снизу. $\blacksquare$

Случай, когда выпуклый, полунепрерывный снизу функционал принимает значение $-\infty$, (несобственный функционал) оказывается весьма специфичным, о чем свидетельствует следующая

Лемма 6.2. *Если $F : V \to R^1$ – выпуклый, полунепрерывный снизу функционал, принимающий значение $-\infty$, то у него не может быть конечных значений.*

Доказательство. Заметим, во-первых, что в силу теоремы 6.3 функционал F является слабо полунепрерывным снизу.

Допустим, что существует точка u_0, такая, что для некоторого числа a_0 выполнено неравенство $F(u_0) > a_0$.

Множество $\operatorname{epi} F$ является выпуклым, а в силу теоремы 6.2 – слабо замкнутым, а значит, и замкнутым. Так как $F(u_0) > a_0$, то $\{u_0, a_0\} \notin \operatorname{epi} F$. Поэтому из теоремы 1.3 вытекает существование ненулевого линейного непрерывного функционала $\{F_0, \alpha\} \in V^* \times R^1$, строго разделяющего множества $\operatorname{epi} F$ и точку $\{u_0, a_0\}$:

$$F_0(u_0) + \alpha\, a_0 < F_0(u) + \alpha\, a \qquad \forall \{u, a\} \in \operatorname{epi} F. \tag{6.4}$$

Выбрав $u = u_0$, $a = F(u_0)$ в (6.4), получим

$$\alpha \left[F(u_0) - a_0\right] > 0,$$

и значит, $\alpha > 0$.

Так как $\{ u, F(u) \} \in \operatorname{epi} F$, то, положив $a = F(u)$ в неравенстве (6.4) и разделив затем обе части получившегося неравенства на α, имеем с учетом линейности F_0:

$$\frac{1}{\alpha} F_0(u_0 - u) + a_0 < F(u) \qquad \forall\, u \in V, \tag{6.5}$$

что невозможно, ибо левая часть неравенства (6.5) всегда конечна, а правая - принимает значение $-\infty$ хотя бы в одной точке. ■

Справедлива также

Лемма 6.3 (Об аффинной миноранте). *Пусть $F : V \to R^1$ – выпуклый, полунепрерывный снизу функционал, не принимающий значение $-\infty$. Тогда F имеет аффинную миноранту, т.е. существуют линейный непрерывный функционал $F_0 \in V^*$ и число $a \in R^1$, такие, что*

$$F(u) \geq F_0(u) + a \qquad \forall\, u \in V.$$

Доказательство. Если $F \equiv +\infty$, то утверждение леммы очевидно. Предположим поэтому, что в некоторой точке u_0 выполнено неравенство $F(u_0) < +\infty$. Поскольку функционал F не принимает значение $-\infty$, то существует число a_0, для которого $F(u_0) > a_0$. Требуемый результат теперь устанавливается теми же рассуждениями, что и при доказательстве леммы 6.2 (вплоть до получения неравенства (6.5)). ■

7 Проксимальное отображение в гильбертовом пространстве.

Обобщением понятия оператора проектирования является так называемое проксимальное отображение, изучению которого и посвящен настоящий раздел.

Теорема 7.1. *Пусть функционал $F : V \to R^1$ является собственным, выпуклым и полунепрерывным снизу. Выберем произвольный элемент $u \in V$ и определим функционал $G : V \to R^1$ по правилу:*

$$G(\eta) = F(\eta) + \frac{1}{2}\, \|\, \eta - u \,\|^2, \qquad \eta \in V.$$

Тогда существует единственное решение $v \in \operatorname{dom} F$ следующей задачи минимизации:

$$G(v) = \min_{\eta \in V} G(\eta)\,. \tag{7.1}$$

Эта задача эквивалентна вариационному неравенству:

$$(v-u, \eta - v) + F(\eta) - F(v) \geq 0 \qquad \forall\, \eta \in V. \tag{7.2}$$

Доказательство. Установим сначала ограниченность снизу функционала G. Согласно лемме об аффинной миноранте 6.3 и теореме Рисса-Фишера 2.2 найдутся такие $y^* \in V$ и $a \in R^1$, что выполнено неравенство

$$F(\eta) \geq (y^*, \eta) + a \qquad \forall\, \eta \in V,$$

используя которое, получаем

$$G(\eta) = F(\eta) + \frac{1}{2}\,\|\eta - u\|^2 \geq (y^*, \eta) + a + \frac{1}{2}\,\|\eta - u\|^2 =$$

$$= (y^*, \eta - u) + (y^*, u) + a + \frac{1}{2}\,\|\eta - u\|^2 \qquad \forall\, \eta \in V.$$

Далее, поскольку [21])

$$(y^*, \eta - u) \leq \|y^*\|\,\|\eta - u\| \leq \frac{1}{2}\,\|y^*\|^2 + \frac{1}{2}\,\|\eta - u\|^2 \qquad \forall\, \eta \in V,$$

то

$$G(\eta) \geq (y^*, u) + a - |\,(y^*, \eta - u)\,| + \frac{1}{2}\,\|\eta - u\|^2 \geq (y^*, u) + a -$$

$$-\frac{1}{2}\,\|y^*\|^2 - \frac{1}{2}\,\|\eta - u\|^2 + \frac{1}{2}\,\|\eta - u\|^2 = (y^*, u) + a - \frac{1}{2}\,\|y^*\|^2 \qquad \forall\, \eta \in V,$$

и значит,

$$\inf_{\eta \in V} G(\eta) = d > -\infty\,.$$

Поскольку функционал F является собственным, то $\operatorname{dom} \mathrm{F} \neq \emptyset$, а значит, $d < +\infty$.

Докажем теперь, что существует элемент $v \in V$, на котором достигается точная нижняя грань d, т.е. существует решение задачи (7.1). Пусть $\{u_k\}_{k=0}^{+\infty}$ – минимизирующая последовательность этой задачи (существующая в силу определения точной нижней грани):

$$d + \frac{1}{k} \geq F(u_k) + \frac{1}{2}\,\|u_k - u\|^2,$$

[21]) Здесь используем неравенство $2|a\,b| \leq a^2 + b^2$, справедливое для всех чисел a, b.

т.е.
$$2\,\|u_k-u\|^2 \le 4\,\left[\frac{1}{k}+d-F(u_k)\right].$$
Заметим также, что
$$F\left(\frac{u_k+u_n}{2}\right)+\frac{1}{2}\,\left\|\frac{u_k+u_n}{2}-u\right\|^2 \ge d,$$
откуда
$$-\left\|\frac{u_k+u_n}{2}-u\right\|^2 \le 2\,F\left(\frac{u_k+u_n}{2}\right)-2\,d.$$
Используя тождество параллелограмма (1.2), получаем
$$\|\,u_k-u_n\,\|^2=\|\,u_k-u+u-u_n\,\|^2=2\,\|\,u_k-u\,\|^2+2\,\|\,u_n-u\,\|^2-$$
$$-\,\|\,u_k-u-u+u_n\,\|^2=2\,\|\,u_k-u\,\|^2+2\,\|\,u_n-u\,\|^2-4\,\left\|\frac{u_k+u_n}{2}-u\right\|^2.$$
Наконец, в силу выпуклости F
$$F\left(\frac{u_k+u_n}{2}\right)-\frac{1}{2}\,F(u_k)-\frac{1}{2}\,F(u_n)\le 0.$$
Учитывая полученные выше неравенства, имеем
$$\|\,u_k-u_n\,\|^2=2\,\|\,u_k-u\,\|^2+2\,\|\,u_n-u\,\|^2-4\,\left\|\frac{u_k+u_n}{2}-u\right\|^2\le$$
$$\le 4\,\left[\frac{1}{k}+\frac{1}{n}+2\,d-F(u_k)-F(u_n)\right]+8\,\left[F\left(\frac{u_k+u_n}{2}\right)-d\right]=$$
$$=4\,\left[\frac{1}{k}+\frac{1}{n}+2\,F\left(\frac{u_k+u_n}{2}\right)-F(u_k)-F(u_n)\right]\le 4\,\left[\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right].$$
Итак, последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{+\infty}$ фундаментальна, и значит, сходится. Ее предел обозначим через v. В силу слабой полунепрерывности снизу функционала F и нормы (см. лемму 6.1) получаем
$$d\,\le F(v)+\frac{1}{2}\,\|\,v-u\,\|^2\le\liminf_{k\to+\infty}\,\left[F(u_k)+\frac{1}{2}\,\|\,u_k-u\,\|^2\right]\le\,d,$$
т.е. v – решение задачи (7.1), причем $v\in\mathrm{dom\,F}$.

Докажем теперь эквивалентность задач (7.1) и (7.2). Пусть v – решение задачи (7.1). Выберем произвольный элемент η из V; тогда для $z_\lambda=\lambda\eta+(1-\lambda)\,v$ при $\lambda\in(0,1]$ выполнено неравенство
$$G(v)=F(v)+\frac{1}{2}\,\|\,v-u\,\|^2\le G(z_\lambda)=F(\lambda\eta+(1-\lambda)v)+$$

$$+\frac{1}{2}\|\, v+\lambda\,(\eta-v)-u\,\|^2 \le \lambda\, F(\eta)+(1-\lambda)\, F(v)+$$
$$+\frac{1}{2}\|\, v-u\,\|^2+\lambda\,(v-u,\eta-v)+\frac{\lambda^2}{2}\|\,\eta-v\,\|^2,$$

откуда после деления на λ имеем

$$(v-u,\eta-v)+F(\eta)-F(v)\ge -\frac{\lambda}{2}\|\,\eta-v\,\|^2 \qquad \forall\,\eta\in V.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\lambda\to+0$, получим, что v – решение вариационного неравенства (7.2).

Наоборот, пусть теперь для некоторого $v\in V$ выполнено вариационное неравенство (7.2). Имеем, что (ср. с примером 3.2)

$$\frac{1}{2}\|w\|^2-\frac{1}{2}\|z\|^2-(z,w-z)\ge 0 \qquad \forall\, w,z\in V.$$

Используя это неравенство с $w=\eta-u$, $z=v-u$, в силу того, что v – решение задачи (7.2),

$$G(\eta)-G(v)=F(\eta)+\frac{1}{2}\|\,\eta-u\,\|^2-F(v)-\frac{1}{2}\|\,v-u\,\|^2\ge$$
$$\ge (v-u,\eta-v)+F(\eta)-F(v)\ge 0 \qquad \forall\,\eta\in V,$$

т.е. v – решение задачи минимизации (7.1).

Установим, наконец, единственность решения задачи (7.2) (а значит, и задачи (7.1)).

Пусть, наряду с v, элемент w также является решением задачи (7.2). Тогда для w выполнено неравенство

$$(w-u,\eta-w)+F(\eta)-F(w)\ge 0 \qquad \forall\,\eta\in V. \tag{7.3}$$

Подставим в (7.2) $\eta=w$, в (7.3) $\eta=v$ и сложим получившиеся неравенства:

$$(v-u,w-v)+F(w)-F(v)+(w-u,v-w)+F(v)-F(w)\ge 0,$$

откуда имеем: $-\|\,v-w\,\|^2=(v-w,w-v)\ge 0$, а значит, $w=v$. ■

Определение 7.1. *Отображение, сопоставляющее каждому элементу $u\in V$ единственное решение v задачи (7.1) называется проксимальным (или prox-отображением):*

$$v=\operatorname{Prox}_{\{F\}}(u).\ \diamondsuit$$

Частным случаем prox-отображения, когда $F = I_M$ – индикаторная функция выпуклого замкнутого множества $M \subset V$, является оператор проектирования в V на M, $\mathrm{Prox}_{\{I_M\}} \equiv P_M$.

Теорема 7.2. *Пусть $F : V \to R^1$ – выпуклый полунепрерывный снизу собственный функционал. Тогда отображение $\mathrm{Prox}_{\{F\}}$ является жестко нерастягивающим (а, следовательно, липшиц-непрерывным и монотонным).*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 – произвольные элементы из V. Подставляя в (7.2) сначала $u = u_1$, $v = v_1 = \mathrm{Prox}_{\{F\}}(u_1)$, $\eta = v_2$, а затем $u = u_2$, $v = v_2 = \mathrm{Prox}_{\{F\}}(u_2)$, $\eta = v_1$, получим:

$$(v_1 - u_1, v_2 - v_1) + F(v_2) - F(v_1) \geq 0,$$

$$(v_2 - u_2, v_1 - v_2) + F(v_1) - F(v_2) \geq 0.$$

Складывая эти неравенства, имеем:

$$(v_1 - u_1 - (v_2 - u_2), v_2 - v_1) \geq 0,$$

или

$$(u_2 - u_1, v_2 - v_1) \geq \| v_2 - v_1 \|^2,$$

следовательно,

$$(u_2 - u_1, \mathrm{Prox}_{\{F\}}(u_2) - \mathrm{Prox}_{\{F\}}(u_1)) \geq \left\| \mathrm{Prox}_{\{F\}}(u_2) - \mathrm{Prox}_{\{F\}}(u_1) \right\|^2,$$

а значит, $\mathrm{Prox}_{\{F\}}$ – жестко нерастягивающее отображение. ■

8 Теоремы существования для вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами.

Определение 8.1. *Точка v называется неподвижной точкой оператора S, если $Sv = v$.* ♢

Определение 8.2. *Множество M называется счетным, если между ним и множеством натуральных чисел можно установить взаимно-однозначное соответствие.* ♢

Определение 8.3. *Множество N называется плотным в M, если для любого $v \in M$ существует последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ элементов из N, такая, что $u_n \to v$ при $n \to +\infty$, т.е. $\overline{N} = M$.*

Если при этом M совпадает со всем пространством V, то множество N называется всюду плотным.

Пространство V называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

Множество M называется сепарабельным, если в нем существует счетное плотное множество. $\diamondsuit$

Лемма 8.1. *Любое подмножество M сепарабельного гильбертова пространства V само сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $N = \{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – счетное всюду плотное множество и

$$a_n = \inf_{v \in M} \| u_n - v \|.$$

По определению точной нижней грани для любых натуральных n и m найдется такая точка $u_{n,m} \in M$ такая, что

$$\| u_n - u_{n,m} \| < a_n + \frac{1}{m}\,.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и $\dfrac{1}{m} < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Так как N всюду плотно, то для любого $\eta \in M$ найдется такое n, что

$$\| \eta - u_n \| < \frac{\varepsilon}{3}\,,$$

а значит, $a_n < \dfrac{\varepsilon}{3}$ для этого n. Поэтому

$$\| u_n - u_{n,m} \| < a_n + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\,\varepsilon}{3}\,.$$

Но тогда

$$\| \eta - u_{n,m} \| \leq \| \eta - u_n \| + \| u_n - u_{n,m} \| < \frac{2\,\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,,$$

т.е. не более чем счетное множество $\left\{ u_{n,\,m} \right\}_{n,\,m=1}^{+\infty}$ плотно в M. $\blacksquare$

В дальнейшем нам потребуется следующая теорема, доказательство которой мы не приводим ввиду его чрезвычайно большого объема. Это доказательство можно найти, например, в [27, Глава 2].

Теорема 8.1 (Брауэра). *Пусть V_n – гильбертово пространство размерности n, $M \subset V_n$ – непустое, выпуклое, замкнутое и ограниченное множество, оператор $S : M \to M$ непрерывен. Тогда существует неподвижная точка $u \in M$ оператора S.*

Следствием этой теоремы является

Теорема 8.2. *Пусть V_n – гильбертово пространство размерности n, функционал $F : V_n \to R^1$ является собственным, выпуклым и полунепрерывным снизу, $M \subset V_n$ – непустое, выпуклое, замкнутое и ограниченное множество,* $\operatorname{dom} F \cap M \neq \emptyset$, *оператор $A : M \to V_n$ непрерывен. Тогда для любого $g \in V_n$ существует элемент $u \in M$, являющийся решением следующего вариационного неравенства второго рода*

$$(Au, \eta - u) + F(\eta) - F(u) \geq (g, \eta - u) \qquad \forall\, \eta \in M. \tag{8.1}$$

Доказательство. Введем функционал $G = F + I_M$, являющийся по построению собственным, выпуклым и полунепрерывным снизу. Определим оператор S по правилу:

$$S(u) = \operatorname{Prox}_{\{G\}}(u - Au + g), \qquad u \in M.$$

Поскольку $\operatorname{dom} G = \operatorname{dom} F \cap M \subseteq M$, этот оператор отображает M в себя. Кроме того, S – непрерывный оператор, как суперпозиция непрерывных операторов, а поскольку множество M ограничено, то в силу теоремы Брауэра 8.1 у S есть неподвижная точка $u \in M$: $Su = u$, или

$$\operatorname{Prox}_{\{G\}}(u - Au + g) = u.$$

Последнее равенство в силу теоремы 7.1 эквивалентно вариационному неравенству

$$(u - (u - Au + g), \eta - u) + (F + I_M)(\eta) - (F + I_M)(u) \geq 0 \qquad \forall\, \eta \in V_n.$$

Пользуясь определением индикаторной функции I_M, получаем, что точка $u \in M$ удовлетворяет неравенству (8.1). ■

Замечание 8.1. *Пусть M – непустое подмножество гильбертова пространства V, $F : V \to R^1$– собственный функционал,* $\operatorname{dom} F \cap M \neq \emptyset$, *$A : M \to V$ – ограниченный оператор. Тогда следующие вариационные неравенства второго рода эквивалентны:*

$$\textit{Найти } u \in M : \ (Au, \eta - u) + F(\eta) - F(u) \geq 0 \quad \forall\, \eta \in M. \tag{8.2}$$

$$\textit{Найти } u \in V : (Au, \eta - u) + F_M(\eta) - F_M(u) \geq 0 \quad \forall \eta \in V, \tag{8.3}$$

где $F_M = F + I_M$.

Действительно, пусть $u \in M$ – решение вариационного неравенства (8.2). Имеем, что $F_M(u) = F(u)$. Если $\eta \notin M$, то $F_M(\eta) = +\infty$, а значит, неравенство (8.3) справедливо. Если же $\eta \in M$, то неравенство (8.3) непосредственно следует из (8.2).

Обратно, пусть $u \in V$ – решение вариационного неравенства неравенстве (8.3). Проверим, что $u \in M$. На самом деле, выбрав в (8.3) $\eta = \eta^* \in \operatorname{dom} F \cap M$, получим противоречивое неравенство

$$(Au, \eta^* - u) + F(\eta^*) \geq F_M(u),$$

ибо левая часть этого неравенства конечна, а правая – равна $+\infty$. Остальное – очевидно. ■

Теорема 8.3. *Пусть M – непустое, выпуклое, замкнутое, ограниченное подмножество сепарабельного гильбертова пространства V, $A : M \to V$ – псевдомонотонный оператор. Тогда для любого $f \in V$ существует по крайней мере одно решение вариационного неравенства*

$$(Au, \eta - u) \geq (f, \eta - u) \qquad \forall \eta \in M. \tag{8.4}$$

Доказательство. Рассмотрим возрастающую последовательность множеств M_n таких, что

$$\begin{aligned} &M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset M_{n+1} \subset \ldots \subset M; \\ &\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n \quad \text{плотно в } M; \\ &M_n - \text{ выпуклое замкнутое множество, содержащееся} \\ &\text{в подпространстве } V_n \text{ размерности не большей, чем } n. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Для $n = 1, 2, \ldots$ определим операторы $T_n = P_{V_n} \circ A$ [22]). Оператор T_n по построению отображает множество M_n в V_n. Кроме того, он является непрерывным. Действительно, пусть последовательность $\{v_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset M_n$ сильно сходится к v, тогда $\{Av_k\}_{k=1}^{+\infty}$ слабо сходится к Av (лемма 5.2),

[22]) Для отображений $A : X \to Y$, $B : Z \to X$ через $A \circ B$ мы обозначаем их суперпозицию, т.е. отображение $D = A \circ B : Z \to Y$, определенное по формуле $Dz = A(Bz)$, $z \in Z$.

и, следовательно, согласно лемме 4.6, последовательность $\left\{P_{V_n}(Av_k)\right\}_{k=1}^{+\infty}$ сильно сходится к $P_{V_n}(Av)$.

Пользуясь теоремой 8.2 с $M = M_n$, $g = P_{V_n}(f)$, $A = T_n$, $F \equiv 0$, получаем, что существует элемент $u_n \in M_n \subseteq M$, удовлетворяющий вариационному неравенству

$$(T_n u_n, \eta - u_n) \geq (P_{V_n}(f), \eta - u_n) \qquad \forall\, \eta \in M_n. \tag{8.6}$$

Для любого $v \in V$ согласно теореме 2.1 существует такой элемент $w_v \perp V_n$, что $v = P_{V_n} v + w_v$. Поэтому

$$(v, \eta) = (P_{V_n} v, \eta) + (w_v, \eta) = (P_{V_n} v, \eta) \qquad \forall\, v \in V,\ \forall\, \eta \in V_n.$$

С учетом этого соотношения и определения оператора T_n, из неравенства (8.6) имеем:

$$(Au_n, \eta - u_n) \geq (f, \eta - u_n) \qquad \forall\, \eta \in M_n. \tag{8.7}$$

Поскольку множество M ограничено, то принадлежащая ему последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена в V, поэтому из нее можно выделить такую подпоследовательность $v_k = u_{n_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, что

$$v_k \rightharpoonup u \text{ в } V, \text{ при } k \to +\infty. \tag{8.8}$$

причем $u \in M$, ибо множество M выпукло и замкнуто, а значит, и слабо замкнуто (в силу теоремы 4.5).

Кроме того, в силу псевдомонотонности оператора A, последовательность $\{Au_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена в V:

$$\|Au_n\| \leq c, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Докажем, что

$$\limsup_{k \to +\infty} (Av_k, v_k - u) \leq 0. \tag{8.9}$$

В самом деле, поскольку $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} M_n$ плотно в M, то в $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} M_n$ можно для произвольного заданного $\varepsilon > 0$ найти такой элемент u_ε, что

$$\|u_\varepsilon - u\| \leq \varepsilon. \tag{8.10}$$

При этом $u_\varepsilon \in M_k$ для достаточно больших k, поэтому в силу (8.7) с $\eta = u_\varepsilon$

$$(Av_k, v_k - u_\varepsilon) = (Au_{n_k}, u_{n_k} - u_\varepsilon) \leq (f, u_{n_k} - u_\varepsilon) = (f, v_k - u_\varepsilon)\,,$$

а в силу (8.10) и ограниченности оператора A

$$|\,(Av_k, u_\varepsilon - u)\,| \leq \|Av_k\|\,\|u_\varepsilon - u\| \leq c\,\varepsilon,$$

следовательно,

$$\limsup_{k\to+\infty}\,(Av_k, v_k - u) = \limsup_{k\to+\infty}\Big[\,(Av_k, v_k - u_\varepsilon) - (Av_k, u_\varepsilon - u)\,\Big] \leq$$

$$\leq \limsup_{k\to+\infty}\,(f, v_k - u_\varepsilon) + c\,\varepsilon = (f, u - u_\varepsilon) + c\,\varepsilon \leq \Big[\,\|f\| + c\,\Big]\;\varepsilon,$$

откуда и следует (8.9).

Тогда в силу псевдомонотоности оператора A, получим, что

$$\liminf_{k\to+\infty}\,(Av_k, v_k - \eta) \geq (Au, u - \eta) \qquad \forall\,\eta \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n. \tag{8.11}$$

Далее, для любого фиксированного $\eta \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} M_n$ имеем, что $\eta \in M_k$ для достаточно больших k, поэтому в силу (8.7)

$$(Av_k, v_k - \eta) \leq (f, v_k - \eta)\,,$$

откуда

$$\liminf_{k\to+\infty}\,(Av_k, v_k - \eta) \leq \liminf_{k\to+\infty}\,(f, v_k - \eta) = (f, u - \eta).$$

Из этого неравенства с учетом (8.11) вытекает, что

$$(Au, u - \eta) \leq (f, u - \eta) \qquad \forall\,\eta \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n,$$

а так как $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} M_n$ плотно в M, то получаем, что $u-$ решение задачи (8.4). ■

Замечание 8.2. *Приведем один из способов построения множеств M_n, удовлетворяющих условиям (8.5). Согласно лемме 8.1 множество M сепарабельного гильбертова пространства V само сепарабельно, т.е.*

существует счетное плотное в M множество $N = \{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Обозначим через N_n выпуклую оболочку множества $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$:

$$N_n = \left\{ \eta : \eta = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, u_k, \ \text{где} \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1, \ \alpha_k \geq 0, \ k = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Замыкая N_n, получим требуемые множества $M_n = \overline{N}_n$. ■

Теорема 8.4. *Пусть $F : V \to R^1$ – выпуклый полунепрерывный снизу собственный функционал, $A : V \to V$ – псевдомонотонный оператор, для заданного $f \in V$ найдутся такие число $R_f > 0$ и элемент $v_0 \in \operatorname{dom} F$, что выполнено условие*

$$(A\eta - f, \eta - v_0) + F(\eta) - F(v_0) > 0 \qquad \forall \, \eta \notin B^{\circ}_{R_f}(0). \tag{8.12}$$

Тогда существует по крайней мере одно решение вариационного неравенства

$$(Au, \eta - u) + F(\eta) - F(u) \geq (f, \eta - u) \qquad \forall \, \eta \in V. \tag{8.13}$$

Доказательство. Сведем настоящую теорему к теореме 8.3, используя надграфик F в качестве основного множества. Определим

$$\tilde{V} = V \times R^1, \quad \tilde{M} = \operatorname{epi} F = \{ \{\eta, \alpha\} \in V \times R^1 : \alpha \geq F(\eta) \},$$

$$\tilde{A}\tilde{\eta} = \{ A\eta, 0 \} \text{ для } \tilde{\eta} = \{ \eta, \alpha \} \in \tilde{V} \, ; \ \tilde{f} = \{ f, -1 \}.$$

Скалярное произведение в $\tilde{V}$ обозначим через $(\cdot, \cdot)_{\tilde{V}}$ (см. п. 3). Из определения оператора $\tilde{A}$ имеем равенство:

$$(\tilde{A}\tilde{u}, \tilde{v})_{\tilde{V}} = (Au, v) \quad \forall \, \tilde{u} = \{ u, \alpha \}, \forall \, \tilde{v} = \{ v, \beta \} \in \tilde{V}$$

и учитывая то, что из слабой сходимости в $\tilde{V}$ следует слабая сходимость в V, получаем псевдомонотонность оператора $\tilde{A}$. Проверим, что вариационное неравенство (8.13) эквивалентно задаче отыскания такого $\tilde{u} \in \tilde{M}$, что

$$\big(\tilde{A}\tilde{u} - \tilde{f}, \tilde{\eta} - \tilde{u}\big)_{\tilde{V}} \geq 0 \qquad \forall \, \tilde{\eta} \in \tilde{M}. \tag{8.14}$$

Действительно, подробно расписывая неравенство (8.14), мы видим, что оно сводится к задаче нахождения $\tilde{u} = \{ u, a \} \in \operatorname{epi} F$ такого, что

$$(Au - f, \eta - u) + \alpha - a \geq 0 \qquad \forall \, \{ \eta, \alpha \} \in \operatorname{epi} F. \tag{8.15}$$

Однако, задача (8.15) эквивалентна вариационному неравенству

$$(Au - f, \eta - u) + F(\eta) - a \geq 0 \qquad \forall\, \eta \in V. \tag{8.16}$$

В самом деле, если $\tilde{u} = \{\, u, a \,\} \in \operatorname{epi} F$ – решение (8.15), то, полагая в нем $\alpha = F(\eta)$, получим, что $\tilde{u} = \{\, u, a \,\}$ – решение (8.16).

Обратно, пусть $\tilde{u} = \{\, u, a \,\} \in \operatorname{epi} F$ – решение (8.16), и $\{\, \eta, \alpha \,\}$ – произвольный вектор из $\operatorname{epi} F$, т.е. $\alpha \geq F(\eta)$. Имеем, что

$$(Au - f, \eta - u) + \alpha - a \geq (Au - f, \eta - u) + F(\eta) - a \geq 0,$$

т.е. $\tilde{u} = \{\, u, a \,\}$ – решение (8.15).

Пусть теперь $\tilde{u} = \{\, u, a \,\} \in \operatorname{epi} F$ – решение задачи (8.14), а следовательно, и задач (8.15) и (8.16). Полагая в (8.16) $\eta = u$, мы найдем, что $a \leq F(u)$, следовательно, $a = F(u)$, откуда вытекает, что u является решением вариационного неравенства (8.13).

Наоборот, если u – решение (8.13), то взяв $\tilde{u} = \{u, F(u)\}$ в (8.15), мы убеждаемся в том, что $\tilde{u}$ – решение этого неравенства:

$$(Au - f, \eta - u) + \alpha - F(u) \geq (Au - f, \eta - u) + F(\eta) - F(u) \geq 0,$$

а значит, и неравенства (8.15).

Итак, эквивалентность вариационных неравенств (8.13) и (8.14) установлена, и, следовательно, достаточно проверить разрешимость вариационного неравенства (8.14).

Определим для $R > R_0 = \sqrt{\|v_0\|^2 + |F(v_0)|^2}$ множество

$$\tilde{M}_R = \left\{ \tilde{\eta} = \{\eta, \alpha\} \in \tilde{M} : \|\tilde{\eta}\|^{\,2}_{\tilde{V}} = \|\eta\|^2 + |\alpha|^2 \leq R^2 \right\},$$

являющегося, очевидно, непустым, замкнутым, выпуклым и ограниченным. Тогда в силу теоремы 8.3 существует такое $\tilde{u}_R \in \tilde{M}_R$, что

$$\big(\tilde{A}\tilde{u}_R - \tilde{f}, \tilde{\eta} - \tilde{u}_R\big)_{\tilde{V}} \geq 0 \qquad \forall\, \tilde{\eta} \in \tilde{M}_R. \tag{8.17}$$

Согласно определению $\tilde{M}_R$, мы можем взять в (8.17)

$$\tilde{\eta} = \tilde{v}_0 = \{v_0, F(v_0\,)\} \in \tilde{M}_R.$$

Поэтому неравенство (8.17) при $\tilde{u}_R = \{u_R, a_R\,\}$ примет вид

$$(Au_R, u_R - v_0) + a_R \leq (f, u_R - v_0) + F(v_0), \tag{8.18}$$

и поскольку $a_R \geq F(u_R)$, мы заключаем, что

$$(Au_R, u_R - v_0) + F(u_R) \leq (f, u_R - v_0) + F(v_0)\,; \tag{8.19}$$

отсюда, ввиду (8.12), при $R \geq \max\{R_0, R_f\}$ следует, что $\|u_R\| < R_f$. Но тогда из (8.18) и ограниченности оператора A вытекает, что

$$a_R \leq (f - Au_R, u_R - v_0\,) + F(v_0) \leq \|f - Au_R\|\,\|u_R - v_0\| + F(v_0) \leq C,$$

где постоянная $C = (\,\|f\| + d\,R_f\,)\,(\,R_f + \|v_0\|) + |F(v_0)|$ не зависит от $R \geq \max\{R_0, R_f\}$.

С другой стороны, пользуясь тем, что у функционала F существует согласно лемме 6.3 аффинная миноранта, получаем:

$$a_R \geq F(u_R) \geq (y^*, u_R) + a \geq -\|y^*\|R_f + a = c,$$

где постоянная c также не зависит от $R \geq \max\{R_0, R_f\}$. Пусть C_0 – максимальное из чисел $\|v_0\|$, R_0, R_f, C, $|\,c\,|$. Положим $R = 2\,C_0$, тогда для $\tilde{u}_R$ выполнено неравенство

$$\|\tilde{u}_R\|^2_{\tilde{V}} = \|u_R\|^2 + a_R^2 \leq 2\,C_0^2 < 4\,C_0^2 = R^2.$$

Докажем, что $\tilde{u}_R$ – решение задачи (8.14). Если $\tilde{w}$ – произвольная точка $\tilde{M}$, то имеем, что $\tilde{\eta} = (1-\theta)\tilde{u}_R + \theta\,\tilde{w} = \tilde{u}_R + \theta\,(\tilde{w} - \tilde{u}_R\,)$ при достаточно малом $\theta > 0$ принадлежит $\tilde{M}_R$. Действительно, если $\tilde{w} \in \tilde{M}_R$, то $\tilde{\eta} \in \tilde{M}_R$ при $\theta < 1$ в силу выпуклости $\tilde{M}_R$. Если же $\tilde{w} \notin \tilde{M}_R$, т.е. $\|\,\tilde{w}\,\| > R$, то, выбирая

$$\theta = \frac{R - \|\tilde{u}_R\|_{\tilde{V}}}{\|\,\tilde{w} - \tilde{u}_R\|_{\tilde{V}}} \leq \frac{R - \|\tilde{u}_R\|_{\tilde{V}}}{\|\,\tilde{w}\,\|_{\tilde{V}} - \|\,\tilde{u}_R\|_{\tilde{V}}} < \frac{R - \|\tilde{u}_R\|_{\tilde{V}}}{R - \|\tilde{u}_R\|_{\tilde{V}}} = 1,$$

получаем, что

$$\|\tilde{\eta}\,\|_{\tilde{V}} \leq \theta\,\|\,\tilde{w} - \tilde{u}_R\|_{\tilde{V}} + \|\,\tilde{u}_R\|_{\tilde{V}} \leq R - \|\,\tilde{u}_R\| + \|\,\tilde{u}_R\| = R.$$

Поэтому и в этом случае $\tilde{\eta} \in \tilde{M}_R$ (с учетом того, что $\tilde{\eta} \in \tilde{M}$ как выпуклая комбинация элементов выпуклого множества $\tilde{M}$).

При таком выборе $\tilde{\eta}$ в (8.17) получим

$$\theta\left(\tilde{A}\tilde{u}_R - \tilde{f}, \tilde{w} - \tilde{u}_R\right)_{\tilde{V}} \geq 0,$$

и, следовательно,

$$\left(\tilde{A}\tilde{u}_R - \tilde{f}, \tilde{w} - \tilde{u}_R\right)_{\tilde{V}} \geq 0 \qquad \forall\,\tilde{w} \in \tilde{M}.\,\blacksquare$$

Теорема 8.5. *Пусть $M \subset V$ – выпуклое замкнутое непустое множество, $F : V \to R^1$ – выпуклый полунепрерывный снизу собственный функционал, $\operatorname{dom} F \cap M \neq \emptyset$, $A : V \to V$ – псевдомонотонный, коэрцитивный на множестве $\operatorname{dom} F \cap M$ оператор. Тогда для произвольного $f \in V$ существует по крайней мере одно решение вариационного неравенства*

$$u \in M : (Au, \eta - u) + F(\eta) - F(u) \geq (f, \eta - u) \qquad \forall \eta \in M. \tag{8.20}$$

Доказательство. Пусть $F_M = F + I_M$, где I_M – индикаторная функция множества M. Тогда задача (8.20) эквивалентна вариационному неравенству

$$u \in V : (Au, \eta - u) + F_M(\eta) - F_M(u) \geq (f, \eta - u) \qquad \forall \eta \in V.$$

Докажем, что это вариационное неравенство имеет решение. Положим $v_0 = \eta_0 \in \operatorname{dom} F \cap M$, где η_0 – элемент из определения 5.4, и поскольку у функционала F_M существует согласно лемме 6.3 аффинная миноранта, то

$$(A\eta - f, \eta - v_0) + F_M(\eta) - F_M(v_0) \geq \rho(\|\eta\|)\,\|\eta\| - (f, \eta - v_0) +$$

$$+ (y^*, \eta) + a - F_M(v_0) \geq \rho(\|\eta\|)\,\|\eta\| - \|f\|\|\eta\| - \|y^*\|\|\eta\| +$$

$$+ (f, v_0) + a - F_M(v_0) = (\rho(\|\eta\|) - \|f\| - \|y^*\|)\,\|\eta\| + C^*,$$

где $C^* = (f, v_0) + a - F_M(v_0)$ – константа, не зависящая от η. Так как согласно определению 5.4 $\lim\limits_{\xi \to +\infty} \rho(\xi) = +\infty$, то получаем, что

$$\lim_{\|\eta\| \to +\infty} (\rho(\|\eta\|) - \|f\| - \|y^*\|)\,\|\eta\| = +\infty\,,$$

а значит, найдется такое число $R_f > 0$, что для любого η, удовлетворяющего условию $\|\eta\| \geq R_f$, выполнено неравенство (8.12), и тогда утверждение настоящей теоремы следует из теоремы 8.4. ■

Глава 2

Элементы выпуклого анализа

В данной главе приведены некоторые результаты выпуклого анализа: вводится понятие производной Гато функционала и устанавливаются основные ее свойства, доказываются теоремы существования для задач на минимум функционала. Приводятся результаты об эквивалентности этих задач вариационным неравенствам. Доказаны теоремы об отделимости выпуклых множеств. Значительное внимание уделено также вопросам субдифференциального исчисления. В частности, доказаны теоремы о субдифференцировании суммы функционалов и субдифференцировании сложной функции.

9 Вариация и производная Гато функционала.

Определение 9.1. *Если в точке $u \in V$ существует предел*

$$\frac{d}{dt}\,F(u+t\,\eta)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{F(u+t\,\eta)-F(u)}{t} = \delta\,F(u,\eta) \quad \forall\,\eta\in V,$$

то функционал $\eta \to \delta\,F(u,\eta)$ называется вариацией Гато функционала F в точке u.

Если же функционал $\eta \to \delta\,F(u,\eta)$ является линейным [1]) и непрерывным, то, вообще говоря, нелинейный оператор $F' : V \to V$, определяемый соотношением

$$(F'(u),\eta) = \delta\,F(u,\eta) \qquad \forall\,\eta\,\in V,$$

называется производной Гато (градиентом) функционала F. $\diamondsuit$

[1]) Вариация Гато является однородным оператором, что следует из ее определения, но, вообще говоря, не обязательно аддитивным оператором (см. пример 9.2).

Пример 9.1. *Пусть* $V = R^2$,

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x_1 = x_2^2,\ x_2 \neq 0, \\ & \\ 0 & \textit{в остальных точках.} \end{cases}$$

Функция F *является дифференцируемой по Гато в нуле (при этом* $F'(0) = 0$*), где она не является даже непрерывной.* ■

Пример 9.2. *Пусть* F *– функция, заданная в полярных координатах (*$x_1 = r\,\cos\varphi$, $x_2 = r\,\sin\varphi$*) равенством* $F(x) = r\,\cos(3\,\varphi)$. *В этом случае* $\delta\,F(0,\eta) = F(\eta)$, *т.е. функция* F *имеет в нуле вариацию Гато, но не является в то же время дифференцируемой по Гато в нуле, поскольку ее вариация не аддитивна, а значит, и нелинейна по* η. ■

Пример 9.3. *Пусть* $B : V \to V$ *– линейный ограниченный оператор,* $B^* : V \to V$ *– сопряженный к* B *оператор,* $F(u) = (Bu, u)$. *Тогда*

$$F'(u) = Bu + B^*u. \blacksquare$$

Пример 9.4. *Пусть* $F(u) = \|u\|$. *Тогда*

$$F'(u) = \frac{u}{\|u\|}\,, \quad u \neq 0.$$

Требуемый результат следует из соотношения

$$\frac{\|\,u + t\,\eta\,\| - \|\,u\,\|}{t} = \frac{(\|\,u + t\,\eta\,\| - \|\,u\,\|)\,(\|\,u + t\,\eta\,\| + \|\,u\,\|)}{t\,(\|\,u + t\,\eta\,\| + \|\,u\,\|)} =$$

$$= \frac{2\,t\,(u,\eta) + t^2\,\|\,\eta\,\|^2}{t\,(\|\,u + t\,\eta\,\| + \|\,u\,\|)}\,. \blacksquare$$

Лемма 9.1. *Пусть функционал* F *имеет градиент в каждой точке* V. *Тогда для произвольных* $u, \eta \in V$ *существует* $\tau \in (0, 1)$, *такое, что справедлива обобщенная формула Лагранжа*

$$F(\eta) - F(u) = (F'(u + \tau\,(\eta - u)), \eta - u)\,.$$

Доказательство. Положим $\varphi(t) = F(u + t\,(\eta - u))$. Тогда

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\,F(u + t\,(\eta - u)) = (F'(u + t\,(\eta - u)), (\eta - u)\,)\,,$$

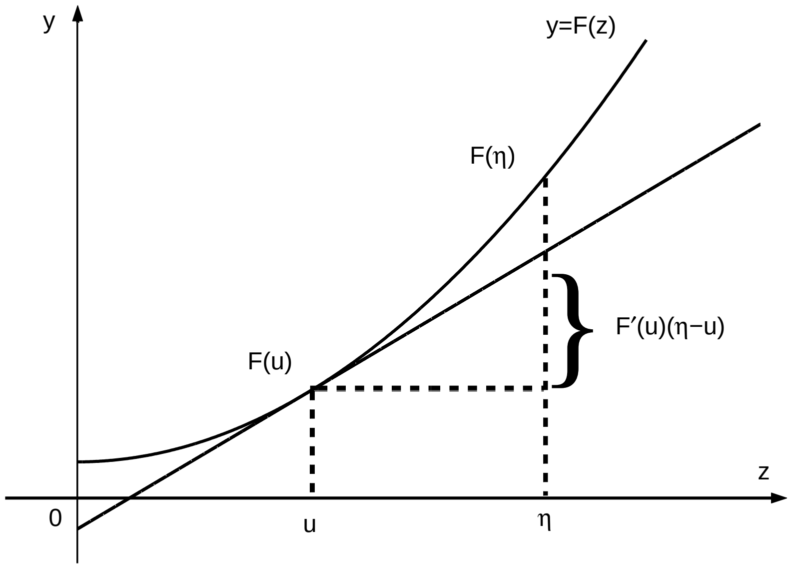

Рис. 2.1:

следовательно, в силу классической формулы Лагранжа

$$F(\eta) - F(u) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) =$$

$$= (F'(u + \tau\,(\eta - u)), \eta - u\,)\,, \qquad \tau \in (0,1). \blacksquare$$

Лемма 9.2. *Пусть $F : V \to R^1$ – выпуклый, всюду на V дифференцируемый по Гато функционал. Тогда (см. рис. 2.1)*

$$F(\eta) - F(u) \ge (F'(u), \eta - u) \qquad \forall\, u, \eta \in V.$$

Доказательство. Поскольку F – выпуклый функционал, то для любых $u, \eta \in V$, $t \in (0,1)$ имеем

$$F(t\,\eta + (1-t)u) = F(u + t\,(\eta - u)) \le$$

$$\le t\,F(\eta) + (1-t)F(u) = F(u) + t\,(F(\eta) - F(u)),$$

откуда

$$\frac{F(u + t\,(\eta - u)) - F(u)}{t} \le F(\eta) - F(u).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $t \to 0$, получим

$$(F'(u), \eta - u) \le F(\eta) - F(u) \qquad \forall\, u, \eta \in V. \blacksquare$$

Теорема 9.1. *Пусть $F : V \to R^1$ – выпуклый, дифференцируемый по Гато в каждой точке V функционал. Тогда F является слабо полунепрерывным снизу на V.*

Доказательство. Пусть u_0 – произвольная точка из V, $u_n \rightharpoonup u_0$ в V при $n \to +\infty$. В силу леммы 9.2 $F(u_n) - F(u_0) \geq (F'(u_0), u_n - u_0)$, откуда имеем:

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq F(u_0) + \liminf_{n\to+\infty} (F'(u_0), u_n - u_0) = F(u_0). \blacksquare$$

Пример 9.5. *(см. пример 3.2) Пусть $A : V \to V$ – линейный, ограниченный, самосопряженный, неотрицательный оператор. Тогда функционал $F : V \to R^1$, $F(\eta) = (A\eta, \eta)$ является слабо полунепрерывным снизу на V.*

Действительно, как установлено в примере 3.2, функционал F является выпуклым. Нетрудно проверить, что $F'(u) = 2\,Au$, следовательно, в силу теоремы 9.1 функционал F является слабо полунепрерывным снизу на V. $\blacksquare$

Лемма 9.3. *Пусть $F : V \to R^1$ – дифференцируемый по Гато в каждой точке V функционал. Тогда F является выпуклым в том и только том случае, когда его градиент $F' : V \to V$ – монотонный оператор.*

Доказательство. Пусть F – выпуклый функционал. В силу леммы 9.2 для любых $u, \eta \in V$ имеем

$$(F'(u), \eta - u) \leq F(\eta) - F(u),$$

$$(F'(\eta), u - \eta) \leq F(u) - F(\eta).$$

Складывая эти неравенства, получаем, что

$$(F'(\eta) - F'(u), \eta - u) \geq 0 \qquad \forall\, u, \eta \in V,$$

т.е. F' – монотонный оператор.

Обратно, пусть $F' : V \to V$ – монотонный оператор, u, η – произвольные элементы из V, $\lambda \in (0, 1)$. Обозначим

$$d = \lambda\, F(u) + (1-\lambda)\, F(\eta) - F(\lambda\, u + (1-\lambda)\, \eta) =$$

$$= \lambda\, [F(u) - F(\lambda\, u + (1-\lambda)\, \eta)] + (1-\lambda)\, [F(\eta) - F(\lambda\, u + (1-\lambda)\, \eta)].$$

Далее, имеем

$$\lambda\, u + (1-\lambda)\, \eta - u = (1-\lambda)\, (\eta - u), \quad \lambda\, u + (1-\lambda)\, \eta - \eta = \lambda\, (u - \eta).$$

Используя теперь лемму 9.1, получим

$$d = \lambda\ (F'(\lambda\, u + (1-\lambda)\,\eta + \tau_1\,(1-\lambda)\,(u-\eta)), (1-\lambda)\,(u-\eta)) +$$

$$+ (1-\lambda)\ (F'(\lambda\, u + (1-\lambda)\,\eta + \tau_2\,\lambda\,(\eta-u)), \lambda\,(\eta-u))\,,$$

где $0 < \tau_1, \tau_2 < 1$. Положим

$$z = \lambda\, u + (1-\lambda)\,\eta + \tau_1\,(1-\lambda)\,(u-\eta), \quad w = \lambda\, u + (1-\lambda)\,\eta + \tau_2\,\lambda\,(\eta-u),$$

$$\gamma = \tau_1\,(1-\lambda) + \tau_2\,\lambda > 0.$$

Тогда

$$z - w = (\tau_1\,(1-\lambda) + \tau_2\,\lambda)\,(u-\eta) = \gamma\,(u-\eta),$$

следовательно,

$$d = \lambda\,(1-\lambda)\ [\,(F'(z), u-\eta) - (F'(w), u-\eta)\,] =$$

$$= \frac{\lambda\,(1-\lambda)}{\gamma}\ (F'(z) - F'(w), z-w) \geq 0,$$

т.к. F' – монотонный оператор. Из последнего неравенства вытекает выпуклость F. ■

Лемма 9.4. *Пусть $F : V \to R^1$ – дифференцируемый по Гато функционал, его градиент $F' : V \to V$ – строго монотонный оператор. Тогда F является строго выпуклым.*

Доказательство. Отметим, во-первых, что в силу леммы 9.3 функционал F является выпуклым в том и только том случае, когда его градиент F' – монотонный оператор. Поэтому достаточно проверить, что из (3.4) следует равенство $u = \eta$.

Пусть для некоторых $u, \eta \in V$ выполнено равенство (3.4). Тогда в силу леммы 9.1 с учетом равенств

$$u - \frac{u+\eta}{2} = \frac{u-\eta}{2}, \quad \eta - \frac{u+\eta}{2} = \frac{\eta-u}{2}$$

имеем

$$0 = F(u) + F(\eta) - 2\,F\left(\frac{u+\eta}{2}\right) =$$

$$= \left[F(u) - F\left(\frac{u+\eta}{2}\right)\right] + \left[F(\eta) - F\left(\frac{u+\eta}{2}\right)\right] =$$

$$= \left(F'\left(\frac{u+\eta}{2} + \tau_1 \frac{u-\eta}{2} \right), \frac{u-\eta}{2} \right) +$$
$$+ \left(F'\left(\frac{u+\eta}{2} + \tau_2 \frac{\eta-u}{2} \right), \frac{\eta-u}{2} \right), \qquad \tau_1,\, \tau_2 \in (0,1). \qquad (9.1)$$

Обозначим

$$w = \frac{u+\eta}{2} + \tau_1 \frac{u-\eta}{2}, \quad z = \frac{u+\eta}{2} + \tau_2 \frac{\eta-u}{2}.$$

При этом

$$w - z = (\tau_1 + \tau_2) \frac{u-\eta}{2},\ \tau_1 + \tau_2 > 0,$$

следовательно, (9.1) запишется в виде

$$\frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \left(F'(w) - F'(z), w - z \right) = 0,$$

откуда вследствие строгой монотонности F' получаем, что $w = z$, а значит, $u = \eta$. ■

В дальнейшем нам потребуется следующая

Лемма 9.5. *Оператор $A : V \to V$ является монотонным в том и только том случае, когда при любых фиксированных элементов $u, \eta \in V$ вещественная функция $t \to \varphi_{u,\eta}(t) = (A(u + t\,\eta), \eta)$ является не убывающей на $[\,0,1\,]$.*

Доказательство. Пусть оператор A является монотонным. Тогда для $t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$ имеем

$$\varphi_{u,\eta}(t_2) - \varphi_{u,\eta}(t_1) = (A(u + t_2\,\eta) - A(u + t_1\,\eta), \eta) =$$
$$= \frac{1}{t_2 - t_1} \left(A(u + t_2\,\eta) - A(u + t_1\,\eta), (u + t_2\,\eta) - (u + t_1\,\eta) \right) \ge 0.$$

Обратно, пусть при любых фиксированных $u, \eta \in V$ вещественная функция $\varphi_{u,\eta}$ возрастает на $[\,0,1\,]$. Тогда для $\eta = w - u$,

$$(Aw - Au, w - u) = \varphi_{u,\eta}(1) - \varphi_{u,\eta}(0) \ge 0. \blacksquare$$

Лемма 9.6. *Пусть $A : V \to V$ является градиентом некоторого функционала $F : V \to R^1$. Если A – монотонный или радиально непрерывный оператор, то*

$$F(\eta) = F(0) + \int_0^1 (A(t\,\eta), \eta)\; dt \qquad \forall\, \eta \in V. \qquad (9.2)$$

Доказательство. Для произвольного $\eta \in V$ рассмотрим функцию вещественного переменного

$$t \to \varphi(t) = F(t\,\eta),\ t \in [0,1].$$

Имеем

$$\varphi'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{F(t\,\eta + s\,\eta) - F(t\,\eta)}{s} = (A(t\,\eta), \eta)\,.$$

Функция вещественного переменного

$$t \to \psi(t) = (A(t\,\eta), \eta)\,,\ t \in [0,1],$$

является непрерывной, если A – радиально непрерывный оператор, или не убывающей на $[\,0,1\,]$, если A – монотонной оператор (в силу леммы 9.5), а потому она интегрируема на $[\,0,1\,]$. Поэтому

$$F(\eta) - F(0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int\limits_0^1 \varphi'(t)\,dt = \int\limits_0^1 (A(t\,\eta), \eta)\ dt. \blacksquare$$

Определение 9.2. *Оператор $A : V \to V$ называется потенциальным, если существует такой конечный функционал $F : V \to R^1$, что A является его градиентом: $A = F'$. При этом F называют потенциалом оператора A.* $\diamondsuit$

Теорема 9.2. *Пусть $A : V \to V$ – радиально непрерывный оператор. Тогда A является потенциальным в том и только том случае, когда*

$$\int\limits_0^1 (A(t\,\eta), \eta)\ dt - \int\limits_0^1 (A(t\,u), u)\ dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (A(u + t\,(\eta - u)), \eta - u)\ dt \qquad \forall\, u, \eta \in V. \tag{9.3}$$

Доказательство. Пусть $A : V \to V$ – потенциальный оператор. Определим функционал $F : V \to R^1$ по формуле (сравни с (9.2))

$$F(\eta) = \int\limits_0^1 (A(t\,\eta), \eta)\ dt \qquad \forall\, \eta \in V. \tag{9.4}$$

Введем функцию вещественного переменного φ: $\varphi(t) = F(u + t\,(\eta - u))$. Тогда

$$\varphi'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{F(u + t\,(\eta - u) + s\,(\eta - u)) - F(u + t\,(\eta - u))}{s} =$$

$$= (A(u + t\,(\eta - u)), \eta - u)\,,$$

следовательно,

$$\int_0^1 (A(t\,\eta), \eta)\ dt - \int_0^1 (A(t\,u), u)\ dt = F(\eta) - F(u) =$$

$$= \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt = \int_0^1\ (A(u + t\,(\eta - u)), \eta - u)\ dt.$$

Обратно, пусть выполнено соотношение (9.3). Докажем, что в этом случае функционал $F : V \to R^1$, определенный по формуле (9.4), является дифференцируемым по Гато, и его потенциалом является оператор A. Имеем:

$$\lim_{s\to 0} \frac{F(u + s\,\eta) - F(u)}{s} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \left[\int_0^1 (A(t(u + s\,\eta)), u + s\,\eta)\ dt - \int_0^1 (A(t\,u), u)\ dt \right] =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_0^1 (A(u + t\,s\,\eta)), s\,\eta)\ dt = \lim_{s\to 0} \int_0^1 (A(u + t\,s\,\eta)), \eta)\ dt,$$

откуда в силу интегральной теоремы о среднем и радиальной непрерывности оператора A для некоторого $t_0 \in [0, 1]$ получаем, что

$$\lim_{s\to 0} \frac{F(u + s\,\eta) - F(u)}{s} = \lim_{s\to 0}\ (A(u + t_0\,s\,\eta)), \eta) = (Au, \eta) \quad \forall\,\eta \in V,$$

т.е. A является градиентом функционала F. ■

Отметим, что теорема 9.2 – это критерий потенциальности радиально непрерывных операторов.

10 Задачи на минимум функционала. Теоремы существования и эквивалентность вариационным неравенствам.

Пусть $F : V \to R^1$, M – подмножество V. Рассматривается задача отыскания элемента $u \in M$, такого, что

$$F(u) = \inf_{\eta \in M} F(\eta). \tag{10.1}$$

Справедлива

Теорема 10.1 (Первая обобщенная теорема Вейерштрасса). *Пусть M – непустое ограниченное слабо замкнутое подмножество V, $F : V \to R^1$ – собственный слабо полунепрерывный снизу на V функционал. Тогда существует по крайней мере одно решение задачи (10.1).*

Доказательство. Докажем сначала, что функционал F ограничен снизу на M. Допустим противное. Тогда найдется последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset M$, такая, что $F(u_n) < -n$. Поскольку множество M ограничено, то согласно теореме 4.4 найдется подпоследовательность $\{u_{n_k}\}_{n=k}^{+\infty}$, сходящаяся слабо к некоторому элементу u_0 в V при $k \to +\infty$. Так как M слабо замкнуто, то $u_0 \in M$. В силу слабой полунепрерывности снизу функционала F

$$F(u_0) \leq \liminf_{k\to+\infty} F(u_{n_k}) = -\infty,$$

что невозможно, ибо F – собственный функционал. Полученное противоречие означает, что F ограничен снизу на M. Обозначим через d точную нижнюю грань F на M:

$$\inf_{\eta\in M} F(\eta) = d \leq F(w) \quad \forall w \in M. \tag{10.2}$$

Из определения точной нижней грани вытекает существование минимизирующей последовательности, т.е. последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset M$ такой, что

$$d = \lim_{n\to+\infty} F(u_n).$$

Так как M ограничено и слабо замкнуто, то найдется подпоследовательность $\{u_{n_k}\}_{n=k}^{+\infty}$, сходящаяся слабо к некоторому элементу $u_0 \in M$ в V при $k \to +\infty$. Для этой подпоследовательности сохраняется равенство

$$d = \lim_{k\to+\infty} F(u_{n_k}).$$

С другой стороны, в силу слабой полунепрерывности снизу функционала F

$$F(u_0) \leq \liminf_{k\to+\infty} F(u_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} F(u_{n_k}) = d.$$

Отсюда и из неравенства (10.2) с $w = u_0$ следует, что $F(u_0) = d$. ■

Теорема 10.2 (Вторая обобщенная теорема Вейерштрасса). *Пусть непустое множество $M \subset V$ слабо замкнуто, $F : V \to R^1$ – собственный, коэрцитивный, слабо полунепрерывный снизу на V функционал. Тогда существует по крайней мере одно решение задачи (10.1).*

Доказательство. Пусть $u^* \in M$ – произвольный фиксированный элемент. Без ограничения общности можно считать, что $F(u^*) < +\infty$. Поскольку F – коэрцитивный функционал, то в силу определения (5.12) существует число $R > 0$, такое, что

$$F(u) \geq F(u^*) \quad \text{при} \quad \|u\| \geq R. \tag{10.3}$$

Как следует из теоремы 4.5, ограниченное множество

$$M_{R^*} = \{u \in M : \|u\| \leq R^*\}, \ R^* = \max\{\|u^*\|, R\},$$

является слабо замкнутым. При этом $u^* \in M_{R^*}$. Но тогда согласно теореме 10.1 функционал F достигает на M_{R^*} своей точной нижней грани в некоторой точке $u_0 \in M_{R^*} \subset M$. Из неравенства (10.3) следует, что в u_0 достигается точная нижняя грань F на всем M, поскольку

$$F(u) \geq F(u_0) \qquad \forall\, u \in M,\ \|u\| \leq R^*,$$

$$F(u) \geq F(u^*) \geq F(u_0) \qquad \forall\, u \in M,\ \|u\| \geq R^* \geq R. \ \blacksquare$$

Имеет место следующее достаточное условие единственности решения задачи (10.1).

Теорема 10.3. *Пусть $F : V \to R^1$ – строго выпуклый функционал, множество $M \subset V$ является выпуклым. Тогда задача (10.1) не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Пусть $u_1, u_2 \in M$ – решения задачи (10.1):

$$d = \inf_{\eta \in M} F(\eta) = F(u_1) = F(u_2).$$

Имеем, что $(u_1 + u_2)/2 \in M$, следовательно,

$$d \leq F\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) < \frac{F(u_1) + F(u_2)}{2} = d.$$

Полученное противоречие показывает, что $u_1 = u_2$. $\blacksquare$

Приведем теперь ряд результатов об эквивалентности задачи об отыскании минимума функционала и вариационных неравенств.

Теорема 10.4. *Пусть множество $M \subset V$ является выпуклым, $F = F_1 + F_2$, $F_1, F_2 : V \to R^1$ – выпуклые функционалы, F_1 дифференцируем по Гато. Тогда задача (10.1) эквивалентна вариационному неравенству*

$$u \in M: \quad (F_1'(u), \eta - u) + F_2(\eta) - F_2(u) \geq 0 \qquad \forall\, \eta \in M. \tag{10.4}$$

Доказательство. Пусть $u \in M$ – решение задачи (10.1). Тогда для произвольных $\eta \in M$, $\lambda \in (\,0, 1\,)$ в силу выпуклости M имеем, что $\lambda\,\eta + (1-\lambda)\,u \in M$, следовательно,

$$F(u) \le F(\lambda\,\eta + (1-\lambda)\,u) \qquad \forall\,\eta \in M,$$

откуда, используя выпуклость F_2, получаем

$$F_1(u) + F_2(u) \le$$

$$\le F_1(\lambda\,\eta + (1-\lambda)\,u) + F_2(u) + \lambda\,[F_2(\eta) - F_2(u)] \qquad \forall\,\eta \in M,$$

или

$$\frac{1}{\lambda}\,[\,F_1(\lambda\,\eta + (1-\lambda)\,u) - F_1(u)\,] + F_2(\eta) - F_2(u) \ge 0 \qquad \forall\,\eta \in M.$$

Устремляя λ к нулю, получим, что u – решение задачи (10.4).

Пусть, наоборот, $u \in M$ – решение задачи (10.4). Докажем, что u – решение задачи (10.1). Действительно, поскольку функционал F_1 является выпуклым, то в силу леммы 9.2

$$F_1(\eta) - F_1(u) \ge (F_1'(u), \eta - u) \qquad \forall\,\eta \in M,$$

откуда согласно (10.4)

$$F_1(\eta) - F_1(u) + F_2(\eta) - F_2(u) \ge 0 \qquad \forall\,\eta \in M,$$

т.е. u – решение задачи (10.1). ■

Теорема 10.5. *Пусть множество $M \subset V$ является выпуклым, $F = F_1 + F_2$, $F_1, F_2 : V \to R^1$ – выпуклые функционалы, F_1 дифференцируем по Гато, причем $F_1' : V \to V^*$ – радиально непрерывный оператор. Тогда задача (10.4) эквивалентна вариационному неравенству*

$$(F_1'(\eta), \eta - u) + F_2(\eta) - F_2(u) \ge 0 \qquad \forall\,\eta \in M. \tag{10.5}$$

Доказательство. Пусть $u \in M$ – решение задачи (10.4). Поскольку F_1 – выпуклый функционал, то в силу леммы 9.3 оператор F_1' является монотонным, следовательно,

$$(F_1'(\eta), \eta - u) + F_2(\eta) - F_2(u) \ge$$

$$\ge (F_1'(u), \eta - u) + F_2(\eta) - F_2(u) \ge 0 \qquad \forall\,\eta \in M,$$

т.е. u – решение задачи (10.5).

Обратно, предположим, что $u \in M$ – решение задачи (10.5). Пусть w – произвольный элемент из M. Поскольку M – выпуклое множество, то $\eta = (1-\lambda)\,u + \lambda\,w = u + \lambda\,(w-u) \in M$, $\lambda \in (0,1)$. При этом из (10.5) имеем, что

$$\lambda\;(F_1'(u+\lambda\,(w-u)), w-u) + F_2((1-\lambda)\,u+\lambda\,w) - F_2(u) \geq 0,$$

откуда вследствие выпуклости F_2

$$\lambda\;(F_1'(u+\lambda\,(w-u)), w-u) + \lambda\;[F_2(w) - F_2(u)] \geq 0 \qquad \forall\, w \in M.$$

Так как F_1' – радиально непрерывный оператор, то разделив последнее неравенство на λ и устремив λ к нулю, получим, что u – решение задачи (10.4). ■

Следствие 10.1. *Пусть множество $M \subset V$ является выпуклым, $F = F_1 + F_2$, $F_1, F_2 : V \to R^1$ – выпуклые функционалы, F_1 дифференцируем по Гато, причем $F_1' : V \to V$ – радиально непрерывный оператор. Тогда задачи (10.1), (10.4), (10.5) эквивалентны.*

Доказательство. Требуемое утверждение является непосредственным следствием из теорем 10.4 и 10.5. ■

Замечание 10.1. *Как это следует из доказательства теоремы 10.5, то, что решение задачи (10.4) является и решением вариационного неравенства (10.5) устанавливается без предположения о радиальной непрерывности оператора F_1'.*

11 Отделимость выпуклых множеств.

Определение 11.1. *Пусть M и N – подмножества V. Говорят, что линейный функционал $F : V \to R^1$ разделяет множества M и N, если существует такое число c, что*

$$F(u) \geq c \geq F(\eta) \qquad \forall\, u \in M,\ \forall\, \eta \in N.$$

Говорят, что линейный функционал $F : V \to R^1$ строго разделяет множества M и N, если существует такое число c, что

$$F(u) > c > F(\eta) \qquad \forall\, u \in M,\ \forall\, \eta \in N,$$

что эквивалентно неравенству

$$\inf_{u\in M} F(u) > c > \sup_{\eta\in N} F(\eta). \diamondsuit$$

Замечание 11.1. *В гильбертовом пространстве V согласно теореме Рисса-Фишера 2.2 множества M и N разделяются тогда и только тогда, когда найдутся такие вектор $u^* \in V$ и число c, что выполнено*

$$(u^*, u) \geq c \geq (u^*, \eta) \qquad \forall\, u \in M,\ \forall\, \eta \in N. \blacksquare$$

Справедлива следующая

Лемма 11.1. *Пусть u_0 – внутренняя точка выпуклого множества M, u_1 – произвольная точка из M. Тогда для всех λ из интервала $(0,1)$ точки $u_\lambda = \lambda u_1 + (1-\lambda)u_0$ являются внутренними.*

Доказательство. По условию настоящей леммы существует такое $r > 0$, что $B_r(u_0) \subset M$. Пусть η – произвольный вектор из шара $B_{r_\lambda}(u_\lambda)$, где $r_\lambda = r(1-\lambda)$, $\lambda \in (0,1)$, т.е.

$$\|\eta - u_\lambda\| \leq r_\lambda.$$

Положим $u_\eta = (\eta - \lambda u_1)/(1-\lambda)$, тогда

$$u_\eta - u_0 = \frac{1}{1-\lambda}\,\eta - \frac{\lambda}{1-\lambda}\,u_1 - u_0 = \frac{1}{1-\lambda}\,\eta - \frac{\lambda\, u_1 + (1-\lambda)\, u_0}{1-\lambda} = \frac{\eta - u_\lambda}{1-\lambda}\,,$$

и

$$\|u_\eta - u_0\| = \frac{1}{1-\lambda}\, \|\eta - u_\lambda\| \leq r$$

поэтому $u_\eta \in B_r(u_0) \subset M$. Поскольку множество M выпукло, то оно содержит элемент $\eta = \lambda u_1 + (1-\lambda)u_\eta$.

Итак, если $\eta \in B_{r_\lambda}(u_\lambda)$, то $\eta \in M$, т.е. $B_{r_\lambda}(u_\lambda) \subset M$, $r_\lambda > 0$. $\blacksquare$

Лемма 11.2. *Пусть $M \subset V$ – выпуклое множество, $\operatorname{int} M \neq \emptyset$, $u_1 \notin \operatorname{int} M$, $\overline{M}$ – замыкание множества M. Тогда $u_1 \notin \operatorname{int} \overline{M}$.*

Доказательство. Установим, что в любой окрестности u_1 найдется точка, не принадлежащая $\overline{M}$; это и будет означать то, что $u_1 \notin \operatorname{int} \overline{M}$.

Пусть $u_0 \in \operatorname{int} M$ (т.е. существует шар $B_r(u_0) \subset M$, $r > 0$), $u_\lambda = (1-\lambda)u_0 + \lambda\, u_1$, $\lambda \geq 0$ (т.е. u_λ – точка луча, проходящего через u_1, с началом в u_0).

Для $\lambda > 1$ имеем

$$u_1 = \frac{1}{\lambda}\, u_\lambda + \frac{\lambda - 1}{\lambda}\, u_0 = \mu\, u_\lambda + (1-\mu)\, u_0, \quad \mu = \frac{1}{\lambda} \in (0,1).$$

Поэтому $u_\lambda \notin M$, иначе в силу леммы 11.1 точка u_1 была бы внутренней точкой M.

Пусть теперь $r_\lambda = r\,\dfrac{\lambda - 1}{2} > 0$, η – произвольный вектор из шара $B_{r_\lambda}(u_\lambda)$, т.е. $\|\eta - u_\lambda\| \le r_\lambda$. Положим $u_\eta = \dfrac{\eta - \lambda u_1}{1-\lambda}$. Тогда так же, как и при доказательстве леммы 11.1, получаем, что

$$\|u_\eta - u_0\| = \frac{1}{\lambda - 1}\,\|\eta - u_\lambda\| \le \frac{r_\lambda}{\lambda - 1} = \frac{r}{2},$$

и для любого $w \in B_{r/2}\,(u_\eta)$ имеем

$$\|w - u_0\| \le \|w - u_\eta\| + \|u_\eta - u_0\| \le \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

а значит, $w \in B_r(u_0)$, следовательно, $B_{r/2}\,(u_\eta) \subset B_r(u_0) \subset M$. Поэтому $u_\eta \in \operatorname{int} M$.

Далее, как и выше, получаем, основываясь на выражении для u_η,

$$u_1 = \frac{\lambda - 1}{\lambda}\, u_\eta + \frac{1}{\lambda}\,\eta = \mu\, u_\eta + (1-\mu)\,\eta, \quad \mu = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \in (0,1).$$

Отсюда следует, что $\eta \notin M$, ибо в противном случае в силу леммы 11.1 точка u_1 была бы внутренней точкой M.

Итак, $\eta \in B_{r_\lambda}(u_\lambda)$, $\eta \notin M$, т.е. $B_{r_\lambda}(u_\lambda) \cap M = \emptyset$ для любого $\lambda > 1$, и, таким образом, $u_\lambda \notin \overline{M}$. Но $u_\lambda \to u_1$ при $\lambda \to 1$, а значит, в любой окрестности u_1 найдется точка, не принадлежащая $\overline{M}$. ■

Определение 11.2. *Множество $K \subset V$ называется конусом, если, наряду с любым своим элементом u, оно содержит элемент $(\lambda\, u)$ для любого $\lambda \ge 0$.* $\diamondsuit$

Лемма 11.3. *Пусть K – выпуклый замкнутый конус, не совпадающий со всем пространством V. Тогда существует ненулевой линейный непрерывный функционал F_0, принимающий неотрицательные значения на множестве K.*

Доказательство. Выберем точку u_0, не принадлежащую конусу K (таковая найдется по условию настоящей теоремы). Поскольку K – выпуклое, замкнутое множество, то в силу теоремы 1.1 существует элемент $v_0 = P_K(u_0)$ – проекция точки u_0 на K, причем согласно теореме 1.1 вектор $v_0 \in K$ является решением вариационного неравенства

$$(v_0 - u_0, \eta - v_0\,) \geq 0 \qquad \forall\, \eta \in K. \tag{11.1}$$

Из определения конуса следует, что $0 \in K$ и $2\, v_0 \in K$. Выберем в неравенстве (11.1) сначала $\eta = 0$, а затем $\eta = 2\, v_0$. Соответственно получим

$$(v_0 - u_0, -v_0\,) \geq 0 \text{ и } (v_0 - u_0, v_0\,) \geq 0,$$

т.е.

$$(v_0 - u_0, v_0) = 0.$$

Тогда в силу (11.1)

$$(v_0 - u_0, \eta) = (v_0 - u_0, \eta - v_0) + (v_0 - u_0, v_0) =$$

$$= (v_0 - u_0, \eta - v_0) \geq 0 \qquad \forall\, \eta \in K,$$

т.е. функционал F_0, задаваемый соотношением $F_0(\eta) = (v_0 - u_0, \eta)$, $\eta \in V$, является искомым (в силу того, что $v_0 \in K$, а $u_0 \notin K$, функционал F_0 – не нулевой). ■

Лемма 11.4. *Пусть M – выпуклое множество,* $\operatorname{int} M \neq \emptyset$*, причем* $0 \notin \operatorname{int} M$*. Тогда существует ненулевой линейный непрерывный функционал F, принимающий неотрицательные значения на M и, следовательно, разделяющий множество M и точку* 0.

Доказательство. Определим следующее множество:

$$K = \{\, \eta \in V : \eta = \lambda u\,,\ \lambda \geq 0\,,\ u \in M\,\}.$$

Очевидно, что множество K является конусом. Установим его выпуклость. Пусть $v_1, v_2 \in K$, тогда существуют такие числа $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ и векторы $u_1, u_2 \in M$, что $v_1 = \lambda_1 u_1$, $v_2 = \lambda_2 u_2$. Для любых $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$ имеем

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = a_1 \lambda_1 u_1 + a_2 \lambda_2 u_2 =$$

$$= (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2) \left[\, \frac{a_1\, \lambda_1}{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2}\, u_1 + \frac{a_2\lambda_2}{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2}\, u_2 \,\right],$$

если $a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 > 0$ (в противном случае $a_1v_1 = a_2v_2 = 0$, а значит, $a_1v_1 + a_2v_2 = 0 \in K$). Поскольку M выпукло, то элемент, задаваемый выражением в квадратных скобках, принадлежит M, а тогда, по определению множества K, вектор $a_1v_1 + a_2v_2$ принадлежит K.

Далее, так как $\operatorname{int} M \neq \emptyset$, то найдутся такие $u_0 \in M$ и $r > 0$, что $B_r(u_0) \subset M \subset K$, т.е. $\operatorname{int} K \neq \emptyset$. Кроме того, $0 \notin \operatorname{int} K$. Иначе бы $(-u_0) \in K$, следовательно, нашлось бы такое число $\mu > 0$, что $\mu(-u_0) \in M$, при этом

$$0 = \lambda\,(-\mu\, u_0) + (1-\lambda)\, u_0, \quad \lambda = \frac{1}{\mu+1} \in (0,1),$$

и $0 \in \operatorname{int} M$ согласно лемме 11.1, что противоречит условию настоящей леммы.

Пусть $\overline{K}$ – замыкание конуса K. Очевидно, что $\overline{K}$ – выпуклый замкнутый конус, а в силу леммы 11.2 точка 0 не является внутренней для $\overline{K}$, и, таким образом, $\overline{K} \neq V$. Согласно лемме 11.3 найдется линейный непрерывный ненулевой функционал F, для которого выполнено условие

$$F(\eta) \geq 0 = F(0) \qquad \forall\, \eta \in \overline{K}.$$

Поскольку $M \subseteq K \subseteq \overline{K}$, то функционал F разделяет множество M и точку 0. ∎

Теорема 11.1 (об отделимости выпуклых множеств). *Пусть M, N – выпуклые множества, $\operatorname{int} M \neq \emptyset$, $\operatorname{int} M \cap N = \emptyset$. Тогда существует ненулевой линейный непрерывный функционал F, разделяющий множества M и N.*

Доказательство. Из леммы 11.1 следует, что непустое (по условию настоящей теоремы) множество $M^\circ = \operatorname{int} M$ является выпуклым. Положим

$$L = M^\circ - N = \{\eta \in V : \eta = u - v\,,\, u \in M^\circ\,,\, v \in N\}$$

Легко проверить, что множество L выпукло и имеет непустую внутренность. Кроме того, $0 \notin \operatorname{int} L$. В противном случае $0 = u - v$, где $u \in M^\circ$, $v \in N$, т.е. $u = v$, в то время, как M° и N не пересекаются по условию настоящей теоремы. Согласно лемме 11.4 найдется линейный непрерывный ненулевой функционал, для которого выполнено условие

$$F(\eta) \geq 0 \qquad \forall\, \eta \in L,$$

т.е.

$$F(u) \geq F(v) \qquad \forall\, u \in M^\circ,\ \forall\, v \in N. \tag{11.2}$$

В силу леммы 11.1 для любой точки $u \in M$ найдется последовательность из внутренних точек множества M

$$u_{\lambda_n} = \lambda_n\, u + (1 - \lambda_n\,)\, u_0, \quad u_0 \in M^\circ,$$

сильно сходящаяся к u при $\lambda_n \to 0$. Тогда из неравенства (11.2) (с учетом непрерывности функционала F) получаем, что F разделяет множества M и N. ■

Следствие 11.1. *Пусть M – замкнутое, выпуклое множество, $u_0 \notin M$. Тогда существует ненулевой линейный непрерывный функционал F, строго разделяющий множество M и точку u_0.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что множество $V \setminus M$ открыто и содержит точку u_0. Поэтому существует такой шар $B_r(0)$, что $u_0 + B_r(0) \subset V \setminus M$, т.е. $(u_0 + B_r(0)) \bigcap M = \emptyset$. В силу теоремы 11.1 множества $u_0 + B_r(0)$ и M можно разделить ненулевым функционалом F:

$$F(u) \leq F(u_0) + F(\eta) \qquad \forall u\, \in M,\ \forall\, \eta \in B_r(0).$$

Поскольку $F \neq 0$, то существует $\varepsilon > 0$, такое, что

$$-\varepsilon = \inf_{z \in B_r(0)} F(z) < 0.$$

Поэтому

$$F(u) \leq F(u_0) - \varepsilon \qquad \forall\, u \in M. \blacksquare$$

Замечание 11.2. *Если M, N – выпуклые замкнутые подмножества V, внутренности которых пусты и пересекающиеся только в граничных точках, то не обязательно существует ненулевой линейный непрерывный функционал, разделяющий эти множества. В качестве примера можно привести, для $V = R^2$, две пересекающиеся прямые.* ■

Замечание 11.3. *Справедливость следствия 11.1 была установлена нами ранее (см. п. 1, теорема 1.3).* ■

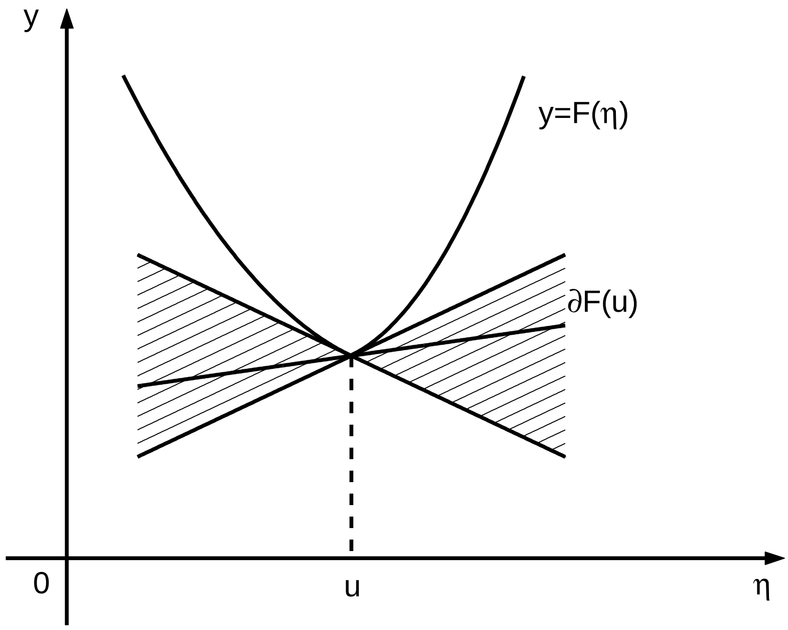

Рис. 2.2: Множество субградиентов функционала F в точке u.

12 Субградиенты и субдифференциалы.

Определение 12.1. *Пусть $F : V \to R^1$ – собственный функционал. Элемент $u^* \in V$ называется субградиентом функционала F в точке u, если*

$$F(\eta) - F(u) \geq (u^*, \eta - u) \qquad \forall\, \eta \in V.$$

Множество всех субградиентов функционала F в точке u называется субдифференциалом F в точке u (см. рис. 2.2) и обозначается через $\partial F(u)$:

$$\partial F(u) = \{u^* \in V : F(\eta) - F(u) \geq (u^*, \eta - u) \quad \forall\, \eta \in V\}\,. \diamondsuit$$

Пример 12.1. *Пусть $F(u) = \|u\|$. Тогда*

$$\partial F(u) = \begin{cases} \{u^* \in V : \|u^*\| \leq 1\}\,, & u = 0, \\ \{u^* \in V : \|u^*\| = 1,\, (u^*, u) = \|u\|\,\}\,, & u \neq 0. \end{cases}$$

Действительно, пусть $u = 0$. Тогда $u^* \in \partial F(0)$, если

$$\|\eta\| \geq (u^*, \eta) \qquad \forall\, \eta \in V,$$

откуда при $\eta = u^*$ получаем, что $\|u^*\| \leq 1$.

Наоборот, если $\|u^*\| \leq 1$, то для любого $\eta \in V$ выполнено неравенство

$$(u^*, \eta) \leq \|u^*\| \, \|\eta\| \leq \|\eta\|,$$

т.е. $u^* \in \partial F(0)$.

Пусть теперь $u \neq 0$. Если $(u^*, u) = \|u\|$ и $\|u^*\| = 1$, то

$$\|\eta\| - \|u\| = \|\eta\| \, \|u^*\| - (u^*, u) \geq (u^*, \eta) - (u^*, u) = (u^*, \eta - u) \quad \forall \, \eta \in V,$$

т.е. $u^* \in \partial F(u)$.

Наоборот, если $u^* \in \partial F(u)$, то

$$-\|u\| = \|0\| - \|u\| \geq (u^*, 0 - u) = -\left(u^*, u\right),$$

$$\|u\| = \|2u\| - \|u\| \geq (u^*, 2u - u) = \left(u^*, u\right),$$

откуда вытекает, что $(u^*, u) = \|u\|$. Далее, имеем

$$\|\eta\| - \|u\| \geq (u^*, \eta - u) = (u^*, \eta) - (u^*, u) = (u^*, \eta) - \|u\| \qquad \forall \, \eta \in V.$$

Отсюда

$$\|\eta\| \geq (u^*, \eta) \qquad \forall \, \eta \in V,$$

следовательно, как и выше, получаем, что $\|u^*\| \leq 1$. А с другой стороны,

$$\|u^*\| \, \|u\| \geq (u^*, u) = \|u\|,$$

т.е. $\|u^*\| \geq 1$. Поэтому $\|u^*\| = 1$. ■

Пример 12.2. *Пусть $A : V \to V$ – линейный, ограниченный, неотрицательный, самосопряженный оператор, функционал $F : V \to R^1$ задается соотношением $F(\eta) = (A\eta, \eta)$. Тогда, как это было показано при рассмотрении примера 3.2,*

$$F(\eta) - F(u) \geq 2 \, (Au, \eta - u) \qquad \forall \, \eta \in V,$$

а значит, элемент $2\,Au$ является субградиентом функционала F в точке u. ■

Теорема 12.1. *Пусть $F : V \to R^1$ – собственный функционал, имеющий в каждой точке V субградиент. Тогда F является выпуклым и слабо полунепрерывным снизу на V.*

Доказательство. Пусть

$$F(w) - F(z) \geq (u^*(z), w - z) \qquad \forall\, w, z \in V.$$

Тогда для любых $u, \eta \in V$ и $z = \alpha u + (1-\alpha)\,\eta$, $\alpha \in [\,0, 1\,]$

$$F(u) \geq F(z) + (u^*(z), u - z)\,,$$

$$F(\eta) \geq F(z) + (u^*(z), \eta - z)\,.$$

Умножая первое из этих неравенств на α, а второе – на $1-\alpha$, и складывая, получим

$$\alpha\, F(u) + (1-\alpha)\, F(\eta) \geq F(z) + (u^*(z), \alpha\, u + (1-\alpha)\,\eta - z) =$$

$$= F(z) = F(\alpha\, u + (1-\alpha)\,\eta),$$

т.е. F – выпуклый функционал.

Пусть теперь $u_n \rightharpoonup u_0$ в V при $n \to +\infty$. Поскольку в силу леммы 9.2 выполнено неравенство

$$F(u_n) \geq F(u_0) + (u^*(u_0), u_n - u_0\,)\,,$$

то

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq F(u_0),$$

т.е. F является слабо полунепрерывным снизу на V. ■

Теорема 12.2. *Пусть $F : V \to R^1$ – собственный функционал, имеющий в каждой точке $u \in V$ субградиент Au . Тогда оператор $A : V \to V$ является монотонным.*

Доказательство. Имеем (сравни с леммой 9.3)

$$F(\eta) - F(u) \geq (Au, \eta - u) \qquad \forall\, u, \eta \in V,$$

$$F(u) - F(\eta) \geq (A\eta, u - \eta) \qquad \forall u, \eta \in V.$$

Складывая эти неравенства, получим

$$(A\eta - Au, \eta - u) \geq 0 \qquad \forall\, u, \eta \in V. \blacksquare$$

Теорема 12.3. *Пусть оператор $A : V \to V$ является монотонным градиентом собственного функционала $F : V \to R^1$. Тогда элемент Au является субградиентом функционала F в точке u, причем $\partial F(u) = \{Au\}$ (субдифференциал состоит из одного элемента, совпадающего с производной Гато).*

Доказательство. В силу леммы 9.3 функционал F является выпуклым, следовательно, из леммы 9.2 вытекает, что

$$(F'(u), \eta - u) = (Au, \eta - u) \le F(\eta) - F(u) \qquad \forall\, \eta \in V,$$

т.е. $Au \in \partial F(u)$.

Наоборот, если $u^* \in \partial F(u)$, то

$$F(u + \lambda\, \eta) - F(u) \ge \lambda\, (u^*, \eta) \qquad \forall\, \eta \in V,\ \forall\, \lambda > 0.$$

Разделив это неравенство на λ и переходя затем к пределу при $\lambda \to 0$, имеем

$$(F'(u), \eta) \ge (u^*, \eta) \qquad \forall\, \eta \in V,$$

или

$$(F'(u) - u^*, \eta) \ge 0 \qquad \forall \eta \in V.$$

Из последнего неравенства вследствие произвольности η получаем, что $u^* = F'(u) = Au$. ■

Пример 12.3. *Пусть* $F(u) = \|u\|$. *Тогда (см. пример 9.4) имеем, что* $F'(u) = \dfrac{u}{\|u\|}$, $u \ne 0$, *следовательно, в силу теоремы 12.3*

$$\partial F(u) = \frac{u}{\|u\|}, \qquad u \ne 0. \blacksquare$$

Пример 12.4. *Пусть*

$$F(u) = (u^*, u) + a, \quad u^* \in V^*,\ a \in R^1.$$

Тогда $\partial F(u) = F'(u) = u^*$. ■

В дальнейшем нам потребуются следующие вспомогательные результаты (леммы 12.1–12.3).

Лемма 12.1. *Пусть* $F : V \to R^1$ *– непрерывный в точке* u_0 *функционал. Тогда* $\operatorname{int} \operatorname{epi} F \ne \emptyset$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – заданное число. В силу непрерывности F в точке u_0 мы можем выбрать такую окрестность U точки $u_0 \in V$, что $|\, F(\eta) - F(u_0)\,| < \varepsilon$ для $\eta \in U$. Но тогда множество

$$D = \Big\{ \{\eta, a\} \in V \times R^1 : a > F(u_0) + \varepsilon,\, \eta \in U \Big\}$$

открыто и содержится в $\operatorname{epi} F$. ■

Лемма 12.2. *Функционал $F : V \to R^1$ является выпуклым тогда и только тогда, когда для любых $u, \eta \in V$ выпукла функция вещественного переменного $t \to \varphi(t) = F(u + t\,\eta)$.*

Доказательство. Если F – выпуклый функционал, то для любых $t_1, t_2 \in R^1$, $\alpha \in [0,1]$ имеем

$$\varphi(\alpha\, t_1 + (1-\alpha)\, t_2) = F(\alpha\,(u + t_1\,\eta) + (1-\alpha)\,(u + t_2\,\eta)) \le$$

$$\le \alpha\, F(u + t_1\,\eta) + (1-\alpha)\, F(u + t_2\,\eta) = \alpha\,\varphi(t_1) + (1-\alpha)\,\varphi(t_2).$$

Наоборот, если для любых $u, \eta \in V$ функция вещественного переменного $t \to \varphi(t) = F(u + t\,\eta)$ является выпуклой, то, полагая $\eta = w - u$, где w – произвольный элемент из V, получим для любого $\alpha \in [\,0, 1\,]$, что

$$F(u + \alpha\,(w - u)) = F(u + \alpha\,\eta) = \varphi(\alpha) =$$

$$= \varphi(\alpha \cdot 1 + (1-\alpha)\cdot 0) \le \alpha\,\varphi(1) + (1-\alpha)\,\varphi(0) =$$

$$= \alpha\, F(u + \eta) + (1-\alpha)\, F(u) = \alpha\, F(w) + (1-\alpha)\, F(u). \blacksquare$$

Лемма 12.3. *Если функция $\varphi : R^1 \to R^1$ выпукла, то функция вещественного переменного f, определяемая формулой*

$$f(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda}, \quad \lambda \ne 0,$$

является неубывающей.

Доказательство. Рассмотрим три случая:
1. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$;
2. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$;
3. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.
Покажем, что во всех трех случаях $f(\lambda_1) < f(\lambda_2)$.
Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Положим $\alpha = \lambda_1/\lambda_2$. Ясно, что $0 < \alpha < 1$, причем

$$1 - \alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2}\,, \quad \alpha\,\lambda_2 + (1-\alpha)\cdot 0 = \lambda_1.$$

В силу выпуклости φ

$$\varphi(\lambda_1) = \varphi(\alpha\,\lambda_2 + (1-\alpha)\cdot 0) \le \alpha\,\varphi(\lambda_2) + (1-\alpha)\,\varphi(0) =$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,\varphi(\lambda_2) + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2}\,\varphi(0),$$

следовательно,

$$\varphi(\lambda_1)-\varphi(0)\le \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,\varphi(\lambda_2)+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2}\,\varphi(0)-\varphi(0)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,[\,\varphi(\lambda_2)-\varphi(0)\,]\,.$$

Разделив последнее неравенство на $\lambda_1>0$, получим

$$f(\lambda_1)=\frac{\varphi(\lambda_1)-\varphi(0)}{\lambda_1}\le\frac{\varphi(\lambda_2)-\varphi(0)}{\lambda_2}=f(\lambda_2).$$

Пусть теперь $\lambda_1<\lambda_2<0$. Положим $\alpha=\lambda_2/\lambda_1$. Тогда $0<\alpha<1$, причем

$$1-\alpha=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1}\,,\quad \alpha\,\lambda_1+(1-\alpha)\cdot 0=\lambda_2.$$

Имеем, что

$$\varphi(\lambda_2)\le\alpha\,\varphi(\lambda_1)+(1-\alpha)\,\varphi(0)=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,\varphi(\lambda_1)+\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1}\,\varphi(0),$$

откуда

$$\varphi(\lambda_2)-\varphi(0)\le\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,[\,\varphi(\lambda_1)-\varphi(0)\,]\,.$$

Разделив это неравенство на $\lambda_2<0$, получим

$$f(\lambda_2)=\frac{\varphi(\lambda_2)-\varphi(0)}{\lambda_2}\ge\frac{\varphi(\lambda_1)-\varphi(0)}{\lambda_1}=f(\lambda_1).$$

Пусть, наконец, $\lambda_1<0<\lambda_2$. Положим $\alpha=-\lambda_1/(\lambda_2-\lambda_1)$. Так как $\lambda_1<0$, $0<\lambda_2$, то $0<\alpha<1$, причем

$$1-\alpha=1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\,,$$

и

$$\alpha\,\lambda_2+(1-\alpha)\,\lambda_1=\frac{-\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}=0.$$

Тогда

$$\varphi(0)=\varphi(\alpha\,\lambda_2+(1-\alpha)\,\lambda_1)\le\alpha\,\varphi(\lambda_2)+(1-\alpha)\,\varphi(\lambda_1),$$

откуда

$$-\alpha\,[\,\varphi(\lambda_2)-\varphi(0)\,]\le(1-\alpha)\,[\,\varphi(\lambda_1)-\varphi(0)\,]\,,$$

или

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\,[\,\varphi(\lambda_2)-\varphi(0)\,]\le\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\,[\,\varphi(\lambda_1)-\varphi(0)\,]\,.$$

Разделив последнее неравенство на $\dfrac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}<0$, получим

$$f(\lambda_2)=\frac{\varphi(\lambda_2)-\varphi(0)}{\lambda_2}\ge\frac{\varphi(\lambda_1)-\varphi(0)}{\lambda_1}=f(\lambda_1).\ \blacksquare$$

Следствие 12.1. *Пусть функционал $F:V\to R^1$ является выпуклым. Тогда функция вещественного переменного f, определяемая формулой*

$$f(\lambda)=\frac{F(u+\lambda\,w)-F(u)}{\lambda}\qquad\forall\,u,w\in V,$$

является неубывающей.

Доказательство. Необходимо положить $\varphi(\lambda)=F(u+\lambda\,w)$ и воспользоваться леммами 12.2 и 12.3. $\blacksquare$

Теорема 12.4. *Если в точке $u\in V$ выпуклый конечный функционал $F:V\to R^1$ является непрерывным и имеет единственный субградиент $u^*\in V$, то F дифференцируем по Гато в точке u, причем $\partial F(u)=\{F'(u)\}$.*

Доказательство. Пусть w – произвольный элемент из V. В силу следствия 12.1 функция вещественного переменного f, определяемая формулой

$$f(\lambda)=\frac{F(u+\lambda\,w)-F(u)}{\lambda},$$

является неубывающей. Поскольку

$$F(u+\lambda\,w)-F(u)\ge(u^*,\lambda\,w)\qquad\forall\,\lambda\in R^1,$$

то при $1>\lambda>0$

$$-\infty<(u^*,w)\le f(\lambda)\le f(1)=F(u+w)-F(u)<+\infty,$$

следовательно, $f(\lambda)$ имеет предел при $\lambda\to+0$, причем

$$\delta F(u,w)=\lim_{t\to+0}f(t)\le f(\lambda)=\frac{F(u+\lambda\,w)-F(u)}{\lambda}\qquad\forall\,\lambda>0,$$

откуда

$$\lambda\,\delta F(u,w)\le F(u+\lambda\,w)-F(u)\qquad\forall\,\lambda>0.$$

Аналогичным образом, поскольку при $-1<\lambda<0$

$$-\infty<F(u)-F(u+w)=f(-1)\le f(\lambda)\le(u^*,w)<+\infty,$$

то $f(\lambda)$ имеет предел при $\lambda \to -0$, причем

$$\delta F(u,w) = \lim_{t\to+0} f(t) \geq \lim_{t\to-0} f(t) \geq \frac{F(u+\lambda\,w) - F(u)}{\lambda} \quad \forall\,\lambda < 0,$$

следовательно,

$$\lambda\,\delta F(u,w) \leq F(u+\lambda\,w) - F(u) \qquad \forall\,\lambda \in R^1.$$

Таким образом,

$$F(u) + \lambda\,\delta F(u,w) \leq F(u+\lambda\,w) \qquad \forall\,\lambda \in R^1. \tag{12.1}$$

Из неравенства (12.1) вытекает, что множество

$$D = \Big\{\,\{u+\lambda\,w, F(u) + \lambda\,\delta F(u,w)\} \in V \times R^1,\ \lambda \in R^1\,\Big\}$$

не пересекается с $\operatorname{int}\operatorname{epi} F$. Множество D, очевидно, выпукло. Множество $\operatorname{epi} F$ также выпукло, причем $\operatorname{int}\operatorname{epi} F \neq \emptyset$ в силу леммы 12.1. Тогда согласно теореме 11.1 существует ненулевой линейный непрерывный функционал $\{\,G_w, \alpha\,\}$, разделяющий D и $\operatorname{epi} F$:

$$(\,G_w, u+\lambda\,w) + \alpha\,[\,F(u) + \lambda\,\delta F(u,w)\,] \leq$$

$$\leq (\,G_w, \eta) + \alpha\,a \qquad \forall\,\lambda \in R^1,\ \forall\,\{\,\eta, a\} \in \operatorname{epi} F. \tag{12.2}$$

Так как $\{u+\lambda\,w, F(u+\lambda\,w)\} \in \operatorname{epi} F$, то подставляя в (12.2) $\eta = u+\lambda\,w$, $a = F(u+\lambda\,w)$, получим

$$\alpha\,[\,F(u+\lambda\,w) - F(u) - \lambda\,\delta F(u,w)\,] \geq 0,$$

откуда в силу неравенства (12.1) вытекает, что $\alpha \geq 0$. Если предположить, что $\alpha = 0$, то подставляя в (12.2) $\lambda = 0$, $\eta = u+z$, $a = F(u+z)$, где z – произвольный элемент из V, получим

$$(G_w, z) \geq 0 \qquad \forall\,z \in V,$$

следовательно, в силу произвольности z,

$$(G_w, z) = 0 \qquad \forall\,z \in V,$$

т.е. $G_w = 0$, в то время, как функционал $\{\,G_w, \alpha\,\}$ является ненулевым. Полученное противоречие показывает, что $\alpha > 0$.

Разделив теперь обе части неравенства (12.2) на $\alpha > 0$ и положив $\eta = u$, $a = F(u)$, имеем

$$\left(\frac{1}{\alpha}\,G_w, u + \lambda\, w\right) + F(u) + \lambda\,\delta F(u, w) \le \left(\frac{1}{\alpha}\,G_w, u\right) + F(u) \quad \forall\, \lambda \in R^1,$$

откуда

$$\lambda\,\delta F(u, w) \le \lambda\,\left(-\,\frac{1}{\alpha}\,G_w, w\right) \qquad \forall\, \lambda \in R^1,$$

или, с учетом произвольности λ,

$$\delta F(u, w) = \left(-\,\frac{1}{\alpha}\,G_w, w\right) \qquad \forall\, w \in V.$$

Полагая в (12.2) $\lambda = 0$, $\eta = z$, $a = F(z)$, где z – произвольный элемент из V, получим, что

$$\left(\frac{1}{\alpha}\,G_w, u\right) + F(u) \le \left(\frac{1}{\alpha}\,G_w, z\right) + F(z) \qquad \forall\, z \in V,$$

или

$$\left(-\,\frac{1}{\alpha}\,G_w, z - u\right) \le F(z) - F(u) \qquad \forall\, z \in V.$$

Последнее неравенство означает, что элемент $-\,\dfrac{1}{\alpha}\,G_w \in V^*$ является субградиентом функционала F в точке u. В силу единственности субградиента u^* функционала F в точке u, имеем, что $u^* = -\,\dfrac{1}{\alpha}G_w$, следовательно, соотношение

$$\delta F(u, w) = \left(-\,\frac{1}{\alpha}\,G_w, w\right) \qquad \forall\, w \in V$$

можно записать в виде

$$\delta F(u, w) = (u^*, w) \qquad \forall\, w \in V,$$

т.е. вариация Гато функционала F является линейным функционалом.

Поскольку w – произвольный элемент из V, то функционал F дифференцируем по Гато в точке u, причем

$$(F'(u), w) = (u^*, w) \qquad \forall\, w \in V,$$

т.е. $F'(u) = u^*$. ■

Теорема 12.5. *Если в точке $u \in V$ выпуклый конечный функционал $F : V \to R^1$ является непрерывным, то $\partial F(u) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Функционал F является непрерывным в точке u и выпуклым, следовательно, множество $\operatorname{int}\operatorname{epi} F$ не пусто и выпукло. Поскольку точка $\{u, F(u)\}$ не принадлежит $\operatorname{int}\operatorname{epi} F$, то в силу теоремы 11.1 существует ненулевой линейный непрерывный функционал $\{G_0, \alpha\}$, разделяющий $\{\, u, F(u)\,\}$ и $\operatorname{epi} F$:

$$(G_0, u) + \alpha\, F(u) \le (G_0, \eta) + \alpha\, a \qquad \forall\, \{\, \eta, a\} \in \operatorname{epi} F. \tag{12.3}$$

Выберем в этом неравенстве $\eta = u$, $a = F(u) + \varepsilon$. Тогда получим, что $\alpha > 0$. Разделив обе части неравенства (12.3) на α и положив $a = F(\eta)$, имеем

$$\left(\frac{1}{\alpha}\, G_0, u\right) + F(u) \le \left(\frac{1}{\alpha}\, G_0, \eta\right) + F(\eta) \qquad \forall\, \eta \in \operatorname{dom} F.$$

Тем более,

$$\left(-\frac{1}{\alpha}\, G_0, \eta - u\right) \le F(\eta) - F(u) \qquad \forall\, \eta \in V,$$

следовательно, $-\dfrac{1}{\alpha}\, G_0 \in \partial F(u)$. ■

Теорема 12.6. *Пусть $F : V \to R^1$ – субдифференцируемый функционал. Тогда для любого $u \in V$ множество $\partial F(u)$ является выпуклым и слабо замкнутым.*

Доказательство. Пусть $u_1^*, u_2^* \in \partial F(u)$, $\alpha \in [\,0, 1\,]$. Имеем

$$\alpha F(\eta) - \alpha F(u) \ge (\alpha\, u_1^*, \eta - u) \qquad \forall\, \eta \in V,$$

$$(1 - \alpha) F(\eta) - (1 - \alpha) F(u) \ge ((1 - \alpha)\, u_2^*, \eta - u) \qquad \forall\, \eta \in V.$$

Складывая эти неравенства, получим, что

$$F(\eta) - F(u) \ge (\alpha\, u_1^* + (1 - \alpha)\, u_2^*, \eta - u) \qquad \forall\, \eta \in V,$$

т.е. $\alpha\, u_1^* + (1 - \alpha)\, u_2^* \in \partial F(u)$, следовательно, $\partial F(u)$ – выпуклое множество.

Пусть теперь $\{u_n^*\}_{n=1}^{+\infty} \subset \partial F(u)$, $u_n^* \rightharpoonup u_0^*$ в V^* при $n \to +\infty$. Тогда

$$F(\eta) - F(u) \ge (u_n^*, \eta - u) \qquad \forall\, \eta \in V.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to +\infty$, получим

$$F(\eta) - F(u) \ge (u_0^*, \eta - u) \qquad \forall\, \eta \in V.$$

т.е. $u_0^* \in \partial F(u)$, а следовательно, множество $\partial F(u)$ является слабо замкнутым. ■

Понятие субдифференциала позволяет дать следующую характеристику точки минимума субдифференцируемого функционала.

Теорема 12.7. *Пусть $F : V \to R^1$ – собственный субдифференцируемый функционал. Тогда элемент $u \in V$ является решением задачи*

$$F(u) = \inf_{\eta \in V} F(\eta)$$

в том и только том случае, когда $0 \in \partial F(u)$.

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы вытекает непосредственно из определения субдифференциала. ■

Определение 12.2. *Оператор $A : V \to V$ называется субпотенциальным, если существует функционал $F : V \to R^1$, такой, что для любого $u \in V$ элемент $Au \in V$ является субградиентом функционала F в точке u.* ♢

Теорема 12.8. *Для того, чтобы оператор $A : V \to V$ был субпотенциальным, необходимо и достаточно, чтобы этот оператор:*
1) был монотонным;
2) удовлетворял соотношению (9.3).

Доказательство. Заметим, прежде всего, что в силу леммы 9.5, если A – монотонный оператор, то при любых фиксированных $u, \eta \in V$ вещественная функция

$$t \to \varphi_{u,\eta}(t) = (A(u + t\,\eta), \eta)$$

является возрастающей на $[\,0, 1\,]$, а, следовательно, интегрируемой на $[\,0, 1\,]$ (по Риману).

Пусть выполнены условия 1), 2) настоящей Теоремы. Определим функционал $F : V \to R^1$ по формуле

$$F(\eta) = \int\limits_0^1 (A(t\,\eta), \eta)\; dt \qquad \forall\, \eta \in V.$$

Тогда согласно сделанному выше замечанию и в силу (9.3) для любых $u, \eta \in V$ выполнено неравенство:

$$F(\eta) - F(u) = \int\limits_0^1 (A(t\,\eta), \eta)\; dt - \int\limits_0^1 (A(t\,u), u)\; dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (A(u + t\,(\eta - u)), \eta - u)\; dt = \int\limits_0^1 \varphi_{u,\eta-u}(t)\, dt \geq \int\limits_0^1 \varphi_{u,\eta-u}(0)\, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (Au, \eta - u)\ dt = (Au, \eta - u)\,,$$

означающее, что Au – субградиент функционала F в точке u.

Обратно, пусть элемент $Au \in V^*$ является субградиентом функционала F в каждой точке $u \in V$. Тогда в силу теоремы 12.2 оператор A является монотонным. Докажем, что условие 2) также выполняется.

Пусть $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$, $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$. Составим интегральную сумму

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} \left(A(u + t_i\,(\eta - u)), \Delta_i\,(\eta - u)\,\right).$$

Так как Au – субградиент функционала F точке u, то для каждого $i = 1, 2, \ldots, N-1$ имеем

$$(A(u + t_i\,(\eta - u)), \Delta_i\,(\eta - u)\,) \le F(u + t_{i+1}\,(\eta - u)) - F(u + t_i\,(\eta - u)),$$

следовательно,

$$S_N \le \sum_{i=0}^{N-1} \left[\,F(u + t_{i+1}\,(\eta - u)) - F(u + t_i\,(\eta - u))\,\right] =$$

$$= F(u+t_1\,(\eta-u)) - F(u+t_0\,(\eta-u)) + F(u+t_2\,(\eta-u)) - F(u+t_1\,(\eta-u)) +$$

$$+ \ldots + F(u + t_N\,(\eta - u)) - F(u + t_{N-1}\,(\eta - u)) =$$

$$= F(u + t_N\,(\eta - u)) - F(u + t_0\,(\eta - u)) = F(\eta) - F(u).$$

Поэтому

$$\int\limits_0^1 (A(u + t\,(\eta - u)), \eta - u)\ dt = \lim_{N \to +\infty} S_N \le F(\eta) - F(u).$$

Поскольку u, η – произвольные элементы, то меняя их местами, получим

$$\int\limits_0^1 (A(\eta + \xi\,(u - \eta)), u - \eta)\ d\xi =$$

$$= \int\limits_0^1 (A(u + (1 - \xi)\,(\eta - u)), u - \eta)\ d\xi \le F(u) - F(\eta).$$

Производя под знаком интеграла замену $1 - \xi = t$, имеем

$$\int\limits_0^1 (A(u + t\,(\eta - u)), \eta - u)\ dt \ge F(\eta) - F(u),$$

следовательно,

$$\int_0^1 (A(u+t\,(\eta-u)), \eta-u)\ dt = F(\eta)-F(u).$$

Из этого равенства следует, что

$$F(\eta)=\int_0^1 (A(t\,\eta),\eta)\ dt + F(0),$$

поэтому условие 2) выполнено. ■

Отметим, что теорема 12.8 – это критерий субпотенциальности монотонных операторов.

Теорема 12.9. *Пусть функционал $F : V \to R^1$ имеет в каждой точке $u \in V$ субградиент $Au \in V$, причем $A : V \to V$ – строго монотонный оператор. Тогда функционал F является строго выпуклым.*

Доказательство. Выпуклость F следует из теоремы 12.1. Пусть существуют такие $u, \eta \in V$, что

$$0 = F(u)+F(\eta)-2\,F\left(\frac{u+\eta}{2}\right).$$

Тогда из равенств

$$u-\ \frac{u+\eta}{2}=\frac{u-\eta}{2}, \quad \eta-\ \frac{u+\eta}{2}=\frac{\eta-u}{2}$$

и соотношения (9.3) вытекает, что

$$0=\left[F(u)-F\left(\frac{u+\eta}{2}\right)\right]+\left[F(\eta)-F\left(\frac{u+\eta}{2}\right)\right]=$$

$$=\int_0^1\left(A\left(\frac{u+\eta}{2}+t\,\frac{u-\eta}{2}\right), \frac{u-\eta}{2}\right)dt+$$

$$=\int_0^1\left(A\left(\frac{u+\eta}{2}+t\,\frac{\eta-u}{2}\right), \frac{\eta-u}{2}\right)dt.$$

Обозначим

$$w_t=\frac{u+\eta}{2}+t\,\frac{u-\eta}{2}, \quad z_t=\frac{u+\eta}{2}+t\,\frac{\eta-u}{2}\,.$$

При этом $w_t - z_t = t\,(u - \eta)$, следовательно,

$$0 = \int\limits_0^1 \frac{1}{t}\,(Aw_t - Az_t, w_t - z_t)\,dt.$$

Подинтегральное выражение неотрицательно, поэтому существует такое $t_0 > 0$, что

$$\frac{1}{t_0}\,(Aw_{t_0} - Az_{t_0}, w_{t_0} - z_{t_0}) = 0,$$

откуда вследствие строгой монотонности A получаем, что $w_{t_0} = z_{t_0}$, т.е. $u = \eta$. ■

Замечание 12.1. *Непосредственно из определения 12.1 вытекает, что элемент u будет решением вариационного неравенства*

$$(Au, \eta - u) + F(\eta) - F(u) \geq (f, \eta - u) \qquad \forall\,\eta\,\in\,V$$

тогда и только тогда, когда $f - Au \in \partial F(u)$. ■

13 Субдифференциальное исчисление.

Выясним, в какой мере обычные правила дифференцирования можно распространить на исчисление субдифференциалов.

Теорема 13.1. *Пусть* $F : V \to R^1$, $\lambda > 0$. *Тогда*

$$\partial(\lambda\,F)(u) = \lambda\,\partial F(u) \qquad \forall\,u \in V.$$

Доказательство. Справедливость настоящей теоремы следует непосредственно из определения субдифференциала. ■

Теорема 13.2 (Моро - Рокафеллара). *Пусть* $F_1 : V \to R^1$ *и* $F_2 : V \to R^1$ *– собственные, выпуклые функционалы. Тогда*

$$\partial F_1(u) + \partial F_2(u) \subset \partial(F_1 + F_2)(u). \tag{13.1}$$

Если же существует точка $\bar{u} \in \operatorname{dom} F_1 \bigcap \operatorname{dom} F_2$, *где* F_1 *(или* F_2*) непрерывен, то*

$$\partial(F_1 + F_2)(u) = \partial F_1(u) + \partial F_2(u). \tag{13.2}$$

Замечание 13.1. *Напомним, что выражение $\partial F_1(u) + \partial F_2(u)$ означает алгебраическую сумму множеств $\partial F_1(u)$ и $\partial F_2(u)$, т.е. сумма $\partial F_1(u) + \partial F_2(u)$ – это множество элементов вида $v_1 + v_2$, где $v_1 \in \partial F_1(u)$, $v_2 \in \partial F_2(u)$. В частности, включение (13.1) означает, что во всех точках u, в которых функционалы F_1 и F_2 одновременно субдифференцируемы, существует субградиент функционала $F_1 + F_2$, а равенство (13.2) означает, что во всех точках u, в которых существует субградиент у функционала $F_1 + F_2$, будут субдифференцируемы функционалы F_1 и F_2.* ■

Доказательство. Включение (13.1) сразу же следует из определения субдифференциала. Докажем второе утверждение, т.е. проверим, что любой элемент $u^* \in \partial(F_1 + F_2)(u)$ можно представить в виде суммы $u_1^* + u_2^*$, где $u_1^* \in \partial F_1(u)$, $u_2^* \in \partial F_2(u)$.

По условию теоремы функционал $F_1 + F_2$ (а следовательно, F_1 и F_2) принимает конечное значение в точке u. Пусть $u^* \in \partial(F_1 + F_2)(u)$:

$$F_1(\eta) + F_2(\eta) \geq F_1(u) + F_2(u) + (u^*, \eta - u) \qquad \forall\, \eta \in V. \tag{13.3}$$

Рассмотрим на $V \times R^1$ множества

$$D_1 = \left\{ \{\eta, a\} \in V \times R^1 : F_1(\eta) - F_1(u) - (u^*, \eta - u) \leq a \right\},$$

$$D_2 = \left\{ \{\eta, a\} \in V \times R^1 : a \leq F_2(u) - F_2(\eta) \right\}.$$

Пусть $\{\eta_0, a_0\} \in D_1 \cap D_2$, тогда выполнены неравенства

$$F_1(\eta_0) - F_1(u) - (u^*, \eta_0 - u) \leq a_0 \leq F_2(u) - F_2(\eta_0).$$

Из (13.3) следует, что предыдущие неравенства должны быть обязательно равенствами, а значит, для любого $\varepsilon > 0$ выполнены условия

$$(\eta_0, a_0 - \varepsilon) \notin D_1, \qquad (\eta_0, a_0 + \varepsilon) \notin D_2.$$

Таким образом, $\operatorname{int} D_1 \cap \operatorname{int} D_2 = \emptyset$. Множество D_1 – это надграфик функционала $G : V \to R^1$, $G(\eta) = F_1(\eta) - F_1(u) - (u^*, \eta - u)$, $\eta \in V$, который является непрерывным в точке $\bar{u}$ и выпуклым. Следовательно, множество D_1 выпукло и, в силу леммы 12.1, имеет непустую внутренность.

Далее, для всех $\{\eta, a\}, \{\xi, b\} \in D_2$, $\alpha \in [\,0, 1\,]$ в силу выпуклости функционала F_2 справедливы соотношения

$$\alpha\, a + (1 - \alpha)\, b \leq \alpha\, F_2(u) + (1 - \alpha)\, F_2(u) - \alpha\, F_2(\eta) - (1 - \alpha)\, F_2(\xi) =$$

$$= F_2(u) - \alpha\, F(\eta) - (1-\alpha)\, F(\xi) \le F_2(u) - F_2(\alpha\, \eta + (1-\alpha)\, \xi),$$

т.е. $\alpha\,\{\eta, a\} + (1-\alpha)\,\{\xi, b\} \in D_2$, а значит, множество D_2 выпукло. Поэтому согласно теореме 11.1 существует ненулевой линейный непрерывный функционал $\{\eta^*, a^*\}$, разделяющий множества D_1 и D_2:

$$(\eta^*, \eta) + a^*\, a \le (\eta^*, \xi) + a^*\, b \qquad \forall\, \{\eta, a\} \in D_1,\ \forall\, \{\xi, b\} \in D_2. \tag{13.4}$$

Положим в этом неравенстве $\xi = \eta$, $a = F_1(\eta) - F_1(u) - (u^*, \eta - u)$, $b = F_2(u) - F_2(\eta)$. Тогда получим, что

$$a^*\ [\, F_1(\eta) - F_1(u) - (u^*, \eta - u) - F_2(u) + F_2(\eta)\,] \le 0,$$

откуда с учетом (13.3) вытекает, что $a^* \le 0$. Предположим, что $a^* = 0$, тогда и $\eta^* = 0$. Иначе, при $\eta^* \ne 0$, из (13.4) получаем

$$(\eta^*, \eta - \xi) \le 0 \qquad \forall\, \eta \in \operatorname{dom} F_1\ , \forall\, \xi \in \operatorname{dom} F_2.$$

Положим в этом неравенстве $\xi = \bar u$ и $\eta = \bar u + \varepsilon\, \eta^*/\|\eta^*\|$, где $\varepsilon > 0$ выбрано так, что $B_\varepsilon(\bar u) \subset \operatorname{dom} F_1$ (такое ε найдется в силу непрерывности функционала F_1 в точке $\bar u$). Получим $\varepsilon\, (\eta^*, \eta^*)\ \|\eta^*\| \le 0$, т.е. $\eta^* = 0$, а это противоречит тому, что $\{\eta^*, a^*\}$ – ненулевой функционал.

Итак, $a^* < 0$; разделим обе части неравенства (13.4) на $a^* < 0$ и положим $a = F_1(\eta) - F_1(u) - (u^*, \eta - u)$, $b = F_2(u) - F_2(\xi)$. Тогда

$$(\eta_1^*, \eta) + F_1(\eta) - (u^*, \eta - u) - F_1(u) \ge$$

$$\ge (\eta_1^*, \xi) + F_2(u) - F_2(\xi) \qquad \forall\, \eta \in \operatorname{dom} F_1\ , \forall\, \xi \in \operatorname{dom} F_2,$$

где $\eta_1^* = \eta^*/a^*$. Подставляя в последнее неравенство сначала $\xi = u$, а затем $\eta = u$, получим

$$(\eta_1^*, \eta) + F_1(\eta) - F_1(u) - (u^*, \eta - u) \ge (\eta_1^*, u) \qquad \forall\, \eta \in \operatorname{dom} F_1,$$

$$(\eta_1^*, \xi) + F_2(u) - F_2(\xi) \le (\eta_1^*, u) \qquad \forall\, \xi \in \operatorname{dom} F_2,$$

или

$$F_1(\eta) - F_1(u) \ge (u^* - \eta_1^*, \eta - u) \qquad \forall\, \eta \in \operatorname{dom} F_1,$$

$$F_2(\xi) - F_2(u) \ge (\eta_1^*, \xi - u) \qquad \forall\, \xi \in \operatorname{dom} F_2.$$

Итак, $\eta_1^* \in \partial F_2(u)$, $\ u^* - \eta_1^* \in \partial F_1(u)$. Получили, следовательно, искомое разложение: $u^* = u_1^* + u_2^*$, где $u_1^* = u^* - \eta_1^*$, $u_2^* = \eta_1^*$. ■

Справедлива следующая теорема о субдифференцировании сложной функции.

Теорема 13.3. *Пусть V, Y – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)$ и $(\cdot,\cdot)_Y$ соответственно, $\Lambda : V \to Y$ – линейный непрерывный оператор, $\Lambda^* : Y \to V$ – сопряженный к Λ оператор (см. определение 2.4), $F : Y \to R^1$ – собственный выпуклый функционал, $G = F \circ \Lambda : V \to R^1$. Тогда*

$$\Lambda^* \partial F(\Lambda u) \subset \partial G(u). \tag{13.5}$$

Если существует точка $\Lambda\bar{u} \in \operatorname{dom} F$, где F непрерывен, то

$$\Lambda^* \partial F(\Lambda u) = \partial G(u). \tag{13.6}$$

Замечание 13.2. *Элемент $u^* \in V$ принадлежит множеству $\Lambda^* \partial F(\Lambda u)$ тогда и только тогда, когда найдется y^* из множества $\partial F(\Lambda u)$, такой, что $u^* = \Lambda^* y^*$. В частности, включение (13.5) означает, что функционал G будет субдифференцируемым во всех точках u, таких, что существует субградиент функционала F в точке Λu, а равенство (13.6) означает, что для всех векторов u, в которых существует субградиент функционала G, будет субдифференцируемым функционал F в точке Λu.*

Доказательство. Пусть $y^* \in \partial F(\Lambda u) \subset Y$. По определению

$$(y^*, y - \Lambda\, u)_Y + F(\Lambda\, u) \le F(y) \qquad \forall\, y \in Y.$$

Полагая в этом неравенстве $y = \Lambda\,\eta$, где η – произвольный элемент из V, получим

$$(y^*, \Lambda\,(\eta - u))_Y + F(\Lambda\, u) \le F(\Lambda\,\eta),$$

откуда вытекает, что

$$(\Lambda^*\, y^*, \eta - u) + G(u) \le G(\eta) \qquad \forall\, \eta \in V.$$

Значит, $\Lambda^*\, y^* \in \partial G(u)$, что доказывает включение (13.5).

Предположим теперь, что существует точка $\Lambda\bar{u} \in Y$, где функционал F непрерывен и конечен. Пусть $u^* \in \partial G(u) \subset V$, т.е.

$$(u^*, \eta - u) + G(u) \le G(\eta) \qquad \forall\, \eta \in V. \tag{13.7}$$

Рассмотрим на $Y \times R^1$ множество

$$D = \left\{ \{y, a\} \in Y \times R^1 : y = \Lambda\eta,\ a = (u^*, \eta - u) + G(u),\ \eta \in V \right\}.$$

Пусть $(y_0, a_0) \in D \bigcap \operatorname{epi} F$. Тогда существует такой элемент $\eta_0 \in V$, что $y_0 = \Lambda\eta_0$, и выполнено неравенство

$$F(\Lambda\eta_0) \le a_0 = (u^*, \eta_0 - u) + G(u).$$

Из (13.7) следует, что предыдущее неравенство должно быть обязательно равенством, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ выполнены условия $(y_0, a_0 - \varepsilon) \notin \operatorname{epi} F$ и $(y_0, a_0 - \varepsilon) \notin D$. Таким образом, множества $\operatorname{epi} F$ и D могут иметь общими лишь граничные точки.

Непосредственно из определения видно, что D – выпуклое множество. Функционал F по предположению является непрерывным в точке $\Lambda\bar{u}$ и выпуклым, а значит, $\operatorname{epi} F$ – выпуклое множество, имеющее непустую внутренность. В силу теоремы 11.1 существует ненулевой линейный непрерывный функционал $\{y^*, a^*\}$, разделяющий множества D и $\operatorname{epi} F$:

$$(y^*, y)_Y + a^* a \le (y^*, z)_Y + a^* b \quad \forall \{y, a\} \in D, \forall \{z, b\} \in \operatorname{epi} F. \qquad (13.8)$$

Подставив в (13.8) $y = \Lambda\eta$, $a = (u^*, \eta - u) + G(u)$, $z = y$, $b = F(y)$, где η – произвольный элемент из $\operatorname{dom} G$ (таким образом, $y \in \operatorname{dom} F$), имеем:

$$a^* \, [\, (u^*, \eta - u) + G(u) - G(\eta) \,] \le 0,$$

поэтому $a^* \ge 0$ в силу неравенства (13.7). Предположим, что $a^* = 0$, тогда и $y^* = 0$. Действительно, если $y^* \ne 0$, то из (13.8) получаем

$$(y^*, \Lambda\eta - z)_Y \le 0 \qquad \forall\, z \in \operatorname{dom} F, \ \forall\, \eta \in V.$$

Положим $\eta = \bar{u}$ и $z = \Lambda\bar{u} - \varepsilon\, y^*/\|y^*\|$, где $\varepsilon > 0$ выбрано так, что выполнено включение $B_\varepsilon(\Lambda\bar{u}) \subset \operatorname{dom} F$ (такое ε найдется в силу непрерывности функционала F в точке $\Lambda\bar{u}$). Получим

$$\varepsilon\, (y^*, y^*)/\|y^*\| \le 0,$$

т.е. $y^* = 0$, чего не может быть, ибо (y^*, a^*) – ненулевой функционал. Поэтому $a^* > 0$.

Разделим обе части неравенства (13.8) на $a^* > 0$ и положим $y = \Lambda\eta$, $a = (u^*, \eta - u) + G(u)$, $b = F(z)$, $y_1^* = y^*/a^*$. Тогда

$$(y_1^*, \Lambda\,\eta)_Y + (u^*, \eta - u) + G(u) \le$$

$$\le (y_1^*, z)_Y + F(z) \qquad \forall\, \eta \in V, \ \forall z \in \operatorname{dom} F. \qquad (13.9)$$

Подставим в это неравенство $z = \Lambda\, u$, $\eta = u + w$, где w – произвольный элемент из V. Имеем

$$(y_1^*, \Lambda\, w)_Y + (u^*, w) \le 0 \qquad \forall\, w \in V,$$

или

$$(\Lambda^*\, y_1^*, w) + (u^*, w) \le 0 \qquad \forall\, w \in V,$$

откуда в силу произвольности $w \in V$ вытекает, что $u^* = -\Lambda^*\, y_1^*$. Следовательно, из (13.9) получим

$$(y_1^*, \Lambda\, \eta)_Y + (-\Lambda^*\, y_1^*, \eta - u) + G(u) \le$$

$$\le (y_1^*, z)_Y + F(z) \qquad \forall\, \eta \in V,\ \forall\, z \in \operatorname{dom} F,$$

или,

$$(-y_1^*, z)_Y + (y_1^*, \Lambda\, \eta)_Y - (y_1^*, \Lambda\, \eta)_Y -$$

$$-\,(-y_1^*, \Lambda\, u)_Y + G(u) \le F(z) \qquad \forall\, \eta \in V,\ \forall\, z \in \operatorname{dom} F.$$

Таким образом,

$$(-y_1^*, z - \Lambda\, u)_Y \le F(z) - F(\Lambda\, u) \qquad \forall z\, \in \operatorname{dom} F,$$

т.е. $-y_1^* \in \partial F(\Lambda\, u)$, а значит, $u^* = \Lambda^*\,(-y_1^*) \in \Lambda^*\, \partial F(\Lambda\, u)$, и

$$\partial G(u) \subset \Lambda^*\, \partial F(\Lambda\, u).$$

Из последнего соотношения и включения (13.5) вытекает, что

$$\partial G(u) = \Lambda^*\, \partial F(\Lambda\, u). \blacksquare$$

Глава 3

Итерационные методы поиска неподвижных точек нерастягивающих отображений

В данной главе рассматривается метод последовательных приближений для поиска неподвижных точек операторов в гильбертовом пространстве. Устанавливается слабая сходимость метода последовательных приближений к некоторой неподвижной точке асимптотически регулярного нерастягивающего оператора, в предположении о существовании у него неподвижной точки и доказывается асимптотическая регулярность жестко нерастягивающего оператора. Затем для сжимающего отображения устанавливается существование единственной неподвижной точки и сильная сходимость к ней последовательных приближений. Эти результаты используются впоследствии при исследовании сходимости итерационных методов решения изучаемых вариационных неравенств. Кроме того, приведены итерационные методы нижней релаксации и регуляризации поиска неподвижных точек нерастягивающих операторов.

14 Нерастягивающий асимптотически регулярный оператор.

В дальнейшем множество неподвижных точек оператора T будем обозначать через $N(T)$.

Теорема 14.1 ([41]). *Пусть M – непустое выпуклое замкнутое множество, $T : M \to M$ – нерастягивающий асимптотически регулярный оператор, $N(T) \neq \emptyset$. Тогда для любого $u_0 \in M$ последовательность*

$\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$, построенная по формуле $u_n = T^n u_0$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится слабо в V к некоторому элементу из $N(T)$ при $n \to +\infty$.

Доказательство. Пусть $u^* \in N(T)$. Обозначим

$$K = \{\, u \in M : \|u - u^*\| \le d = \|u_0 - u^*\|\,\}\,.$$

Это множество является, очевидно, выпуклым, замкнутым и ограниченным. Оператор T (нерастягивающий по условию теоремы) переводит множество K в себя, поскольку (см. определение 5.3)

$$\|Tu - u^*\| = \|Tu - Tu^*\| \le \|u - u^*\| \le d \qquad \forall\, u \in K.$$

Поэтому последовательность $\{u_n\}_{n=0}^{+\infty}$ содержится в множестве K и, таким образом, ограничена. Следовательно, в силу теоремы 4.4 у нее существуют слабо предельные точки, принадлежащие в силу слабой замкнутости K этому множеству K. Пусть v – одна из этих точек, т.е. существует такая подпоследовательность $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$, что

$$u_{n_k} \rightharpoonup v \text{ при } k \to +\infty \tag{14.1}$$

Докажем, что $v \in K$ – неподвижная точка оператора T. Имеем

$$\begin{aligned}\|\, Tu_{n_k} - Tv\,\|^2 &= \|\, Tu_{n_k} - u_{n_k} + u_{n_k} - v + v - Tv\,\|^2 = \\ &= \|Tu_{n_k} - u_{n_k}\|^2 + 2\,(Tu_{n_k} - u_{n_k}, u_{n_k} - v) + \|u_{n_k} - v\|^2 + \\ &+ 2\,(u_{n_k} - v, v - Tv) + 2\,(Tu_{n_k} - u_{n_k}, v - Tv) + \|v - Tv\|^2 = \\ &= \|Tu_{n_k} - u_{n_k}\|^2 + 2\,(Tu_{n_k} - u_{n_k}, u_{n_k} - Tv) + \|u_{n_k} - v\|^2 + \\ &+ 2\,(u_{n_k} - v, v - Tv) + \|v - Tv\|^2.\end{aligned} \tag{14.2}$$

Поскольку T – нерастягивающий оператор, то

$$\|Tu_{n_k} - Tv\|^2 \le \|u_{n_k} - v\|^2. \tag{14.3}$$

Из (14.2) и (14.3) получаем неравенство

$$\begin{aligned}\|v - Tv\|^2 \le -\,\Big[\,&\|Tu_{n_k} - u_{n_k}\|^2 + \\ &+ 2\,(Tu_{n_k} - u_{n_k}, u_{n_k} - Tv) + 2\,(u_{n_k} - v, v - Tv)\,\Big]\,.\end{aligned} \tag{14.4}$$

Поскольку T – асимптотически регулярный оператор (см. определение 5.5), то $u_{n+1} - u_n = T^{n+1}u_0 - T^n u_0 \to 0$ при $n \to +\infty$, и, таким образом, получаем:

$$\lim_{k\to+\infty} \|Tu_{n_k} - u_{n_k}\|^2 = \lim_{k\to+\infty} \|u_{n_k+1} - u_{n_k}\|^2 = 0, \tag{14.5}$$

откуда в силу ограниченности (теорема 4.3) слабо сходящейся последовательности вытекает, что

$$\lim_{k\to+\infty} |\,(Tu_{n_k} - u_{n_k}, u_{n_k} - Tv)\,| \le \lim_{k\to+\infty} [\,\|\,Tu_{n_k} - u_{n_k}\,\|\;\|\,u_{n_k} - Tv\,\|\,] \le$$
$$\le const \lim_{k\to+\infty} \|\,Tu_{n_k} - u_{n_k}\,\| = 0.$$

Поэтому в силу следствия 4.1

$$\lim_{k\to+\infty} (Tu_{n_k} - u_{n_k}, u_{n_k} - Tv) = 0. \tag{14.6}$$

Далее, из (14.1) имеем

$$\lim_{k\to+\infty} (u_{n_k} - v, v - Tv) = 0. \tag{14.7}$$

Перейдем теперь к пределу при $k \to +\infty$ в неравенстве (14.4) с учетом (14.5)–(14.7); в результате получим, что $\|v - Tv\|^2 \le 0$, т.е. $Tv = v$.

Поскольку v – неподвижная точка оператора T, то

$$\|u_{n+1} - v\| = \|Tu_n - Tv\| \le \|u_n - v\|\,, \tag{14.8}$$

а значит, ограниченная снизу (нулем) числовая последовательность $\left\{\, \|u_n - v\|\, \right\}_{n=0}^{+\infty}$ не возрастает, следовательно, существует предел

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - v\|^2 = \lambda_v. \tag{14.9}$$

Установим теперь, что все слабо предельные точки последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ совпадают, откуда и будет вытекать в силу следствия 4.2 слабая сходимость всей последовательности.

Пусть, наряду с v, имеется другая слабо предельная точка w последовательности $\{\,u_n\,\}_{n=1}^{+\infty}$, т.е. существует подпоследовательность $\left\{u_{n_j}\right\}_{j=1}^{+\infty}$, слабо сходящаяся к w в V при $j \to +\infty$. Из вышедоказанного следует справедливость соотношения:

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - w\|^2 = \lambda_w. \tag{14.10}$$

Очевидно, что соотношения (14.9), (14.10) справедливы и для любой подпоследовательности последовательности $\{\,u_n\,\}_{n=1}^{+\infty}$, в частности, для подпоследовательностей $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ и $\left\{u_{n_j}\right\}_{j=1}^{+\infty}$:

$$\begin{gathered}\lim_{k\to+\infty} \|u_{n_k} - v\|^2 = \lim_{j\to+\infty} \|u_{n_j} - v\|^2 = \lambda_v, \\ \lim_{k\to+\infty} \|u_{n_k} - w\|^2 = \lim_{j\to+\infty} \|u_{n_j} - w\|^2 = \lambda_w.\end{gathered} \tag{14.11}$$

Рассмотрим следующую числовую последовательность:

$$e(k,j) = \|u_{n_k} - w\|^2 - \|u_{n_k} - v\|^2 + \|u_{n_j} - v\|^2 - \|u_{n_j} - w\|^2,\ k,j = 1,2,\ldots$$

Из (14.11) имеем, что $\lim\limits_{k,\,j\to+\infty} e(k,j) = 0$. С другой стороны, нетрудно проверить, что $e(k,j) = 2(u_{n_k} - u_{n_j}, v - w)$, следовательно, в силу слабой сходимости в V подпоследовательностей $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ и $\{u_{n_j}\}_{j=1}^{+\infty}$ к v и w соответственно при $k \to +\infty$ и $j \to +\infty$, получаем

$$0 = \lim_{k,\,j\to+\infty} e(k,j) = 2\,(v - w, v - w) = 2\,\|v - w\|^2.$$

Таким образом, $\|\, v - w\,\| = 0$, т.е. $v = w$. ■

15 Метод нижней релаксации для нерастягивающего оператора.

Теорема 15.1. *Пусть M – непустое, выпуклое, замкнутое множество, $T : M \to M$ – нерастягивающий оператор. Тогда для любого $\omega \in (0,1)$ оператор $T_\omega = \omega\, E + (1-\omega)\, T$ действует из M в M, $N(T) = N(T_\omega)$. Если $N(T) \neq \emptyset$, то T_ω асимптотически регулярен.*

Доказательство. Пусть $u \in M$, тогда $Tu \in M$, а значит, в силу выпуклости M, $T_\omega u = \omega\, u + (1-\omega)\, Tu \in M$.

Если $u^* \in N(T)$, то $T_\omega u^* = \omega\, u^* + (1-\omega)\, Tu^* = \omega\, u^* + (1-\omega)\, u^* = u^*$, т.е. $u^* \in N(T_\omega)$. Наоборот, если $u^* \in N(T_\omega)$, то $u^* = T_\omega\, u^* = \omega\, u^* + (1-\omega)\, Tu^*$, следовательно, $(1-\omega)\, u^* = (1-\omega)\, Tu^*$, т.е. $u^* \in N(T)$.

Предположим теперь, что $N(T) \neq \emptyset$. Пусть u_0 – произвольная точка из M. Обозначив $u_n = T_\omega^n\, u_0$, имеем, что $u_{n+1} = T_\omega\, u_n = \omega\, u_n + (1-\omega)\, Tu_n$. Пусть $u^* \in N(T)$. Тогда $u^* = T\, u^* = T_\omega\, u^*$, следовательно,

$$u_{n+1} - u^* = \omega\, u_n + (1-\omega)\, Tu_n - u^* = \omega\,(u_n - u^*) + (1-\omega)\,(Tu_n - u^*),$$

поэтому

$$\|u_{n+1} - u^*\,\|^2 = \omega^2\, \|u_n - u^*\,\|^2 + (1-\omega)^2\, \|Tu_n - u^*\,\|^2 +$$
$$+ 2\,\omega\,(1-\omega)(u_n - u^*, Tu_n - u^*)\,. \tag{15.1}$$

Далее, для любого $\alpha \in \omega\,(1-\omega))$ имеем

$$\alpha\, \|u_n - Tu_n\,\|^2 = \alpha\, \|(u_n - u^*) - (Tu_n - u^*)\,\|^2 =$$

$$= \alpha \, \| u_n - u^* \, \|^2 + \alpha \, \| T u_n - u^* \, \|^2 - 2 \, \alpha \, (u_n - u^*, T u_n - u^*) \, . \qquad (15.2)$$

Поскольку T – нерастягивающий оператор, и $u^* \in N(T)$, то

$$\| T u_n - u^* \, \| = \| T u_n - T u^* \, \| \leq \| u_n - u^* \, \| \, , \qquad (15.3)$$

а значит,

$$| \, (u_n - u^*, T u_n - u^*) \, | \leq \| u_n - u^* \, \| \, \| T u_n - u^* \, \| \leq \| u_n - u^* \, \|^2. \qquad (15.4)$$

Складывая (15.1), (15.2) и принимая во внимание (15.3), (15.4) и то, что $\omega \, (1 - \omega) - \alpha > 0$, получим

$$\| u_{n+1} - u^* \, \|^2 + \alpha \, \| u_n - T u_n \, \|^2 \leq \left[\, \omega^2 + (1 - \omega)^2 + 2 \, \alpha \, \right] \, \| u_n - u^* \, \|^2 +$$

$$+ 2 \, \left[\, \omega \, (1 - \omega) - \alpha \, \right] \, \| u_n - u^* \, \|^2 = \left[\, \omega + (1 - \omega) \, \right]^2 = \| u_n - u^* \, \|^2.$$

Таким образом, ограниченная снизу (нулем) числовая последовательность $\left\{ \| u_{n+1} - u^* \, \|^2 \right\}_{n=0}^{+\infty}$ не возрастает и потому имеет конечный предел. Но тогда $u_n - T u_n \to 0$ при $n \to +\infty$, следовательно,

$$\| T_\omega^{n+1} \, u_0 - T_\omega^{n} \, u_0 \, \| = \| u_{n+1} - u_n \, \| = \| T_\omega \, u_n - u_n \, \| =$$

$$= \| \omega \, T u_n + (1 - \omega) T u_n - u_n \| = (1 - \omega) \, \| T u_n - u_n \| \to 0 \text{ при } n \to +\infty. \blacksquare$$

В силу теорем 14.1, 15.1, если $T : M \to M$ – нерастягивающий оператор, $N(T) \neq \emptyset$, то итерационная последовательность $\{ u_n \}_{n=0}^{+\infty}$, построенная при помощи метода нижней релаксации

$$\begin{cases} u^{n+1} = \omega \, u_n + (1 - \omega) \, T u_n, \; \omega \in (0, 1), \; n = 0, 1, 2, \ldots \, , \\ u_0 - \text{произвольный элемент из } M, \end{cases}$$

сходится слабо в V к некоторой неподвижной точке оператора T.

16 Жестко нерастягивающий и сжимающий операторы.

Теорема 16.1 ([37]). *Пусть $T : M \to M$ – жестко нерастягивающий оператор. Тогда T является нерастягивающим. Если $N(T) \neq \emptyset$, то оператор T является асимптотически регулярным.*

Доказательство. Из определения 5.3 и неравенства Коши-Буняковского получаем

$$\|Tu - Tv\|^2 \le (Tu - Tv\,,\, u - v) \le \|Tu - Tv\|\,\|u - v\| \qquad \forall\, u, v \in M,$$

т.е. оператор T является нерастягивающим.

Установим асимптотическую регулярность T. Пусть u_0 – произвольный элемент из M; определим последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ по формуле $u_n = T^n u_0$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть, далее, v – неподвижная точка оператора T. Имеем с учетом тождества [1])

$$(a, b) = \frac{1}{2}\,\|a\|^2 - \frac{1}{2}\,\|b - a\|^2 + \frac{1}{2}\,\|b\|_V^2 \quad \forall\, a, b \in V, \tag{16.1}$$

что

$$\|u_{n+1} - v\|^2 = \|Tu_n - Tv\|^2 \le (Tu_n - Tv\,,\, u_n - v) = (u_{n+1} - v\,,\, u_n - v) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\,\|u_{n+1} - v\|^2 + \|u_n - v\|^2 - \|u_{n+1} - u_n\|^2\,\Big], \tag{16.2}$$

поскольку

$$\|u_{n+1} - u_n\|^2 = \|u_{n+1} - v - (u_n - v)\|^2 =$$
$$= \|u_{n+1} - v\|^2 + \|u_n - v\|^2 - 2\,(u_{n+1} - v\,,\, u_n - v).$$

Из неравенства (16.2) получаем $\|u_{n+1} - v\|^2 + \|u_{n+1} - u_n\|^2 \le \|u_n - v\|^2$.

Таким образом, ограниченная снизу (нулем) числовая последовательность $\big\{\,\|u_n - v\|\,\big\}_{n=1}^{+\infty}$ является убывающей, а значит, существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - v\|^2 = \lambda_v$, и, следовательно,

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \|u_{n+1} - u_n\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \|\,T^{n+1}u_0 - T^n u_0\,\|,$$

а поскольку u_0 – произвольный элемент из M, то оператор T является асимптотически регулярным. ■

Теорема 16.2 (принцип сжимающих отображений). *Пусть M – непустое замкнутое множество, $T : M \to M$ – сжимающий оператор с константой $d < 1$. Тогда у него существует единственная неподвижная точка v; для любого $u_0 \in M$ последовательность $\{\,u_n\,\}_{n=1}^{+\infty}$, определенная по формуле $u_n = T^n\, u_0$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к этой точке при $n \to +\infty$, и выполнено неравенство:*

$$\|u_n - v\| \le d^n \|u_0 - v\|.$$

[1]) Данное тождество представляет из себя аналог теоремы косинусов.

Доказательство. По условию настоящей теоремы оператор T является сжимающим с константой $d < 1$, т.е. (см. определение 5.3)

$$\|Tu - Tv\| \le d\,\|u - v\| \qquad \forall\, u, v \in M.$$

Проверим, что итерационная последовательность $\{\, u_n \,\}_{n=0}^{+\infty}$ является фундаментальной. Имеем

$$\|u_1 - u_2\| = \|Tu_0 - Tu_1\| \le d\,\|u_0 - u_1\|,$$

$$\|u_2 - u_3\| = \|Tu_1 - Tu_2\| \le d\,\|u_1 - u_2\| \le d^2\,\|u_0 - u_1\|,$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$\|u_n - u_{n+1}\| \le d^{\,n}\,\|u_0 - u_1\|.$$

Тогда для любых m, n, используя формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим

$$\|u_n - u_{n+m}\| \le \|u_{n+1} - u_n\| + \|u_{n+2} - u_{n+1}\| + \dots + \|u_{n+m} - u_{n+m-1}\| \le$$

$$\le \Big[\, d^{\,n} + d^{\,n+1} + \dots + d^{\,n+m-1} \Big]\, \|u_0 - u_1\| =$$

$$= d^{\,n}\Big[\, 1 + d + \dots + d^{\,m-1} \Big]\, \|u_0 - u_1\| \le d^{\,n}\|u_0 - u_1\| \sum_{k=0}^{+\infty} d^{\,k} = \frac{d^{\,n}}{1-d}\,\|u_0 - u_1\|,$$

откуда вытекает фундаментальность итерационной последовательности $\{u_n\}_{n=0}^{+\infty}$. Поэтому эта последовательность является сходящейся. Обозначим ее предел через v. Так как M замкнуто, то $v \in M$. Далее,

$$\|v - Tv\| \le \|v - u_n + u_n - Tv\| \le \|v - u_n\| + \|u_n - Tv\| =$$

$$= \|v - u_n\| + \|Tu_{n-1} - Tv\| \le \|v - u_n\| + d\,\|u_{n-1} - v\|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to +\infty$, имеем, что $v = Tv$.

Если предположить, что, наряду с v, существует другая неподвижная точка w оператора T, то получим неравенство

$$\|v - w\| = \|Tv - Tw\| \le d\,\|v - w\|,$$

которое, с учетом того, что $d < 1$, является непротиворечивым лишь при $w = v$.

Наконец,

$$\|u_n - v\| = \|Tu_{n-1} - Tv\| \le d\,\|u_{n-1} - v\| \le d^2\,\|u_{n-2} - v\| \le \dots \le$$

$$\le d^{\,n}\,\|u_0 - v\|\,. \blacksquare$$

17 Метод регуляризации для нерастягивающего оператора.

При исследовании итерационных методов поиска неподвижных точек нерастягивающего оператора нам потребуется следующая

Лемма 17.1. *Пусть M – замкнутое, выпуклое множество, $T : M \to M$ – нерастягивающий оператор. Тогда множество $N(T)$ неподвижных точек оператора T является замкнутым и выпуклым.*

Доказательство. Пусть $u_n = Tu_n \in M$, $u_n \to u^*$ при $n \to +\infty$. Так как M замкнуто, то $u^* \in M$. Кроме того, в силу нерастягиваемости T

$$\|Tu^* - u^*\| = \|Tu^* - Tu_n + Tu_n - u^*\| = \|Tu^* - Tu_n + u_n - u^*\| \leq$$

$$\leq \|Tu^* - Tu_n\| + \|u_n - u^*\| \leq 2\,\|u_n - u^*\|.$$

Переходя к пределу при $n \to +\infty$, получим, что $Tu^* = u^*$, т.е. $u^* \in T(N)$, а значит, $T(N)$ – замкнутое множество.

Докажем теперь, что множество $T(N)$ выпукло. Предварительно установим, что если для любых $u, v \in V$, $u \neq v$ элемент w удовлетворяет неравенствам

$$\|w - u\| \leq (1-\lambda)\,\|u - v\|\,, \quad \|w - v\| \leq \lambda\,\|u - v\|\,, \quad \lambda \in (0,1)\,, \tag{17.1}$$

то $w = \lambda\, u + (1-\lambda)\, v$ (см. рис. 3.1).

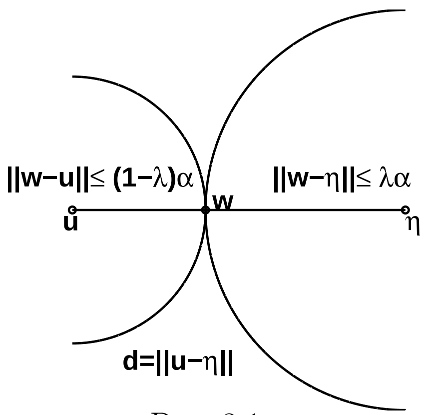

Рис. 3.1:

Действительно, обозначим $d = \|u - v\|$. Поскольку $u \neq v$, то $d > 0$. Далее, в силу (17.1)

$$d = \|u - v\| = \|u - w + w - v\| \leq \|u - w\| + \|w - v\| \leq$$

$$\leq (1-\lambda)\, d + \lambda\, d = d, \tag{17.2}$$

а значит, в (17.1) неравенства должны быть заменены на равенства, ибо в случае строго неравенства хотя бы в одном из неравенств в (17.1), мы получили бы из (17.2), что $0 < d < d$.

Кроме того, из (17.2) вытекает, что

$$\|u - w + w - v\| = \|u - w\| + \|w - v\|\,,$$

следовательно,

$$\|u - w\|^2 + \|w - v\|^2 + 2\,(u - w, w - v) = \|u - w + w - v\|^2 =$$

$$= (\|u - w\| + \|w - v\|)^2 = \|u - w\|^2 + \|w - v\|^2 + 2\,\|u - w\|\,\|w - v\|\,,$$

откуда имеем, что

$$(u - w, w - v) = \|u - w\|\,\|w - v\| = (1-\lambda)\,\lambda\, d^2\,. \tag{17.3}$$

Поэтому

$$\|w - (\,\lambda\, u + (1-\lambda)\, v)\,\|^2 = \|\lambda\,(w - u) + (1-\lambda)\,(w - v)\|^2 =$$

$$= \lambda^2\,\|w - u\|^2 + (1-\lambda)^2\,\|w - v\|^2 + 2\,\lambda\,(1-\lambda)\,(w - u, w - v) =$$

$$= 2\,\lambda^2\,(1-\lambda)^2\, d^2 - 2\,\lambda^2\,(1-\lambda)^2\, d^2 = 0,$$

т.е. $w = \lambda\, u + (1-\lambda)\, v$, что и требовалось доказать.

Пусть $u, v \in N(T)$. Поскольку T действует из M в M, а M выпукло, то $\eta = \lambda\, u + (1-\lambda)\, v \in M$ для любого $\lambda \in (0,1)$. В силу нерастягиваемости T имеем

$$\|T\eta - u\| = \|T\eta - Tu\| \leq \|\eta - u\| = \|\lambda\, u + (1-\lambda)\, v - u\| = (1-\lambda)\|\eta - u\|\,,$$

$$\|T\eta - v\| = \|T\eta - Tv\| \leq \|\eta - v\| = \|\lambda\, u + (1-\lambda)\, v - v\| = \lambda\,\|\eta - u\|\,,$$

т.е. элемент $w = T\eta$ удовлетворяет условиям (17.1). Но тогда в силу доказанного выше $T\eta = \lambda\, u + (1-\lambda)\, v$, поэтому $\eta = \lambda\, u + (1-\lambda)\, v \in N(T)$, следовательно, $N(T)$ – выпуклое множество. ■

Определение 17.1. *Оператор $T : V \to V$ называется демизамкнутым, если для любой последовательности $\{u_n\}_{n=0}^{+\infty}$, сходящейся слабо в V к u^* из того, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\, Tu_n - u_n\,\| = 0$, вытекает, что $u^* \in N(T)$.* ♢

Лемма 17.2. *Нерастягивающий оператор является демизамкнутым.*

Доказательство. Заметим, во-первых, что что для любых w, z из V справедливо неравенство (сравни с примером 3.3 с $A = E$)

$$\|w\|^2 - \|z\|^2 - 2\,(w, w-z) = -\|w\|^2 - \|z\|^2 + 2\,(w, w-z) = -\|w-z\|^2 \le 0,$$

следовательно,

$$\|w\|^2 - \|z\|^2 \le 2\,(w, w-z) \qquad \forall\, w, z \in V. \tag{17.4}$$

Пусть оператор $T : V \to V$ является нерастягивающим, $u_n \rightharpoonup u^*$ в V при $n \to +\infty$, а также

$$\lim_{n\to+\infty} \|Tu_n - u_n\| = 0\,. \tag{17.5}$$

В силу нерастягиваемости T имеем:

$$\|u_n - Tu^*\|^2 = \|u_n - u^* + u^* - Tu^*\|^2 = \|u_n - u^*\|^2 + \|u^* - Tu^*\|^2 +$$
$$+2\,(u_n - u^*, u^* - Tu^*) \ge \|Tu_n - Tu^*\|^2 + \|u^* - Tu^*\|^2 + 2\,(u_n - u^*, u^* - Tu^*).$$

Отсюда, используя неравенство (17.4) с $w = u_n - Tu^*$, $z = Tu_n - Tu^*$, получаем

$$\|u^* - Tu^*\|^2 \le \|u_n - Tu^*\|^2 - \|Tu_n - Tu^*\|^2 - 2\,(u_n - u^*, u^* - Tu^*) \le$$
$$\le 2\,(u_n - Tu^*, u_n - Tu^* - Tu_n + Tu^*) - 2\,(u_n - u^*, u^* - Tu^*) =$$
$$= 2\,(u_n - Tu^*, u_n - Tu_n) - 2\,(u_n - u^*, u^* - Tu^*).$$

Первое слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю в силу ограниченности слабо сходящейся последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ (см. теорему 4.3) и соотношения (17.5), а второе – в силу слабой сходимости в V последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ к u^*. Переходя к пределу в последнем неравенстве при $n \to +\infty$, получим, что $u^* = Tu^*$, следовательно, T является демизамкнутым. ■

Пусть M – непустое выпуклое замкнутое множество, содержащее нуль, $T : M \to M$ – нерастягивающий оператор. Обозначим через T_n оператор $T_n = \lambda_n T$, где n – произвольное натуральное число, $\lambda_n = n/(n+1)$. Оператор T_n действует из M в M, поскольку M выпукло, и для любого $u \in M$ в силу того, что $0 \in M$

$$T_n u = \lambda_n T + (1 - \lambda_n)\, 0 \in M.$$

Кроме того, очевидно, что для любого n оператор T_n является сжимающим с коэффициентом сжатия $\lambda_n < 1$, а следовательно, существует единственная неподвижная точка $u_n^* = T_n\, u_n^*$.

Имеет место

Лемма 17.3. *Пусть M – непустое, выпуклое, замкнутое и ограниченное множество, $T : M \to M$ – нерастягивающий оператор, $N(T) \neq \emptyset$, $u_n^* = T_n u_n^*$. Тогда $u_n^* \to u^*$ при $n \to +\infty$, где u^* – неподвижная точка с минимальной нормой оператора T:*

$$\|u^*\|^2 = \min_{u \in N(T)} \|u\|^2. \tag{17.6}$$

Доказательство. Заметим, во первых, что в силу леммы 17.1 множество $N(T)$ является замкнутым и выпуклым. Функционал F, $F(u) = \|u\|^2$ является коэрцитивным, непрерывным а также (см. пример 3.3) строго выпуклым. Поэтому согласно теоремам 10.2, 10.3 задача (17.6) имеет единственное решение.

Не ограничивая общности рассуждений можно считать, что $0 \in M$ (иначе мы рассмотрели бы множество $\widetilde{M} = M - u_0$ и оператор $\widetilde{T}$, $\widetilde{T}(\tilde{u}\,) = T(\tilde{u} + u_0) - u_0$. При этом, как установлено выше, оператор T_n действует из M в M, является сжимающим с коэффициентом сжатия $\lambda_n < 1$, и имеет единственную неподвижную точку $u_n^* = T_n\, u_n^* \in M$.

Поскольку множество M ограничено, то принадлежащая ему последовательность $\{u_n^*\}_{n=1}^{+\infty}$ также ограничена, поэтому у нее согласно теореме 4.4 существуют слабо предельные точки (принадлежащие M в силу выпуклости и замкнутости, а значит, и слабой замкнутости этого множества). Пусть u – произвольная такая слабо предельная точка, т.е. существует подпоследовательность $\left\{u_{n_m}^*\right\}_{n=1}^{+\infty}$, слабо сходящаяся в V к u.

Далее, поскольку $T_n\, u_n^* = u_n^*$, то

$$\|Tu_n^* - u_n^*\| = \left\| \frac{1}{n+1}\, Tu_n^* + \frac{n}{n+1}\, Tu_n^* - u_n^* \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{n+1}\, Tu_n^* + T_n\, u_n^* - u_n^* \right\| = \frac{1}{n+1}\, \|Tu_n^* - T(0) + T(0)\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \left[\|u_n^*\| + \|T(0)\| \right] \leq \frac{c}{n+1}\,.$$

Отсюда, подставляя n_m вместо n, получаем, что

$$\lim_{m\to+\infty} \left\|Tu_{n_m}^* - u_{n_m}^*\right\| = 0.$$

Но тогда $u^*_{n_m} \rightharpoonup u = Tu$ в V при $m \to +\infty$ в силу леммы 17.2.

Итак, любая слабо предельная точка u последовательности $\{u^*_n\}_{n=1}^{+\infty}$ является неподвижной точкой оператора T. Докажем, что $u = u^*$. При этом, поскольку у оператора T неподвижная точка u^* с минимальной нормой определяется единственным образом, то из следствия 4.2 будет вытекать что и вся последовательность $\{u^*_n\}_{n=1}^{+\infty}$ слабо сходится в V к u^*.

Если $0 \in N(T)$, то тогда утверждение настоящей леммы очевидно, ибо в этом случае $u^* = 0$ – искомая неподвижная точка. Действительно, в этом случае $T_n(0) = \lambda_n T(0) = 0$, т.е. $u^*_n = 0$ для любого $n = 1, 2, \ldots$, а потому $u^*_n \to 0$ при $n \to +\infty$.

Предположим поэтому, что $0 \notin N(T)$. При этом $0 \notin N(T_n)$ ни для какого n.

Пусть u – произвольная точка из $N(T)$. В силу нерастягиваемости T имеем, что

$$\|u^*_n - \lambda_n u\| = \|T_n u^*_n - \lambda_n Tu\| = \lambda_n \|Tu^*_n - Tu\| \le \lambda_n \|u^*_n - u\| ,$$

следовательно,

$$\|u^*_n - \lambda_n u\|^2 = \|u^*_n\|^2 + \lambda_n^2 \|u\|^2 - 2\lambda_n (u^*_n, u) \le \lambda_n^2 \|u^*_n - u\|^2 =$$
$$= \lambda_n^2 \|u^*_n\|^2 + \lambda_n^2 \|u\|^2 - 2\lambda_n^2 (u^*_n, u) .$$

Отсюда вытекает, что

$$(1 - \lambda_n)^2 \|u^*_n\|^2 \le 2\lambda_n (1 - \lambda_n (u^*_n, u) \le 2\lambda_n (1 - \lambda_n) \|u^*_n\| \|u\| ,$$

поэтому с учетом того, что $u^*_n \ne 0$ и $2\lambda_n/(1 + \lambda_n) < 1$, имеем

$$\|u^*_n\| \le \frac{2\lambda_n}{1 + \lambda_n}\|u\| \le \|u\| \qquad \forall\, u \in N(T). \tag{17.7}$$

Пусть u^* – неподвижная точка с минимальной нормой оператора T, тогда в силу (17.7) и леммы 6.1

$$\|u^*\| \le \|u\| \le \liminf_{m \to +\infty} \|u^*_{n_m}\| \le \|u\| \qquad \forall\, u \in N(T).$$

Полагая в этом неравенстве $u = u^*$, получим, что $\|u\| = \|u^*\|$, откуда в силу единственности неподвижной точки u^* с минимальной нормой оператора T вытекает, что все слабо сходящиеся подпоследовательности последовательности $\{u^*_n\}_{n=1}^{+\infty}$ имеют один и тот же предел u^*.

Таким образом, $u_n^* \rightharpoonup u^*$ в V при $n \to +\infty$. Кроме того, из (17.7) следует, что

$$\|u^*\| \le \liminf_{n\to+\infty} \|u_n^*\| \le \limsup_{n\to+\infty} \|u_n^*\| \le \|u^*\|,$$

следовательно, $\|u_n^*\| \to \|u^*\|$ при $n \to +\infty$, а значит, в силу леммы 4.3 получаем, что $u_n^* \to u^*$ при $n \to +\infty$. ■

Справедлива

Теорема 17.1. *Пусть M – непустое, выпуклое, замкнутое, ограниченное множество, $T : M \to M$ – нерастягивающий оператор, $N(T) \ne \emptyset$, $S_n = T_n^{n^2}$. Тогда для любого $u_0 \in M$ последовательность $\{u_n\}_{n=0}^{+\infty}$, построенная по формуле $u_{n+1} = S_n u_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, сходится к неподвижной точке u^* оператора T с минимальной нормой.*

Доказательство. Снова, как и при доказательстве леммы 17.3, предполагаем, не ограничивая общности рассуждений, что $0 \in M$. Поскольку оператор T_n действует из M в M, то оператор T_n^m также действует из M в M для любого натурального m.

Пусть $u^* = Tu^*$ – неподвижная точка с минимальной нормой оператора T, $u_n^* \in N(T_n)$. Для любого $m \ge 1$ и любого $v \in M$ в силу сжимаемости T_n с коэффициентом λ_n имеем

$$\|T_n^m v - u_n^*\| = \|T_n(T_n^{m-1} v) - u_n^*\| \le \lambda_n \|T_n^{m-1} v - u_n^*\| \le$$
$$\le \lambda_n^2 \|T_n^{m-2} v - u_n^*\| \le \cdots \le \lambda_n^m \|v - u_n^*\|. \tag{17.8}$$

По условиям теоремы множество M ограничено, т.е. существует такое $R > 0$, что $M \subset B_{R/2}(0)$, а значит, $\|v - \eta\| \le R$ для всех $v, \eta \in M$. Поэтому из (17.8) вытекает, что

$$\|T_n^m v - u_n^*\| \le R\lambda_n^m. \tag{17.9}$$

Докажем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u^*\| = 0. \tag{17.10}$$

Положим $m = n^2$ в (17.8). Тогда $\|S_n u_n - u_n^*\| \le R\lambda_n^{n^2}$, следовательно,

$$\|u_{n+1} - u^*\| = \|u_{n+1} - u_n^* + u_n^* - u^*\| \le \|u_n - u_n^*\| + \|u_n^* - u^*\| =$$

$$= \|S_n u_n - u_n^*\| + \|u_n^* - u^*\| \le R\lambda_n^{n^2} + \|u_n^* - u^*\|.$$

Далее,

$$\lambda_n^{n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^{-n} = [\,e + \delta_n\,]^{-n}, \quad \text{где} \lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0\,,$$

следовательно, $|\,\delta_n\,| \le \mu$ для любого фиксированного $\mu \in (0, e-1)$, начиная с некоторого номера $n_1 = n_1(\mu)$. Но тогда $\lambda_n^{n^2} \le 1/(e-\mu) \to 0$ при $n \to +\infty$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_2(\varepsilon) \ge n_1$ такой, что $\lambda_n^{n^2} \le \varepsilon/(2\,R)$ при $n \ge n_2$.

В силу леммы 17.3 последовательность $\{u_n^*\}_{n=0}^{+\infty}$ сходится к неподвижной точке с минимальной нормой u^* с минимальной нормой оператора T, следовательно существует номер $n_3(\varepsilon) \ge n_1$ такой, что $\|\,u_n^* - u^*\,\| \le \varepsilon/2$ при $n \ge n_3$. Тогда, полагая $n_0 = \max\{n_2, n_3\}$ имеем, что

$$\|\,u_{n+1} - u^*\,\| \le R\,\lambda_n^{n^2} + \|\,u_n^* - u^*\,\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\,,\ n \ge n_0\,,$$

откуда и следует (17.10). ■

Из теоремы 17.1 вытекает, что если $T : M \to M$ – нерастягивающий оператор, $N(T) \ne \emptyset$, то итерационная последовательность $\{u_n\}_{n=0}^{+\infty}$, построенная при помощи метода регуляризации

$$\begin{cases} u_{n+1} = T_n^{n^2}\,u_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots, \\ u_0 - \text{произвольный элемент из } M, \end{cases}$$

сходится сильно к неподвижной точке u^* оператора T с минимальной нормой.

Данный метод назван нами методом регуляризации, поскольку

$$T_n = \frac{n}{n+1}\,T = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)T = (1 + \tau_n\,)\,T,$$

и, таким образом, оператор T_n является регуляризацией оператора T с параметром $\tau_n = 1/(n+1)$.

Глава 4

Проективные методы

В данной главе изучаются проективные итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода, которые позволяют свести исходное вариационное неравенство к вариационному неравенству с оператором канонического изоморфизма, эквивалентного задаче минимизации сильно выпуклого функционала.

Сначала рассматриваются неравенства с обратно сильно монотонными операторами. Исследование сходимости итерационного метода основано на сведении его к методу последовательных приближений для отыскания неподвижной точки оператора перехода итерационного метода. Благодаря использованию проксимального отображения удается выписать явный вид оператора перехода. Доказано неравенство, более сильное, чем неравенство нерастягиваемости, что и позволило получить результаты о сходимости метода. В случае, когда оператор является сильно монотонным и липшиц-непрерывным, доказана сильная сходимость метода.

Затем построен метод итеративной регуляризации для вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами и исследована его сходимость. Особую привлекательность данный метод имеет в случае, когда регуляризованный функционал становится дифференцируемым.

18 Постановка задачи и описание итерационного процесса.

Рассматривается задача поиска элемента $u \in V$, удовлетворяющего вариационному неравенству

$$(Au, \eta - u) + F(\eta) - F(u) \geq (f, \eta - u) \qquad \forall\, \eta \in V, \tag{18.1}$$

где $F : V \to R^1$ – собственный, выпуклый, полунепрерывный снизу функционал, $f \in V$ – заданный элемент, $A : V \to V$ – монотонный оператор. Предполагаем, что решение вариационного неравенства (18.1) существует. Достаточным для этого в дополнение к вышеперечисленным условиям, в силу теоремы 8.5, является коэрцитивность оператора A (см. также теорему 8.4).

Рассмотрим следующий итерационный процесс. Пусть $u_0 \in V$ – произвольный элемент. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$ определим $u_{k+1} \in V$, как решение вариационного неравенства

$$\left(\frac{u_{k+1} - u_k}{\tau}, \eta - u_{k+1} \right) + F(\eta) - F(u_{k+1}) \geq$$

$$\geq (f - Au_k, \eta - u_{k+1}) \qquad \forall\, \eta \in V, \tag{18.2}$$

где $\tau > 0$ – итерационный параметр.

Элемент u_{k+1} однозначно определяется по u_k. Действительно, перепишем неравенство (18.2) в следующем виде:

$$(u_{k+1}, \eta - u_{k+1}) + \tau\, F(\eta) - \tau\, F(u_{k+1}) \geq$$

$$\geq (u_k - \tau(Au_k - f), \eta - u_{k+1}) \qquad \forall\, \eta \in V. \tag{18.3}$$

Поскольку $\tau > 0$, то функционал $\tau\, F : V \to R^1$ является собственным выпуклым и полунепрерывным снизу, и в силу теоремы 7.1 это неравенство имеет единственное решение.

Используя определение проксимального отображения на основе вариационного неравенства (см. теорему 7.1), имеем, что (18.3) эквивалентно соотношению

$$u_{k+1} = \mathrm{Prox}_{\{\tau\, F\}} \left(u_k - \tau \left(Au_k - f \right) \right).$$

Определим теперь отображение $T : V \to V$ следующим образом:

$$Tu = \mathrm{Prox}_{\{\tau\, F\}} \left(u - \tau \left(Au - f \right) \right). \tag{18.4}$$

Очевидно, что при этом итерационный процесс (18.2) можно записать в следующем виде:

$$u_{k+1} = Tu_k, \; k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и значит, T – оператор перехода этого итерационного процесса.

Из теоремы 7.1 вытекает, что возникающее на каждом шаге итерационного процесса вариационное неравенство (18.2), т.е. вариационное неравенство (18.3), эквивалентно задаче минимизации функционала G_k,

$$G_k(\eta) = \tau\, F(\eta) - (u_k - \tau(Au_k - f), \eta) + \frac{1}{2}\,\|\,\eta\,\|^2,$$

который является строго выпуклым. При этом не требуется обращения исходного оператора A.

Справедлива

Теорема 18.1. *Множества неподвижных точек оператора T и решений задачи (18.1) совпадают.*

Доказательство. Пусть u – неподвижная точка оператора T:

$$u = \operatorname{Prox}_{\{\tau F\}}(u - \tau\,(Au - f)). \tag{18.5}$$

Используя соотношение (18.5) и определение проксимального отображения, получаем, что u – решение вариационного неравенства

$$(u, \eta - u) + \tau[\,F(\eta) - F(u)\,] \geq (u - \tau\,(Au - f), \eta - u) \quad \forall\,\eta \in V. \tag{18.6}$$

Неравенства (18.1) и (18.6) эквивалентны, а значит, множества неподвижных точек оператора T и решений задачи (18.1) совпадают. ■

Замечание 18.1. *В случае, когда задача (18.1) разрешима, существует и неподвижная точка оператора T.* ■

19 Проективный метод для неравенств с монотонным оператором.

Из теоремы 18.1 следует, что исследование сходимости итерационного процесса (18.2) можно свести к исследованию сходимости метода последовательных приближений для поиска неподвижной точки оператора T.

Установим предварительно некоторые свойства этого оператора в случае обратно сильно монотонного отображения A.

Теорема 19.1. *Пусть A – обратно сильно монотонный оператор с константой $\sigma > 0$, и выполнено условие*

$$0 < \tau < 2\,\sigma. \tag{19.1}$$

Тогда оператор T является нерастягивающим.

Более того, для произвольных элементов u, $v \in V$ справедливо неравенство:

$$\|Tu - Tv\|^2 + \delta\ (Au - Av, u - v) + \\ + \|(Tu - u) - (Tv - v) + \tau\,(Au - Av)\|^2 \le \|u - v\|^2, \tag{19.2}$$

где $\delta = \tau(2\sigma - \tau)/\sigma$.

Доказательство. Поскольку оператор A является обратно сильно монотонным с константой $\sigma > 0$, то

$$(Au - Av, u - v) \ge \sigma\ \|Au - Av\|^2,\ \sigma > 0 \qquad \forall\, u, v \in V. \tag{19.3}$$

Заметим, что $\delta > 0$ в силу условия (19.1), а значит, из (19.2) и (19.3) будет следовать нерастягиваемость оператора T.

Докажем справедливость неравенства (19.2). Для этого перепишем равенство (18.4), задающее оператор T, в следующем виде:

$$Tu = \mathrm{Prox}_{\{\tau F\}}\,(u - \tau(Au - f)) = \mathrm{Prox}_{\{\tau F\}}\,(Su)\,,$$

где оператор $S : V \to V$ определяется соотношением

$$Sw = w - \tau(Aw - f).$$

Используя (19.3), получаем

$$\|Su - Sv\|^2 = (u - v - \tau(Au - Av), u - v - \tau(Au - Av)) = \\ = \|u - v\|^2 - 2\tau\ (Au - Av, u - v) + \tau^2\,\|Au - Av\|^2 \le \\ \le \|u - v\|^2 - \tau\left(2 - \frac{\tau}{\sigma}\right)\,(Au - Av, u - v)\,. \tag{19.4}$$

Непосредственно из определения (18.4) оператора T и жесткой нерастягиваемости проксимального отображения (теорема 7.2) следует, что

$$\|Tu - Tv\|^2 = \left\|\,\mathrm{Prox}_{\{\tau F\}}\,(Su) - \mathrm{Prox}_{\{\tau F\}}\,(Sv)\,\right\|^2 \le \\ \le \big(\mathrm{Prox}_{\{\tau F\}}(Su) - \mathrm{Prox}_{\{\tau F\}}, Su - Sv\big)^2 =$$

$$= (Tu - Tv, Su - Sv)\,. \tag{19.5}$$

Используя равенство (16.1) с $a = Su - Sv$, $b = Tu - Tv$, преобразуем (19.5):

$$\|Tu - Tv\|^2 \le \frac{1}{2}\,\|Su - Sv\|^2 + \frac{1}{2}\,\|Tu - Tv\|^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\,\|(Tu - Tv) - (Su - Sv)\|^2\,,$$

следовательно,

$$\|Tu - Tv\|^2 + \|(Tu - Tv) - (Su - Sv)\|^2 \le \|Su - Sv\|^2\,. \tag{19.6}$$

Отсюда с учетом (19.4), получаем, что

$$\|Tu - Tv\|^2 + \|(Tu - Tv) - (Su - Sv)\|^2 +$$

$$+\tau\left(2 - \frac{\tau}{\sigma}\right)(Au - Av, u - v) \le \|u - v\|^2\,,$$

откуда в силу равенства

$$(Tu - Tv) - (Su - Sv) = (Tu - u) - (Tv - v) + \tau\,(Au - Av)$$

и вытекает (19.2). ■

Теорема 19.2. *Пусть A – обратно сильно монотонный оператор с константой $\sigma > 0$, выполнено условие (19.1), задача (18.1) имеет хотя бы одно решение. Тогда итерационная последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{+\infty}$, построенная согласно (18.2), сходится слабо в V при $k \to +\infty$, ее предел u^* является неподвижной точкой оператора T, и справедливо равенство*

$$\lim_{k \to +\infty} \|\, u_{k+1} - u_k \,\| = 0. \tag{19.7}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством (19.2), положив в нем $u = u_k$ и выбрав в качестве v неподвижную точку оператора T (согласно замечанию 18.1 существует хотя бы одна такая точка). Учитывая то, что по построению $Tu_k = u_{k+1}$, получаем

$$\|\, u_{k+1} - v\|^2 + \delta\,\left(Au_k - Av, u_k - v\right) +$$

$$+\,\|\,(u_{k+1} - u_k) + \tau\,(Au_k - Av)\,\|^2 \le \|\, u_k - v\,\|^2\,. \tag{19.8}$$

Из неравенства (19.8) следует, что ограниченная снизу (нулем) числовая последовательность $\{ \|u_k - v\|^2 \}_{k=0}^{+\infty}$ не возрастает и, следовательно, имеет конечный предел:

$$\lim_{k\to+\infty} \| u_k - v \|^2 = \lambda_v,$$

а значит, выполнены соотношения:

$$\lim_{k\to+\infty} (Au_k - Av, u_k - v) = 0, \tag{19.9}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \| (u_{k+1} - u_k) - \tau (Au_k - Av) \| = 0. \tag{19.10}$$

Используя (19.9) и (19.3), получаем

$$\lim_{k\to+\infty} \| Au_k - Av\| = 0. \tag{19.11}$$

Из (19.10) и (19.11) следует, что выполнено соотношение (19.7), и, поскольку $u_0 \in V$ – произвольный элемент, то оператор T является асимптотически регулярным. Кроме того, согласно теореме 19.1 оператор T является нерастягивающим, следовательно, в силу теоремы 14.1 итерационная последовательность $\{ u_k \}_{k=0}^{+\infty}$ сходится слабо в V при $k \to +\infty$, и ее предел u^* является неподвижной точкой оператора T. ■

Рассмотрим теперь случай вариационных неравенств, когда оператор A удовлетворяет более жестким условиям, чем условие обратной сильной монотонности (19.3).

Теорема 19.3. *Пусть оператор A сильно монотонен с константой μ, липшиц-непрерывен с константой L, и выполнено следующее условие:*

$$0 < \tau < 2\,\mu/L^2\,. \tag{19.12}$$

Тогда оператор T является сжимающим.

Более того, для произвольных элементов u, $v \in V$ справедливо неравенство:

$$\|Tu - Tv\| \le d\,\|u - v\|, \tag{19.13}$$

где $d = \sqrt{1 - \tau(2\mu - \tau L^2)}$.

Доказательство. По условиям теоремы оператор A удовлетворяет следующим неравенствам:

$$(\, Au - Av, u - v\,)_V \ge \mu\, \|\, u - v\,\|_V^2\,,\ \mu > 0 \qquad \forall\, u, v \in V, \tag{19.14}$$

$$\| Au - Av \|_V \le L \, \| u - v \|_V \, , \quad L > 0 \qquad \forall \, u, v \in V. \tag{19.15}$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 19.1, перепишем равенство (18.4), задающее оператор T в виде

$$Tu = \text{Prox}_{\{\tau F\}} (Su) \, ,$$

где оператор $S : V \to V$ определяется соотношением

$$Sw = w - \tau(Aw - f);$$

при этом имеет место неравенство (19.6).

Из (19.14) и (19.15) вытекает, что

$$\|Su - Sv\|^2 = \|u - v\|^2 - 2\tau \, (Au - Av, u - v) + \tau^2 \|Au - Av\|^2 \le$$
$$\le (1 - 2\mu\tau + \tau^2 L^2) \, \|u - v\|^2 \, .$$

Подставляя эту оценку в (19.6), имеем, что

$$\|Tu - Tv\|^2 \le (1 - 2\mu\tau + \tau^2 L^2) \, \|u - v\|^2 = d^2 \, \|u - v\|^2 \, ,$$

где $d = \sqrt{1 - \tau(2\mu - \tau L^2)}$. Из последнего неравенства и следует требуемое соотношение (19.13).

Заметим, наконец, что в силу условия (19.12) выполнено неравенство $d < 1$, а значит, оператор T является сжимающим. ■

Следствием предыдущей теоремы 19.3 и теоремы 16.2 является следующий результат.

Теорема 19.4. *Пусть оператор A – сильно монотоннй с константой μ, липшиц-непрерывный с константой L оператор, и выполнено условие (19.12). Тогда итерационная последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{+\infty}$, построенная согласно (18.2), сходится сильно в V, ее предел u^* является единственной неподвижной точкой оператора T, и справедливо неравенство*

$$\| \, u_k - u^* \, \| \le d^k \, \| \, u_0 - u^* \, \| \, . \tag{19.16}$$

Имея оценку (19.16), можно говорить об оптимизации итерационного параметра, а именно о выборе $\tau = \tau^*$, при котором величина $d^* = d(\tau^*)$ будет минимальной. Поскольку функция $1 - 2\mu\tau + \tau^2 L^2$ по τ является квадратичной, то она имеет единственный минимум при $\tau^* = \mu/L^2$, и при таком выборе итерационного параметра получаем $d^* = \sqrt{1 - \mu^2/L^2}$.

20 Метод итеративной регуляризации для вариационных неравенств с псевдомонотонным потенциальным оператором.

В этом разделе рассматривается итерационный процесс, позволяющий свести исходную задачу к вариационному неравенству второго рода с оператором канонического изоморфизма вместо исходного псевдомонотонного оператора и регуляризованным функционалом. Особую привлекательность данный метод имеет в случае, когда регуляризованный функционал становится дифференцируемым. Следует отметить, что путем незначительной модификации доказательства можно рассмотреть итерационный метод и без регуляризации. При этом результат о сходимости итерационного процесса сохраняется.

Пусть M – непустое выпуклое замкнутое множество. Рассматривается задача поиска элемента $u \in M$, являющегося решением следующего вариационного неравенства второго рода:

$$(Au, \eta - u) + F(\eta) - F(u) \geq (f, \eta - u) \qquad \forall\, \eta \in M\,, \tag{20.1}$$

где $f \in V$ – заданный элемент, оператор $A : V \to V$ является псевдомонотонным, потенциальным, т.е.

$$\int\limits_0^1 \Big[(A(t(u+v)), u+v) - (A(tu), u) \Big]\, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (A(u+tv), v)\, dt \qquad \forall\, u, v \in V, \tag{20.2}$$

липшиц-непрерывным с постоянной L, т.е.

$$\|Au - Av\| \leq L\|u - v\| \qquad \forall\, u, v \in V, \tag{20.3}$$

и коэрцитивным, т.е. существует $\eta_0 \in M$, для которого

$$(Au, u - \eta_0) \geq \rho(\|u\|)\|u\| \qquad \forall\, u \in V, \tag{20.4}$$

где функция ρ удовлетворяет условию

$$\lim_{\xi \to +\infty} \rho(\xi) = +\infty.$$

Далее, считаем что $F : V \to R^1$ – выпуклый (вообще говоря, недифференцируемый) функционал, для которого при $\varepsilon > 0$ существует функционал F_ε, удовлетворяющий условиям

$$|F_\varepsilon(\eta) - F(\eta)| \le c(\varepsilon) \quad \forall\, \eta \in V, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} c(\varepsilon) = 0, \tag{20.5}$$

$$|F_\varepsilon(v) - F_\varepsilon(u)| \le \gamma\, \|v - u\| \qquad \forall\, u, v \in V, \tag{20.6}$$

где γ – положительная константа.

Из (20.5), (20.6) следует, что F липшиц-непрерывен:

$$|F(v) - F(u)| \le 2\,\gamma\, \|v - u\| \qquad \forall\, u, v \in V. \tag{20.7}$$

Определим функционал $\Phi : V \to R^1$ соотношением

$$\Phi(u) = F_A(u) + F(u) - (f, u)\,, \quad F_A(u) = \int\limits_0^1 (A(tu), u)\, dt. \tag{20.8}$$

При этом из (20.2), (20.8) вытекает, что для любых $u, v \in V$ справедливо равенство

$$\Phi(u) - \Phi(v) = \int\limits_0^1 (A(v + t(u - v)), u - v)\, dt +$$

$$+ F(u) - F(v) - (f, u - v)\,. \tag{20.9}$$

Отметим, что в силу условий (20.4), (20.7) функционал Φ коэрцитивен.

Для решения задачи (20.1) рассмотрим следующий итерационный процесс.

Пусть u_0 – произвольный элемент из M. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$, определим $u_{n+1} \in M$ как решение вариационного неравенства:

$$(u_{n+1} - u_n, v - u_{n+1}) + \tau\, \left[\, F_{\varepsilon_n}(v) - F_{\varepsilon_n}(u_{n+1})\,\right] \ge$$

$$\ge \tau\, (f - Au_n, v - u_{n+1}) \qquad \forall\, v \in M, \tag{20.10}$$

где τ – итерационный параметр, удовлетворяющий условию

$$0 < \tau < 2/L\,. \tag{20.11}$$

Относительно последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{+\infty}$ предполагаем, что

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c(\varepsilon_n) = \sigma < +\infty. \tag{20.12}$$

Так же, как и в п. 16, нетрудно убедиться в том, что вариационное неравенство (20.10) имеет единственное решение.

При исследовании сходимости предложенного выше итерационного метода нам потребуется

Лемма 20.1 ([10, стр. 93]). *Пусть числовая последовательность* $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *удовлетворяет условиям*

$$a_{i+1} \le a_i + \delta_i, \quad \delta_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{20.13}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k < +\infty.$$

Тогда существует предел

$$\lim_{k \to +\infty} a_k < +\infty.$$

Если к тому же последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *ограничена снизу, то этот предел конечен.*

Доказательство. Суммируя неравенства (20.13) по $i = 1, 2, \ldots, m-1$, имеем:

$$a_m \le a_k + \sum_{i=k}^{m-1} \delta_i \le a_k + \sum_{i=k}^{+\infty} \delta_i \tag{20.14}$$

при всех $m > k \ge 0$. Пусть

$$\liminf_{k \to +\infty} a_k = \lim_{n \to +\infty} a_{k_n} \quad (k_n < k_{n+1},\ n = 0, 1, \ldots); \ \lim_{n \to +\infty} k_n = +\infty.$$

Полагая в (20.14) $k = k_n$, получим

$$a_m \le a_{k_n} + \sum_{i=k_n}^{+\infty} \delta_i$$

при всех $m > k_n$. Следовательно,

$$\limsup_{m \to +\infty} a_m \le a_{k_n} + \sum_{i=k_n}^{+\infty} \delta_i, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Отсюда при $n \to +\infty$ имеем

$$\limsup_{m \to +\infty} a_m \le \lim_{n \to +\infty} a_{k_n} = \liminf_{m \to +\infty} a_m \le \limsup_{m \to +\infty} a_m.$$

Таким образом, предел

$$\lim_{k \to +\infty} a_k$$

существует.

Из (20.14) при $k = 1$ следует ограниченность сверху последовательности $\{a_m\}_{m=1}^{+\infty}$.

Если эта последовательность ограничена еще и снизу, то указанный предел конечен. ■

Справедлива следующая

Теорема 20.1. *Пусть выполнено условие (20.11). Тогда итерационная последовательность $\{u_n\}_{n=0}^{+\infty}$, построенная согласно (20.10) ограничена, и все ее слабо предельные точки являются решениями задачи (20.1).*

Доказательство. Докажем ограниченность итерационной последовательности, а именно, проверим, что

$$\{u_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset S_0, \tag{20.15}$$

где $S_0 = \{u \in M : \Phi(u) \le \Phi(u_0) + 2\sigma\}$ – ограниченное (в силу коэрцитивности Φ) множество.

По построению $u_0 \in S_0$. Докажем, что $u_N \in S_0$ для любого N. Используя (20.10) с $v = u_n$, получаем

$$-\frac{1}{\tau}\|u_n - u_{n+1}\|^2 + F_{\varepsilon_n}(u_n) - F_{\varepsilon_n}(u_{n+1}) \ge$$
$$\ge (f - Au_n, u_n - u_{n+1}). \tag{20.16}$$

Из (20.3) вытекает, что для любого $t \in [0, 1]$

$$|(A(u_n + t(u_{n+1} - u_n)) - Au_n, u_{n+1} - u_n)| \le$$
$$\le \|A(u_n + t(u_{n+1} - u_n)) - Au_n\|\,\|u_n - u_{n+1}\| \le L\,t\,\|u_n - u_{n+1}\|^2. \tag{20.17}$$

Далее, из (20.9) имеем

$$\Phi(u_{n+1}) - \Phi(u_n) = \int\limits_0^1 (A(u_n + t(u_{n+1} - u_n)), u_{n+1} - u_n)\,dt -$$
$$- (f, u_{n+1} - u_n) + F(u_{n+1}) - F(u_n) =$$
$$= \int\limits_0^1 (A(u_n + t(u_{n+1} - u_n)) - Au_n, u_{n+1} - u_n)\,dt +$$
$$+ (f - Au_n, u_n - u_{n+1}) + F(u_{n+1}) - F(u_n).$$

Отсюда, учитывая (20.16) и (20.17), получаем

$$\Phi(u_{n+1}) - \Phi(u_n) \le \int\limits_0^1 |\,(A(u_n + t(u_{n+1} - u_n)) - Au_n, u_{n+1} - u_n)\,|dt-$$

$$-\frac{1}{\tau}\,\|u_n - u_{n+1}\|^2 + [\,F_{\varepsilon_n}(u_n) - F(u_n)\,] + [\,F(u_{n+1}) - F_{\varepsilon_n}(u_{n+1})\,] \le$$

$$\le L\,\|u_n - u_{n+1}\|^2 \int\limits_0^1 t\,d\,t - \frac{1}{\tau}\,\|u_n - u_{n+1}\|^2 + 2\,c\,(\varepsilon_n) =$$

$$= -\lambda\,\|u_n - u_{n+1}\|^2 + 2\,c\,(\varepsilon_n), \qquad \lambda = 1/\tau - L/2\,,$$

причем $\lambda > 0$ в силу условия (20.11).

Таким образом, для всех $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ справедливы неравенства

$$\Phi(u_{n+1}) \le \Phi(u_n) + \lambda\|u_n - u_{n+1}\|^2 \le \Phi(u_n) + 2\,c\,(\varepsilon_n)\,. \qquad (20.18)$$

Просуммируем эти неравенства по $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Тогда, принимая во внимание (20.12), получим, что

$$\Phi(u_N) + \lambda \sum_{n=0}^{N-1} \|u_n - u_{n+1}\|^2 \le \Phi(u_0) + 2 \sum_{n=0}^{N-1} c(\varepsilon_i) \le \Phi(u_0) + 2\,\sigma,$$

а значит, $\Phi(u_N) \le \Phi(u_0) + 2\,\sigma$, т.е. $u_N \in S_0$. Утверждение (20.15) доказано, следовательно, последовательность $\{\,u_n\,\}_{n=0}^{+\infty}$ ограничена.

Из определения функционала Φ в виде соотношения (20.8), ограниченности и липшиц-непрерывности оператора A и леммы 6.3 об аффинной миноранте следует, что

$$\Phi(u) = \int\limits_0^1 (A(tu), u)\,dt + F(u) - (f, u) =$$

$$= \int\limits_0^1 (A(tu) - A(0), u - 0)\,dt + F(u) + (A(0), u) - (f, u) \ge$$

$$\ge -L \int\limits_0^1 t\,\|u\|^2\,dt - \|y^*\|\,\|u\| + \alpha^* - \|A(0)\|\,\|u\| - \|f\|\,\|u\|.$$

Из этого неравенства и ограниченности итерационной последовательности вытекает, что последовательность $\{\,\Phi(u_n)\,\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена снизу, а значит, условия леммы 20.1 для последовательности $\{\Phi(u_n)\}_{n=0}^{+\infty}$ в силу (20.12) и (20.18) выполнены. Поэтому числовая последовательность $\{\Phi(u_n)\}_{n=0}^{+\infty}$ имеет конечный предел, следовательно, из (20.18) имеем

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda\|u_n - u_{n+1}\|^2 = 0,$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u_{n+1}\| = 0. \tag{20.19}$$

Далее, для произвольной функции $v \in M$ из (20.10) получаем:

$$\begin{gathered}
(Au_n, u_n - v) = (Au_n, u_n - u_{n+1}) + (Au_n, u_{n+1} - v) \leq \\
\leq (Au_n, u_n - u_{n+1}) + \frac{1}{\tau}\,(u_{n+1} - u_n, v - u_{n+1}) + \\
+ \Big[F_{\varepsilon_n}(v) - F(v) \Big] + \Big[F(v) - F(u_n) \Big] + \Big[F(u_n) - F_{\varepsilon_n}(v) \Big] + \\
+ \Big[F_{\varepsilon_n}(u_n) - F_{\varepsilon_n}(u_{n+1}) \Big] + (f, u_n - v) + (f, u_{n+1} - u_n) \leq \\
\leq \Big[\|Au_n\|_V + \frac{1}{\tau}\,\|v - u_{n+1}\| + \|f\| + \gamma \Big]\,\|u_{n+1} - u_n\| + \\
+ \Big[F_{\varepsilon_n}(v) - F_{\varepsilon_n}(u_n) \Big] + (f, u_n - v) \leq C_v\,\|u_{n+1} - u_n\| + \\
+ \Big[F(v) - F(u_n) \Big] + (f, u_n - v) + 2\,c\,(\varepsilon_n),
\end{gathered} \tag{20.20}$$

где C_v – положительная константа, зависящая от v.

Из ограниченности итерационной последовательности следует существование подпоследовательности $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$, сходящейся слабо к u^* в V при $k \to +\infty$. Установим, что для этой подпоследовательности выполнено неравенство

$$\limsup_{k\to+\infty} (Au_{n_k}, u_{n_k} - u^*) \leq 0.$$

Из (20.20), полагая $v = u^*$, $n = n_k$, с учетом (20.19) и слабой полунепрерывности снизу функционала F, получаем:

$$\begin{gathered}
\limsup_{k\to+\infty} (Au_{n_k}, u_{n_k} - u^*) \leq \limsup_{k\to+\infty} C_{u^*}\,\|u_{n_k+1} - u_{n_k}\| + \\
+ \limsup_{k\to+\infty} [\, F(u^*) - F(u_{n_k}) \,] + \limsup_{k\to+\infty}\,(f, u_{n_k} - u^*) + 2\,\limsup_{k\to+\infty} c\,(\varepsilon_{n_k}) \leq \\
\leq F(u^*) - \liminf_{k\to+\infty} F(u_{n_k}) \leq F(u^*) - F(u^*) = 0.
\end{gathered} \tag{20.21}$$

Покажем, что u^* является решением задачи (20.1). Из (20.20) для произвольной функции $v \in M$ имеем:

$$C_v \, \|u_{n_k+1} - u_{n_k}\| \geq (Au_{n_k}, u_{n_k} - v) +$$

$$+ \Big[F(u_{n_k}) - F(v) \Big] + (f, v - u_{n_k}) + 2\, c\, (\varepsilon_{n_k}),$$

откуда в силу (20.19), слабой полунепрерывности снизу функционала F и псевдомонотонности оператора A вытекает, что

$$0 = \liminf_{k \to +\infty} \Big[C_v \, \|u_{n_k+1} - u_{n_k}\| - 2\, c\, (\varepsilon_{n_k}) \Big] \geq$$

$$\geq \liminf_{k \to +\infty} (Au_{n_k}, u_{n_k} - v) + \liminf_{k \to +\infty} \Big[F(u_{n_k}) - F(v) \Big] +$$

$$+ \liminf_{k \to +\infty} (f, v - u_{n_k}) \geq$$

$$\geq (Au^*, u^* - v) + F(u^*) - F(v) + (f, v - u^*) \qquad \forall\, v \in M, \tag{20.22}$$

т.е. u^* – решение вариационного неравенства (20.1). ■

Глава 5

Двойственные методы

В настоящей главе предлагается итерационный метод решения вариационных неравенств второго рода с оператором $A : V \to V$ и функционалом $\hat{F} : V \to R^1$. При этом предполагается, что $\hat{F}$ представим в виде $\hat{F} = F + F_0$, причем F_0 – суперпозиция некоторого выпуклого функционала и линейного непрерывного оператора. Так же, как и в четвертой главе, исследование сходимости метода основано на сведении его к методу последовательных приближений для отыскания неподвижной точки оператора перехода итерационного метода. Благодаря использованию понятия проксимального отображения удается выписать явный вид оператора перехода. Доказано неравенство, более сильное, чем неравенство нерастягиваемости, что и позволило получить результаты о сходимости метода. Сначала изучается случай, когда оператор A является обратно сильно монотонным, а затем рассматривается вариационное неравенство с липшиц-непрерывным и сильно монотонным оператором. Во втором случае удается получить более сильные результаты о сходимости метода.

21 Постановка задачи и описание итерационного процесса.

Пусть V, H – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_V$, $(\cdot,\cdot)_H$ соответственно, отождествленные со своими сопряженными. Рассматривается задача поиска $u \in V$, являющегося решением вариационного неравенства

$$(Au - f, \eta - u)_V + G(\Lambda\eta) - G(\Lambda u) + F(\eta) - F(u) \geq 0 \;\forall\, \eta \in V, \quad (21.1)$$

где $\Lambda : V \to H$ – линейный непрерывный оператор, $F : V \to R^1$, $G : H \to R^1$ – собственные, выпуклые, полунепрерывные снизу функционалы, $f \in V$ – заданный элемент, $A : V \to V$ – монотонный оператор.

Предполагаем, что решение вариационного неравенства (21.1) существует. Достаточным для этого в дополнение к вышеперечисленным условиям, в силу теоремы 8.5, является коэрцитивность оператора A (см. также теорему 8.4).

Считаем также, что для функционалов F и G выполнено условие невырожденности задачи:

$$\exists\, y^* \in \Lambda\,(\mathrm{dom}\, F) \cap \mathrm{dom}\, G \ : \ \lim_{y \to y^*} G(y) = G(y^*), \tag{21.2}$$

а оператор $\Lambda^* \Lambda : V \to V$ является каноническим изоморфизмом, т.е.

$$v = \Lambda^* \Lambda v \qquad \forall\, v \in V, \tag{21.3}$$

где $\Lambda^* : H \to V$ – сопряженный к Λ оператор (см. определение 2.4):

$$(\Lambda^* y, \eta)_V = (y, \Lambda \eta)_H \qquad \forall\, y \in H,\, \forall\, \eta \in V. \tag{21.4}$$

Из (21.3) и (21.4) следует равенство

$$(\Lambda u, \Lambda \eta)_H = (u, \eta)_V \qquad \forall\, u, \eta \in V. \tag{21.5}$$

Для решения вариационного неравенства (21.1) рассмотрим следующий итерационный процесс. Зададим $\tau > 0$ и $r > 0$. Пусть $u^{(0)} \in V$, $y^{(0)} \in H$ и $\lambda^{(0)} \in H$ – произвольные элементы. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$, зная $y^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, определим $u^{(k+1)}$ как решение вариационного неравенства

$$\frac{1}{\tau}\, \big(u^{(k+1)} - u^{(k)}, \eta - u^{(k+1)}\big)_V + F(\eta) - F(u^{(k+1)}) \geq$$

$$\geq \big(f - Au^{(k)} - \Lambda^* \lambda^{(k)} - r\,(u^{(k)} - \Lambda^*\, y^{(k)}), \eta - u^{(k+1)}\big)_V \quad \forall\, \eta \in V. \tag{21.6}$$

Затем находим $y^{(k+1)}$, решая задачу минимизации

$$\begin{aligned} &r\, \big(y^{(k+1)}, z - y^{(k+1)}\big)_H + G(z) - G(y^{(k+1)}) \geq \\ &\geq \big(r \Lambda u^{(k+1)} + \lambda^{(k)}, z - y^{(k+1)}\big)_H \qquad \forall\, z \in H. \end{aligned} \tag{21.7}$$

Полагаем, наконец,

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + r\, \Big[\Lambda u^{(k+1)} - y^{(k+1)}\Big]. \tag{21.8}$$

Так же, как и в п. 16, нетрудно убедиться в том, что задачи (21.6), (21.7) однозначно разрешимы.

Для исследования сходимости описанного итерационного процесса выпишем явный вид оператора перехода этого процесса.

Введем гильбертово пространство $Q = V \times H \times H$. Для элементов q из этого пространства будем обозначать $q = (q_1, q_2, q_3) = (u, y, \lambda)$. Определим оператор $T : Q \to Q$, $Tq = (T_1\, q,\, T_2\, q,\, T_3\, q)$ следующим образом:

$$T_1\, q = \mathrm{Prox}_{\{\tau F\}}\, (\, q_1 - \tau\, [\, A q_1 - f + \Lambda^* q_3 + r\,(q_1 - \Lambda^* q_2)\,]\,)\,, \tag{21.9}$$

$$T_2\, q = \operatorname{Prox}_{\{G/r\}} \left(\Lambda T_1\, q + r^{\,-1}\, q_3\right), \tag{21.10}$$

$$T_3\, q = q_3 + r\ (\Lambda T_1\, q - T_2\, q)\,. \tag{21.11}$$

Используя определение проксимального отображения на основе вариационного неравенства (см. теорему 7.1), перепишем итерационный процесс (21.6)–(21.8) в виде $q^{(k+1)} = Tq^{(k)}$, $q^{(k)} = (u^{(k)}, y^{(k)}; \lambda^{(k)})$, $k = 0, 1, 2\ldots$, т.е. T – оператор перехода этого итерационного процесса.

Теорема 21.1. *Точка $q = (u, \Lambda u, \lambda)$ является неподвижной точкой оператора T в том и только том случае, когда выполнены условия*

$$y = \Lambda u, \tag{21.12}$$

$$\lambda \in \partial G(\Lambda u), \qquad -\Lambda^*\, \lambda \in \partial F(u) + Au - f. \tag{21.13}$$

При этом первая компонента u любой неподвижной точки оператора T является решением задачи (21.1).

Доказательство. Пусть $q = (u, \Lambda u, \lambda)$ – неподвижная точка оператора T:

$$u = \operatorname{Prox}_{\{\tau F\}}\, (\, u - \tau\ [\, Au - f + \Lambda^*\lambda + r\, \Lambda^*\, (\Lambda\, u - y)\,]\,)\,, \tag{21.14}$$

$$y = \operatorname{Prox}_{\{G/r\}} \left(\Lambda u + r^{-1}\lambda\right), \tag{21.15}$$

$$\lambda = \lambda + r\ (\,\Lambda u - y\,)\,. \tag{21.16}$$

Равенство (21.16) эквиваленто (21.12), ибо $r > 0$. Равенство (21.15) с учетом (21.12) в в силу теоремы 7.1 эквивалентно неравенству

$$\left(-\frac{1}{r}\, y, z - \lambda\right)_H + \frac{1}{r}\,\Big[\, G(z) - G(y)\,\Big] \geq 0 \qquad \forall\, z \in H, \tag{21.17}$$

которое в свою очередь эквивалентно соотношению $\lambda \in \partial G(\Lambda u)$ (см. замечание 12.1), т.е. первому из включений в (21.13).

Аналогично устанавливается, что в силу (21.12) равенство (21.14) эквивалентно вариационному неравенству

$$(\, Au - f + \Lambda^*\, \lambda, \eta - u)_V + F(\eta) - F(u) \geq 0 \qquad \forall\, \eta \in V, \tag{21.18}$$

или второму из включений в (21.13).

Таким образом, установлена эквивалентность равенства $Tq = q$ соотношениям (21.12), (21.13).

Проверим, что u – решение задачи (21.1). С этой целью в неравенстве (21.17) заменим, используя (21.12), y на Λu и положим $z = \Lambda\eta$, где η – произвольный элемент из V. Тогда с учетом (21.4) получим

$$-\,(\Lambda^*\, \lambda, \eta - u)_V + G(\Lambda\eta) - G(\Lambda u) \geq 0 \qquad \forall\, \eta \in V. \tag{21.19}$$

Складывая (21.18) и (21.19), получим, что u – решение задачи (21.1). ■

Теорема 21.2. *Пусть существует по крайней мере одно решение задачи (21.1), и выполнено условие (21.2). Тогда множество неподвижных точек оператора T не пусто.*

Доказательство. Пусть u – решение задачи (21.1), $y = \Lambda u$. Вариационное неравенство (21.1) эквивалентно следующему включению:

$$f - Au \in \partial(G \circ \Lambda + F)(u). \tag{21.20}$$

Из условия (21.2) и теорем 13.2, 13.3 получаем следующие равенства

$$\partial(G \circ \Lambda + F)(u) = \partial(G \circ \Lambda)(u) + \partial F(u), \tag{21.21}$$

$$\partial(G \circ \Lambda)(u) = \Lambda^* \partial G(\Lambda u). \tag{21.22}$$

Из (21.20), (21.21) вытекает, что найдутся элементы $v \in \partial F(u)$ и $w \in \partial(G \circ \Lambda)(u)$, для которых выполнено равенство $f - Au = v + w$, а соотношение (21.22) означает существование элемента $\lambda \in \partial G(\Lambda u)$, для которого выполнено равенство $w = \Lambda^* \lambda$, т.е.

$$-\Lambda^* \lambda = -w = v + Au - f \in \partial F(u) + Au - f.$$

Итак, для точки $q = (u, y, \lambda)$ имеют место соотношения (21.12), (21.13), а значит, в силу теоремы 21.1, q – неподвижная точка оператора T. ■

Из теоремы 21.1 следует, что исследование сходимости итерационного процесса (21.6)–(21.8) свдится к исследованию сходимости метода последовательных приближений отыскания неподвижной точки оператора T.

22 Двойственный метод для неравенств с обратно сильно монотонным оператором.

Будем считать, что τ и r связаны соотношением $\tau r < 1$. Введем в рассмотрение гильбертово пространство $Q = V \times H \times H$ со скалярным произведением

$$(\cdot, \cdot)_Q = a_1\ (\cdot, \cdot)_V + a_2\ (\cdot, \cdot)_H + a_3\ (\cdot, \cdot)_H\,,$$

где $a_1 = (1 - \tau\, r)/\,\tau$, $a_2 = r$, $a_3 = 1/\,r)$.

Теорема 22.1. *Пусть $A : V \to V$ – обратно сильно монотонный оператор с константой $\sigma > 0$, и выполнено следующее условие:*

$$0 < \tau < \frac{2\,\sigma}{2\,\sigma\, r + 1}. \tag{22.1}$$

Тогда оператор T, определяемый соотношениями (21.9)–(21.11), является нерастягивающим.

Более того, для любых $q = (q_1, q_2, q_3)$, $p = (p_1, p_2, p_3) \in Q$ справедливо неравенство

$$\|Tq - Tp\|_Q^2 + \delta\ (Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1)_V + r\,\|(q_2 - \Lambda T_1\, q) - (p_2 - \Lambda T_1\, p)\|_H^2 +$$

$$+\frac{1}{\tau(1-\tau r)}\,\|(1-\tau r)((q_1 - T_1\, q) - (p_1 - T_1 p)) - \tau\,(Aq_1 - Ap_1)\|_V^2 \le$$

$$\le \|\, q - p\,\|_Q^2\,, \tag{22.2}$$

где $\delta = 2 - \tau/[\,\sigma(1 - \tau\, r)\,]$.

Доказательство. По условию настоящей теоремы A – обратно сильно монотонный оператор с константой $\sigma > 0$:

$$(Au - Av, u - v)_V \ge \sigma\,\|Au - Av\|_V^2\,, \quad \sigma > 0 \quad \forall\, u, v \in V. \tag{22.3}$$

Заметим, что в силу условия (22.1) выполнены неравенства $\tau\, r < 1$ и $\delta > 0$, а значит, из (22.2) и (22.3) будет следовать нерастягиваемость оператора T.

Докажем неравенство (22.2). Перепишем равенство (21.9) в виде

$$T_1\, q = \mathrm{Prox}_{\{\tau F\}}\Big((1 - \tau\, r)q_1 - \tau\, Aq_1 + \tau\, f - \tau\,\Big[\,\Lambda^* q_3 - r\,\Lambda^* q_2\,\Big]\Big) =$$

$$= \mathrm{Prox}_{\{\tau F\}}\Big(Sq_1 - \tau\,\Big[\,\Lambda^* q_3 - r\,\Lambda^* q_2\,\Big]\Big)\,,$$

где оператор $S : V \to V$, определяется соотношением

$$S\eta = (1 - \tau\, r)\eta - \tau\, A\eta + \tau\, f.$$

Используя (22.3), получаем

$$\|\, Sq_1 - Sp_1\,\|_V^2 = (1-\tau r)^2\,\|\, q_1 - p_1\,\|_V^2 -$$

$$-2\,\tau(1-\tau r)\ (Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1)_V + \tau^2\,\|Aq_1 - Ap_1\|_V^2 \le$$

$$\le (1-\tau r)^2\,\|\, q_1 - p_1\,\|_V^2 - \tau\,\left(2 - \tau\frac{2r\sigma + 1}{\sigma}\right)(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1)_V\,. \tag{22.4}$$

Далее, в силу (21.9) и жесткой нерастягиваемости проксимального отображения (теорема 7.2) получаем

$$\|\, T_1\, q - T_1\, p\,\|_V^2 \le$$

$$\leq \Big(T_1\, q - T_1\, p, (Sq_1 - Sp_1) - \tau\, \Big[\Lambda^*(q_3 - p_3) - r\, \Lambda^*(q_2 - p_2) \Big] \Big)_V =$$

$$= (\, T_1\, q - T_1\, p\,,\, Sq_1 - Sp_1\,)_V -$$

$$-\, \tau\, (\, T_1\, q - T_1\, p\,,\, \Lambda^*(\, q_3 - p_3\,) - r\, \Lambda^*(\, q_2 - p_2\,)\,)_V\,. \tag{22.5}$$

Для произвольного числа ε имеем равенство

$$\frac{1}{2\,\varepsilon}\, \|\, a - \varepsilon\, b\, \|_V^2 =$$

$$= \frac{1}{2\,\varepsilon}\, \big(\|a\|_V^2 - 2\,\varepsilon\,(a,b)_V + \varepsilon^2\, \|b\|_V^2 \big) = \frac{1}{2\,\varepsilon}\, \|a\|_V^2 - (a,b)_V + \frac{\varepsilon}{2}\, \|b\|_V^2\,,$$

и, таким образом, получаем

$$(\, a, b\,)_V = \frac{1}{2\,\varepsilon}\, \|\, a\, \|_V^2 - \frac{1}{2\,\varepsilon}\, \|\, a - \varepsilon\, b\, \|_V^2 + \frac{\varepsilon}{2}\, \|\, b\, \|_V^2\,. \tag{22.6}$$

Используя это равенство с $a = Sq_1 - Sp_1$, $b = T_1\, q - T_1\, p$, преобразуем (22.5):

$$\|\, T_1\, q - T_1\, p\, \|_V^2 \leq \frac{1}{2\,\varepsilon}\, \|\, Sq_1 - Sp_1\, \|_V^2 + \frac{\varepsilon}{2}\, \|\, T_1\, q - T_1\, p\, \|_V^2 -$$

$$- \frac{1}{2\,\varepsilon}\, \|\, (\, Sq_1 - Sp_1\,) - \varepsilon\, (\, T_1\, q - T_1\, p\,)\, \|_V^2 -$$

$$-\, \tau\, (\, \Lambda^*(\, q_3 - p_3\,) - r\, \Lambda^*(\, q_2 - p_2\,),\, T_1\, q - T_1\, p\,)_V\,.$$

Отсюда (после деления на $\tau/\,2$) с учетом (22.4) вытекает, что

$$\frac{1}{\varepsilon\tau}\, \|\, Sq_1 - Sp_1 - \varepsilon\, (\, T_1\, q - T_1\, p\,)\, \|_V^2 + \frac{2-\varepsilon}{\tau}\, \|\, T_1\, q - T_1\, p\, \|_V^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon\tau}\, \|Sq_1 - Sp_1\|_V^2 - 2\, (\, \Lambda^*(q_3 - p_3) - r\, \Lambda^*(q_2 - p_2), T_1\, q - T_1 p)_V \leq$$

$$\leq \frac{(1 - \tau\, r)^2}{\varepsilon\, \tau}\, \|q_1 - p_1\, \|_V^2 - \frac{1}{\varepsilon}\, (2 - 2\tau\, r - \frac{\tau}{\sigma}\,)\, (Aq_1 - Ap_1\,, q_1 - p_1\,)_V -$$

$$-2\, (\, \Lambda^*(\, q_3 - p_3\,) - r\, \Lambda^*(\, q_2 - p_2\,), T_1\, q - T_1\, p\,)_V\,.$$

Выбирая $\varepsilon = 1 - \tau\, r$, на основании определения оператора S, получим

$$\frac{1}{(1-\tau r)\tau}\, \|(1 - \tau r)((q_1 - T_1\, q) - (p_1 - T_1\, p)) - \tau(Aq_1 - Ap_1\,)\|_V^2 +$$

$$+ \frac{1 + \tau\, r}{\tau}\, \|T_1\, q - T_1\, p\|_V^2 \leq \frac{1 - \tau\, r}{\tau}\, \|q_1 - p_1\|_V^2 -$$

$$-\delta\,(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1\,)_V - 2\,(\Lambda^*(q_3 - p_3) - r\Lambda^*(q_2 - p_2), T_1 q - T_1 p)_V =$$
$$= \frac{1-\tau r}{\tau}\,\|\,q_1 - p_1\,\|_V^2 - \delta\,(\,Aq_1 - Ap_1\,, q_1 - p_1\,)_V -$$
$$-2\,(q_3 - p_3\,, \Lambda(T_1\,q - T_1\,p))_H + 2\,r\,(q_2 - p_2\,, \Lambda(T_1\,q - T_1\,p))_H\,. \qquad (22.7)$$

Положим $\varepsilon = 1$, $a = q_2 - p_2$, $b = \Lambda(T_1\,q - T_1\,p)$ в равенстве (22.6) и преобразуем (22.7) к следующему виду:

$$\frac{1}{(1-\tau r)\tau}\,\|(1-\tau r)((q_1 - T_1\,q) - (p_1 - T_1\,p)) - \tau(\,Aq_1 - Ap_1\,)\|_V^2 +$$
$$+r\,\|\,(\,q_2 - \Lambda\,T_1\,q) - (\,p_2 - \Lambda\,T_1\,p\,)\,\|_H^2 + \delta\,(\,Aq_1 - Ap_1\,, q_1 - p_1\,)_V +$$
$$+\,\frac{1+\tau\,r}{\tau}\,\|\,T_1\,q - T_1\,p\,\|_V^2 \le \frac{1-\tau\,r}{\tau}\,\|\,q_1 - p_1\,\|_V^2 -$$
$$-2\,(q_3 - p_3, \Lambda(T_1\,q - T_1\,p\,))_H + r\,\|q_2 - p_2\|_H^2 + r\,\|\Lambda(T_1\,q - T_1\,p)\|_H^2\,. \quad (22.8)$$

Далее, из (21.10) с учетом жесткой нерастягиваемости проксимального отображения (теорема 7.2) имеем, что

$$\|\,T_2\,q - T_2\,p\,\|_H^2 \le \left(\Lambda\,T_1\,q + \frac{1}{r}\,q_3 - \Lambda\,T_1\,p - \frac{1}{r}\,p_3\,, T_2\,q - T_2\,p\right)_H,$$

откуда, после умножения на r, получаем

$$r\,\|\,T_2\,q - T_2\,p\,\|_H^2 \le$$
$$\le r\,(\,\Lambda(\,T_1\,q - T_1\,p\,)\,,\,T_2\,q - T_2\,p\,)_H + (\,q_3 - p_3\,,\,T_2\,q - T_2\,p\,)_H\,. \qquad (22.9)$$

Из (21.11) следует соотношение

$$\frac{1}{r}\,\|\,T_3\,q - T_3\,p\,\|_H^2 = \frac{1}{r}\,\|\,q_3 - p_3\,\|_H^2 + 2\,(\,q_3 - p_3\,,\,\Lambda(\,T_1\,q - T_1\,p\,)\,)_H -$$
$$-r\,(\,q_3 - p_3\,, T_2\,q - T_2\,p\,)_H + r\,\|\,\Lambda(\,T_1\,q - T_1\,p) - (T_2\,q - T_2\,p)\,\|_H^2 =$$
$$= \frac{1}{r}\,\|\,q_3 - p_3\,\|_H^2 + 2\,(\,q_3 - p_3,\,\Lambda(\,T_1\,q - T_1\,p\,)\,)_H -$$
$$-\,(\,q_3 - p_3\,,\,T_2\,q - T_2\,p\,)_H + r\,\|\,\Lambda(T_1\,q - T_1\,p\,)\,\|_H^2 -$$
$$-2\,r\,(\,\Lambda(T_1\,q - T_1\,p\,)\,, T_2\,q - T_2\,p\,)_H + r\,\|T_2\,q - T_2\,p\,\|_H^2\,. \qquad (22.10)$$

Складывая соотношения (22.8)–(22.10) и учитывая то, что в силу (21.5) имеет место равенство

$$\|\,\Lambda(\,T_1\,q - T_1\,p\,)\,\|_H = \|\,T_1\,q - T_1\,p\,\|_V\;,$$

получаем, что справедливо неравенство (22.2). ■

Теорема 22.2. *Пусть $A : V \to V$ – обратно сильно монотонный оператор с константой $\sigma > 0$, выполнены условия (21.2), (22.1), задача (21.1) имеет по крайней мере одно решение, итерационная последовательность $\left\{q^{(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty}$ построена по формуле $q^{(k+1)} = Tq^{(k)}$, $q^{(0)} \in Q$ – произвольно заданный элемент. Тогда эта последовательность сходится слабо в Q при $k \to +\infty$, ее предел q^* является неподвижной точкой оператора T, и справедливы равенства*

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| y^{(k)} - \Lambda u^{(k)} \right\|_H = 0, \tag{22.11}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| q^{(k+1)} - q^{(k)} \right\|_Q = 0. \tag{22.12}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством (22.2), положив в нем $q = q^{(k)}$ и считая p неподвижной точкой оператора T (в силу теоремы 21.2 существует хотя бы одна такая точка). Учитывая, что по определению итерационной последовательности $Tq^{(k)} = q^{(k+1)}$, а для неподвижной точки, согласно теореме 21.1, выполнены равенства $p_2 - \Lambda T_1\, p = p_2 - \Lambda p_1 = 0$, $p_1 - T_1\, p = 0$, получаем

$$\left\| q^{(k+1)} - p \right\|_Q^2 + \delta\, \left(Au^{(k)} - Ap_1, u^{(k)} - p_1\right)_V + \frac{r}{2} \left\| y^{(k)} - \Lambda u^{(k+1)} \right\|_H^2 +$$

$$+ \frac{1}{2\tau(1-\tau\, r)} \left\| (1-\tau\, r)\,(u^{(k)} - u^{(k+1)}) - \tau\,(Au^{(k)} - Ap_1) \right\|_V^2 \le$$

$$\le \left\| q^{(k)} - p \right\|_Q^2. \tag{22.13}$$

Из неравенства (22.13) следует, что ограниченая снизу (нулем) числовая последовательность $\left\{\left\| q^{(k)} - p \right\|_Q\right\}_{k=0}^{+\infty}$ не возрастает, и следовательно, имеет конечный предел:

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| q^{(k)} - p \right\|_Q = \lambda_p, \tag{22.14}$$

и значит, выполнены соотношения:

$$\lim_{k\to+\infty} \left(Au^{(k)} - Ap_1\,, u^{(k)} - p_1 \right)_V = 0, \tag{22.15}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| (1-\tau\, r)\,(\, u^{(k)} - u^{(k+1)}\,) - \tau\,(\, Au^{(k)} - Ap_1\,) \right\|_V = 0, \tag{22.16}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| y^{(k)} - \Lambda\, u^{(k+1)} \right\|_H = 0. \tag{22.17}$$

Используя (22.15) и (22.3), получаем

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| Au^{(k)} - Ap_1 \right\|_V = 0. \tag{22.18}$$

Из (22.16) и (22.18) следует, что

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| u^{(k)} - u^{(k+1)} \right\|_V = 0. \tag{22.19}$$

Далее, используя (22.17), (22.19), (21.5) и неравенство

$$\left\| y^{(k)} - \Lambda\, u^{(k)} \right\|_H \le \left\| y^{(k)} - \Lambda\, u^{(k+1)} \right\|_H + \left\| \Lambda(u^{(k)} - u^{(k+1)}) \right\|_H ,$$

получаем соотношение (22.11), из которого с учетом условия (22.19) и равенства

$$y^{(k)} - y^{(k+1)} = (y^{(k)} - \Lambda u^{(k)}) + (\Lambda u^{(k)} - \Lambda u^{(k+1)}) + (\Lambda u^{(k+1)} - y^{(k+1)})$$

следует, что

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| y^{(k)} - y^{(k+1)} \right\|_H = 0\,. \tag{22.20}$$

Наконец, используя (21.11) и (22.11), имеем

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| \lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)} \right\|_H = r \lim_{k\to+\infty} \left\| \Lambda u^{(k)} - y^{(k)} \right\|_H = 0\,. \tag{22.21}$$

Равенства (22.19)–(22.21) означают, что выполнено условие (22.12), и, поскольку $q^{(0)} \in Q$ – произвольно заданный элемент, то оператор T является ассимптотически регулярным. Кроме того, оператор T является нерастягивающим в силу теоремы 21.1, поэтому в силу теоремы 14.1 итерационная последовательность $\left\{q^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ сходится слабо в Q при $k \to +\infty$ и ее предел q^* является неподвижной точкой оператора T. ■

Замечание 22.1. *Из теорем 21.1, 22.2 вытекает, что итерационные последовательности* $\left\{u^{(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty}$, $\left\{y^{(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty}$, *построенные согласно (21.6)–(21.8), сходятся слабо к* u *и* Λu *в* V *и* H *соответственно при* $k \to +\infty$. ■

Замечание 22.2. *Пусть* u, v *– решения задачи (21.1), т.е.*

$$(Au - f, \eta - u)_V + G\,(\eta) - G\,(\Lambda u) + F(\eta) - F(u) \ge 0 \qquad \forall\, \eta \in V,$$

$$(Av - f, \eta - v)_V + G\,(\eta) - G\,(\Lambda v) + F(\eta) - F(v) \ge 0 \qquad \forall\, \eta \in V,$$

Полагая $\eta = v$ в первом из этих неравенств и $\eta = u$ – во втором, имеем

$$(Au, v-u)_V + G(\Lambda v) - G(\Lambda u) + F(v) - F(u) \geq (f, v-u)_V,$$

$$(Av, u-v)_V + G(\Lambda u) - G(\Lambda v) + F(u) - F(v) \geq (f, u-v)_V.$$

Складывая эти неравенства, получим, что

$$(Av - Au, v-u)_V \leq 0, \tag{22.22}$$

и учитывая (22.3), имеем: $Av = Au$.

Таким образом, естественным является то, что, взяв в доказательстве теоремы 22.2 произвольную неподвижную точку p, мы получили равенство $Aq_1^* = Ap_1$ для предельной точки q^* итерационной последовательности. ■

23 Двойственный метод для неравенств с сильно монотонным оператором.

В настоящем пункте рассматривается случай, когда оператор A удовлетворяет более жестким условиям, чем условие обратной сильной монотонности (22.3).

Теорема 23.1. *Пусть оператор A сильно монотонен с константой μ, липшиц-непрерывен с константой L и выполнено следующее неравенство:*

$$0 < \tau < \frac{2\,\mu}{2\,\mu\, r + L^2}\,. \tag{23.1}$$

Тогда оператор T, определяемый соотношениями (21.9)–(21.11), является нерастягивающим.

Более того, для $q = (q_1, q_2, q_3), p = (p_1, p_2, p_3) \in Q$ справедливо неравенство

$$\|\, Tq - Tp\,\|_Q^2 + \beta\,\|\, q_1 - p_1\,\|_V^2 + r\,\|\,(q_2 - \Lambda\, T_1\, q\,) - (p_2 - \Lambda\, T_1\, p\,)\,\|_H^2 +$$

$$+\frac{1}{(1-\tau r)\tau}\,\|(1-\tau r)((q_1 - T_1\, q) - (p_1 - T_1\, p)) - \tau(Aq_1 - Ap_1)\|_V^2 \leq$$

$$\leq \|\, q - p\,\|_Q^2\,, \tag{23.2}$$

где $\beta = 2 - \tau L^2/[\,\mu\,(1-\tau\, r)\,]$.

Доказательство. По условиям теоремы оператор A удовлетворяет следующим неравенствам:

$$(\,Au - Av, u - v\,)_V \geq \mu \,\|\, u - v\,\|_V^2\,, \quad \mu > 0 \qquad \forall\, u, v \in V, \tag{23.3}$$

$$\|\, Au - Av\,\|_V \leq L \,\|\, u - v\,\|_V \quad, \quad L > 0 \qquad \forall\, u, v \in V. \tag{23.4}$$

Заметим, что в при выполнении условия (23.1) справедливы неравенства $\tau\, r < 1$ и $\beta > 0$, и таким образом из (23.2) будет следовать нерастягиваемость оператора T.

Докажем, что неравенство (23.2) имеет место. Для оператора $S : V \to V$, $S\eta = (1 - \tau\, r)\,\eta - \tau\, A\eta + \tau\, f$, введенного в теореме 22.1, используя (23.3) и (23.4), получаем неравенство

$$\|\, Sp_1 - Sq_1\,\|_V^2 = (1 - \tau\, r)^2 \,\|\, p_1 - q_1\,\|_V^2 -$$

$$-2\,\tau\,(1 - \tau\, r)\,(\,Ap_1 - Aq_1\,, p_1 - q_1\,)_V + \tau^2 \,\|\, Ap_1 - Aq_1\,\|_V^2 \leq$$

$$\leq (1 - \tau r)^2 \,\|p_1 - q_1\,\|_V^2 - \tau(2\mu - \tau(2r\mu + L^2\,))\,\|p_1 - q_1\,\|_V^2\,. \tag{23.5}$$

Повторяя теперь рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 22.1, используя (23.5), получаем вместо (22.7) неравенство:

$$\frac{1}{(1 - \tau r)\,\tau}\,\|(1 - \tau r)((q_1 - T_1\, q) - (p_1 - T_1\, p)) - \tau\,(Aq_1 - Ap_1)\|_V^2 +$$

$$+\frac{1 + \tau\, r}{\tau}\,\|T_1\, q - T_1\, p\,\|_V^2 \leq \frac{1 - \tau\, r}{\tau}\,\|q_1 - p_1\|_V^2 - \beta\,\|q_1 - p_1\|_V^2 -$$

$$-2\,(\,q_3 - p_3, \Lambda\,(T_1\, q - T_1\, p)\,)_H + 2\,r\,\left(q_2 - p_2, \Lambda\,(T_1\, q - T_1\, p)\,\right)_H\,,$$

где $\beta = 1 - \tau\, L^2/[\,2\,\mu\,(1 - \tau\, r)\,]$.

Проводя снова выкладки, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 22.1, получаем неравенство (23.2). ■

Теорема 23.2. *Пусть оператор A сильно монотонен с константой μ, липшиц-непрерывен с константой L, выполнены условия (21.2), (23.1). Тогда имеют место соотношения (22.11), (22.12) и следующие равенства*

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| q_1^{(k)} - u\right\|_V = 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} \left\| q_2^{(k)} - \Lambda\, u\right\|_H = 0, \tag{23.6}$$

где u – решение задачи (21.1).

Доказательство. Отметим, прежде всего, что из условий (23.3) и (23.4) вытекает существование единственного решения вариационного неравенства (21.1), а значит, в силу теоремы 21.2 у оператора T существует хотя бы одна неподвижная точка.

Действительно, сильно монотонный оператор A, очевидно, является коэрцитивным, кроме того, согласно лемме 5.3 оператор A является псевдомонотонным, а значит, в силу теоремы 8.5 вариационное неравенство (21.1) разрешимо. Далее, для любых решений u, v решения задачи (21.1) из (22.22), (23.3) имеем, что

$$\mu \parallel u - v \parallel_V^2 \leq (Av - Au, v - u)_V \leq 0,$$

т.е. $u = v$.

Поэтому в силу теоремы 21.1 оператор T имеет единственную неподвижную точку.

Из неравенства (23.2), положив в нем $q = q^{(k)}$ и считая p неподвижной точкой оператора T, имеем

$$\left\| q^{(k+1)} - p \right\|_Q^2 + \beta \left\| q_1^{(k)} - p_1 \right\|_V^2 + \frac{r}{2} \left\| q_2^{(k)} - \Lambda\, q_1^{(k+1)} \right\|_H^2 +$$

$$+ \frac{1}{2\,(1 - \tau\, r)\tau} \left\| (1 - \tau\, r) \left(q_1^{(k)} - u^{(k+1)} \right) - \tau \left(Aq_1^{(k)} - Ap_1 \right) \right\|_V^2 \leq$$

$$\leq \left\| q^{(k)} - p \right\|_Q^2 .$$

Из этого неравенства, проводя рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 22.2, получаем, что выполнены соотношения (22.16), (22.17), а также следующее равенство

$$\lim_{k \to +\infty} \left\| q_1^{(k)} - p_1 \right\|_V = 0. \tag{23.7}$$

Из (23.7) и (23.4) имеем (22.18), и снова следуя доказательству теоремы 22.2, получаем соотношения (22.11), (22.12).

Поскольку задача (21.1) имеет единственное решение u, то в силу теоремы 21.1 выполнены равенства $p_1 = u$, $\;p_2 = \Lambda\, u$, и из (22.11), (23.7) получаем соотношения (23.6). ■

Литература

[1] *Алишаев М.Г.* О стационарной фильтрации с начальным градиентом // В сб. Теория и практика добычи нефти. – М.: Недра, 1968. – С. 202–211.

[2] *Алишаев М.Г., Вахитов Г.Г., Гехтман М.М., Глумов И.В.* О некоторых особенностях фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах// Известия АН СССР, сер. Механика жидкости и газа. – 1966. – N 3. – С. 166–169.

[3] *Ахиезер Н.И, Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Харьков: Изд-во при Харьковском гос. университете издательского объединения "ВИЩА ШКОЛА", 1977. – 316 с.

[4] *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Исследование задачи о равновесии сетчатой оболочки при наличии односторонних ограничений// Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач. Материалы 2-го Всероссийского семинара. – Казань: Изд-во Казанского математического общества, 1998. – С. 11–12.

[5] *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами// Известия ВУЗов. Математика. – 2003. – N 1. – С. 20–28.

[6] *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Методы декомпозиции для решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами// Дифференциальные уравнения. – 2003. - Т. 39, N 7. – С. 888–895.

[7] *Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Саддек А.М.* Исследование сходимости итерационных методов решения некоторых вариационных неравенств с псевдомонотнными операторами// Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т. 37, N 7. – С. 891–898.

[8] *Бадриев И.Б., Карчевский М.М.* Методы двойственности в прикладных задачах (общая теория). – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1987. – 147 с.

[9] *Бадриев И.Б., Шагидуллин Р.Р.* Исследование одномерных уравнений статического состояния мягкой оболочки и алгоритма их решения// Известия ВУЗов. Математика. – 1992. – N 1. – С. 7–17.

[10] *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

[11] *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

[12] *Гловински Р.Г., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 576 с.

[13] *Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.* Модифицированные функции Лагранжа. – М.: Наука, 1989. – 400 с.

[14] *Ентов В.М., Малахова Т.А., Панков В.Н., Панько С.В.* О расчете предельно равновесных целиков при вытеснении вязкопластической нефти из слоисто-неоднородного пласта// Прикладная математика и механика. – 1980. – Т. 44, N 1. – С. 113–123.

[15] *Ентов В.М., Панков В.Н., Панько С.В.* К расчету целиков остаточной вязкопластической нефти// Прикладная математика и механика. – 1980. – Т. 44, N 5. – С. 847–856.

[16] *Ентов В.М., Панков В.Н., Панько С.В.* О форме целика остаточной вязкопластичной нефти при разработке круговой скважины// Известия АН ССР, сер. МЖГ. – 1984. – N 4. – С. 88–93.

[17] *Ентов В.М., Панков В.Н., Панько С.В.* Математическая теория целиков остаточной вязкопластичной нефти. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1989. – 196 с.

[18] *Ентов В.М., Панько С.В.* К вариационной формулировке задачи о целиках остаточной нефти// Прикладная математика и механика. – 1984. – Т. 48, N 6. – С. 966–972.

[19] *Ильинский, Н. Б., Поташев, А. В.* Краевые задачи теории взрыва. – Казань: Изд-во Казан. ун-та,1986. – 182 с.

[20] *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

[21] *Колмогоров А.Н, Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.

[22] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1977. – 700 с.

[23] *Лапин А.В.* Об исследовании некоторых задач нелинейной теории фильтрации//Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т. 19, N 3. – С. 689–700.

[24] *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

[25] *Ляшко А.Д., Бадриев И.Б., Карчевский М.М.* О вариационном методе для уравнений с разрывными монотонными операторами//Известия ВУЗов. Математика. – 1978. – N 11. – С. 63–69.

[26] *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Вариационные методы в теории течений вязкопластической среды// Прикладная математика и механика. – 1965. – Т. 29, N 3. – С. 468–492.

[27] *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. – М.: Мир, 1988. – 516 с.

[28] *Павлова М.Ф., Тимербаев М.Р.* Пространства Соболева. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2002. – 120 с.

[29] Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. – М.: Наука, 1969. – 546 с.

[30] *Ридель В.В., Гулин Б.В.* Динамика мягких оболочек. – М.: Наука, 1990. – 206 с.

[31] *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1973. – 244 с.

[32] *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1952. – 218 с.

[33] *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

[34] *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.

[35] *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. – 400 с.

[36] *Badriev I.B., Zadvornov O.A., Ismagilov L.N.* On the methods of iterative regularization for the variational inequalities of the second kind// Computational Methods in Applied Mathematics. - 2003. - Is. 3, N. 2. - P. 223–234.

[37] *Browder F.E. and Petryshin W.V.* Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert spaces// Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 20(1967). – P. 197–228.

[38] *Gabay D., Merscier B.* A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximations// Computers & Mathematics with Applications. – 1976. – V 2, Is. 1. – P. 17–40.

[39] *Istratescu V.I.* Fixed Point Theory. An Introduction. - London: D. Reidel publishing company, 1981. – 467 p.

[40] *Lions P.L., Merscier B.* Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators //SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1979. – V. 16, N 6. – P. 964–979.

[41] *Opial Z.* Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings// Bulletin of the American Mathematical Society. – 1967. – V. 73, N. 4. – P. 591–597.

[42] Résolution numériques de problèmes aux limites par des méthodes de Lagrangien augmenté /Eds M.Fortin, R.Glowinski. – Paris: Dunod, 1983. – 320 p.

Бадриев Ильдар Бурханович

Задворнов Олег Анатольевич

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Подписано в печать 28.08.2007
Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16
Гарнитура "Таймс". Печать ризографическая. Усл. печ. л. 8.93
Уч.-изд. л. 9.5. Тираж 500 экз. Заказ 51/8

Издательство "Казанский государственный университет
имени В.И.Ульянова-Ленина"
420008, г. Казань, ул. пр. Нужина 1/37

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии издательства
Казанского государственного университета
420008, г. Казань, ул. пр. Нужина 1/37
Тел. (843) 231-53-59