МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

НАБЕРЕЖНОЧЕЛНИНСКИЙ ИНСТИТУТ

Решение задач по дискретной математике

Методические указания к выполнению практических работ по дисциплине «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»

Набережные Челны
2018

Решение задач по дискретной математике. Методические указания к выполнению практических работ по дисциплине «Дискретная математика»/ Хузятова Л.Б., Гибадуллина Г.Р. – Набережные Челны: Изд.-полигр.центр НЧИ К(П)ФУ, 2018. – 96с.

Методические указания разработаны на кафедре «Информационные системы» и предназначены для самостоятельной работы по курсу «Дискретная математика» основной профессиональной образовательной программы направления 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, 09.03.04 Программная инженерия .

Рецензент: к.т.н., доцент Хамадеев Шамиль Актасович

Печатается по решению Учебно-методической комиссии отделения информационных технологий и энергетических систем Набережночелнинского института (филиала) ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

1. Множества. Операции над множествами

Задачи на пересечение и объединение множеств.

№ 1.1

Пусть универсальное множество U – множество всех адресов веб-страниц в Интернете, посвященных дискретной математике.

A – множество всех веб-страниц, созданных за текущий год (т.е. недавно появившихся;

B – множество всех веб-страниц о дискретной математике, принадлежащих научным учреждениям;

C – множество всех веб-страниц о дискретной математике, содержащих примеры задач.

Каков содержательный смысл (характеристическое свойство) каждого из следующих множеств: а) $\overline{C}$; б) $A \cap B \cap C$; в) $(A \bigcup B) \setminus C$; г) $(A \bigcup C) \cap \overline{B}$; д) $B \setminus C$?

Решение:

а) $\overline{C}$ – множество всех веб-страниц о дискретной математике, не содержащих примеры задач;

б) $A \cap B \cap C$ - множество всех веб-страниц, созданных за текущий год, принадлежащих научным учреждениям и содержащих примеры задач;

в) $(A \bigcup B) \setminus C$ –множество всех веб-страниц, созданных за текущий год, а также принадлежащих научным учреждениям, но не содержащих примеры задач;

*г) $(A \bigcup C) \cap \overline{B}$ – **множество** всех веб-страниц, недавно появившихся, а также содержащих примеры задач, но не принадлежащих научным учреждениям;*

д) $B \setminus C$ – множество всех веб-страниц, принадлежащих научным учреждениям, но не содержащих примеры задач.

№ 1.2

Пусть U – универсальное множество всех компьютеров в фирме.

A – множество всех компьютеров, проработавших больше 2 лет;
B – множество всех компьютеров, имеющих процессор Pentium-4;
C – множество всех компьютеров, имеющих модем.
Каков содержательный смысл каждого из следующих множеств:

а) $\overline{A \cup B}$ б) (A\B)\C в) $\overline{A} \cap$(C\B) г) A\C
д) A $\cap$ B ?

Решение:

а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (правило де-Моргана) – множество всех компьютеров, не проработавших не больше 2 лет и не имеющих процессор Pentium-4;

б) (A\B)\C = множество всех компьютеров, проработавших больше 2 лет, не имеющих процессор Pentium-4 и модем;

в) $\overline{A} \cap$ (C\B)- множество компьютеров, проработавших < 2 лет, имеющие модем и не имеющие процессор Pentium-4;

г) A\C – множество компьютеров, проработавших > 2 лет, но не имеющих модем;

д) A $\cap$ B – множество всех компьютеров, имеющих модем и проработавших > 2 лет.

№ 1.3

Пусть U – универсальное множество всех фирм города.
A- множество фирм, продающих оргтехнику;
B – множество фирм, производящих послегарантийное обслуживание;
C – множество фирм, имеющих плохую репутацию.
Каков содержательный смысл следующих множеств:

а) $\overline{A \cup B \cup C}$ б) C\B в) A $\cup B$ г) $\overline{B}$ д) (C $\cap$ B) $\cup$ C

Решение:

а) $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ (правило де-Моргана) – множество фирм, не продающих оргтехнику, не производящих послегарантийное обслуживание и не имеющих плохую репутацию одновременно;

б) C\B – множество фирм, имеющих плохую репутацию и не производящих послегарантийное обслуживание;

в) $A \bigcup B$ - множество фирм, продающих оргтехнику, а также множество фирм, производящих послегарантийное обслуживание.

г) $\overline{B}$ - множество фирм, не производящих послегарантийное обслуживание;

д) $(C \cap B) \bigcup C = C$ (правило поглощения) – множество фирм, имеющих плохую репутацию.

№ 1.4

Пусть U – универсальное множество всех людей на Земле;
А- множество людей, живущих в России;
В – множество людей, не старше 18 лет;
С – множество людей, учащихся в вузах.
Каков содержательный смысл следующих множеств:

а) $A \cap \overline{B} \cap C$ б) $A \bigcup U$ в) $\overline{\overline{B}}$ г) $(A \bigcup B) \cap A$
д) B\A ?

Решение:

а) $A \cap \overline{B} \cap C$ = множество людей, живущих в России, старше 18 лет и учащихся в вузах;

б) $A \bigcup U$ = U - множество всех людей на Земле (св-во единицы);

в) $\overline{\overline{B}}$ = B (инволютивность) – множество людей, не старше 18 лет;

г) $(A \bigcup B) \bigcap A$ = A (правило поглощения) – множество людей, живущих в России;

д) B\A – множество людей, не старше 18 лет, не живущих в России.

№ 1.5

Пусть U – универсальное множество всех книг в мире.
А – множество книг, имеющихся в библиотеке КамАЗа;
В – множество книг о компьютерах;
С – множество книг на иностранных языках;
Д - множество книг издательства «Наука»;
Е - множество книг в твердом переплете.
Каков содержательный смысл следующих множеств:

а) $(A \bigcup B) \bigcap (C)$ б) $\overline{B} \setminus \overline{C}$ в) $(A \cup B) \cap A$ г) $\overline{\overline{Д}}$

д) Е$\bigcap$Д

Решение:

а) $(A \bigcup B) \bigcap (C)$ - множество книг библиотеки КамАЗа, а также книг о компьютерах издательства «Наука» в твердом переплете;

б) $\overline{B} \setminus \overline{C} = \overline{B} \bigcap \overline{\overline{C}} = \overline{B} \bigcap C$ - множество книг не о компьютерах на иностранных языках;

в) $(A \bigcup B) \bigcap A$ = А (правило поглощения) – множество книг библиотеки КамАЗа;

г) $\overline{\overline{Д}}$ = Д (свойство инволютивности) – множество книг издательства «Наука»;

д) Е$\bigcap$Д – множество книг издательства «Наука» в твердом переплете.

№ 1.6

Пусть универсальное множество U всех программистов фирмы. А – множество всех программистов, знающих Delphi. В – множество всех программистов, знающих Visual Basic. С – множество всех программистов, знающих С++. Каков содержательный смысл следующих множеств?

А) $\overline{A}$

Б) (А $\cup$В) $\cap$ С

В) С\(А $\cap$ В)

Г) (А $\cap$ В) $\cup$ $\overline{C}$

Д) А\В\С

Решение:

А) Множество всех программистов, не знающих Delphi.

Б) Множество всех программистов, знающих одновременно С++ и либо Delphi, либо Visual Basic.

В) Множество всех программистов, знающих С++, кроме тех, которые знают еще и Delphi, и Visual Basic. (одновременно)

Г) Множество всех программистов, знающих и Delphi и Visual Basic, или не знающих С++.

Д) Множество всех программистов, знающих Delphi и не знающих Visual Basic.

№ 1.7

Пусть универсальное множество U всех книг в библиотеке. A – множество всех книг по математике. B – множество всех книг 1990 года выпуска. C – множество всех книг на абонементе. D – множество всех книг объемом более 200 страниц. Каков содержательный смысл следующих множеств?

А) $(A \cap B) \cup (\overline{C} \cup \overline{D})$

Б) $(A \setminus B) \cup (C \cap \overline{D})$

В)$(\overline{A} \cup B) \setminus (C \cap D)$

Г) $(B \setminus D) \cup C$

Решение:

А) Множество всех книг, удовлетворяющих условию: книги по математике, изданные в 1990 году, а также все книги кроме находящихся на абонементе объемом более 200 страниц.

Б) Множество всех книг по математике, кроме книг 1990 года выпуска, либо все книги на абонементе, кроме книг объемом более 200 страниц.

В) Множество всех книг не по математике или все книги 1990 года выпуска, кроме книг объемом более 200 страниц, находящихся на абонементе.

Г) Множество всех книг 1990 года выпуска, кроме книг, объемом более 200 страниц, или все книги на абонементе.

№ 1.8

Маленький мальчик ходил по лесу. Он собрал лесные ягоды (множество U). Среди них были зеленые (множество A), красные (множество B) и поеденные червями (множество C), также среди ягод были и красно-зеленые. Каков содержательный смысл каждого из следующих множеств:

1) $U \setminus (C \cap (A \cup B))$.
2) $(A \cap B) \cup C$.
3) $\overline{B} \cap \overline{C}$.
4) $U \setminus (C \cap A)$.

Решение:

Объединением множеств А и В называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат этим множествам (А∪В). Пересечением множеств А и В называется множество, состоящее только из элементов, принадлежащих и А, и В (А∩В). Дополнением до U называется множество элементов, не принадлежащих А, но принадлежащих U ($\overline{A} = U \setminus A$).

1)множество лесных ягод, не поеденных червями и множество ягод, которые не являются ни красными, ни зелеными (множество всех лесных ягод, кроме тех красных и зеленых ягод, поеденных червями).

2)множество всех красно-зеленых и множество поеденных червями ягод.

3)множество не красных не поеденных червями ягод.

4)множество всех ягод, кроме зеленых поеденных червями ягод.

№ 1.9

Пусть универсальное множество U – множество всех компьютеров в фирме, A – компьютеров с процессорами PIII, B – компьютеры с видеокартами NVIDIA, C – компьютеры с CD – ROMами.

Объяснить следующие выражения:

1) $\overline{B}$
2) A\C
3) C\B
4) $A \cup (B \cap \overline{C})$
5) $A \cup B \cup \overline{C}$

Решение:

Опр. Множество – это любая определенная совокупность объектов.

Опр. Объекты, из которых состоит множество, называются элементами множества, которые отличаются друг от друга.

Дополнением до U ($\overline{A}$) называется множество элементов, не принадлежащих A, но принадлежащих U, т.е. получаем (в данном случае вместо A - B):

1) $\overline{B}$ – множество компьютеров с видеокартой не NVIDIA.

Разностью множеств А и В называется множество всех тех и только тех элементов А, которые не содержатся в В, в данном случае у нас вместо В - С:

2) А\С – множество компьютеров с процессором PIII без CD-ROMов.

Разностью множеств А и В называется множество всех тех и только тех элементов А, которые не содержатся в В, в данном случае у нас вместо А - С:

3) С\В – множество компьютеров с CD-ROMами, но не с видеокартой NVIDIA.

Объединением А и В называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат этим множествам. В данном случае у нас вместо В – выражение в скобках.

Выражение в скобках можно представить как выражение разности В\С, а т.к. мы знаем определение для разности, то получим:

4) $AU(B\cap\overline{C})$ –множество компьютеров с процессором PIII, а также множество компьютеров с видеокартой NVIDIA без CD-ROMов.

Объединением А и В называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат этим множествам. В данном случае у нас вместо В – выражение в скобках. А объединение для нескольких множеств определяется аналогично.

5) $AUBU\overline{C}$ – множество компьютеров с процессором PIII, а также множество компьютеров с видеокартой NVIDIA, а также множество компьютеров без CD-ROMа.

№ 1.10

На одной улице произошла авария автомобилей (множество U). Столкнулись легковые автомобили (множество А), грузовые автомобили (множество В), автомобили правоохранительных органов (множество М), автомобили с прицепами (множество D). Каков содержательный смысл каждого из следующих множеств:

1)$A\setminus(A\cap M\cap \overline{D})$.

2)$U\setminus((A\cap \overline{M})\cup(B\cap \overline{D}\cap M))$.

3)$A\cup(B\cap M)$.

4)$U\setminus(\overline{D}\cap M)$.

5)(A\ $\overline{M}$)∩D.

6) $\overline{M}$ ∩($\overline{D}$ ∩(A∪B)).

Решение:

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат этим множествам (A∪B). Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее только из элементов принадлежащих и A, и B (A∩B). Разностью множеств A и B называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся в B (A\B). Дополнением до U называется множество элементов, не принадлежащих A, но принадлежащих U ($\overline{A}$ =U\A).

1)множество легковых автомобилей не правоохранительных органов с прицепами.

2)множество легковых автомобилей правоохранительных органов и множество грузовых автомобилей не правоохранительных органов с прицепами.

3)множество легковых автомобилей и множество грузовых автомобилей правоохранительных органов.

4)множество всех автомобилей, кроме автомобилей правоохранительных органов без прицепов.

5)множество легковых автомобилей правоохранительных органов с прицепами.

6)множество легковых и грузовых автомобилей не правоохранительных органов и без прицепов.

№ 1.11

На одном из Интернет-сайтов был проведен опрос: «Какую операционную систему [ОС] Вы используете? Пользователям было предложено выбрать один или несколько вариантов ответа из следующих:

а) Windows XP

б) Windows 98;

в) Linux

Ниже приведены результаты опроса:

50% - только Windows XP;

25% - только Windows 98;

15% - только Linux;

1% - только Linux и Windows 98;

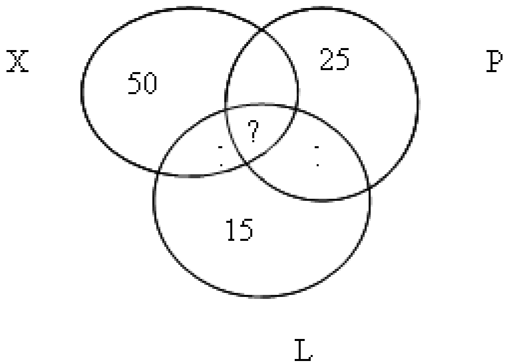
7% - только Windows XP и Windows 98;

1% - только Linux и Windows XP.

Определить, сколько %-ов опрошенных используют все 3 [OC]? Сколько опрошенных используют либо Linux, либо Windows 98; либо их вместе? Сколько опрошенных используют либо Windows XP, либо Windows 98, либо их вместе? Сколько опрошенных используют либо Linux, либо Windows XP, либо их вместе?

Решение:

Построим ДВ и обозначим:



U – множество всех опрошенных;

X – множество людей, использующих Windows XP;

D – множество людей, использующих Windows 98;

L – множество людей, использующих Linux

$\mathrm{N}((\mathrm{D}\bigcap L)\setminus X)=1\%$ $\qquad$ $\mathrm{N}(\mathrm{X}\setminus(\mathrm{L}\bigcup D))=50\%$

$\mathrm{N}(\mathrm{D}\setminus(\mathrm{X}\bigcup L))=25\%$

$\mathrm{N}(\mathrm{L}\setminus(\mathrm{X}\bigcup D))=15\%$ $\qquad$ $\mathrm{N}((\mathrm{X}\bigcap D)\setminus L)=7\%$

$\mathrm{N}((\mathrm{X}\bigcap L)\setminus D)=1\%$

N(U) = 100%

Найдем процент людей, использующих все 3 OC.

N(U)=N(XU

$\bigcup Д\bigcup L)=N((X\bigcup Д)\bigcup L)=N(X\bigcup Д)+N(L)-N((X\bigcup Д)\bigcap L=$

$= N(X) + N(Д) - N(X \bigcap Д) + N(L) - N((X \bigcup Д) \bigcap L)$

Так как:

$N(X) = N(X \setminus (Д \bigcup L)) + N((X \bigcap Д) \setminus L + N((X \bigcap L) \setminus Д) +$

$+ N(X \bigcap Д \bigcap L) =$

$= 50 + 7 + 1 + N(X \bigcap Д \bigcap L) = 58 + N(X \bigcap Д \bigcap L)$

N(Д)=N(Д\(X

$\bigcup L)) + N((X \bigcap Д) \setminus L) + N((Д \bigcap L) \setminus X) + N(X \bigcap Д \bigcap L) =$

$= 25 + 7 + 1 + N(X \bigcap Д \bigcap L) = 33 + N(X \bigcap Д \bigcap L)$

N(

L)=N(L\(X

$\bigcup Д)) + N((X \bigcap L) \setminus Д) + N((Д \bigcap L) \setminus X) + N(X \bigcap Д \bigcap L) =$

=15+1+1+N(X$\bigcap Д \bigcap L) = 17 + N(X \bigcap Д \bigcap L)$

N(X

$\bigcap Д) = N((X \bigcap Д) \setminus L) + N(X \bigcap Д \bigcap L) = 7 + N(X \bigcap Д \bigcap L)$

N((X$\cup$D)$\cap$L)=

$= N((X \bigcap L) \setminus Д) + N((L \bigcap Д) \setminus X) + N(X \bigcap Д \bigcap L) =$

$= 1 + 1 + N(X \bigcap Д \bigcap L) =$

= 2+N(X$\bigcap Д \bigcap L)$

то в итоге после упрощений получим:

N(U)=58+N(X$\cap$

$\bigcap Д \bigcap L) + 33 + N(X \bigcap Д \bigcap L) + 17 + N(X \bigcap Д \bigcap L) -$

$- 2 - N(X \bigcap Д \bigcap L) - 7 - N(X \bigcap Д \bigcap L) =$

=N(U)=99+N(X$\cap$

$\bigcap Д \bigcap L) =\rangle N(X \bigcap Д \bigcap L) = N(И) - 99 = 100 - 99 = 1\%$

пользователей имеют 3 ОС.

N(L$\bigcup Д) = N(L) + N(Д) - N(L \bigcap Д) = 18 + 34 - 2 = 50\%$

используют либо Linux, либо Windows 98, либо их вместе.

N(X$\bigcup Д) = N(X) + N(Д) - N(X \bigcap Д) = 59 + 34 - 8 = 85\%$ -

используют либо Windows 98, либо Windows XP, либо их вместе.

$N(L \bigcup X) = N(L) + N(X) - N(L \bigcap X) = 18 + 59 - 2 = 75\%$ - используют либо Linux, либо Windows XP.

Замечание.

$N(L \bigcap Д) = N((L \bigcap D) \setminus X) + N(X \bigcap Д \bigcap L) = 1 + 1 = 2$;

$N(X \bigcap Д) = N((X \bigcap Д) \setminus L) + N(X \bigcap Д \bigcap L)$;

$N(L \bigcap X) = N((L \bigcap X) \setminus Д) + N(X \bigcap Д \bigcap L)$.

№ 1.12

Парень купил себе 30 рубашек. Из них 20 рубашек с длинными рукавами, 10 рубашек с длинными рукавами и без пуговиц. Сколько парень купил рубашек без пуговиц с короткими рукавами, сколько рубашек с длинными рукавами и с пуговицами, сколько всего рубашек без пуговиц.

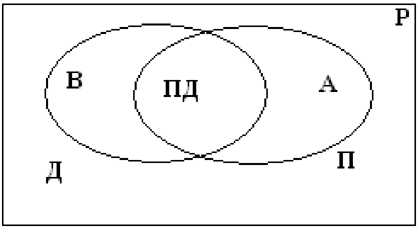
Решение:

Введем обозначения:

Всего рубашек – Р, все рубашки с длинными рукавами – Д, все рубашки без пуговиц – П, рубашки только с длинными рукавами – В, рубашки только без пуговиц – А, рубашки с длинными рукавами и без пуговиц – ПД.

Дано: |ПД|=10, |Р|=30,|Д|=20.

Найти: |А|=? |В|=? |П|=?



|А|=|Р|-|Д|=30-20=10.

|В|=|Д|-|ПД|=20-10=10.

|П|=|А|+|ПД|=10+10=20.

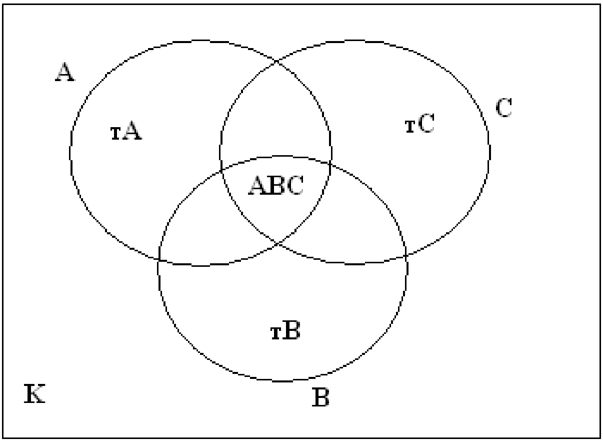
Ответ: *10 рубашек без пуговиц и с короткими рукавами, 10 рубашек с длинными рукавами с пуговицами, 20 рубашек без пуговиц.*

№ 1.13

В магазине продавались кактусы: 45 шаровидных, 50 с цветочками, 50 белого цвета, 20 белого цвета с цветочками, 20 белого цвета шаровидные, 25 шаровидные с цветочками, 15 шаровидных белого цвета с цветочками, 5 зеленых вытянутых, никогда не цветущих. Сколько кактусов только шаровидных, только белого цвета, только с цветочками, сколько всего кактусов.

Решение:

Введем обозначения: шаровидные – A, с цветочками – C, белого цвета – B, белого цвета с цветочками – CB, шаровидные белого цвета – AB, шаровидные с цветочками – AC, зеленые вытянутые никогда не цветущие – K, только шаровидные – mA, только с цветочками – mC, только белого цвета – mB, шаровидные белого цвета с цветочками – ABC, N – всего кактусов.



Дано: $|A|=45$, $|B|=|C|=50$, $|ABC|=15$, $|AB|=20$, $|AC|=25$, $|CB|=20$, $|K|=5$.

$|(C\cap B)\backslash A|=|CB|-|ABC|=20-15=5.$

$|(A\cap C)\backslash B|=|AC|-|ABC|=25-15=10.$

$|mC|=|C|-|CB|-|(A\cap C)\backslash B|=50-20-10=20.$

$|(A\cap B)\backslash C|=|AB|-|ABC|=20-15=5.$

$|mA|=|A|-|AB|-|(A\cap C)\backslash B|=45-20-10=15.$

$|mB|=|B|-|AB|-|(B\cap C)\backslash A|=50-20-5=25.$

$|N|=|K|+|B|+|mA|+|mC|+|(A\cap C)\backslash B|=5+50+15+20+10=100.$

Ответ: *только шаровидные – 20, только с цветочками – 20, только белого цвета – 25, 100 – всего кактусов.*

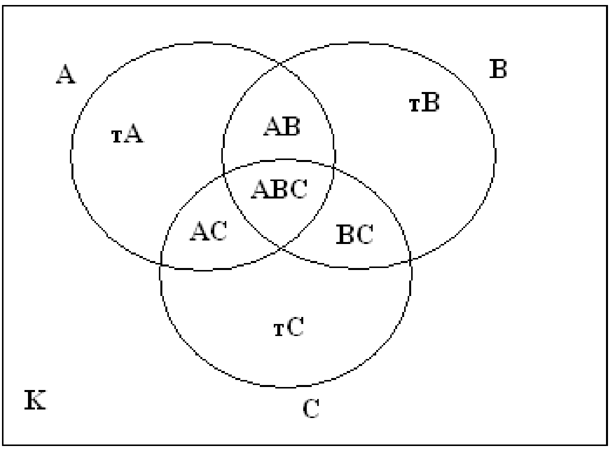
№ 1.14

В хлебопекарне испекли 300 пирожков. Среди них всего с мясом 116, с рисом 94 пирожка. Только с капустой 30, только с мясом 58, только с рисом 42, только с капустой и рисом 20, количество пирожков с капустой и с мясом равно количеству пирожков с рисом и мясом. Сколько пирожков со всеми тремя начинками сразу, сколько всего с капустой, сколько без начинки.

Решение:

Введем обозначения: только с капустой – mA, только с мясом – mB, только с рисом – mC, всего с рисом – C, всего с капустой – A, всего с мясом – B, только с капустой и с рисом – AC, только с капустой и мясом – AB, только с мясом и рисом – BC, без начинки – K, всего пирожков – N, с капустой, мясом и рисом – ABC.

Дано: $|mA|=30$, $|mB|=58$, $|mC|=42$, $|AC|=20$, $|B|=116$, $|C|=94$, $|N|=300$, $|AB|=|BC|$.



$|K|=|N|-|B|-|mC|-|mA|-|AC|=300-116-42-30-20=92.$

$|C|=|ABC|+|AC|+|BC|+|mC|;$

$94=|ABC|+20+|AB|+42;$

$|ABC|+|AB|=32.$

$|B|=|ABC|+|AB|+|BC|+|mB|;$

|B|=|ABC|+2|AB|+|mB|;
|B|=32+|AB|+|mB|;
116=32+58+|AB|;
|AB|=26.
|ABC|=32-|AB|=32-26=6.
|A|=|mA|+|AC|+|ABC|+|AB|=30+20+26+6=82.

Ответ: *пирожки со всеми тремя начинками сразу – 6, всего с капустой – 82, без начинки – 92.*

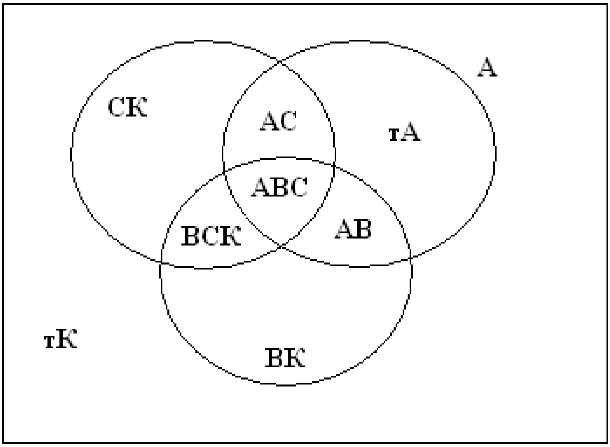
№ 1.15

Пастух пас коз и козлов. Козлов всего 100, безрогих не черных козлов 30, не черных козлов с рогами 45, черных не рогатых козлов 20, черных рогатых коз 15, не черных не рогатых коз 75, всего коз 125, всего рогатых коз и козлов 95. Сколько всего коз и козлов пасет пастух, сколько черных рогатых козлов, черных не рогатых коз, не рогатых не черных коз.

Решение:

Введем обозначения: козлы – К, козы – А, черные не рогатые козлы – СК, не черные рогатые козлы – ВК, черные рогатые козлы – ВСК, черные не рогатые козы – АС, не черные рогатые козы – АВ, черные рогатые козы – АВС, не черные не рогатые козлы – mК, не черные не рогатые козы – mА, всего коз и козлов – N, всего рогатых – В.

Дано: |К|=100, |mК|=30, |ВК|=45, |СК|=20, |АВС|=15, |mА|=75, |А|=125, |В|=95.



N=К+А=100+125=225.
ВСК=К-ВК-СК-тК=100-20-45-30=5.
АВ=В-ВСК-АВС-ВК=95-5-15-45=30.
АС=А-тА-АВС-АВ=125-75-15-30=5.

Ответ: *225 коз и козлов пасет пастух, 5 черных рогатых козлов, 5 черных не рогатых коз, 30 рогатых не черных коз.*

№ 1.16

В одном городе Канады 70% жителей знают французский язык и 80% - английский язык. Сколько процентов жителей знают оба языка?

Решение:

Опр. Множество – это любая определенная совокупность объектов.

Опр. Объекты, из которых состоит множество, называются элементами множества, которые отличаются друг от друга.

Пусть А – множество жителей Канады, знающих французский язык,

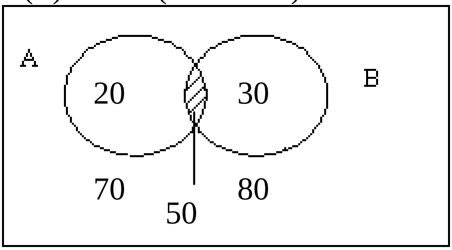
В - множество жителей Канады, знающих английский язык,

С - множество жителей Канады знающих французский и английский языки.

Зная если два множества объединяются, то количество элементов окончательного множества находиться с помощью выражения:

$$N(A\cup B) = N(U) = N(A) + N(B) – N(A\cap B).$$

Тогда |A|=70, |B|=80, |U|=100.
N(U)-N(A)=30%. Нашли
N(U)-N(B)=20%.
N(C)=100%-(30%+20%)=50%.



№ 1.17

На одной улице произошла авария автомобилей (множество U). Столкнулись легковые автомобили (множество A), грузовые автомобили (множество B), автомобили правоохранительных органов (множество M), автомобили с прицепами (множество D). По содержательному смыслу построить множество:

1) множество не грузовых автомобилей не правоохранительных органов с прицепами.
2) множество легковых автомобилей не правоохранительных органов с прицепами и множество грузовых автомобилей правоохранительных органов.
3) множество автомобилей правоохранительных органов без прицепов.
4) множество автомобилей без прицепов.

Решение:

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат этим множествам ($A \cup B$). Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее только из элементов принадлежащих и A, и B ($A \cap B$). Разностью множеств A и B называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся в B ($A \setminus B$). Дополнением до U называется множество элементов, не принадлежащих A, но принадлежащих U ($\overline{A} = U \setminus A$).

1) $\overline{B} \cap D \cap \overline{M}$.

2)$\cup$ или $(A\cap D\cap \overline{M}\,)\cup(B\cap M)$.

3)$U\backslash(D\cup \overline{M}\,)$ или $\overline{D}\cap M$ или $M\backslash D$.

4)$U\backslash D$ или $\overline{D}$.

№ 1.18

В компании работают программисты, умеющие программировать на C++, Delphi и Turbo Assembler. C++ знают 25 человек, Delphi – 19, Turbo Assembler – 24. C++ и Turbo Assembler знают 10 человек, C++ и Delphi – 6, Delphi и Turbo Assembler – 3. Все три языка знает 1 человек. Сколько программистов работают в компании?

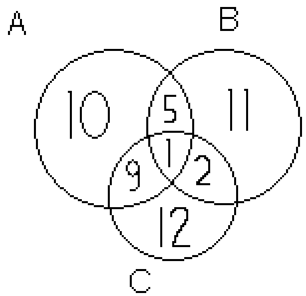
Решение:

Пусть A – множество программистов, умеющих программировать на C++, B – на Delphi и C – на Turbo Assembler.

$|A|=25$, $|B|=19$, $|C|=24$.

$|A\cap C|=10$, $|A\cap B|=6$, $|B\cap C|=3$

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B\cup C|-|A\cap(B\cup C)|=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|-|A\cap(B\cup C)|=25+19+24-3-15=50$



Ответ: 50 человек.

№ 1.19

В группе 25 студентов. 10 из них подрабатывают на стройке, а 8 – курьерами. 10 студентов не подрабатывают нигде. Сколько студентов занимаются и тем и другим? Сколько подрабатывают только на стройке?

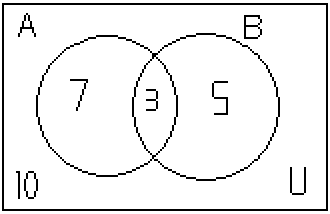
Решение:

Пусть A – множество студентов, подрабатывающих на стройке, B – курьерами, U – универсум.

$|U|=25$, $|A|=10$, $|B|=8$, $|U\setminus(A\cup B)| = 10$

$|A\cap B|=|A|+|B|+|U\setminus(A\cup B)|-|U|=10+8+10-25=3$

$|A\setminus B|=|A|-|A\cap B|=10-3=7$



Ответ: А) 3 Б) 7.

№ 1.20

От школы №1 на городской олимпиаде по математике участвовали 15 школьников, по физике – 8, по информатике – 12. 4 ученика участвовали в олимпиадах по математике и физике, 5 – по математике и информатике, 3 – по физике и информатике. 2 ученика участвовали во всех трех олимпиадах. Сколько учеников участвовали

а) только в олимпиаде по математике?

б) только в олимпиаде по физике?

в) только в олимпиаде по информатике?

Решение:

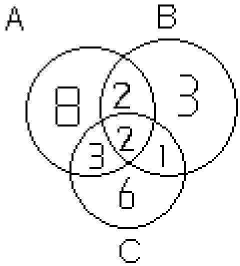
Пусть A – множество школьников, участвовавших на олимпиаде по математике, B – по физике, C – по информатике.

$|A|=15$, $|B|=8$, $|C|=12$, $|A\cap B|=4$, $|A\cap C|=5$, $|B\cap C|=3$, $|A\cap B\cap C|=2$.

$|A\setminus(B\cup C)|=|A|-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|=15-4-5+2=8$

$|B\setminus(A\cup C)|= |B|-|A\cap B|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=8-4-3+2=3$

$|C\setminus(A\cup B)|= |C|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=12-5-3+2=6$



Ответ:

а) 8; б) 3; в) 6.

№ 1.21

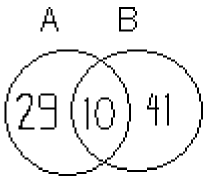
В книжном шкафу 80 книг. 39 из них по математике, 51 книга имеет объем больше 200 страниц. Сколько книг по математике имеет объем больше 200 страниц?

Решение:

Пусть А – множество всех книг по математике, В- всех книг объемом более 200 страниц.

$|A|=39$, $|B|=51$

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B| \Rightarrow |A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|=39+51-80=10$



Ответ: 10.

№ 1.22

В классе 20 учеников увлекаются музыкой. 11 из них любят классику, а 12 – современную музыку.

А) Сколько учеников любят только классическую музыку?

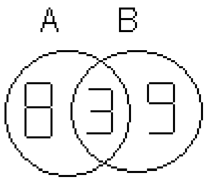
Б) Только современную?

Решение:
Пусть A – множество всех учеников, увлекающихся классикой, B – современной музыкой.

$|A|=11$, $|B|=12$

$|A\backslash B|=|A|-|A\cap B|=|A\cup B|-|B|=20-12=8$

$|B\backslash A|=|B|-|A\cap B|=|A\cup B|-|A|=20-11=9$



Ответ:
А) 8; Б) 9.

№ 1.23

Из Нижегородского зоопарка за ночь сбежали животные. 22 из них были с хвостом, 16 - были обижены на детей, которые все время пытались в них чем-нибудь запустить, 18 – прихватили с собой своих соседей по клетке.

Известно также, что среди сбежавших 8 - хвостатых взявшие соседей, не были обижены, а 7 - обиженных были с хвостом, но не взяли соседей.

Только обиженных было на 1 больше, чем только хвостатых и на 1 меньше, чем только убежавших с соседом, зато обиженных животных с хвостом и с соседом на 3 больше, чем только животных с хвостом.

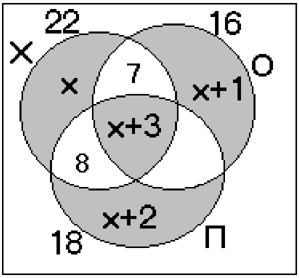
Определить: количество сбежавших только с хвостом; только обиженных и только с соседом; обиженных с соседом, но без хвоста.

Примечание: тех животных, которых прихватили, как самостоятельно сбежавших не учитывать.

Решение:
1) Введем обозначения: X – с хвостом

О – обиженные

П – прихватившие соседей
Составим условие, воспользовавшись ДВ:



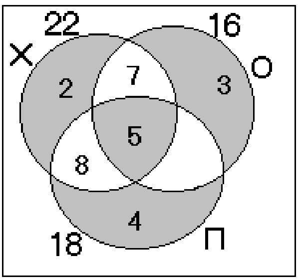
$\left|X \cap O \cap \overline{П}\right| = 7$

$\left|X \cap П \cap \overline{O}\right| = 8$

2) Примем за (x) количество только хвостатых животных ($\left|X \setminus (O \cup П)\right|$), тогда (x+1) - число только обиженных ($\left|O \setminus (X \cup П)\right|$), (x+2) - только взявших соседа ($\left|П \setminus (O \cup X)\right|$), а (x+3) - $X \cap O \cap П$.
Определяем (x):

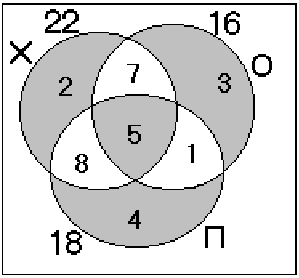
$$\left|X \setminus (O \cup П)\right| = \left|X\right| - \left|X \cap O \cap \overline{П}\right| - \left|X \cap П \cap \overline{O}\right| - \left|X \cap П \cap O\right|$$

x = 22-7-8-(x+3);
2x = 4;
x=2→ (x+1)= 3- только обиженные
(x+2)= 4- только сбежавшие с соседом
(x+3)= 5- $X \cap O \cap П$.



3) Определяем количество животных без хвоста, обиженных и с соседом:

$$\left|O \cap \Pi \cap \overline{X}\right| = |O| - |O - (X \cup \Pi)| - |X \cap O| = 16 - 3 - 12 = 1$$



$$|X \cup O \cup \Pi| = |X| + |O \setminus (X \cup \Pi)| + \left|O \cap \Pi \cap \overline{X}\right| + |\Pi \setminus (O \cup X)| =$$

$$= 22 + 3 + 1 + 4 = 30$$

Общее количество животных, покинувших зоопарк составило 30.

№ 1.24

Даны результаты операций, проведенных над множествами E,F,H. Определить из каких элементов состоят эти множества.

1) $E \bigcup F \bigcup H = \{e, f, g, h, m\};$

2) $F \setminus H = \{g, m\}$;

3) $E \setminus F = \{e\};$

4) $H \bigcap E = \{e, f, h\};$

5) $E \bigcap F = \{f, g, h\};$

Решение:

Из первого условия можно определить из каких элементов состоят эти множества.

Из второго условия следует, что множество F включает в себя элементы g, m , которые не содержит множество H. (F={g,m...});

Из третьего условия определяем, что множество E ={e,g,m}, но F не содержит элемент e.

Из четвертого условия находим, что H= {e,f,h}, E={e,f,h,g,m};

Из пятого условия делаем вывод о том, что во множество F добавляются элементы f, h, а множество E не включает элемент m.

Следовательно, E={e,f,h,g}, F={f,g,m,h}, H= {e,f,h}.

№ 1.25

Определить из ниже приведенных способов представления множеств те, которые являются наиболее точными:

а) A_1 ={a,b,c,d,e,f,g,a};
б) A_2 ={10,15,20};
в) A_3 ={y: $y \in B$};
г) A_4 ={B,C,D,E};
д) A_5 =β(U) ={Ø,{a},{b},{a,b}}, где U ={a,b};
е) A_6 ={b,c,D};

Решение:

а) При перечислении элементов множества не следует указывать один и тот же элемент несколько раз. Поэтому правильное определение выглядит следующим образом: A_1 ={a,b,c,d,e,f,g};

б) Представление множества A_2 ={10,15,20} списком своих элементов формально правильно.

в) Определение множества A_3 ={y: $y \in B$} заданием характеристического свойства его элементов («принадлежность множеству B») точно.

г) Определение множества A_4 ={B,C,D,E} списком правильно, т.к. элементами данного множества A_4 являются множества B,C,D и E.

д) Данное определение множества также верно, т.к. множество β(U) – множество всех подмножеств, состоящих из элементов множества U.

е) Определение множества A_6 ={b,c,D} также верно, т.к. представляет собой список из конечного числа элементов, где подмножество Dсостоит также из элементов.

№ 1.26

Пусть универсальное множество U – все преподаватели кафедры «Прикладной математики и управления».

A - множество всех преподавателей старше 25 лет;

B - множество всех преподавателей, имеющих высшее образование;

C - множество всех программистов;

D - множество всех преподавателей, знающих английский язык.

Необходимо сопоставить следующие множества и соответствующие им характеристические свойства:

а) множество всех преподавателей не старше 25 лет и множество всех программистов с высшим образованием;

б) множество всех преподавателей с высшим образованием и в возрасте старше25 лет, но не являющихся программистами;

в) множество всех программистов , не знающих английского языка;

г) множество всех программистов без высшего образования и не старше 25 лет;

д) множество всех преподавателей младше 25 лет и множество всех преподавателей, не работающих программистами;

е) множество всех программистов младше 25 лет.

1) $A \cap B \cap \overline{C}$

2) $C \setminus B \setminus A$

3) $\overline{A} \cup (B \cap C)$

4)C\D

5) $\overline{A} \cup \overline{C}$

6) $\overline{D} \cap B$

7) $C \setminus \overline{\overline{A}}$

Решение:

Из условия видно, что в левом столбце находится 6 свойств, а в правом- 7 множеств, но внимательно просмотрев все множества, можно заметить, что 4 и 6 из них отражают один и тотже содержательный смысл, т.е. B\D= $\overline{D} \cap B$.

Таким образом, сопоставив множества и их характеристический смысл, получаем следующую картину:

1) $A \cap B \cap \overline{C}$ — множество всех преподавателей с

высшим образованием и в возрасте старше25 лет, но не являющихся программистами;

2) $C \setminus B \setminus A$ — множество всех программистов без высшего образования и не старше 25 лет;

3) $\overline{A} \bigcup (B \bigcap C)$ — множество всех преподавателей не старше 25 лет и множество всех программистов с высшим образованием;

4)C\D=6) $\overline{D} \bigcap C$ — множество всех программистов , не знающих английского языка;

5) $\overline{A} \bigcup \overline{C}$ — множество всех преподавателей младше 25 лет и множество всех преподавателей, не работающих программистами;

7) $C \setminus \overline{\overline{A}}$ — множество всех программистов младше 25 лет.

Упрощение операций над множествами.

№ 1.27

Осуществить операции над множествами, если:
U ={a, в, c, d, e, f, g, h}, A = {a, в, c, d, e} B = {e, f}
C = {g, h}

а) $A \bigcap B$ б) $A \bigcup B$ в) $\overline{A} \setminus \overline{C}$

г) (A\B) ⋃ C д) $\overline{A \bigcup B}$

Решение:

а) $A \bigcap B$ ={a, в,c,d,e} ⋂ {e,f}={e}

б) $A \bigcup B$= {a,в,c,d,e} ⋃ {e,f}={a,в,c,d,e,f}

в) $\overline{A} \setminus \overline{C}$ =(U\A)\(U\C)={f,g,h}\ { a, в,c,d,e ,f}={g,h}

г) (A\B) ⋃ C= ({a,в,c,d,e}\{e,f}) ⋃ {g,h}={ a,в,c,d} ⋃ {g,h}=
={ a,в,c,d,g,h}

д) $\overline{A \bigcup B}$ = $\overline{A} \cap \overline{B}$ =(U\A) ⋂ (U\B)={f,g,h} ⋂ { a,в,c,d,g,h}={g,h}.

№ 1.28

Осуществить операции над множествами, если:

U= {1,2,3,4,5,a,b,c,d,e}, A={1,a,b}, B={c,d,e}, C= {5,a,b}, D={1,e}

а) $A \bigcap Д \bigcap B$; б) $\overline{B} \bigcap C$; в) $(A \bigcup B) \bigcap (C \bigcup Д)$; г) $(C \bigcup Д) \bigcap C$;

д) $A \bigcap (\overline{B} \bigcup \overline{C})$

Решение:

а) $A \bigcap Д \bigcap B$ ={1,a,b} ⋂ {1,e} ⋂ {c,d,e}={1} ⋂ {c,d,e}=ø

б) $\overline{B} \bigcap C = (U \setminus B) \bigcap C = (\{1,2,3,4,5,a,b,c,d,e\} \setminus \{c,d,e\}) \bigcap$
$\cap \{5,a,b\} \{1,2,3,4,5,a,b\} \bigcap \{5,a,b\} = \{5,a,b\}$

в) $(A \bigcup B) \cap (C \cup Д) = (\{1,a,b,\} \bigcup \{c,d,e\}) \bigcap (\{5,a,b\} \bigcup \{1,e\}) =$
$= \{1,a,b,c,d,e\} \bigcap \{1,5,a,b,e\} = \{1,a,b,e\}$

г)
$(C \bigcup Д) \bigcap C = (\{5,a,b\} \bigcup \{1,e\}) \bigcap \{5,a,b\} = \{1,5,a,b\} \bigcap \{5,a,b\} =$
$= \{5,a,b\} = c$
(св-во поглощения)

д)
$A \bigcap (\overline{B} \bigcup \overline{C}) = A \bigcap ((U \setminus B) \bigcap (U \setminus C)) =$
$= \{1,a,b\} \bigcap (\{1,2,3,4,5,a,b\} \bigcup \{1,2,3,4,c,d,e\}) = \{1,a,b\} \bigcap$
$\cap \{1,2,3,4,5,a,b,c,d,e\} = \{1,a,b\}$

№ 1.29

Упростить, учитывая, что U=A ∪ B:

а) (A\B)\(A ∩ $\overline{B}$)
б) (A ∪ B)\(A ∩ B)
в) (A\B) ∩ (B\A)
г) (A\B) ∪ (A ∩ B)

Решение:

а) ∅
б) $\overline{A} \cup \overline{B}$
в) ∅
г) A

№ 1.30

Доказать следующие свойства операций над множествами:

а) $A \bigcup A = A$; $A \bigcap A = A$ (идемпотентность)

б) $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (законы де Моргана)

в) A\B = $A \cap \overline{B}$ (выражение для разности),

если U = {ф,о,р,м,у,ш,к,а}

A= {к,о,р,м}, B={м,у,ш,к,а}

Решение:

а) $A \bigcup A$={к,о,р,м} $\bigcup$ {к,о,р,м}= {к,о,р,м}=A

$A \bigcap A$={к,о,р,м} $\bigcap$ {к,о,р,м}={к,о,р,м}=A

б)

$\overline{A \bigcup B} =$ U\(A $\bigcup$ B)={ф,о,р,м,у,ш,к,а}\({к,о,р,м} $\bigcup$ {м,у,ш,к,а})=

={ф,о,р,м,у,ш,к,а}\{о,р,м,у,ш,к,а}={ф}

$\overline{A} \bigcap \overline{B} =$ {ф,у,ш,а} $\bigcap$ {ф,о,р}={ф}

$\overline{A \bigcap B}$ =U\($A \bigcap B$)={ф,о,р,м,у,ш,к,а}\({к,о,р,м} $\bigcap$ {м,у,ш,к,а})=

={ф,о,р,м,у,ш,к,а}\{к,м}= ={ф,о,р,у,ш,а}

в) A\B={к,о,р,м}\{м,у,ш,к,а}= {о,р}

$A \bigcap \overline{B}$ ={к,о,р,м} $\bigcap$ {ф,о,р }={о,р}

№ 1.31

Осуществить операции над множествами, если:

U= {к,о,м,п,ь,ю,т,е,р}

A= {к,о,ю,т,е,р}, B ={к,о,м,т}, C={о,м,п,е,р}

а) $A \bigcap B$ б) $B \bigcap C$ в) A$\bigcap$C г) $\overline{A} \cup \overline{B}$ д) A\C

Решение:

а) $A \bigcap B$= {к,о,ю,т,е,р} $\bigcap$ {к,о,м,т}={к,о,т}

б) $B \bigcap C$ = {к,о,м,т} $\bigcap$ {о,м,п,е,р}= {о,м}

в) A$\bigcap$C = {к,о,ю,т,е,р} $\bigcap$ {о,м,п,е,р}={о,е,р}

г) $\overline{A} \cup \overline{B}$ =U\($A \bigcap B$)=

={к,о,м,п,ь,ю,т,е,р}\({к,о,ю,т,е,р} $\bigcap$ {к,о,м,т})={к,о,м,п,ь,ю,т,е,р} \{к,о,т}= {м,п,ь,ю,е,р}

д) A\C= {к,о,ю,т,е,р}\{о,м,п,е,р}={к,ю,т}.

№ 1.32

Даны множества A={a,b,c,d}, B={b,c,d,e}, C={a,c,e,f}. Записать множества, заданные следующими выражениями:

а) A $\cup$ B

б) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

в) (A\B) $\cap$ C

г) (A $\cup$ B $\cup$ C)\ (A $\cap$ B $\cap$ C)

д) A\B

е) (C\A) $\cup$ B

Решение:

а) A $\cup$ B ={a,b,c,d}+{b,c,d,e}={a,b,c,d,e}

б) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ ={e,f}$\cup${a,f}$\cup${b,d}={a,b,d,e,f}

в) (A\B) $\cap$ C=({a,b,c,d}\{b,c,d,e }) $\cap$ {a,c,e,f}= {a}

г) (A $\cup$ B $\cup$ C)\ (A $\cap$ B $\cap$ C) = ({a,b,c,d}$\cup${b,c,d,e}$\cup${a,c,e,f})\ {a,b,c,d}$\cap${b,c,d,e}$\cap${a,c,e,f} ={a,b,d,e,f}

д) A\B={a,b,c,d}\{b,c,d,e}={a}

е) (C\A) $\cup$ B=({a,c,e,f}\{a,b,c,d})$\cup${b,c,d,e}={b,c,d,e,f}

№ 1.32

Даны множества: A={Ч,Е,Т,Н,О,С,Т,Ь}, B={Д,И,С,К}, C={Ч,А,Р,Ы}, D={Т,О,Р}, E={Д,И,С,К,Р,Е,Т,Н,О,С,Т,Ь}. С помощью какой формулы из множеств A, B, C, D можно получить множество E?

Решение:

Возможные ответы:

E=B $\cup$ (D\A) $\cup$ (A\C)

E=B $\cup$ (C $\cap$ D) $\cup$ (A\C).

№ 1.33

Осуществить операции над множествами A={ a,b,c,f,m }, B={ a,e,k,f,m,n }, C={ b,k,f,c,e }, если U={ a,b,c,e,f,k,m,n }:

1)A$\cap$C$\cap$B.

2)U\(A$\cap$(C$\cup$B)).

3)A\(C$\cap$B).

4) $\overline{A} \cup (\overline{B} \cap$C).

5)(U$\cap$A)$\cup$(B$\cap \overline{C}$).

Решение:

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат этим *множествам (A∪B). Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее только из элементов принадлежащих и A, и B (A∩B). Разностью множеств A и B называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся в B (A\B). Дополнением до U называется множество элементов, не принадлежащих A, но принадлежащих U ($\overline{A}$ =U\A).*

1) $A\cap C\cap B=\{a,b,c,f,m\}\cap\{b,k,f,c,e\}\cap\{a,e,k,f,m,n\}=\{b,c,f\}\cap$
$\cap\{a,e,k,f,m,n\}=\{f\}$.

2) $U\setminus(A\cap(C\cup B))=\{a,b,c,e,f,k,m,n\}\setminus(\{a,b,c,f,m\}\cap(\{b,k,f,c,e$
$\}\cup\{a,e,k,f,m,n\}))=\{a,b,c,e,f,k,m,n\}\setminus(\{a,b,c,f,m\}\cap$
$\cap\{a,b,c,e,f,k,m,n\})==\{a,b,c,e,f,k,m,n\}\setminus\{a,b,c,f,m\}=\{e,k,n\}$.

3) $A\setminus(C\cap B)=\{a,b,c,f,m\}\setminus(\{b,k,f,c,e\}\cap\{a,e,k,f,m,n\})=$
$=\{a,b,c,f,m\}\setminus\{k,f,e\}=\{a,b,c,m\}$.

4) $\overline{A}\cup(\overline{B}\cap C)=(U\setminus A)\cup((U\setminus B)\cap C)=(\{a,b,c,e,f,k,m,n$
$\}\setminus\{a,b,c,f,m\})\cup((\{a,b,c,e,f,k,m,n\}\setminus\{a,e,k,f,m,n\})\cap\{b,k,f,c,e\})=$
$=\{e,k,n\}\cup(\{b,c\}\cap\{b,k,f,c,e\})=\{e,k,n\}\cup\{b,c\}=\{b,c,e,k,n\}$.

5) $(U\cap A)\cup(B\cap\overline{C})=(U\cap A)\cup(B\cap(U\setminus C))=$
$=(\{a,b,c,e,f,k,m,n\}\cap\{a,b,c,f,m\})\cup(\{a,e,k,f,m,n\}\cap$
$\cap(\{a,b,c,e,f,k,m,n\}\setminus\{b,k,f,c,e\}))=$
$=\{a,b,c,f,m\}\cup(\{a,e,k,f,m,n\}\cap\{a,m,n\})=\{a,b,c,f,m\}\cup\{a,m,n\}=$
$=\{a,b,c,f,m,n\}$.

№ 1.34

Найти все элементы множества F, если A={ a,b,c,k }, B={ b,d,e,h },
C={ e,f,h,k }, U={ a,b,c,d,e,f,h,k }, F=(U\A)∪(A∩(B∪C)).

Решение:

$F=(\{a,b,c,d,e,f,h,k\}\setminus\{a,b,c,k\})\cup(\{a,b,c,k\}\cap(\{b,d,e,h\}\cup$
$\cup\{e,f,h,k\}))=$
$=\{d,e,f,h\}\cup(\{a,b,c,k\}\cap\{b,d,e,f,h,k\})=\{d,e,f,h\}\cup\{b,k\}=$
$=\{b,d,e,f,h,k\}$.

№ 1.35

Упростить:

1) $[((A\cup C)\cap(B\cup C))\cup(B\cap A)]\cap A\cap\overline{C}$.

2) $[((A\cap B)\cup(C\cap A))\cap\ \overline{C}\ ]\cup(U\setminus\overline{A}\,)$.

Решение:

Упрощение осуществляется применением свойств операций над множествами.

1) $[((A\cup C)\cap(B\cup C))\cup(B\cap A)]\cap A\cap\overline{C}=(C\cup(A\cap B)\cup(B\cap A))\cap$

$\cap A\cap\ \overline{C}=(C\cup(A\cap B))\cap\ \cap A\cap\overline{C}=$

$=(A\cap\overline{C}\ \cap C)\cup((A\cap B)\cap A\cap\overline{C}\ )=(A\cap\varnothing)\cup(A\cap A\cap\overline{C}\ \cap B)=A\cap\overline{C}\ \cap B.$

2) $[((A\cap B)\cup(C\cap A))\cap\ \overline{C}\ ]\cup(U\setminus\overline{A}\,)=((A\cap(B\cup C))\cap$

$\cap\ \overline{C}\ )\cup(U\cap A)=[A\cap((B\cap\overline{C}\ )\cup(C\cap\overline{C}\ ))]\cup A=A\cap B\cap\ \overline{C}\ )\cup A=A.$

№ 1.36

Осуществить операции над множествами, если A={1,2,3,4}, B={1,4}, C={1,3,5}, U={1,2,3,4,5}:

1) $A\cup(B\cap C)$
2) $\underline{A\cap(}B\cup C)$
3) $A\cup B$
4) $\underline{A}\cup(B\setminus\underline{C)}$
5) $A\cap(B\cup C)$

Решение:

Опр. Множество – это любая определенная совокупность объектов.

Опр. Объекты, из которых состоит множество, называются элементами множества, которые отличаются друг от друга.

Объединением A и B называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат этим множествам, в данном случае у нас вместо B - выражение в скобках.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее только из элементов, принадлежащих и A, и B, у нас вместо A – B, B – C (выражение в скобках):

1) $A\cup(B\cap C)$ = {1,2,3,4}$\cup$ ({1,4}$\cap${1,3,5}) = {1,2,3,4}

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее только из элементов, принадлежащих и A, и B, у нас вместо B - выражение в скобках:

Объединением А и В называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат этим множествам, в данном случае у нас вместо А – В, В – С (выражение в скобках):

2) $A\cap (B\cup C) = \{1,2,3,4\} \cap (\{1,4\}\cup\{1,3,5\}) = \{1,3,4\}$

В данном выражении было использовано свойство операций над множествами – это закон де Моргана для объединения, затем определение дополнения до U (множество элементов, не принадлежащих А но принадлежащих U, $\overline{A} = U\backslash A$):

3) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap \overline{B} = (U\backslash A) \cap (U\backslash B) = (\{1,2,3,4,5\}\backslash\{1,2,3,4\}) \cap$
$\cap(\{1,2,3,4,5\}\backslash\{1,4\}) = \{5\}$

В данном случае были использованы определения объединения (множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат этим множествам, в данном случае у нас вместо В выражение в скобках) и разности (множество всех тех и только тех элементов А, которые не содержатся в В, в данном случае вместо А – В, В – С (выражение в скобках)):

4) $A\cup (B\backslash C) = \{1,2,3,4\}\cup (\{1,4\}\backslash\{1,3,5\}) = \{1,2,3,4\}\cup\{4\} =$
$\{1,2,3,4\}$

В данном случае было использовано определение дополнения (дополнением до U ($\cup$) называется множество элементов, не принадлежащих А, но принадлежащих U), пересечения (пересечением множеств А и В называется множество, состоящее только из элементов, принадлежащих и А, и В) и объединения (объединением А и В называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат этим множествам):

5) $\overline{A}\cap (B\cup\overline{C}) = (U\backslash A) \cap (B \cup (U\backslash C)) =$
$(\{1,2,3,4,5\}\backslash\{1,2,3,4\}) \cap \cap(\{1,4\}\cup (\{1,2,3,4,5\}\backslash\{1,3,5\}))$
$=$
$= \{5\} \quad \{1,2,4\} = O$

№ 1.37

Упростить следующие выражения:

1) $(A\cup B) \cap (A\cup C)$
2) $(A\cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$
3) $(A \cap B)U(A\cap \overline{C})$

Решение:

Опр. Множество – это любая определенная совокупность объектов.
Опр. Объекты, из которых состоит множество, называются элементами множества, которые отличаются друг от друга.

В данном случае было использовано свойство операций над множествами дистрибутивность:

1) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

В данном случае было использовано свойство операций над множествами дистрибутивность:

2) $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B \cap (A \cup \overline{A}) = B \cap U = B$

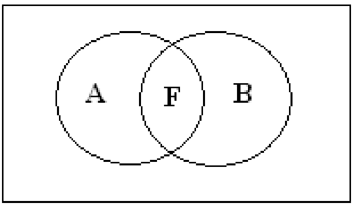
В данном случае было использовано свойство операций над множествами дистрибутивность:

3) $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$.

№ 1.38

Пусть универсальное множество U состоит из целых чисел. Из каких элементов состоит множество A, если $F=A \cap B$, B состоит из вида чисел 5n, F состоит из вида чисел 35n.

Решение:



Множество A состоит из чисел вида 7n.

№1.39

Множество A состоит из чисел, кратных 3. Множество B – из чисел, заканчивающихся на цифру «2». Множество C – из чисел, кратных 8.

Из каких чисел состоят множества:

а) $A \cap B \cap C$

б) $(A \cap B) \setminus C$

в) $(A \cap B) \cup C$?

Решение:

а) Из чисел, заканчивающихся на «2» и кратных 24.

б) Из чисел, кратных 3 и заканчивающихся на «2», кроме чисел, кратных 8.

в) Из чисел, кратных 3 и заканчивающихся на «2», или кратных 8.

Диаграммы Эйлера-Венна

№ 1.40

Доказать следующие утверждения и изобразить с помощью ДВ следующие множества:

1) $(C \setminus A) \setminus B = \overline{C} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$
2) $\overline{A} \cup B = (\overline{A \setminus B})$
3) $(B \setminus A) \cap C = (B \cap C) \setminus A$
4) $(C \setminus A) \cap (C \setminus B) = C \cap (\overline{A \cup B})$

Решение:

Опр. Множество – это любая определенная совокупность объектов.

Опр. Объекты, из которых состоит множество, называются элементами множества, которые отличаются друг от друга.

Определим произвольно у каждого множества элементы:
A = {1,2}, B = {3,4}, C = {5,6}, U = {1,2,3,4,5,6}

Затем у правой и у левой части выражения будем находить их значения и сравнивать ответы, если они равны, то данное утверждение правильное. Также будем к каждой части рисовать ДВ.

Опр. Объединением A и B называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат этим множествам.

Опр. Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее только из элементов, принадлежащих и A, и B.

Опр. Дополнение до U (A) называется множество элементов, не принадлежащих A, но принадлежащих U.

Опр. Разностью множеств A и B называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся в B.

В первом случае были использованы определения разности, пересечения и дополнения (см. выше):

Опр. Диаграмма Венна (ДВ) – это геометрическое представление множеств.

Для построения ДВ используем схему:

1). Сначала нарисуем общую диаграмму, т.к. все множества по условию могут пересекаться.

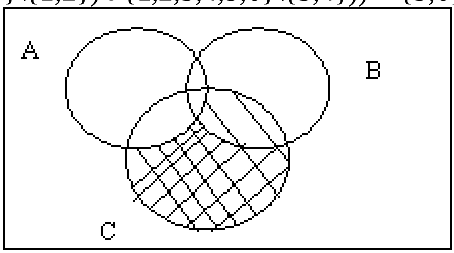
2). Заштрихуем линиями в разных направлениях операции, представленные выражением или условием задачи или при решении.

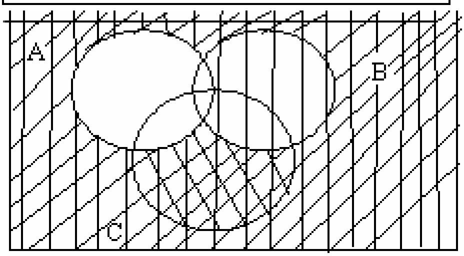
3). Скопируем эту диаграмму, оставив только изображения множеств и полученную двойную штриховку.

1) А) $(C\backslash A)\backslash B = (\{5,6\}\backslash\{1,2\})\backslash\{3,4\} = \{5,6\}$

Б) $\overline{C} \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = C \cap ((U\backslash A)U(U\backslash B) = \{5,6\}$

$((\{1,2,3,4,5,6\}\backslash\{1,2\}) \cup \{1,2,3,4,5,6\}\backslash\{3,4\})) = \{5,6\}$





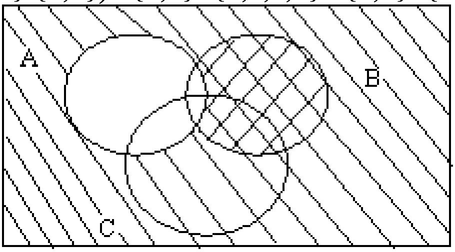
В этом случае мы использовали определение дополнения (см. выше). В Б) мы с помощью ряда преобразований привели данное выражение к А): сначала использовали выражение для разности (свойство операций над множествами), затем свойство инволютивность, поэтому ДВ будет такой же и для Б) мы не стали рисовать.

2) А) $\overline{A} \cup B = (U\backslash A) \cup B =$

$(\{1,2,3,4,5,6\}\backslash\{1,2\}) \cup \{3,4\} = \{3,4,5,6\} \cup \{3,4\} = \{3,4,5,6\}$

Б) $(\overline{A \setminus B}) = (\overline{A \cap \overline{B}}) = (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}})$ = A∪B= $(U \setminus A) \cup B$ =

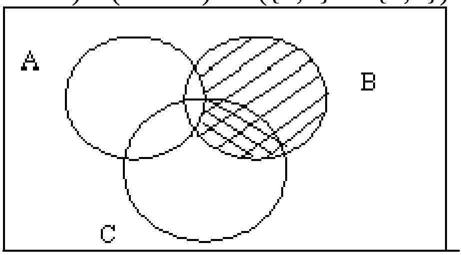
=({1,2,3,4,5,6}\{1,2})∪{3,4}={3,4,5,6}∪{3,4}={3,4,5,6}

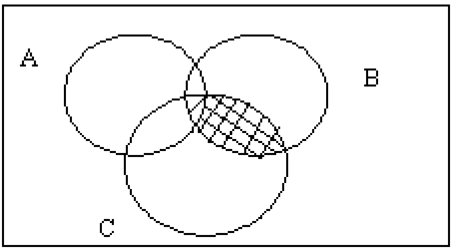


В следующем случае мы использовали такие определения: разность, пересечение (см. выше). В данном случае в результате получается пустое множество, т.е. пересечения B с C нет, но мы показали это для ясности на ДВ.

3) А) (B\A) ∩ C = ({3,4}\{1,2}) ∩ {5,6}= {3,4} ∩ {5,6}= ∅

Б) (B ∩ C)\A=({3,4} ∩ {5,6})\{1,2}=∅

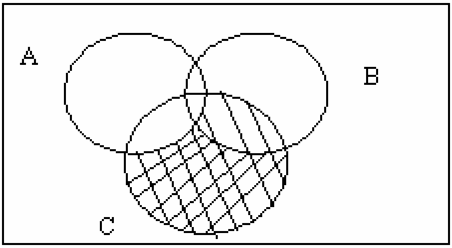


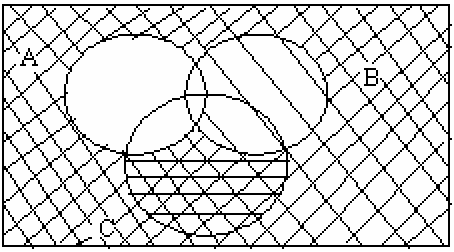


Здесь мы использовали такие определения, как разность, объединение, дополнение (см. выше) и другие свойства операций над множествами – это дистрибутивность и закон де Моргана

4) А) (C\A) ∩ (C\B) = C \ (AUB) = {5,6} \ ({1,2}U{3,4})={5,6}

Б) $C \cap (\overline{A \cup B}) = C \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = C \cap ((U \backslash A) \cap (U \backslash B)) =$
$= \{5,6\} \cap ((\{1,2,3,4,5,6\} \backslash \{1,2\}) \cap (\{1,2,3,4,5,6\} \backslash$
$\backslash \{3,4\}) = \{5,6\}$





№ 1.41

Решить следующие выражения и изобразить их на диаграммах Эйлера-Венна. U={ a,b,c,d,e,f }, A={ a,c,d,f }, B={ a,b,e,f }, C={b,c,d,e }.

1)$((U \backslash A) \cap C) \cup B$.

2)$(A \cup C) \cap B$.

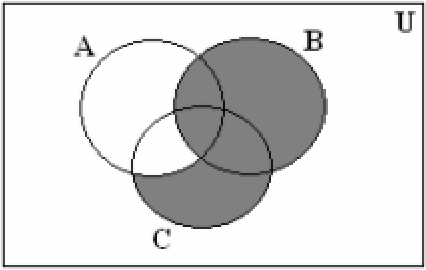
3)$(A \cup C) \backslash B$.

4)$(A \backslash B) \cup C$.

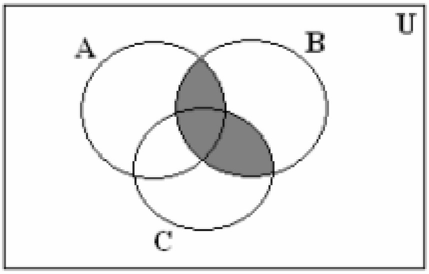
Решение:

Диаграмма Эйлера-Венна – это геометрическое представление множеств.

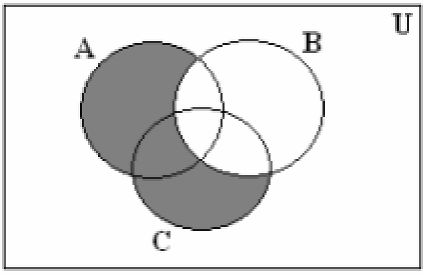
1) $((U \backslash A) \cap C) \cup B = ((\{a,b,c,d,e,f\} \backslash \{a,c,d,f\}) \cap \{b,c,d,e\}) \cup$
$\cup \{a,b,e,f\} = (\{b,e\} \cap \{b,c,d,e\}) \cup \{a,b,e,f\} = \{b,e\} \cup \{a,b,e,f\} =$
$= \{a,b,e,f\}$.

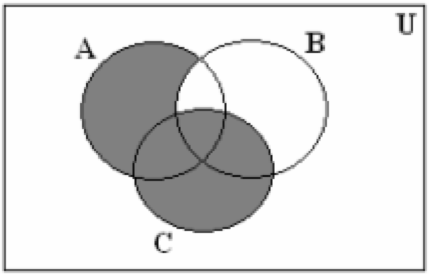


2) $(A\cup C)\cap B=(\{a,c,d,f\}\cup\{b,c,d,e\})\cap\{a,b,e,f\}=\{a,b,c,d,e,f\}\cap$
$\cap\{a,b,e,f\}=\{a,b,e,f\}$.



3)$(A\cup C)\setminus B=(\{a,c,d,f\}\cup\{b,c,d,e\})\setminus\{a,b,e,f\}=\{a,b,c,d,e,f\}\setminus\{$
$a,b,e,f\}==\{c,d\}$.



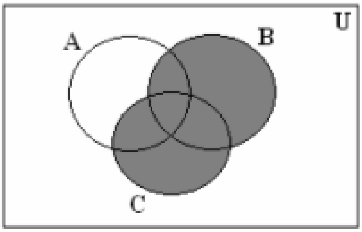


4) $(A\setminus B)\cup C=(\{a,c,d,f\}\setminus\{a,b,e,f\})\cup\{b,c,d,e\}=\{c,d\}\cup\{b,c,d,e\}=$
$=\{b,c,d,e\}$.

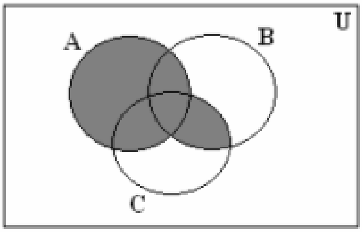
№ 1.42

По изображениям на диаграммах Эйлера-Венна составить и решить выражения, если
$U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, $A=\{a,c,e,f,g,h\}$, $B=\{b,c,d,e,f\}$, $C=\{a,d,f,h\}$.

1



2



Решение:

1) $B\cup C=\{b,c,d,e,f\}\cup\{a,d,f,h\}=\{a,b,c,d,e,f,h\}$.

2) $A\cup(B\cap C)=\{a,c,e,f,g,h\}\cup(\{b,c,d,e,f\}\cap\{a,d,f,h\}=$
$=\{a,c,e,f,g,h\}\cup\{d,f\}=\{a,c,d,e,f,g,h\}$.

3) $(B\cap C)\setminus A=(\{b,c,d,e,f\}\cap\{a,d,f,h\})\setminus\{a,c,e,f,g,h\}=\{d,f\}\setminus$
$\setminus\{a,c,e,f,g,h\}=\{d\}$.

4) $(B\cup C)\cap A=(\{b,c,d,e,f\}\cap\{a,d,f,h\})\cap\{a,c,e,f,g,h\}=\{a,b,c,d,e,f,h\}\cap\cap\{a,c,e,f,g,h\}=\{a,c,e,f,h\}$.

5) $((A\cap C)\cup B)\cap(A\cup C)=((\{a,c,e,f,g,h\}\cap\{a,d,f,h\})\cup\{b,c,d,e,f\})\cap(\{a,c,e,f,g,h\}\cup\{a,d,f,h\})=(\{a,f,h\}\cup\{b,c,d,e,f\})\cap\{a,c,d,e,f,g,h\}=\{a,b,c,d,e,f,h\}\cap\{a,c,d,e,f,g,h\}==\{a,c,d,e,f,h\}$.

Или

$(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)=(\{a,c,e,f,g,h\}\cap\{b,c,d,e,f\})\cup$
$\cup(\{a,c,e,f,g,h\}\cap\{a,d,f,h\})\cup(\{b,c,d,e,f\}\cap\{a,d,f,h\})=$
$=\{c,e,f\}\cup\{a,f,h\}\cup\{d,f\}=\{a,c,d,e,f,h\}$.

№ 1.43

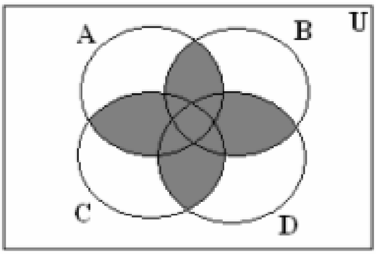
Доказать следующие утверждения с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

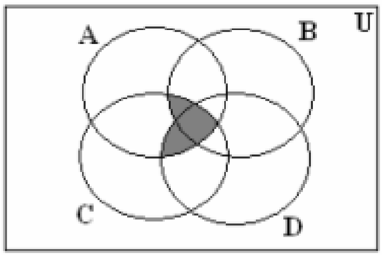
1) $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap D)\cup(C\cap D)=((A\cup C)\cap(B\cup D))\cup((A\cup B)\cap\cap(C\cup D))$.

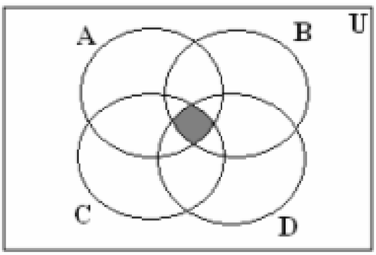
2) $A\cap B\cap C\cap D=(A\cap D)\setminus((B\setminus C)\cup(C\setminus B))$.

3) $(C\cap D)\cap((A\cap D\cap C)\cup(A\cap B\cap C))=(A\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap D\cap C)\cup\cup(A\cap B\cap C)$.

Решение: *для обеих частей нарисуем один график (ДВ совпадают).*



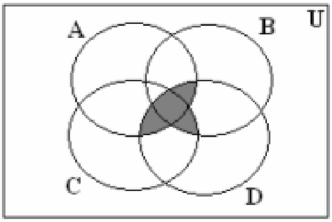




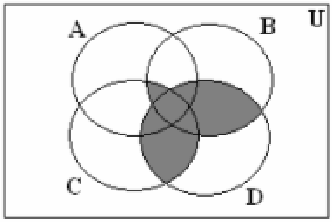
№ 1.44

По данным диаграммам Эйлера-Венна составить несколько выражений.

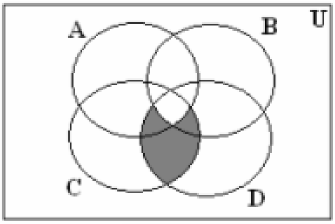
1



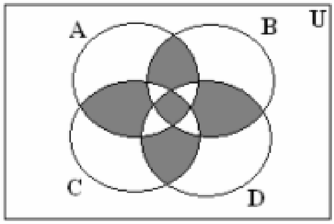
2



3



4



Решение: *допустимо, что существуют еще решения, которые здесь не указаны.*

1) $(A\cap D)\cup(B\cap C\cap D)$ *или* $(A\cap D\cap B)\cup(A\cap D\cap C)\cup(B\cap C\cap D)$ . . .

2) $(C\cap B)\cup((C\cup B)\cap D)$ *или* $(C\cap B)\cup(B\cap D)\cup(C\cap D)$ *или* $((C\cup B)\cap D)\cup((C\cap B)\setminus D)$ . . .

3) $(C\cap D)\setminus(A\cap C\cap D\cap B)$ *или* $((C\cap D)\setminus(A\cup B))\cup((B\cap C)\setminus A)\cup((A\cap D)\setminus B)$ . . .

4) $((B\cap D)\setminus(A\cup C))\cup((A\cap B)\setminus(C\cup D))\cup((A\cap C)\setminus(B\cup D))\cup((C\cap D)\setminus(A\cup B))\cup(A\cap B\cap C\cap D)$ *или*

$((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(C\cap D)\cup(D\cap B))\setminus$
$\setminus[\,((A\cap D)\setminus C)\cup((A\cap D)\setminus B)\cup((C\cap B)\setminus A)\cup((C\cap B)\setminus D)\,]$ . . .

№ 1.44

A={a,b,c}, B={a,c,d}Доказать следующие утверждения и изобразить с помощью диаграмм Эйлера-Венна следующие множества:

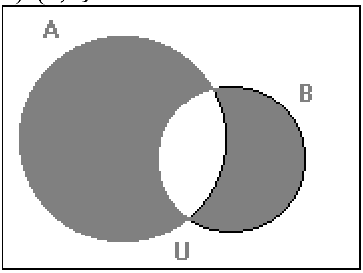
а) $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$

б) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$

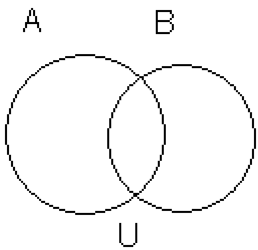
в) A\B=A $\cap$ $\overline{B}$

Решение:

а) {a,c}



б) $\varnothing$



в) {b}

№ 1.45

В бильярдном зале всего находится множество U бильярдных шаров. На одном из столов находится множество A шаров. Из них множество B – красные, а множество C – потрескавшиеся. Охарактеризуйте данные множества (содержательный смысл и диаграмма Эйлера-Венна множества):

1)$U \backslash ((A \cap B) \cup C)$.

2)$U \backslash (\overline{A} \cap C)$.

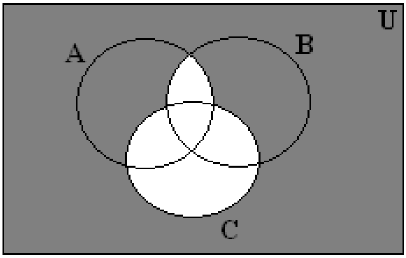
3)$A \cap C \cap B$.

4)$U \backslash (B \cap \overline{C})$.

5)$B \backslash (A \cap C)$.

Решение:

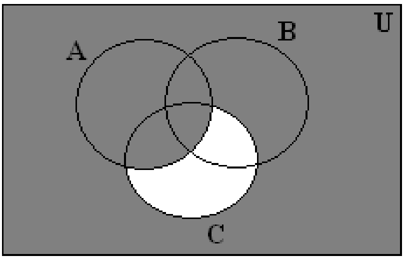
1)



U\((A∩B)∪C)

множество не красных шаров на данном столике и множество всех не потрескавшихся шаров в бильярдном зале.

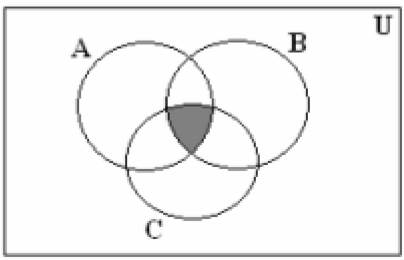
2)



U\($\overline{A}$ ∩C)

множество всех шаров, находящихся на данном столе и множество всех не потрескавшихся шаров в бильярдном зале.

3)

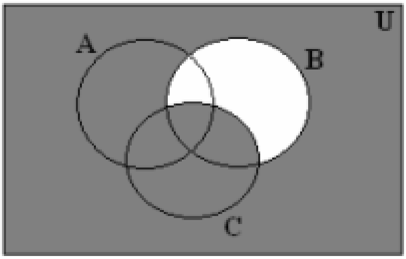


3) A∩C∩B

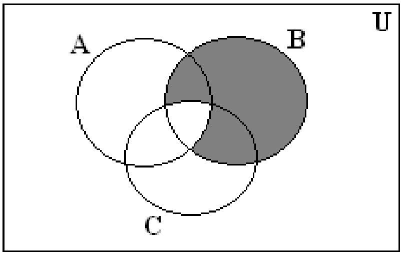
множество красных потрескавшихся шаров на данном бильярдном столе.

4) $U \backslash (B \cap \overline{C})$

множество всех шаров в зале, кроме красных не потрескавшихся.



5)



$B \backslash (A \cap C)$

множество всех красных шаров в бильярдном зале, кроме красных потрескавшихся находящихся на данном столе.

№ 1.46

А - множество нечетных чисел до 100. В - множество чисел, делящихся нацело на 3 до 100. Найти элементы множества С, принадлежащих пересечению данных множеств.

Решение:

Опр. Множество – это любая определенная совокупность объектов.

Опр. Объекты, из которых состоит множество, называются элементами множества, которые отличаются друг от друга.

Опр. ДВ – это геометрическое представление множеств.

Для построения ДВ используем схему:

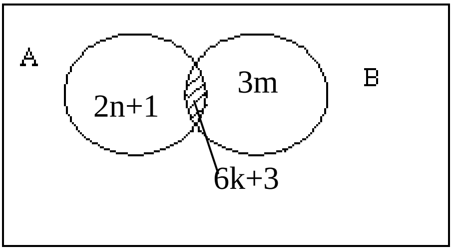
1). Сначала нарисуем общую диаграмму, т.к. все множества по условию могут пересекаться.
2). Заштрихуем линиями в разных направлениях операции, представленные выражением или условием задачи или при решении.
3). Скопируем эту диаграмму, оставив только изображения множеств и полученную двойную штриховку.

$A=\{x,\ x = \{2n+1\}\}\ n=\overline{0,49}$

$B=\{y,\ y = \{3m\}\}\ m=\overline{1,33}$

Если $Z \in C$ равное $A \cap B$, то $Z=2n+1=3m$.

Отсюда,
$m=(2n+1)/3$, целое число, поэтому условие выполняется при $n=3k+1$. Тогда $m=2k+1$, где $k=\overline{0,16}$. пусть $k = 0$, тогда $n=1$, $m=1$ и $z=3$ принадлежит и A, и B. Отсюда $C=\{z,\ z=6k+3\}$, где $k=\overline{0,16}$.



2. Отношения и операции

Задание отношений

№ 2.1

Пусть M равно {2,5,-7,9,12,-15}. Составить матрицы и списки пар отношений $R_1, R_2 \in M^2$.

Если R_1 – «иметь сумму больше десяти», R_2 – «иметь разность больше нуля».

Решение:

Список пар – это перечисление пар, для которых это отношение выполняется. Матрица – это квадратная матрица, по вертикали и горизонтали которой перечисляются элементы

множества и в которой элемент C_{ij}, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца, равен единице, если между соответствующими элементами имеет место отношение R, или 0, если оно отсутствует.
R_1={ (2,9), (2,12), (5,9), (5,12), (9,9), (9,12), (12,12) }.
R_2={ (2,-7), (2,-15), (5,2), (5,-7), (5,-15), (-7,-15), (9,2), (9,5), (9,-7), (9,-15), (12,2), (12,5), (12,-7), (12,9), (12,-15) }.

№ 2.2

Пусть M={1,2,3,4,5,6,7}. Составить матрицы отношений R1, R2, R3⊆M*M, если R1 – «быть остатком от деления на 3», R2 – «в сумме давать 9», R3 – «произведение должно быть больше 7».

Решение:

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1	1	1
4	0	1	1	1	1	1	1
5	0	1	1	1	1	1	1
6	0	1	1	1	1	1	1
7	0	1	1	1	1	1	1

№ 2.3

Пусть M={1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Составить матрицу отношения R_1, $R_2 \subseteq$ M x M если

1. R_1 - «быть наибольшим простым множителем для четных чисел»(нельзя делить число на само себя и единиц).
2. R_2 - «быть наименьшим простым множителем для нечетных чисел» (нельзя делить число на само себя).

Решение:

Опр. Отношение – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества.

Опр. Бинарное отношение – используется для определения каких-то взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов в множестве M.

Отношения, определенные на конечных множествах, можно задать матрицей – бинарному отношению $R \subseteq MxM$, где $M=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ соответствует квадратная матрица порядка n, в которой элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца, равен 1, если между a_i и a_j имеет место отношение R, или нулю, если оно отсутствует.

Рассмотрим случай 1, где R означает «быть наибольшим простым множителем для четных чисел». Отношение задается так: R={(a,b), b/a, где a наибольший простой множитель (НПМ)}. Т.е., например, для b=8, b/a=8/2=4 8/4=2, т.е. получаем, что НПМ для 8 является 4, поэтому на пересечении 4 и 8 ставим 1.

1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рассмотрим случай 2, где R означает «быть наименьшим простым множителем для нечетных чисел». Отношение задается так: R={(a,b), b/a, где a наименьшим простой множитель (НПМ)}. Т.е., например, для b=9, b/a=9/3=3, т.е. получаем, что НПМ для 9 является3, поэтому на пересечении 3 и 9 ставим 1.

2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	3
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

№ 2.4

Составить матрицу отношений, заданных на системе множеств α(F), где F={ 1,2,3,4 }; R – «пересекаться с …».

Решение:

Матрица отношений – это квадратная матрица, по вертикали и горизонтали которой перечисляются элементы множества.

$\alpha(F)=\{ \{\varnothing\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\} \}.$

R	∅	*1*	*2*	*3*	*4*	*1,2*	*1,3*	*1,4*	*2,3*	*2,4*	*3,4*	*1,2,3*	*1,2,4*	*1,3,4*	*2,3,4*	*1,2,3,4*
∅	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*
2	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*
3	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*
4	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
1,2	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
1,3	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
1,4	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
2,3	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
2,4	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
3,4	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
1,2,3	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
1,2,4	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
1,3,4	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
2,3,4	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
1,2,3,4	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

№ 2.5

Пусть M={1,2,3,4,5,6,7}. Составить матрицы отношений R_1, R_2, $R_3 \subseteq M \times M$, если

R_1 – «иметь один и тот же остаток от деления на 7»;

R_2 –«быть равным»;

R_3 – «быть не меньше»

Решение: R_1 -«иметь один и тот же остаток от деления на 7»

R_1	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	1

На пересечении i-ой строки и j-ого столбца ставим «1», если отношение R_1 выполняется и «0» - если невыполняется.

Например: $a_1=1$; $в_2=2$

$$\frac{1}{7} \neq \frac{2}{7} =\rangle C_{1,2} = 0$$

Аналогично R_2 и R_3:

R_3	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0
5	1	1	1	1	1	0	0
6	1	1	1	1	1	1	0
7	1	1	1	1	1	1	1

R_2	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	1

№ 2.6

Пусть M={1,2,3,4,5,6,7}. Составить матрицу отношения R, если R={(а,в) (а+1-в) – четное}

Решение:

R	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4	1	0	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	1	0	1	0	1	0	1
7	0	1	0	1	0	1	0

Замечание: условно полагаем, что 0 – четное число

№ 2.7

Пусть M={1,2,3,4,5,6,7}. Составить матрицу отношения R, если:

R={(а,в) : (а+в) – нечетное}

Решение:

R	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	1	0	1	0	1	0	1
7	0	1	0	1	0	1	0

№ 2.8

Пусть M={1,2,3,4,5,6}. Составить матрицу отношения R_1, R_2 $\subseteq$ M x M если

1. R_1 {(a, b): a+b делитель a*b}.

2. R_2 {(a,b): b/a делитель a+b}.

Решение:

Опр. Отношение – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества.

Опр. Бинарное отношение – используется для определения каких-то взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов в множестве M.

Отношения, определенные на конечных множествах, можно задать матрицей – бинарному отношению $R \subseteq M x M$, где $M=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ соответствует квадратная матрица порядка n, в которой элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i строки и j столбца, равен 1, если между a_i b a_j имеет место отношение R, или нулю, если оно отсутствует.

Рассмотрим случай 1. R={(a,b): a*b/a+b}. Например, получаем a=2,b=2, тогда 2*2/2+2=1, т.е. у данного отношения получаем целый результат, значит, отношение выполняется. На пересечении 2 и2 ставим 1.

1.

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	1	0	0	1

2. Рассмотрим случай 1. R={(a,b): (a+b)/(b/a)}. Например, получаем a=1,b=2, тогда (2+2)/(2/2)=4, т.е. у данного отношения получаем целый результат, значит, отношение выполняется. На пересечении 1 и2 ставим 1.

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0	1
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

№ 2.9

Из данных примеров выбрать те, в которых выполняется данное отношение:

R_1 – «быть строго больше».

R_2 – «иметь четную сумму».

R_3 – «иметь общий четный делитель».

Примеры: (1,3), (2,5), (8,3), (9,5), (7,9), (3,4), (2,4), (5,5), (3,6), (7,3), (8,2), (3,9), (1,7), (2,6), (1,5).

Решение:

R_1={ (8,3), (9,5), (7,3), (8,2) }.

R_2={ (1,3), (9,5), (7,9), (5,5), (7,3), (8,2), (2,4), (3,9), (1,7), (2,6), (1,5) }.

R_3={ (2,4), (8,2), (2,6) }.

№ 2.10

Пусть А – алфавит (множество всех букв в русском алфавите). Задано множество М= {а, б, в,г,д,е,и,к,л} – подмножество множества А. Задать матрицей следующее отношение:

R= {(x,y) : x- согласная, y – гласная}

Решение:

По определению: $C_{I,J}=\begin{cases} 1, \text{ если } xRy; \\ 0 \text{ – в противном случае} \end{cases}$

Тогда имеем:

R	а	б	в	г	д	е	и	к	л
а	0	0	0	0	0	0	0	0	0
б	1	0	0	0	0	1	1	0	0
в	1	0	0	0	0	1	1	0	0
г	1	0	0	0	0	1	1	0	0
д	1	0	0	0	0	1	1	0	0
е	0	0	0	0	0	0	0	0	0
и	0	0	0	0	0	0	0	0	0
к	1	0	0	0	0	1	1	0	0
л	1	0	0	0	0	1	1	0	0

№ 2.12

Пусть M={1,2,3,4,5,6,7}. Составить матрицу отношения R, если: R={(а,в):(а+1) – делитель (а+в)}

Решение:

<table>
<tr><th>R</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="6" colspan="7">(а+1) – делитель (а+в) =⟩ - это значит, что $\left(\frac{a+в}{a+1}\right)$- целое число</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

№ 2.13

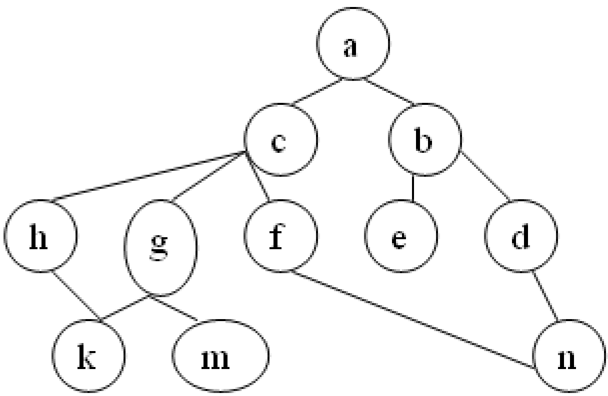
На рисунке представлено множество элементов. Задать списком пар отношения R_1, R_2, R_3, R_4. Если

R_1 – «быть внуком…».

R_2 – «быть двоюродными братьями».

R_3 – «быть прадедом…».

R_4 – «иметь общего сына».



Решение:

Список пар – это перечисление пар, для которых это отношение выполняется.

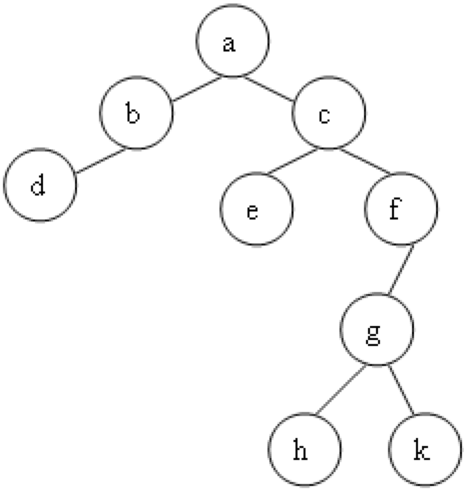
R_1={ (h,a), (g,a), (f,a), (e,a), (d,a), (n,b), (n,c), (m,c), (k,c) }.
R_2={ (f,e), (f,d), (g,e), (g,d), (h,e), (h,d), (k,m)}.
R_3={ (a,k), (a,m), (a,n) }.
R_4={ (h,g), (f,d) }.

№ 2.14

По данным отношениям R_1, R_2, R_3, R_4 составить структуру множества элементов. Если R_1 – «быть родными братьями», R_2 – «быть дедом…», R_3 – «быть дядей…», R_4 – быть прадедом…».

R_1={ (b,c), (e,f), (h,k) }.
R_2={ (a,d), (c,g), (f,h), (f,k), (a,f), (a,e) }.
R_3={ (c,d), (b,e), (b,f), (e,g) }.
R_4={ (a,g), (c,h), (c,k) }.

Решение:



№ 2.15

Привести пять примеров пар отношений, для которых выполняются все три отношения, указанные ниже:
R_1 – «иметь общий нечетный делитель, лежащий в интервале (1,10)».
R_2 – «иметь четную сумму, лежащую в интервале (0,30)».
R_3 – «2a – делитель (a+b), если R={(a,b):a,b∈M}».

Решение:

R_1, R_2, R_3={ (3,15), (7,21), (3,9), (9,9), (3,3), (5,5) }.

Декартовое произведение, функции, правые и левые области отношений

№ 2.16

Выписать все элементы декартового произведения множеств А и В, если

А={а,в,с,d,е}

В={1,2,3}

Решение:

Декартовое произведение множеств А и В представляет собой множество всевозможных упорядоченных пар, в которых первые элементы $\in$ А, а вторые – В:

А х В = {(а,1), (а,2), (а,3), (в,1), (в,2), (в,3), (с,1), (с,2), (с,3), (d,1), (d,2), (d,3), (е,1), (е,2), (е,3)}

№2.17

Найти декартовое произведение множеств А и В, если А={ a,b,d },
B={ f,d,e }.

Решение:

Декартово произведение множеств А и В представляет собой множество всевозможных упорядоченных пар, в которых первые элементы принадлежат множеству А, а вторые элементы принадлежат множеству В, следовательно,
$A\times B$*={ (a,f), (a,d), (a,e), (b,f), (b,d), (b,e), (d,f), (d,d), (d,e) }.*

№2.18

Найти все элементы множества F, если A={ a,b,c,k },
B={ b,d,e,h },
C={ e,f,h,k }, U={ a,b,c,d,e,f,h,k }, F=(U\A)$\cup$(A$\cap$(B$\cup$C)).

Решение:

$F=(\{a,b,c,d,e,f,h,k\}\backslash\{a,b,c,k\})\cup(\{a,b,c,k\}\cap(\{b,d,e,h\}\cup\{e,f,h,k\}))=\{d,e,f,h\}\cup(\{a,b,c,k\}\cap\cap\{b,d,e,f,h,k\})=\{d,e,f,h\}\cup\{b,k\}=\{b,d,e,f,h,k\}$.

№ 2.19

Выписать все элементы декартового произведения множество А и В, если:

A={a,в,c};   B={1,2,3,4,5}

Решение:

декартовое произведение множеств A и B представляет собой множество всевозможных упорядоченных пар, в которых первые элементы $\in$ A, вторые – B.

A x B = {(a,1), (a,2), (a,3), (a,4), (a,5), (в,1), (в,2), (в,3), (в,4), (в,5), (c,1), (c,2), (c,3), (c,4), (c,5)}.

№ 2.20

Выписать все элементы декартового произведения множество AxBxC, если:

A={1,2},   B={a,b,c},   C={k,l,m}.

Решение: декартовым произведением AxBxC называется множество:

$AxBxC=\{(m_A, m_B, m_C) / m_A \in A, m_B \in B, m_C \in C\}$

Элементами декартового произведения AxBxC являются всевозможные последовательности, каждая из которых состоит из 3-х элементов, причем первый элемент $\in$ множеству M_A, второй – M_B, третий – M_C.

Имеем:

AxBxC={(1,a,k), (1,a,l), (1,a,m), (1,в,k), (1,в,l), (1,в,m), (1,c,k), (1,c,l), (1,c,m), (2,a,k), (2,a,l), (2,a,m), (2,в,k), (2,в,l), (2,в,m), (2,c,k), (2,c,l), (2,c,m)}

№ 2.21

Выписать все элементы декартового произведения множеств A и B, если A={1,2,3}, B={a,c,e}

Решение:

A*B={(1;a),(1;c),(1;e),(2;a),(2;c),(2;e),(3;a),(3;c),(3;e)}

№ 2.22

Пользуясь методом математической дедукции написать все элементы декартового произведения множеств M_1 x M_2 x M_3 … x x $M_n = \prod_{i=1}^{n} M_i$, порождающей процедурой.

Решение: Элементами декартового произведения M_1 x M_2 x M_3 … x M_n являются всевозможные последовательности, каждая из которых состоит из n элементов, причем первый элемент принадлежит множеству M_1 , второй – множеству M_2, n-ый элемент – множеству M_n. Таким образом, имеем:

$M=\{(m_{i1}, m_{i2}, \ldots m_{in})/m_{i1} \in M_1, m_{i2} \in M_2, \ldots, m_{in} \in M_n\}$, где $i=\overline{1, n}$

№ 2.23

Выписать все элементы множества M^2, если M={a,в,c}

Решение: M^2 - вторая степень множества M.

По определению имеем:

M^2=M x M ={a,в,c} x {a,в,c}={(a,a), (a,в), (a,c), (в,a),(в,в), (в,c), (c,a), (c,в), (c,c)}.

M^2 часто также называют декартовым квадратом множества M.

№ 2.24

Найти правую и левую область отношения:

R={(1,2), (2,1), (3,1), (1,3), (3,5)}

Решение: Левой областью $Д_l$ отношения R называется множество всех первых элементов пар, принадлежащих R, правой областью $Д_r$ – множество всех вторых элементов этих же пар.

Следовательно, имеем:

$Д_l$={1,2,3}, $Д_r$={2,1,3,5}

№ 2.25

Найти правую и левую область отношения

R={(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)}

Решение:

$Д_r$={2,3,1), $д_l$={1,2,3}

№ 2.26

Найти правую и левую область отношения:

R={(a,b), (c,d), (e,f)}

Решение:

$Д_R$={в,d,f}, $Д_l$= {a,c,e}

№ 2.27

Найти правую и левую область отношения:

R={(1,a), (2,в),(3,c),(4,d), (5,f)}

Решение:

$Д_R$={a,в,c,d,f}; $Д_L$={1,2,3,4,5}

№ 2.28

Найти правую и левую область отношения:

R={(a,1), (2,e), (c,3), (g,9), (7,e), (5,k)}

Решение: [см. № 2.11]

$Д_R$ ={1,e,3,9,k}; $Д_l$={a,2,c,g,7,5}

Следовательно, имеем в областях отношения R двухсортные множества (множества областей состоят как из цифр, так и из букв).

№ 2.29

Является ли отношение

R= {(a,2), (в,3), (c,4), (d,5)},

определенное на декартовом произведении множеств:

A={a,в,c,d}, B={2,3,4,5} функцией?

Решение: Поскольку каждому элементу множества A соответствует единственный элемент множества B, то можно утверждать, что данное отношение является функцией.

№ 2.30

Является ли отношение R:

R= {2,a), (1,a), (3,в), (4,в), (5,c),

определенное на декартовом произведении множеств:

A={1,2,3,4,5}, B={a,в,c} функцией?

Решение: Да, т.к. каждому элементу из множества A соответствует единственный элемент множества B, то можно утверждать, что данное отношение является функцией (если множество A является областью определения функции, а множество B – областью значений, но не наоборот).

№ 2.31

Является ли отношение R:

R={(1,a), (1,в), (3,d), (5,c), (5,d),
определенное на декартовом произведении множеств

A={1,3,5}, B={a,в,c,d} функцией?

Решение: Нет, т.к. существуют такие элементы множества А, которым соответствуют более одного элемента из множества В: например, (1,a) и (1,в); (5,c) и (5, d).

№ 2.32

Пусть отношение R задано на декартовом произведении множеств Р и N, где Р- множество всех паспортов некоторой страны, а N – множество всех номеров этих паспортов, служащих для идентификации.

Является ли отношение R функцией?

Ответ: Данное отношение является функцией, т.к. каждому паспорту однозначно соответствует его идентификационный номер.

№ 2.33

Пусть множество R задано на декартовом произведении множеств К и Р: КхР, где К – множество ключевых слов для поиска в Интернете, а Р – множество Web-страниц. Пара (x,y) принадлежит R, только если ключевое слово x содержится на странице y. Является ли R функцией?

Ответ: Не является, т.к. одно и то же ключевое слово может содержаться на различных Web-страницах $=\rangle$ условие однозначности не выполняется.

№ 2.34

В водоёме два пескаря, два карася и одна щука. Зная, что карась и щука – хищные рыбы (щука может съесть карася), выяснить бинарное отношение «R – быть съеденным» (т.е. быть пищей) с помощью матрицы.

Решение:

Опр. Отношение – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества.

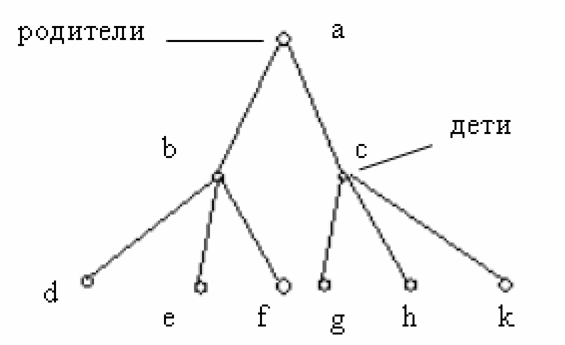
Опр. Бинарное отношение – используется для определения каких-то взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов в множестве М.

Т.к. пескарь не является хищной рыбой, он себя не ест, и караси и щуки тоже не едят себя, но щука ест карася, а карась щуку есть не может, то получаем матрицу бинарного отношения.

	пескарь	пескарь	карась	карась	щука
пескарь	0	0	1	1	1
пескарь	0	0	1	1	1
карась	0	0	0	0	1
карась	0	0	0	0	1
щука	0	0	0	0	0

№ 2.35

Для указанных ниже отношений привести примеры пар, для которых выполняются отношения. Отношения заданы на множестве элементов структуры гносеологического дерева.



Следующие отношения:

R_1 – «быть родителем»   a

R_2 – «быть внуком»

R_3 – «быть сыном (дочерью) »

R_4 – «быть братом или сестрой»

b   c

R_5 – «быть дядей или тетей»

R_6 – «быть двоюродными сестрами или братьями»

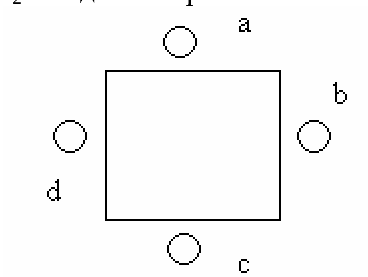
Решение:

Опр. Отношение – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества.
Опр. Бинарное отношение – используется для определения каких-то взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов в множестве М.
Опр. Задать отношение списком пар означает перечислить все пары элементов, для которых это отношение выполняется.

1. R_1 = {(a, b), (a, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, g), (c, h), (c, k)}
2. R_2 = {(d, a), (e, a), (f, a), (g, a), (h, a), (k, a)}
3. R_3 = {(b, a), (c, a), (d, b), (e, b), (f, b), (g, c), (h, c), (k, c)}
4. R_4 = {(b, c), (d, e),(d, f), (e, f), (e, d), (f, d), (f, e), (g, h), (g, k), (h, g), (h, k), (k, g), k, h) }
5. R_5 = {(b, g), (b, h),(b, k),(c, d),(c, e),(c, f)}
6. R_6 = {(d, g), (d, h),(d, k),(e, g),(e, h),(e, k),(f, g), (f, h),(f, k), (g, d), (g, e), (g, f), (h, d), (h, e), (h, f), (k, d), (k, e), k, f)}

№ 2.36

Друзья сидят за квадратными столом. Привести примеры пар, для которых следующие отношения выполняются:
R_1 – быть соседом
R_2 – сидеть напротив



Решение:
Опр. Отношение – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества.
Опр. Бинарное отношение – используется для определения каких-то взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов в множестве М.
Опр. Задать отношение списком пар означает перечислить все пары элементов, для которых это отношение выполняется.

1. $R_1 = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (d, c), (c, d), (a, d), (d, a)\}$
2. $R_2 = \{(a, c), (c, a), (b, d), (d, b)\}$

Свойства отношений

№ 2.37

Каковы свойства отношений, заданных: на множестве людей: $R = \{(a,b)$: a – сын $b\}$?

Решение:

1) Не рефлексивно, антирефлексивно, так как ни для каких a не выполняется: a – сын a;

2) Не симметрично, антисимметрично, поскольку ни для каких $a \neq b$ не выполняется: a – сын b и b – сын a;

3) Не транзитивно, так как если a – сын b и b сын – c,то a – не сын c.

№ 2.38

Каковы свойства отношений, заданных: на множестве людей: $R = \{(a,b)$: a живет в одном горде с $b\}$?

Решение:

1) Рефлексивно, не антирефлексивно, так как aRa для всех a;

2) Симметрично, поскольку для любых a, b, если aRb, то bRa;

3) Не антисимметрично, так имеет место aRb и bRa для $a \neq b$;

4) Транзитивно, поскольку для всех a, b, c, если aRb и bRc, то aRc.

№ 2.39

Каковы свойства отношений, заданных: на множестве людей:
$R = \{(a,b)$: a – брат $b\}$?

Решение:

1) Не рефлексивно, антирефлексивно из-за очевидного отсутствия aRa для всех a;

2) Не симметрично, так как в общем случае между братом a и сестрой b имеет место aRb, но не bRa;

3) Не антисимметрично, так как если a и b – братья, то aRb и bRa, но $a \neq b$;

4) Транзитивно, если называть братьями людей, имеющих общих родителей (отца и мать).

№ 2.40

Каковы свойства отношений, заданных на множестве точек окружности, лежащих на дуге этой окружности. R- быть соседней точкой.

Решение:

Опр. Свойства бинарных отношений:

а). R – рефлексивно, если имеет место aRa для любого $a \in M$ (Например, отношение «жить в одном городе» - рефлексивно).

б). R – антирефлексивно, если ни для какого a, $a \in M$, не выполняется aRa. (Например, отношение «быть сыном» - антирефлексивно).

в). R – симметрично, если aRb влечет bRa (Например, отношение «работать на одной фирме» - симметрично).

г). R – антисимметрично, если aRb и bRa влечет a=b, т.е. ни для каких различающихся элементов a и b ($a \neq b$) не выполняется одновременно aRb и bRa.(Например, отношение «быть сыном», «быть начальником» - антисимметрично).

д). R – транзитивно, если aRb и bRc влечет aRc (например, «быть моложе», «быть братом» - транзитивно).

1. симметрично, т.е. aRb влечет bRa, т.е. a и b соседние точки.
2. не антисимметрично, т.к. aRb и bRa не влечет a=b, т.е. a и b не одни и те же точки.
3. не рефлексивно, т.к. aRa не может быть соседней точкой для самой себя.
4. антирефлексивно, т.к не может быть, чтобы он был сам себе соседом.
5. не транзитивно, т.к aRb и bRc не влечет за собой aRc, т.е. a и c не являются соседними точками.

№ 2.41

Пусть дано уравнение $y=x^2$. Каковы свойства отношения R – «являться решением уравнения», т.е xRy.

Решение:

Опр. Свойства бинарных отношений:

а). R – рефлексивно, если имеет место aRa для любого a∈
∈M (Например, отношение «жить в одном городе» - рефлексивно).

б). R – антирефлексивно, если ни для какого a, a∈M, не выполняется aRa. (Например, отношение «быть сыном» - антирефлексивно).

в). R – симметрично, если aRb влечет bRa (Например, отношение «работать на одной фирме» - симметрично).

г). R – антисимметрично, если aRb и bRa влечет a=b, т.е. ни для каких различающихся элементов a и b (a≠b) не выполняется одновременно aRb и bRa.(Например, отношение «быть сыном», «быть начальником» - антисимметрично).

д). R – транзитивно, если aRb и bRc влечет aRc (например, «быть моложе», «быть братом» - транзитивно).

1. не симметрично, т.к. xRy и yRx не будут иметь одинаковые корни.
2. не антисимметрично, т.к. xRy и yRx не влечет x=y.
3. не рефлексивно, т.к. xRx не имеет место в данном уравнении.
4. антирефлексивно, т.к. ни для какого x не выполняется xRx.
5. не транзитивно, т.к. xRy , yRf не влечет за собой xRf, т.е. может быть $f=y^3$.

№ 2.42

В водоёме плавают пескари и караси. Зная, что караси – хищные рыбы, выяснить свойства бинарного отношения R – «быть съеденным» (т.е. быть пищей).

Решение:

Опр. Свойством бинарного отношения являются:

а). R – рефлексивно, если имеет место aRa для любого a∈
∈M (Например, отношение «жить в одном городе» - рефлексивно).

б). R – антирефлексивно, если ни для какого a, a∈M, не выполняется aRa. (Например, отношение «быть сыном» - антирефлексивно).

в). R – симметрично, если aRb влечет bRa (Например, отношение «работать на одной фирме» - симметрично).

г). R – антисимметрично, если aRb и bRa влечет a=b, т.е. ни для каких различающихся элементов a и b ($a \neq b$) не выполняется одновременно aRb и bRa.(Например, отношение «быть сыном», «быть начальником» антисимметрично).

д). R – транзитивно, если aRb и bRc влечет aRc (например, «быть моложе», «быть братом» - транзитивно).

R={(a,b): b может съесть a }

1. не симметрично, т.к. aRb не влечет bRa, т.е. карась может съесть пескаря, а пескарь карася – нет.
2. антисимметрично, т.к aRb и bRa не влекут a=b, т.к., например, пескарь не может съесть пескаря.
3. не рефлексивно, т.к. aRa не выполняется, т.е. пескарь не может съесть пескаря.
4. антирефлексивно, т.к. aRa не выполняется.
5. не транзитивно, т.к. aRb и bRc, т.к. например, карась может съесть пескаря, а пескарь съест водоросли, а карась не может есть водоросли.

№ 2.43

Каковы свойства отношений, заданных на множестве действительных чисел. R – быть натуральным логарифмом, т.е. $a = \ln b$ ($b>1$ и $b \neq 0$).

Решение:

Опр. Свойства бинарных отношений:

а). R – рефлексивно, если имеет место aRa для любого $a \in$ $\in M$ (Например, отношение «жить в одном городе» - рефлексивно).

б). R – антирефлексивно, если ни для какого a, $a \in M$, не выполняется aRa. (Например, отношение «быть сыном» - антирефлексивно).

в). R – симметрично, если aRb влечет bRa (Например, отношение «работать на одной фирме» - симметрично).

г). R – антисимметрично, если aRb и bRa влечет a=b, т.е. ни для каких различающихся элементов a и b ($a \neq b$) не выполняется одновременно aRb и bRa.(Например, отношение «быть сыном», «быть начальником» антисимметрично).

д). R – транзитивно, если aRb и bRc влечет aRc (например, «быть моложе», «быть братом» - транзитивно).

1. не симметрично, т.к. для любого a и b a = ln b не влечет b = ln a.
2. не антисимметрично, т.к. aRb и bRa не влекут a=b, например, не выполняется одновременно 2=ln3 и 3=ln2.
3. не рефлексивно, т.к. aRa не выполняется, т.е. a $\sqrt[3]{c}$ ln a
4. антирефлексивно, т.к. aRa не выполняется.
5. транзитивно, т.к. aRb и bRc влечет aRc, a=ln b, b=ln c, то a=ln (ln c), например, если 2=lne^2 и $e^2 = \ln(e^{e^2})$, то

$$2 = \ln(\ln(e^{e^2})) = \ln(e^2 \cdot \ln e) = \ln e^2 + \ln(\ln e) = 2\ln e = 2 .$$

№ 2.44

Каковы свойства отношения R – быть кубом, т.е. b=a^3, заданного на множестве натуральных чисел?

Решение:

Опр. Свойства бинарных отношений:

а). R – рефлексивно, если имеет место aRa для любого a∈
∈M (Например, отношение «жить в одном городе» - рефлексивно).

б). R – антирефлексивно, если ни для какого a, a∈M, не выполняется aRa. (Например, отношение «быть сыном» - антирефлексивно).

в). R – симметрично, если aRb влечет bRa (Например, отношение «работать на одной фирме» - симметрично).

г). R – антисимметрично, если aRb и bRa влекут a=b, т.е. ни для каких различающихся элементов a и b (a≠b) не выполняется одновременно aRb и bRa.(Например, отношение «быть сыном», «быть начальником» антисимметрично).

д). R – транзитивно, если aRb и bRc влекут aRc (например, «быть моложе», «быть братом» - транзитивно).

1. не симметрично, т.к. b=a^3 не влечет a=b^3.
2. не антисимметрично, т.к. b=a^3 и a=b^3 не влекут a=b.
3. не рефлексивно, т.к. a≠a^3 .
4. антирефлексивно, т.к. aRa не выполняется, т.е. a≠a^3.

5. не транзитивно, т.к. $b = a^3$ и $c = b^3$ не влекут $c = a^3$, т.к. если $b = a^3$ и $c = b^3$, то $a^9=c$.

№ 2.45

Каковы свойства отношений, заданных на множестве натуральных чисел N, если R – «быть строго больше», то есть R={(a,b): a>b}.

Решение:

Свойства бинарных отношений:

1)R – рефлексивно, если имеет место aRa для любых $a \in M$.

2)R – антирефлексивно, если ни для каких $a \in M$ не выполняется aRa.

3)R – симметрично, если aRb влечет bRa.

4)R – антисимметрично, если aRb и bRa влекут b=a, то есть ни для каких различающихся элементов a и b не выполняется одновременно aRb и bRa.

5)R – транзитивно, если aRb и bRc влекут за собой aRc.

А) нерефлексивно, антирефлексивно, так как ни для какого $a \in N$ не выполняется a>a, например, не выполняется 2>2.

Б) несимметрично, так как a>b не влечет за собой b>a, например, 3>2, но не выполняется 2>3.

В) не антисимметрично, так как не выполняется aRb и bRa, если a=b, например, не выполняется 2>2, но 2=2.

Г) транзитивно, так как если a>b и b>c, то a>c, например, если 5>3 и 3>1, то 5>1.

№ 2.46

В вооруженных силах рота состоит из трех взводов, а взвод из трех отделений, в каждом отделении по 11 солдат и командир-сержант, а взводом лейтенант, ротой капитан. Определить свойства бинарного отношения R – быть командиром роты.

Решение:

Опр. Свойством бинарного отношения являются:

а). R – рефлексивно, если имеет место aRa для любого $a \in$

$\in M$ (Например, отношение «жить в одном городе» - рефлексивно).

б). R – антирефлексивно, если ни для какого a, $a \in M$, не выполняется aRa. (Например, отношение «быть сыном» - антирефлексивно).

в). R – симметрично, если aRb влечет bRa (Например, отношение «работать на одной фирме» - симметрично).

г). R – антисимметрично, если aRb и bRa влечет a=b, т.е. ни для каких различающихся элементов a и b ($a \neq b$) не выполняется одновременно aRb и bRa.(Например, отношение «быть сыном», «быть начальником» антисимметрично).

д). R – транзитивно, если aRb и bRc влекут aRc (например, «быть моложе», «быть братом» - транзитивно).

1. не симметрично, антисимметрично, т.к. aRb влечет bRa, т.к. капитан может командовать лейтенантом, а лейтенант капитаном – нет.
2. не рефлексивно, т.к. капитан не может командовать сам собой.
3. антирефлексивно, т.к. aRa не выполняется.
4. транзитивно, т.к. если капитан может командовать лейтенантом, а лейтенант – сержантом, то капитан может командовать сержантом.

№ 2.47

Охарактеризовать отношения, заданные на множестве натуральных чисел:

а) R1 – быть строго меньше

б) R2 – иметь общий делитель

в) R3 – быть не меньше

Решение

а) R1 не рефлексивно, антирефлексивно, не симметрично, не антисимметрично, транзитивно.

б) R2 рефлексивно, не антирефлексивно, симметрично, не антисимметрично, не транзитивно (точнее, не всегда транзитивно).

в) R3 рефлексивно, не антирефлексивно, не симметрично, антисимметрично, транзитивно.

№ 2.48

Каковы свойства отношения, заданного на множестве натуральных чисел N, если R – «быть не меньше».

Решение: R – « быть не меньше» $=\rangle$ математически это запишется как $\geq$.

1) рефлексивно, не антирефлексивно, т.к. выполняется $a \geq a$ для $\forall\, a \in N$;

2) не симметрично, т.к. например $5 \geq 3$, но не верно обратное ($3 \geq 5$).

3) антисимметрично, т.к. если выполняется одновременно aRв и вRa, то $=\rangle$ a=в.

4)транзитивно, т.к. если $a \geq в$ и $в \geq c$, то $a \geq c$.

В справедливости некоторых из вышеуказанных свойств можно наглядно убедиться, построив матрицу для данного отношения и помня **следующие правила:**

1. Главная диагональ матрицы рефлексивного отношения содержит только единицы.

2. Главная диагональ матрицы антирефлексивного отношения содержит только нули.

3. В матрице симметричного отношения $C_{i,j} = C_{j,i}$, т.е. матрица симметрична относительно главной диагонали.

4. В матрице антисимметричного отношения отсутствуют единицы, симметричные относительно главной диагонали.

Например, построив для данного отношения матрицу, предварительно задав произвольное количество элементов множества N, убедимся в справедливости вышеуказанных свойств.

R	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0
5	1	1	1	1	1	0	0
6	1	1	1	1	1	1	0
7	1	1	1	1	1	1	1

Пусть $A \subseteq N$ и A= {1,2,3,4,5,6,7}. Тогда отношение R:

1) На главной диагонали стоят единицы $=\rangle$ рефлексивно, не антирефлексивно;
2) $C_{i,j} \neq C_{j,I} =\rangle$ не симметрично;
3) отсутствуют единицы, симметричные относитель-но главной диагонали $=\rangle$ антисимметрично
4) транзитивность данного отношения находим по определению.

№ 2.49

Каковы свойства отношения R – «быть кратным», заданного на множестве натуральных чисел N.

Решение: «быть кратным» - значит, делиться нацело. Если aRв, то в делится на а нацело.

1) рефлексивно, не антирефлексивно, т.к. a/a=1 для $\forall a \in N$;
2) не симметрично, антисимметрично, т.к. а/в≠в/а, где а≠в;
3) транзитивно, т.к., если $\frac{c}{в}, \frac{в}{a} \in N$, то $\frac{c}{a} = \frac{в}{a} \cdot \frac{c}{в} \in N$.

Для проверки приведем матрицу данного отношения (см. рис.).

R	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0
3	0	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	1

№ 2.50

Задать списком и матрицей, а также графически (орграфом) следующее бинарное отношение R.

Дж. фон Нейман (1903-1957) предложил блок-схему ЭВМ последовательного действия, которая состоит из множества устройств М:

M:= {a, в, c, d, e},

где a – устройство ввода;

b – арифметическое устройство (процессор);

c – устройство управления;

d – запоминающее устройство;

e – устройство вывода.

Рассмотреть информационный обмен между устройствами m_i и m_j , которые находятся в отношении R, если из устройства m_i поступает информация в устройство m_j.

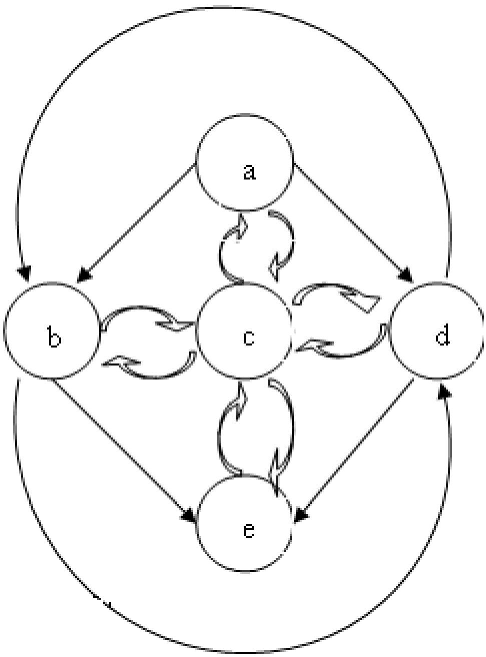
Решение:

Данное бинарное отношение R определяет 14 пар элементов (задание отношения R списком):

R= {(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,e), (b,d), (c, a), (c,b), (c,d), (c,e), (d,b), (d,c), (d,e), (e,c)}

Матрица данного отношения имеет вид:

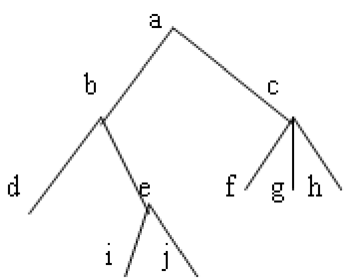
R	a	b	c	d	e	f	g
a	0	0	0	0	0	0	0
b	1	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	0	0
d	1	0	0	0	0	0	0
e	1	1	1	0	0	0	0
f	1	0	1	0	0	0	0
g	1	0	0	1	0	0	0



Граф G={M,R}, задающий это бинарное отношение R, представлен на рис. 1, где вершины обозначены кружками, а дуги –ориентированными линиями:

№ 2.51

Задана структура следующего вида:



Выписать пары, для которых выполняются отношения:

А) R1 – быть дедом

Б) R2 – быть дядей

В) R3 – быть двоюродным братом

Решение:

А) R1={(a,d);(a,e);(a,f);(a,g);(a,h);(b,i);(b,j)}

Б) R2={(b,f;);(b,g);(b,h);(c,d);(c,e);(d,i);(d,j)}

В)R3={(d,f);(d,g);(d,h);(e,f);(e,g);(e,h);(f,d);(f,e);(g,d);(g,e);(h,d);(h,e)}

№ 2.52

Каковы свойства отношения R – «быть частью целого», заданного на множестве элементов структуры? Задать данное отношение матрицей.

Решение:

Структура, задающая отношениеR свидетельствует о том, что целое а состоит из 3-х частей: в, с и d, которые в свою очередь разделены на части e, f и д.

Зададим данное отношение матрицей:

1) не рефлексивно, антирефлексивно, т.к. aRa не имеет смысла (в матрице: на главной диагонали – нули);

2) не симметрично, т.к. если верно aRв, то не верно вRa (матрица не симметрична);

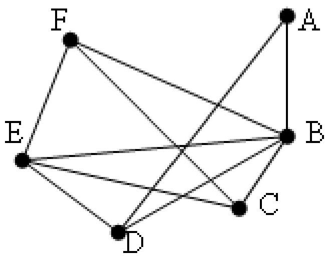
3) не антисимметрично, т.к. не выполняется aRв$\rightarrow$вRa (для $\forall$ a, в) (в матрице: отсутствуют единицы, симметричные относительно главной диагонали);

4) транзитивно, т.к. например, если fRa и fRc, то верно cRa.

3. Теория графов

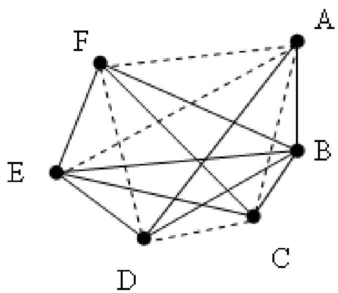
№ 3.1

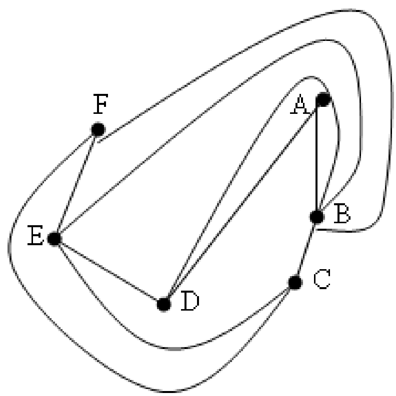
Для данного графа нарисовать изоморфный граф таким образом, чтобы ребра между собой не пересекались, дорисовать до полного графа.



Решение:

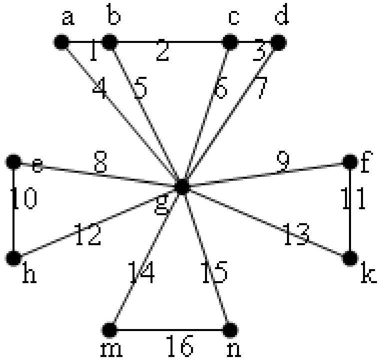
Если графы G_1 и G_2 изоморфны, то они имеют одно и то же число вершин и для любых двух вершин графа G_1 (B_1 и C_1) соединенных ребром, соответствующие им вершины B_2 и C_2 графа G_2 тоже соединены ребром и обратно. Полный граф – это граф, в котором каждая пара вершин будет соединена ребром.





№ 3.2

Задать граф А, найти степени вершин и сумму всех степеней.



Решение:

А) Граф может быть полностью определен:

1)Множеством вершин: V={ a,b,c,d,e,f,g,h,k,m,n }.

Множеством ребер: E={ 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16 }.

2)Множеством ребер, каждое из которых представлено парой вершин:

E_1={ (a,b), (b,c), (c,d), (a,g), (b,g), (c,g), (d,g), (e,g), (f,g), (e,h), (f,k), (h,g), (g,k), (m,g), (n,g), (m,n) }.

Б) В каждой не изолированной вершине некоторого графа G имеется одно или несколько ребер. Число таких ребер и называется степенью вершины.

$\rho(a)=\rho(d)=\rho(e)=\rho(h)=\rho(f)=\rho(k)=\rho(m)=\rho(n)=2.$

$\rho(b)=\rho(c)=3.$

$\rho(g)=10.$

Сумма степеней вершин:

$\Sigma\rho=\rho(a)+\rho(d)+\rho(c)+\rho(h)+\rho(f)+\rho(k)+\rho(m)+\rho(n)+\rho(b)+\rho(c)+\rho(g)=32.$

№ 3.3

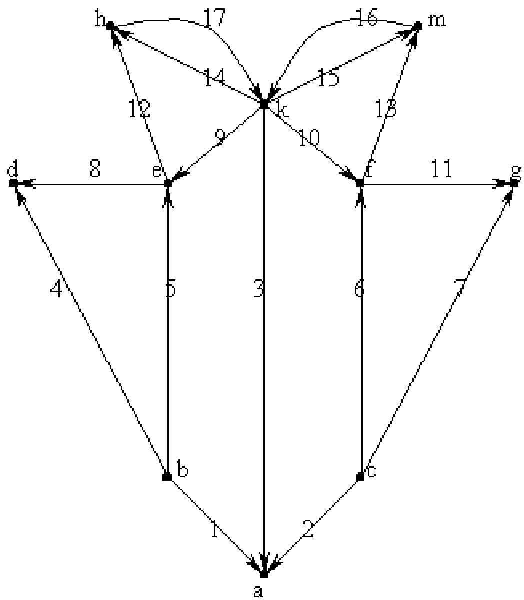
Задать граф матрицами смежности и инцидентности, списком ребер.

Решение:

Матрица инцидентности – это матрица размера m×n, в которой по вертикали указываются вершины, а по горизонтали ребра, а на пересечении i-ой вершины и j-ого ребра ставится «-1» если вершина является началом, «1» - вершина является концом, «0» - вершина и ребро не инцидентны. Матрица смежности – это квадратная матрица, в которой по горизонтали и по вертикали перечисляются только все вершины, а на пересечении к-ой и l-ой вершин ставиться число ребер с началом в к-ой вершине и концом в l-ой вершине. Список ребер графа представлен двумя столбцами, где в левом перечислены все ребра, а в правом перечисляются инцидентные им вершины.

1	ba
2	ca
3	ka
4	bd
5	be
6	cf
7	cg
8	ed
9	ke
10	kf
11	fg
12	eh
13	fm
14	kh
15	km
16	mk
17	hk

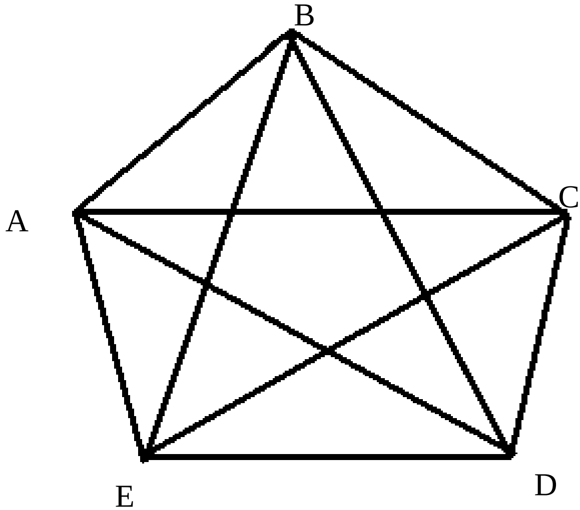
	a	b	c	d	e	f	g	h	k	m
a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
d	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
f	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
k	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1
m	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

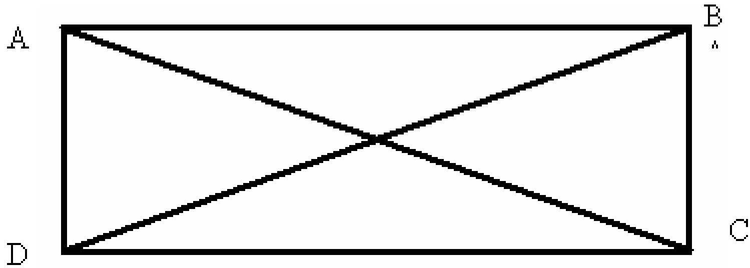


	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
b	*-1*	*0*	*0*	*-1*	*-1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
c	*0*	*-1*	*0*	*0*	*0*	*-1*	*-1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
d	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
e	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*-1*	*1*	*0*	*0*	*-1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
f	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*-1*	*0*	*-1*	*0*	*0*	*0*	*0*
g	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
h	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*-1*
k	*0*	*0*	*-1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*-1*	*-1*	*0*	*0*	*0*	*-1*	*-1*	*1*	*1*
m	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*-1*	*0*

№ 3.4

Можно ли нарисовать данные фигуры, не отрывая руки и не проходя по одной линии фигуры дважды.





Решение:

Опр. Графом называется геометрическая схема.

Опр. Эйлеров граф называется граф имеющий Эйлеровый цикл.

Опр. Эйлеров цикл называется цикл графа содержащий все ребра графа.

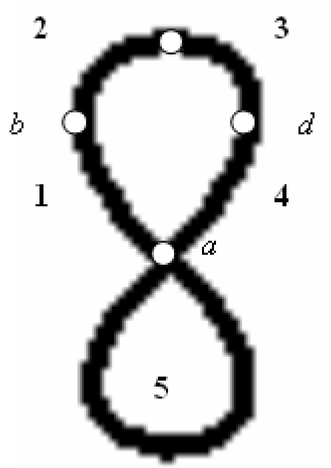
Опр. Цикл называется цепь начинающиеся и заканчивающаяся в одной и той же вершины.

Фигуру слева можно нарисовать не отрывая руки и не проходя по одному и тому же ребру более одного раза: BECADBCDEAB

Фигуру справа нельзя.

№ 3.5

Задать матрицами смежности и инцидентности, а также списком следующий граф.



Решение:

Способы задания графов:

В общем виде задать граф – значит описать множество его вершин и ребер, а также отношение инцидентности. Для описания вершин и ребер достаточно их пронумеровать. Пусть $V_1, V_2, \ldots V_J, \ldots V_N$ – вершины графа G, $e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots, e_m$ – ребра графа G. Отношение инцидентности задается:

А) матрицей инцидентности $||\varepsilon_{ij}||$

Размера m x n , в которой по вертикали указываются вершины, а по горизонтали ребра, а на пересечении i-ой вершины и j-го ребра в случае неориентированного графа ставится 1, если они инцидентны, и 0 – в противном случае.

в случае орграфа

-1 если вершина является началом ребра,

1 если вершина является концом ребра,

0 если вершина и ребро не инцидентны,

α (любое число) если e_i - петля, а V_j - инцидентная ей вершина.

Б) списком ребер графа – представленным 2мя столбцами, где в левом перечислены все ребра, а в правом перечисляются инцидентные ему вершины. Для н-графа порядок вершин в строке произволен, для орграфа первым стоит начало ребра.

В). Матрицей смежности $||\delta_{ke}||$
Квадратная матрица n x n = n^2 , в которой по горизонтали и по вертикали перечисляются только все вершины $V_i \in V$, а на пересечении к-ой и е-ой вершин в случае н-графа проставляется число, равное числу ребер, соединяющих эти вершины, а для орграфа δ_{ke} равно числу ребер с началом в к-ой вершине и концом в е-ой вершине.

Матрица смежности:

	a	**b**	**c**	**d**
a	1	1	0	1
b	1	0	1	0
c	0	1	0	1
d	1	0	1	0

Матрица инцидентности:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
a	1	0	0	1	1
b	1	1	0	0	0
c	0	1	1	0	0
d	0	0	1	1	0

Списком:

1	ab
2	bc
3	cd
4	da
5	aa

№ 3.6

Построить граф по матрице смежности, если этот граф является орграфом.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
a	0	1	0	0	0	1
b	0	0	1	1	0	0
c	0	0	0	1	0	1
d	0	0	0	0	1	0
e	0	0	0	0	0	1
f	0	1	0	1	0	0

Решение:

Способы задания графов:

В общем виде задать граф – значит описать множество его вершин и ребер, а также отношение инцидентности. Для описания вершин и ребер достаточно их пронумеровать. Пусть $V_1,V_2, \dots V_J,\dots V_N$ – вершины графа G, $e_1,e_2,\dots,e_i,\dots,e_m$ – ребра графа G. Отношение инцидентности задается:

А) матрицей инцидентности $||\varepsilon_{ij}||$

Размера m x n , в которой по вертикали указываются вершины, а по горизонтали ребра, а на пересечении i-ой вершины и j-го ребра в случае неориентированного графа ставится 1, если они инцидентны, и 0 – в противном случае.

в случае орграфа :

-1 если вершина является началом ребра,

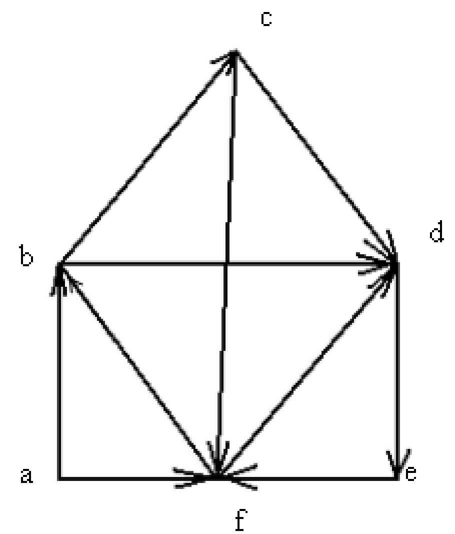
1 если вершина является концом ребра,

0 если вершина и ребро не инцидентны,

α (любое число) если e_i - петля, а V_j - инцидентная ей вершина.

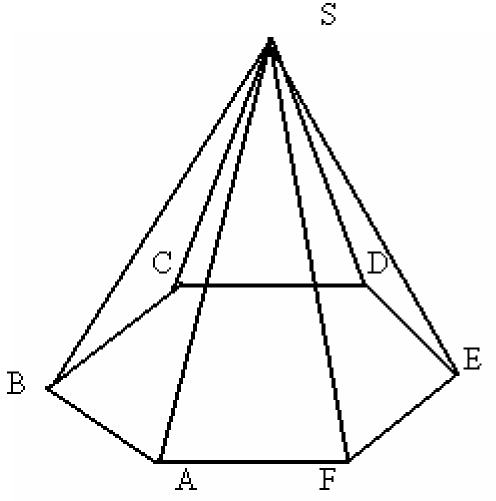
Б) списком ребер графа – представленным 2мя столбцами, где в левом перечислены все ребра, а в правом перечисляются инцидентные ему вершины. Для н-графа порядок вершин в строке произволен, для орграфа первым стоит начало ребра.

В). Матрицей смежности $\|\delta_{ke}\|$
Квадратная матрица $n \times n = n^2$, в которой по горизонтали и по вертикали перечисляются только все вершины $V_i \in V$, а на пересечении к-ой и е-ой вершин в случае н-графа проставляется число, равное числу ребер, соединяющих эти вершины, а для орграфа δ_{ke} равно числу ребер с началом в к-ой вершине и концом в е-ой вершине.



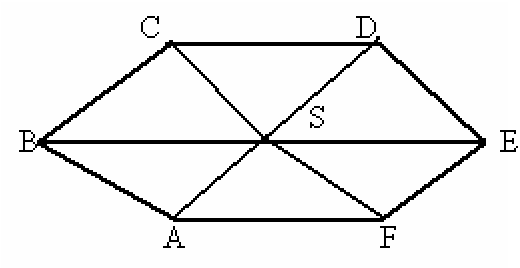
№ 3.7

Постройте для данного графа изоморфный ему граф.



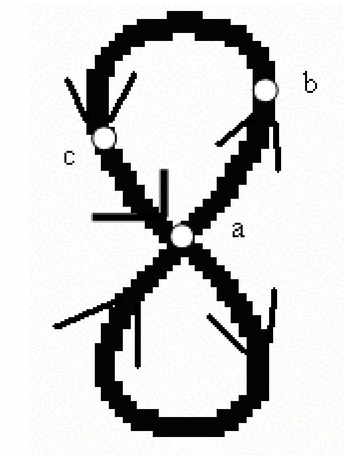
Решение:

Опр. Два графа G_1 и G_2 изоморфны, если они отвечают одному и тому же списку проведенных игр. То есть если G_1 и G_2 графы изоморфны, то они имеют одно и то же число вершин и для любых двух вершин графа $G_1(B_1$ и $C_1)$, соединенных ребром соответствующие им вершины B_2 и C_2 графа G_2 тоже соединены ребром и обратно.



№ 3.8

Пусть орграф задает отношение R. Каковы свойства этого отношения?



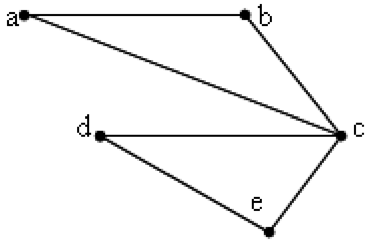
Решение:

Отношение R определено на множестве V={a,b,c} и количество вершин |V|=3.
Свойство отношения:

1. Не рефлексивно, т.к. отношение cRc, bRb не выполняется.
2. Не антирефлексивно, т.к. имеет место aRa.
3. Не симметрично, т.к. это орграф.
4. Не антисимметрично, т.к. не выполняется например aRb и bRa, т.к. в данном случае орграф, а как видно на рисунке у нас направление от b к a нет, т.е. стрелка.
5. Не транзитивно, т.к. выполняется aRb, bRc но отсутствует aRc.

№ 3.9

Для данного графа определить расстояние между вершинами, радиусы и центр.



Решение:

Расстояние $d(V',V'')$ *между вершинами* V' *и* V'' *неориентированного графа называется минимальная длинна простой цепи с началом* V' *и концом* V''. *Центром называется вершина неориентированного графа, от которой максимальное из расстояний от других вершин являлось бы минимальным. Радиусом графа G называется максимальное расстояние от центра G до его вершины.*

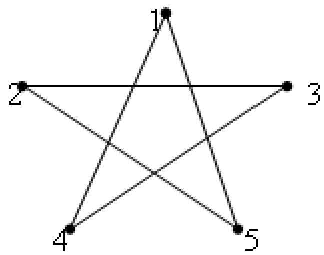
Расстояние между вершинами:
$d(b,a)=d(c,a)=d(c,b)=d(d,c)=d(d,e)=d(e,c)=1$
$d(d,a)=d(d,b)= d(e,a)=d(e,b)= 2.$
Радиусы: $r(a)=2$, $r(b)=2$, $r(c)=1$, $r(e)=2$, $r(d)=2$.
Центр: $r(c)=1$.

№ 3.10

По данной матрице смежности построить граф.

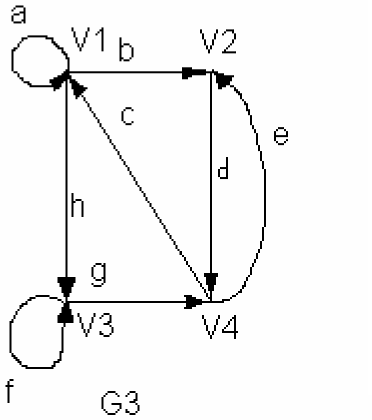
	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	0
5	1	1	0	0	0

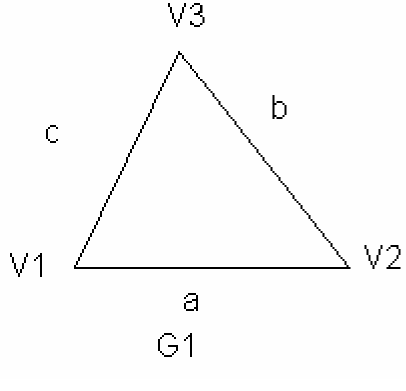
Решение:

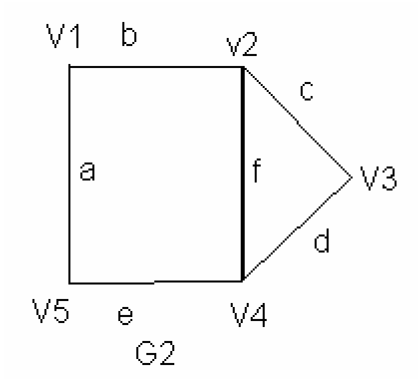


№ 3.11

Для графов G1, G2, G3 построить матрицы инцидентности.







Решение:

G1	a	b	c
1	1	0	1
2	1	1	0
3	0	1	1

G2	a	b	c	d	e	f
1	1	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	1
3	0	0	1	1	0	0
4	0	0	0	1	1	1
5	1	0	0	0	1	0

G3	a	b	c	d	e	f	g	h
1	2	-1	1	0	0	0	0	-1
2	0	1	0	-1	1	0	0	0
3	0	0	0	0	0	2	-1	1
4	0	0	-1	1	-1	0	1	0

№ 3.12

Для графов G1, G2, G3 построить матрицы смежности.

Решение:

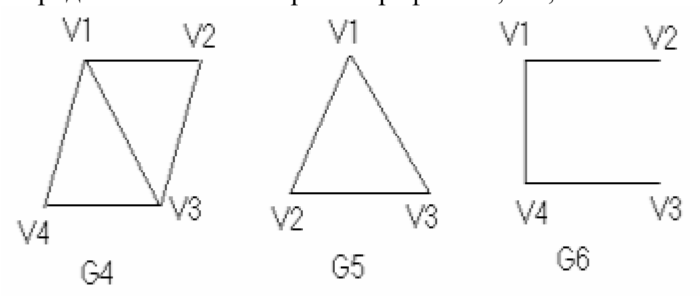
V	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

V	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	0	0	1	0

V	1	2	3	4
1	1	1	1	0
2	0	0	0	1
3	0	0	1	1
4	1	1	0	0

№ 3.13

Определить степени вершин графов G4, G5, G6.



Решение:

1) V1 – 3, V2 – 2, V3 – 3, V4 – 2.
2) V1 – 2, V2 – 2, V3 – 2.
3) V1 – 2, V2 – 1, V3 – 1, V4 – 2.

№ 3.14

Для графов G4, G5, G6 определить расстояния между вершинами, центры графов и их радиусы.

Решение

G1: d(V1,V2)=1; d(V1,V3)=1; d(V1,V4)=1; d(V2,V3)=1; d(V2,V4)=2; d(V3,V4)=1;

G2: d(V1,V2)=1; d(V1,V3)=1; d(V2,V3)=1;

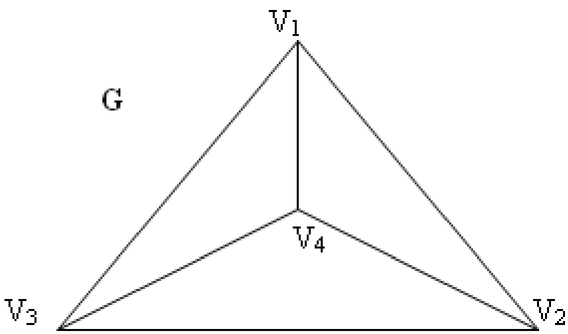
G3: d(V1,V2)=1; d(V1,V3)=2; d(V1,V4)=1; d(V2,V3)=3; d(V2,V4)=2; d(V3,V4)=1;

G1: r(V1)=1; r(V2)=2; r(V3)=1; r(V4)=2;
G2: r(V1)=1; r(V2)=1; r(V3)=1;
G3: r(V1)=2; r(V2)=3; r(V3)=3; r(V4)=2;

r(G1)=1; V1, V3 – центры
r(G2)=1; V1, V2, V3 – центры
r(G3)=2; V1, V4 - центры

№ 3.15

Дан граф G. Для его вершин привести примеры эйлерова цикла, гамильтонова цикла, маршрута.



Решение:

Эйлеров цикл – это цикл, содержащий все ребра графа по одному разу и все вершины графа, которые могут встречаться несколько раз, причем начало и конец в одной вершине. Именно поэтому данный граф не содержит эйлерова цикла.

Гамильтонов цикл – это простой цикл, содержащий все вершины графа (по одному разу), зато не обязательно содержит все ребра графа.

Примером гамильтонова цикла является: (V_3, V_1, V_4, V_2, V_3);

Маршрут – последовательность ребер, в которой 2 соседних ребра имеют общую вершину (одно и тоже ребро может встречаться несколько раз). Примером маршрута может быть: (V_1, V_2, V_4, V_3, V_1, V_4, V_2).

№ 3.16

По условию задачи составить дерево и определить, вершины каких типов оно содержит.

На склад Автосборочного завода поступают детали со всех прилегающих к нему заводов. Затем они распределяются на 2 производства: механообрабатывающее и механосборочное. Механообрабатывающее производство отправляет детали для дальнейшей обработки по цехам: картеров, передних осей, сборки мостов; а механосборочное – по цехам: карданных валов, шестерен, арматурным.

Решение:

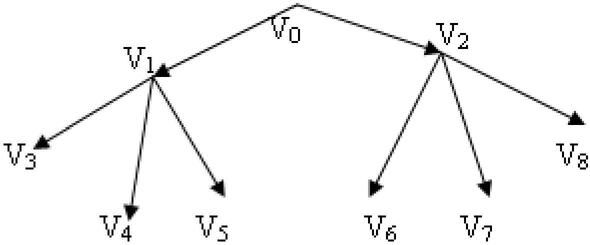
Корнем дерева (вершиной, от которой ориентируются все вершины дерева) будет являться склад, который обозначим, как V_0.

V_0 – вершина максимального типа.

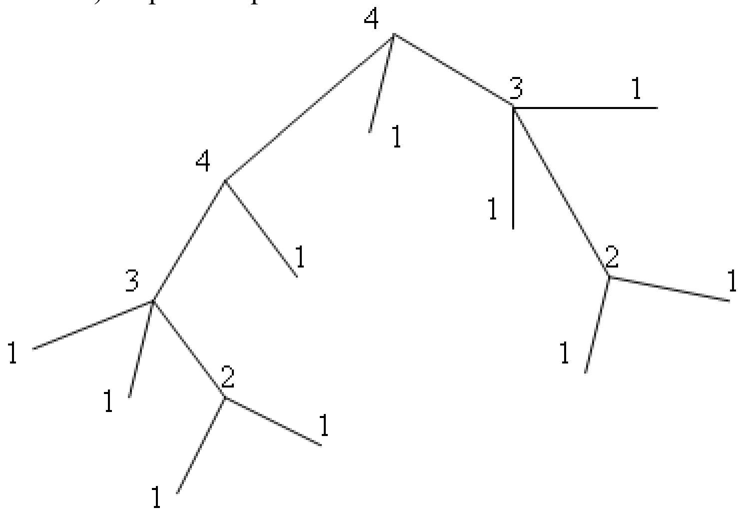
V_1 и V_2 – вершины 2 типа (ими обозначим 2 производства).

V_3, V_4, V_5 – (цеха механообрабатывающего производства), то есть вершины, инцидентные с вершиной V_1, и вершины V_6, V_7, V_8 – (цеха механосборочного производства), инцидентные с вершиной V_2, являются вершинами 1 типа, то есть концевыми вершинами.

Таким образом, граф типа дерева будет выглядеть следующим образом:



Теперь построим из н – графа ориентированное дерево с корнем, являющимся вершиной максимального типа (в нашем случае 4 типа) – правая вершина.



Список использованной литературы

1. Г.И. Москинова. Дискретная математика. М.: Логос, 2002-240с.
2. Г.Г. Асеев, О.М. Абрамов, Д.Э. Ситников. Дискретная математика. Ростов-н/Д: Торсинг, 2003-144с.
3. Ф.А. Новиков. Дискретная математика для программистов. СПб.: Питер, 2002-304с.
4. Н.П. Редькин. Дискретная мтематика. СПб.: Лань, 2003-96с.
5. В.А. Горбатов, А.В. Горбатов, М.В. Горбатов. Дискретная математика. М.: АСТ, Астрель, 2003-447с.

Оглавление.