УДК 512

С.Н. ТРОНИН

ОПЕРАДНЫЕ АНАЛОГИ АЛГЕБР ИНЦИДЕНТНОСТИ

В данной работе показывается, что существуют операдные аналоги алгебр инцидентности, как обычных, так и редуцированных. Определения и минимум необходимых сведений по теории операд можно найти в [1]. Неформально говоря, линейные операды можно считать многомерными обобщениями ассоциативных колец с единицей. Мы также будем пользоваться стандартной информацией об алгебрах инцидентности из [2], [3], [4].

Напомним, что операдой называется семейство множеств $R = \{R(n)|n \geq 1\}$, где для всех $n_1, \ldots, n_m, m$ определены операции композиции вида

$$R(n_1) \times \cdots \times R(n_m) \times R(m) \to R(n_1 + \cdots + n_m),$$

которые сопоставляют элементам $(x_1, \ldots, x_m, y)$ элементы, обозначаемые через $x_1 \ldots x_m y$. В случае K-линейной операды (K - поле или коммутативное кольцо с единицей) предполагается, что эти операции K-линейны по всем аргументам. Операции композиции ассоциативны (точный вид этой ассоциативности см. в [1]), а в $R(1)$ содержится элемент ε, называемый единицей операды, и обладающий свойствами: $\varepsilon \ldots \varepsilon y = y$, $y\varepsilon = y$ для любого $y \in R(n)$. Кроме того, на каждом множестве $R(n)$ действует слева симметрическая группа n-й степени Σ_n, причем в случае K-линейной операды это действие превращает $R(n)$ в левый $K\Sigma_n$-модуль. Явный вид свойств, связывающих это действие с операциями композиции, можно найти в [1] (отметим также книги на русском языке [5], [6], просвященные операдам, но написанные топологами, где приняты несколько иные обозначения).

Напомним конструкцию операды многомерных матриц из [1] (в работе [1] изучались более общие объекты, но нам потребуется только один простой частный случай). Пусть P — некоторое множество, K — поле. Для каждого $n \geq 1$ положим $M_P(n)$ равным множеству всех отображений вида $f : P^n \times P \to K$, таких, что при фиксированном $p_0 \in P$ равенство $f(p_1, \ldots, p_n, p_0) = 0$ имеет место для почти всех наборов $(p_1, \ldots, p_n) \in P^n$. Если $f_1 \in M_P(n_1)$, …, $f_k \in M_P(n_k)$, $f \in M_P(k)$, то отображение $f_1 \ldots f_k f \in M_P(n_1 + \cdots + n_k)$ определяется следующим образом:

$$f_1 \ldots f_k f(\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_k, p_0) = \sum_{p_1,\ldots,p_k \in P} f_1(\overline{p}_1, p_1) \ldots f_k(\overline{p}_k, p_k) f(p_1, \ldots, p_k, p_0) \tag{1}$$

Здесь для каждого i, $1 \leq i \leq k$ через $\overline{p}_i$ обозначается строка $(p_{1,i}, \ldots, p_{n_i,i}) \in P^{n_i}$. Скобки и запятые во многих случаях не играют особой роли, и этот же элемент по мере необходимости будет записываться в виде $\overline{p}_i = p_{1,i} \ldots p_{n_i,i}$. Действие группы Σ_n на $M_P(n)$ определяется так:

$$(\sigma f)(p_1, \ldots, p_n, p_0) = f(p_{\sigma(1)}, \ldots, p_{\sigma(n)}, p_0) \tag{2}$$

Здесь $f \in M_P(n)$, $\sigma \in \Sigma_n$. В работе [1] было показано, что формулы (1) и (2) определяют на семействе $M_P = \{M_P(n)|n \geq 1\}$ структуру операды.

Пусть теперь P - локально конечное частично упорядоченное множество. Напомним, что это означает конечность всех отрезков $[a, b] = \{p \in P|a \leq p \leq b\}$. Чтобы вводимые ниже конструкции имели смысл, необходимо наложить на P еще какие-то ограничения, кроме локальной конечности. Для наших целей пока будет достаточно предполагать, что в множестве P есть наименьший элемент (нуль). Для всех $n \geq 1$ пусть $A_P(n)$ есть подмножество $M_P(n)$, состоящее из всех отображений $f : P^n \times P \to K$, обладающих тем свойством, что $f(p_1, \ldots, p_n, p_0) = 0$, если хотя бы для одного индекса i неверно, что $p_i \leq p_0$. Непосредственная проверка показывает, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1.. *Семейство $A_P = \{A_P(n)|n \geq 1\}$ является подоперадой операды M_P.*

Формула (1) для операды A_P приобретает следующий вид:

$$f_1 \dots f_k f(\overline{p}_1 \dots \overline{p}_k, p_0) = \sum_{\overline{p}_i \le p_i \le p_0} f_1(\overline{p}_1, p_1) \dots f_k(\overline{p}_k, p_k) f(p_1, \dots, p_k, p_0) \tag{3}$$

Здесь неравенство вида $\overline{p}_i \le p_i$ означает, что для всех j, $1 \le j \le n_i$ имеют место неравенства $p_{j,i} \le p_i$. Легко заметить, что композиция вида $A_P(1) \times A_P(1) \to A_P(1)$ превращается в операцию свертки (как она определена, например, в [2]), и, таким образом, первая компонента операды $A_P(1)$ — это алгебра инцидентности ч.у. множества P.

Рассмотрим множество P_n, состоящее из всех $(p_1, \dots, p_n, p_0) \in P^n \times P$, для которых $p_i \le p_0$ для всех $i \ge 1$. Введем на P_n следующее отношение эквивалентности. Положим $(x_1, \dots, x_n, x_0) \approx (y_1, \dots, y_n, y_0)$ тогда и только тогда, если существует изоморфизм (конечных) частично упорядоченных множеств

$$\bigcup_{i=1}^{n} [x_i, x_0] \xrightarrow{\lambda} \bigcup_{i=1}^{n} [y_i, y_0],$$

такой, что $\lambda(x_0) = y_0$, $\lambda(x_i) = y_i$ для всех i, $1 \le i \le n$. Положим

$$\begin{aligned} S_P(n) = \quad & \{f \in A_P(n) | (x_1, \dots, x_n, x_0) \approx (y_1, \dots, y_n, y_0) \quad \text{влечет} \\ & f(x_1, \dots, x_n, x_0) = f(y_1, \dots, y_n, y_0)\}. \end{aligned}$$

Теорема 2.. *Семейство $S_P = \{S_P(n) | n \ge 1\}$ является подоперадой операды A_P.*

Доказательство. Покажем, что если, $f_1 \in S_P(n_1)$, …, $f_m \in S_P(n_m)$, $f \in S_P(m)$, то $f_1 \dots f_m f \in S_P(n_1 + \dots + n_m)$. Представим элементы из $P_{n_1 + \dots + n_m}$ в виде $(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m, x_0)$, $(\overline{y}_1 \dots \overline{y}_m, y_0)$, где $\overline{x}_i$, $\overline{y}_i \in P^{n_i}$ для всех i. Пусть $\overline{x}_i = x_{1,i} \dots x_{n_i,i}$, $\overline{y}_i = y_{1,i} \dots y_{n_i,i}$ и пусть свойство $(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m, x_0) \approx (\overline{y}_1 \dots \overline{y}_m, y_0)$ реализуется изоморфизмом ч.у. множеств

$$\bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n_i} [x_{j,i}, x_0] \xrightarrow{\lambda} \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n_i} [y_{j,i}, y_0]$$

с указанными в определении отношения $\approx$ свойствами. Из этих свойств легко следует, что существует взаимно-однозначное соответствие между множеством всех упорядоченных последовательностей $(x_1, \dots, x_m)$ таких, что, $\overline{x}_i \le x_i \le x_0$ и множеством последовательностей $(y_1, \dots, y_m)$ со свойствами $\overline{y}_i \le y_i \le y_0$. Это соответствие строится так: $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m))$. С учетом этого, изоморфизм λ индуцирует изоморфизм частично упорядоченных множеств

$$\bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n_i} [x_{j,i}, x_i] \cup \bigcup_{i=1}^{m} [x_i, x_0] \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n_i} [y_{j,i}, \lambda(x_i)] \cup \bigcup_{i=1}^{m} [\lambda(x_i), y_0]$$

где ограничения la на все $\bigcup_{j=1}^{n_i} [x_{j,i}, x_i]$ определяют эквивалентности $(\overline{x}_i, x_i) \approx (\overline{y}_i, \lambda(x_i))$, а ограничение на $\bigcup_{i=1}^{m} [x_i, x_0]$ определяет эквивалентность

$$(x_1, \dots, x_m, x_0) \approx (\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m), y_0).$$

Теперь рассмотрим выражение

$$f_1 \dots f_m f(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m, x_0) = \sum_{\overline{x}_1 \le x_1 \le x_0, \dots, \overline{x}_m \le x_m \le x_0} f(\overline{x}_1, x_1) \dots f_m(\overline{x}_m, x_m) f(x_1, \dots, x_m, x_0).$$

Пусть $y_i = \lambda(x_i)$ для всех $i \ge 1$. Вспоминая определение множеств $S_P(n_i)$, $S_P(m)$, видим, что

$$f_i(\overline{x}_i, x_i) = f_i(\overline{y}_i, \lambda(x_i)), \quad f(x_1, \dots, x_m, x_0) = f(y_1, \dots, y_m, y_0).$$

Это влечет

$$f_1 \ldots f_m f(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_m, x_0) = \sum_{\overline{y}_1 \leq y_1 \leq y_0, \ldots, \overline{y}_m \leq y_m \leq y_0} f(\overline{y}_1, y_1) \ldots f_m(\overline{y}_m, y_m) f(y_1, \ldots, y_m, y_0).$$

Правая же часть последнего равенства есть $f_1 \ldots f_m f(\overline{y}_1 \ldots \overline{y}_m, y_0)$. Остальные свойства подоперады проверяются без труда. $\square$

Первая компонента $S_P(1)$ построенной операды — это стандартная алгебра множества P ([2], с. 175).

Классы эквивалентных элементов по отношению $\approx$ будут называться типами этого отношения, или просто типами ([2], с. 233). Пусть $T_n = P_n / \approx$. Положим $R_P(n)$ равным множеству всех отображений из T_n в K. Определим на семействе $R_P = \{R_P(n) | n \geq 1\}$ структуру операды.

Пусть $\alpha_1 \in T_{n_1}, \ldots, \alpha_m \in T_{n_m}, \beta \in T_m, \gamma \in T_{n_1 + \cdots + n_m}$ — типы, т.е. классы эквивалентных элементов, и пусть $(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_m, x_0) \in \gamma$, $\overline{x}_i \in P^{n_i}$ для всех i. Положим $\binom{\gamma}{\alpha_1 \ldots \alpha_m \beta}$ равным количеству тех наборов $(x_1, \ldots, x_m)$, для которых $(\overline{x}_1, x_1) \in \alpha_1, \ldots, (\overline{x}_m, x_m) \in \alpha_m$, $(x_1, \ldots, x_m, x_0) \in \beta$. Числа $\binom{\gamma}{\alpha_1 \ldots \alpha_m \beta}$ естественно назвать коэффициентами инцидентности, т.к. это многомерное обобщение соответствующего понятия из [2], [3].

Лемма 1.. *Целое неотрицательное число* $\binom{\gamma}{\alpha_1 \ldots \alpha_m \beta}$ *не зависит от выбора* $(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_m, x_0) \in \gamma$.

Доказательство. Для каждого рассмотрим функцию $\zeta_n : P^n \times P \to P$, такую, что $\zeta(p_1, \ldots, p_n, p_0) = 1$ тогда и только тогда, когда $p_i \leq p_0$ для всех $i \geq 1$, а для всех остальных аргументов значения этой функции равны нулю. Очевидно, что $\zeta_n \in S_P(n)$. Из определения ζ_n получаем

$$\zeta_{n_1} \ldots \zeta_{n_m} \zeta_m(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_m, x_0) = \binom{\gamma}{\alpha_1 \ldots \alpha_m \beta}.$$

Утверждение леммы следует из того, что функция $\zeta_{n_1} \ldots \zeta_{n_m} \zeta_m$ принимает одно и то же значение на всех элементах из класса γ. $\square$

Определим отображения композиции $R_P(n_1) \times \ldots \times R_P(n_m) \times R_P(m) \to R_P(n_1 + \cdots + n_m)$ по формуле

$$f_1 \ldots f_m f(\gamma) = \sum_{\alpha_i \in T_{n_i}, \beta \in T_m} \binom{\gamma}{\alpha_1 \ldots \alpha_m \beta} f_1(\alpha_1) \ldots f_1(\alpha_m) f(\beta) \tag{4}$$

Теорема 3.. *Семейство R_P с операцией композиции (4) является линейной операдой, изоморфной подопераде S_P операды A_P.*

Доказательство. Для каждого $n \geq 1$ определим отображение $R_P(n) \to A_P(n)$, переводящее $f \in R_P(n)$ в $\overline{f} \in A_P(n)$, где $\overline{f}$ строится следующим образом. Пусть $\pi : P_n \to T_n$ — проекция на фактормножество по отношению эквивалентности $\approx$ (т.е. на множество типов). Тогда для $x \in P_n \subseteq P^n \times P$ полагаем $\overline{f}(x) = f(\pi(x))$, а для $x \notin P_n$ пусть $\overline{f}(x) = 0$. Из определений легко следует, что отображение $f \mapsto \overline{f}$ есть взаимно-однозначное соответствие между $R_P(n)$ и множеством тех функций из $A_P(n)$, которые принимают одни и те же значения на каждом классе эквивалентных по отношению $\approx$ элементов, т.е. множеством $S_P(n)$. Очевидно, что это изоморфизм линейных пространств, и даже более того — изоморфизм левых $K\Sigma_n$-модулей. Остается показать, что совокупность таких отображений $R_P(n) \to A_P(n)$ является изоморфизмом операд. Это будет следовать из тождества $\overline{f_1 \ldots f_m f} = \overline{f}_1 \ldots \overline{f}_m \overline{f}$, которое доказывается вычислением значений левой и правой частей на одном и том же аргументе $x = (\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_m, x_0) \in P^{n_1 + \cdots + n_m} \times P$, где $\overline{x}_i \in P^{n_i}$ для всех i. Как и выше, предполагается, что $f_i \in R_P(n_i)$, $f \in R_P(m)$. Ясно, что если $x \notin P_{n_1 + \cdots + n_m}$, то оба значения равны нулю. Пусть $x \in P_{n_1 + \cdots + n_m}$. Рассмотрим равенство

$$\overline{f}_1 \ldots \overline{f}_m \overline{f}(\overline{x}_1 \ldots \ldots x_m, x_0) = \sum_{\overline{x}_i \leq x_i \leq x_0} \overline{f}_1(\overline{x}_1, x_1) \ldots \overline{f}_m(\overline{x}_m, x_m) \overline{f}(x_1, \ldots, x_m, x_0) \tag{5}$$

Пусть $\gamma \in T_{n_1+\cdots+n_m}$ — тот тип отношения $\approx$, которому принадлежит элемент x. Зафиксируем набор $(x_1, \ldots, x_m)$ со свойством $\overline{x}_1 \leq x_1 \leq x_0, \ldots, \overline{x}_m \leq x_m \leq x_0$, и пусть α_i есть тот тип (класс эквивалентных элементов), которому принадлежит $(\overline{x}_i, x_i)$ для каждого i, $1 \leq i \leq m$, а β — тот тип, которому принадлежит $(x_1, \ldots, x_m, x_0)$. Тогда

$$\overline{f}(\overline{x}_1, x_1) = f_1(\alpha_1), \ldots, \overline{f}(\overline{x}_m, x_m) = f_m(\alpha_m), \overline{f}(x_1, \ldots, x_m, x_0) = f(\beta),$$

и в равенстве (5) можно перейти к суммированию по всевозможным $\alpha_i \in T_{n_i}$, $\beta \in T_m$. При этом каждое слагаемое $f_1(\alpha_1) \ldots f_m(\alpha_m) f(\beta)$ должно повториться ровно $\binom{\gamma}{\alpha_1 \ldots \alpha_m \beta}$ раз. Таким образом, (5) преобразуется к виду

$$\overline{f}_1 \ldots \overline{f}_m \overline{f}(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_m, x_0) = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta} \binom{\gamma}{\alpha_1 \ldots \alpha_m \beta} f_1(\alpha_1) \ldots f_m(\alpha_m) f(\beta).$$

Но правая часть этого равенства по определению есть $f_1 \ldots f_m f(\gamma)$, что, в свою очередь, равно $\overline{f_1 \ldots f_m f}(x)$. □

Отдельно рассмотрим случай, когда все T_n конечны. В этом случае в каждой компоненте операды $R_P(n)$ можно определить конечный базис, состоящий из характеристических функций типов. А именно, для каждого $\alpha \in T_n$ пусть e_α есть отображение из T_n в поле K такое, что $e_\alpha(\alpha) = 1$ и $e_\alpha(\alpha') = 0$ при $\alpha' \neq \alpha$. "Таблица умножения"базисных элементов операды R_P определяется следующим образом.

Теорема 4.. *Пусть* $\alpha_1 \in T_{n_1}, \ldots, \alpha_m \in T_{n_m}$, $\beta \in T_m$. *Тогда*

$$e_{\alpha_1} \ldots e_{\alpha_m} e_\beta = \sum_{\gamma \in T_{n_1+\cdots+n_m}} \binom{\gamma}{\alpha_1 \ldots \alpha_m \beta} e_\gamma \tag{6}$$

Доказательство. Достаточно вычислить значения функций в левой и правой части (6) от аргумента $\delta \in T_{n_1+\cdots+n_m}$. Значение правой части вычисляется сразу, это $\binom{\delta}{\alpha_1 \ldots \alpha_m \beta}$. Левая часть вычисляется по формуле (4):

$$e_{\alpha_1} \ldots e_{\alpha_m} e_\beta(\delta) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_m, \eta} \binom{\delta}{\nu_1 \ldots \nu_m \eta} e_{\alpha_1}(\nu_1) \ldots e_{\alpha_m}(\nu_m) e_\beta(\eta).$$

Единственное ненулевое слагаемое соответствует случаю $\nu_1 = \alpha_1, \ldots, \nu_m = \alpha_m$, $\eta = \beta$ и также равно $\binom{\delta}{\alpha_1 \ldots \alpha_m \beta}$. □

В качестве примера вычислим операду R_P в случае, когда $P = C(\infty)$ — счетная цепь. В [2], с. 235–236, фактически вычислена первая компонента этой операды $R_P(1)$, причем оказалось, что $R_P(1) \cong K[[t]]$ как алгебры над K. Множества типов T_n для произвольного $n \geq 1$ вычисляются примерно так же, как и в случае $n = 1$ ([2], с. 90). А именно, если отождествить P с множеством неотрицательных натуральных чисел, то $(x_1, \ldots, x_n, x_0) \approx (y_1, \ldots, y_n, y_0)$ тогда и только тогда, если для всех i, $1 \leq i \leq n$, имеют место равенства $x_0 - x_i = y_0 - y_i$. Таким образом $T_n = \{(k_1, \ldots, k_n) |\ k_1, \ldots, k_n$ —- целые неотрицательные числа $\}$, и как линейное пространство $R_P(n)$ можно отождествить с $K[[t_1, \ldots, t_n]]$. При этом отображению $f : T_n \to K$ будет соответствовать степенной ряд $\sum\limits_{k_1, \ldots, k_n} f(k_1, \ldots, k_n) t_1^{k_1} \ldots t_n^{k_n}$. Пусть

$$\alpha_i = (k_{1,i}, \ldots, k_{n_i,i}) \in T_{n_i}, \beta = (l_1, \ldots, l_m) \in T_m, \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in T_{n_1+\cdots+n_m},$$

где $1 \leq i \leq m$, $\gamma_i = (r_{1,i}, \ldots, r_{n_i,i})$. Вычислим коэффициенты инцидентности $\binom{\gamma}{\alpha_1 \ldots \alpha_m \beta}$. Пусть, как и выше,$(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_m, x_0) \in \gamma$, то есть $x_0 - x_{j,i} = r_{j,i}$ для всех j, i. Будем записывать эти соотношения в компактной форме как $x_0 - \overline{x}_i = \gamma_i$, отождествляя в этой записи x_0

с вектором $(x_0, \dots, x_0)$. Включения $(\overline{x}_1, x_1) \in \alpha_1, \dots, (\overline{x}_m, x_m) \in \alpha_m$, $(x_1, \dots, x_m, x_0) \in \beta$ означают, что $x_i - \overline{x}_i = \alpha_i$, $x_0 - x_i = l_i$. Строка с этими свойствами существует тогда и только тогда, если

$$\gamma_i = \alpha_i + l_i = (k_{1,i} + l_i, \dots, k_{n_i,i} + l_i) \tag{7}$$

для всех i. Если это так, то числа x_i определяются однозначно. Итак, $\binom{\gamma}{\alpha_1 \dots \alpha_m \beta} = 1$, если выполнены условия (7), в противном случае коэффициент инцидентности равен нулю.

Можно дать более прозрачное (с точки зрения теории операд) описание получившегося таким образом объекта. Оно основано на наблюдении, что само семейство T_P множеств типов $T_P(n)$ в данном случае тоже будет операдой. Это частный случай операды, строящейся на основе некоторой полугруппы G с единицей, описанной в [1]. Здесь удобно обозначать операцию в полугруппе как плюс, а вместо единицы писать нуль. Эту операду обозначим также через G, ее n-я компонента $G(n)$ есть G^n, а операции композиции определяется следующим образом. Если $\overline{x}_i = (x_{1,i}, \dots, x_{n_i,i}) \in G^{n_i}$, $\overline{y} = (y_1, \dots, y_m) \in G^m$, и $\overline{x}_i + y_i = (x_{1,i} + y_i, \dots, x_{n_i,i} + y_i)$, то $\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m \overline{y} = (\overline{x}_1 + y_1, \dots, \overline{x}_m + y_m)$. Нуль $G = G(1)$ будет единицей операды. В случае $P = C(\infty)$ можно превратить семейство $T_P = \{T_P(n) | n \geq 1\}$ в операду, считая, что это и есть операда G в случае, когда G есть полугруппа (по сложению) неотрицательных натуральных чисел.

Рассмотрим теперь одну общую операдную конструкцию. Пусть W — некоторая (нелинейная) операда, обладающая следующим свойством: для каждого $z \in W(n)$ и для любого представления n в виде $n = n_1 + \dots + n_m$ существует лишь конечное число элементов $x_1 \in W(n_1), \dots, x_m \in W(n_m)$, $y \in W(m)$ таких, что $z = x_1 \dots x_m y$. Пусть теперь V — линейная операда. Положим $V^W(n)$ равным множеству *всех* отображений из $W(n)$ в $V(n)$, и определим композицию $V^W(n_1) \times \dots \times V^W(n_m) \times V^W(m) \to V^W(n_1 + \dots + n_m)$, полагая

$$f_1 \dots f_m f(z) = \sum_{x_i \in W(n_i), y \in W(m), x_1 \dots x_m y = z} f_1(x_1) \dots f_m(x_m) f(y) \tag{8}$$

Здесь $f_i \in V^W(n_i)$, $f \in V^W(m)$, $z \in W(n_1 + \dots + n_m)$. Единицей строящейся таким образом линейной операды будет отображение, переводящее единицу операды W в единицу V, а все остальные элементы отображающее в нуль кольца $V(1)$. Симметрическая группа $\Sigma(n)$ действует на $V^W(n)$ следующим образом: $(\sigma f)(x) = \sigma(f(\sigma^{-1} x))$.

Теорема 5.. *Семейство $V^W = \{V^W(n) | n \geq 1\}$ с операцией композиции (8) является операдой.*

Доказательство. Непосредственная проверка определения (см. [1]). □

Один из хорошо известных примеров линейных операд можно построить исходя из K — коммутативного ассоциативного кольца с единицей. Эта операда, которую удобно обозначить тем же символом K, устроена следующим образом: $K(n) = K$ для всех $n \geq 1$, действие Σ_n на $K(n)$ тривиально, и если $x_i \in K(n_i) = K$, $y \in K_m = K$, то $x_1 \dots x_m y \in K(n_1 + \dots + n_m) = K$ есть произведение элементов коммутативного кольца K. Возвращаясь к операдному аналогу редуцированной алгебры инцидентности множества $P = C(\infty)$, получаем следующий результат.

Теорема 6.. *Имеет место изоморфизм операд $R_P \cong K^{T_P}$.*

Доказательство. Очевидно, что операда T_P удовлетворяет условию, наложенному выше на операду W. Поэтому операда K^{T_P} существует. Наличие изоморфизма $K\Sigma_n$-модулей между R_P и $K^{T_P}(n)$ также очевидно, фактически можно даже считать, что эти модули совпадают. Необходимо только показать, что совпадают структуры операд. Пусть $f_i \in R_P(n_i) = K^{T_P}(n_i)$, $f \in R_P(m) = K^{T_P}(m)$, $\gamma \in T_P(n_1 + \dots + n_m) = T_{n_1 + \dots + n_m}$. Тогда в операде R_P имеет место равенство (4). Коэффициенты инцидентности для $P = C(\infty)$ уже вычислены выше. Заметим, что условия (7) означают равенство $\alpha_1 \dots \alpha_m \beta = \gamma$ в операде T_P. Принимая это во внимание, видим, что (4) переписывается в виде

$$f_1 \dots f_m f(\gamma) = \sum_{\alpha_i, \beta, \alpha_1 \dots \alpha_m \beta = \gamma} f_1(\alpha_1) \dots f_m(\alpha_m) f(\beta).$$

Но это в точности совпадает с определением композиции в операде K^{T_P}. $\square$

Заметим еще, что во всех определениях и результатах, приведенных выше, можно было бы заменить коммутативное ассоциативное кольцо K с единицей на коммутативное полукольцо с единицей.

Список литературы

[1] Тронин С.Н., Копп О.А. *Матричные линейные операды* // Изв. вузов. Математика. — 2000. — № 6. — С. 53 – 62.

[2] Айгнер М. *Комбинаторная теория* — М.: "Мир 1982. — 558 с.

[3] Дубиле П., Рота Дж.-К., Стенли Р. *Об основах комбинаторной теории: идея производящей функции* // Перечислительные задачи комбинаторного анализа. — М.: "Мир 1979. — С. 160 – 228.

[4] Стенли Р. *Перечислительная комбинаторика.* — М: "Мир 1990. — 440 с.

[5] Бордман Дж., Фогт Р. *Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах*: Пер. с англ. — М.: Мир, 1977. — 408 с.

[6] Смирнов В.А. *Симплициальные и операдные методы в теории гомотопий.* — М.: Изд-во "Факториал Пресс 2002. — 272 с.

Казанский государственный университет