УЧИТЕЛЬСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ В ТАТАРСТАНЕ

И.С. Григорьева
КФУ,
e-mail: igrigori_@mail.ru

I.S. Grigorieva
CFU,
e-mail: igrigori_@mail.ru

Ключевые слова: математические олимпиады, методические задачи, жюри.

Key words: Mathematical Olympiads, methodics tests, jury.

Аннотация: статья содержит задачи олимпиад для учителей Республики Татарстан, проведенных в 2012–2014 годах. Эти соревнования предназначены для подготовки членов жюри школьного и муниципального этапов математических олимпиад школьников. Задачи посвящены поиску ошибок в «решениях» учеников.

Annotation: this paper presents some problems that were given at Tatarstan Mathematical Teachers' Olympiads held in 2012–2014. The aim of those Teachers' Olympiads is to train members of the Jury for various Mathematical competitions. The idea of these problems is to find mistakes in fictional students' works of such competitions participants.

Математические олимпиады школьников имеют давнюю историю и чёткую структуру. Большую роль в их правильном проведении играет качество проверки работ. На республиканском уровне жюри имеет собственную историю и преемственность: каждый новый член жюри «выращивается» от уровня вчерашнего участника, совершая ошибки и совершенствуясь под присмотром «мэтров».

Однако районные и школьные олимпиады проверяются местным составом, у которого не всегда есть соответствующий опыт. Именно поэтому решено было проводить (по примеру московского опыта) олимпиаду для учителей Татарстана, которая позволила бы «выращивать» опытных проверяющих на местах.

За основу взяты аналогичные конкурсы, проводимые МЦНМО [1]. Однако проводилась не одна общая олимпиада, а четыре: для начальной школы; для 5–6 классов; по алгебре (7–11 класс) и по геометрии (7–11 класс)

Какие именно навыки нужно тренировать у члена жюри? С одной стороны, желательно, чтобы он сам умел решать задачи соответствующего уровня. Однако гораздо важнее – уметь разбираться в решениях учеников.

Конечно, обычно методическая комиссия присылает решения, а также комментарии, как оценивать те или иные ошибки. Однако никакая комиссия не сможет предусмотреть все ошибки, которые могут совершить наши замечательные ученики! Поэтому члену жюри необходимо проявлять самостоятельность в принятии решений.

Соответственно, задания учительской олимпиады делятся на две части. В первой – обычные задачи, их не обязательно выбирать совершенно оригинальными. Поэтому здесь мы их приводить не будем. Больший интерес представляет вторая, методическая часть задания. Основной тип входящих в нее задач – поиск ошибок. Они могут содержаться как в ответах, так и в «условиях» или «решениях». Если некорректно условие, необходимо объяснить, почему это так. Соответственно, и «решение» участника является неверным. Нужно указать ошибку/ошибки. Если неверно только «решение», то надо указать ошибки и привести верное решение.

Как показывает опыт проведения олимпиады, такой подход является непривычным для многих участников. Часто они ограничиваются приведением верного решения, хотя это совсем не главное в задании!

Далее приведены некоторые «методические» задачи олимпиад 2012 и 2014 года. Они разбиты по типам ошибок. Хотя автор понимает, что такое разбиение весьма условно.

Разбор частного случая вместо общего

Задача 1 (*начальная школа и* 5–6 *классы*). Имеется 10 розеток и 5 тройников (тройник – прибор, состоящий из вилки и 3 розеток). Какое наибольшее число электроприборов можно включить в сеть при их помощи?

Решение. Включим все тройники в розетки. Получим 15 мест для включения. Кроме того, у нас останутся 5 неиспользованных розеток. Всего – 20.

Ответ: 20.

Разбор. Объяснение неверное, так как рассмотрен только частный случай включения тройников. Но тройники можно включать и друг в друга! Надо доказать, что при этом не получится больше свободных розеток.

Верное доказательство может быть таким: Без использования тройников мы имеем 10 розеток. Подключая тройник, мы добавляем $3-1=2$ новых места для включения. Таким образом, подключив все тройники (в любые розетки) мы получим $10+2\cdot 5=20$ свободных розеток.

Эта задача, хотя и простая, но в чем-то типичная. Для поиска ответа можно использовать частный случай. Однако перебор всех таких случаев весьма громоздкий. Поэтому окончательное решение основывается совсем на других идеях.

Задача 2 (*начальная школа*). Отец старше сына в три раза, а через 10 лет отец будет старше в 2 раза. Сколько лет сыну сейчас?

Решение. Пусть сыну 1 год, тогда отцу – 3 года, это слишком мало. Также для $2, 3, \ldots$ Проверим число побольше, например, 10. Если сыну 10 лет, то отцу 30. Через 10 лет сыну будет 20 лет, а отцу – 40, то есть как раз вдвое больше. Подходит.

Ответ: сыну 10 лет.

Разбор. С формальной точки зрения решение неполное, не доказано, что нет других решений. Но для учеников начальной школы его можно считать вполне корректным.

Полное решение таково. Разница между возрастами отца и сына не меняется с годами. Сейчас она составляет два возраста сына. Через десять лет разница станет равной возрасту сына, то есть на 10 лет больше, чем сейчас. Значит, увеличение на 10 лет равносильно удвоению возраста, то есть искомое число равно 10.

Задача 3 (5–6 *классы*). В классе присутствуют учитель и несколько учеников. Возраст учителя на 24 года больше среднего возраста учеников и на 20 лет – среднего возраста всех присутствующих. Сколько в классе учеников?

Решение. Будем считать, что все ученики одного возраста, например, 12 лет.

Тогда учителю на 24 года больше, то есть 36 лет. Сумма возрастов всех присутствующих равна $12n + 36$, так что среднее значение равно $\frac{12n+36}{n+1}$, что совпадает с числом $36 - 20 = 16$. Решая соответствующее уравнение, получим, что $n = 5$.

О т в е т: 5 учеников.

Разбор. В «решении» разобран только частный случай, так что его нельзя считать полным. Однако в данном случае ответ, действительно, не зависит от конкретного возраста учеников и учителя. Решение стало бы верным, если предварить его таким абзацем:

«Заменим возрасты всех учеников на среднее значение этих возрастов. При этом суммы возрастов как учеников, так и всех присутствующих не изменятся, не изменятся и их средние значения. Кроме того, ко всем указанным возрастам можно прибавить или вычесть одно и то же число, тогда и средние значения изменятся на то же число. Разницы средних не изменятся. Поэтому возраст учеников можно положить равным любому числу.»

Более того, можно взять за средний возраст учеников не 12, а 0, тогда вычисления станут еще проще. Решение примет такой вид:

«Вычтем из возрастов всех людей средний возраст школьников, тогда это среднее станет равным 0. Все средние изменятся на одно и то же число, так что разницы между средними не изменятся. Возраст учителя на 24 года больше 0, то есть 24 года. Среднее значение возрастов на 20 лет меньше 24, то есть составляет 4 года. Но сумма всех возрастов равна 24 годам, так что в классе присутствуют $24 : 4 = 6$ человек.»

Конечно, ждать такого полного решения от учеников не приходится. Поэтому решение, приведенное в условии, можно принять, но, конечно, снять некоторое (небольшое) число баллов.

Можно решить задачу алгебраически. Пусть сумма возрастов учеников равна S, их число – n, а возраст учителя – x. Первое условие можно записать так: $x = \frac{S}{n+24}$, второе – в виде $x = \frac{S+x}{n+1} + 20$. Из первого уравнения $S = (x - 24)n$, подставляем во второе: $(n + 1)(x - 20) = S + x = (x - 24)n + x$. Упрощая равенство, получаем, что $20n + 20 = 24n$, откуда $n = 5$.

О т в е т: решение неполное,
однако основная идея схвачена.

Неявные предположения

Задача 4 (*начальная школа*). После окончания соревнования трёх победительниц спросили, какое место заняла каждая из них.

– Я заняла первое, – сказала Галя.

– Я заняла не первое, – сказала Люда.

– Одна из них сказала правду, а другая – нет, – прокомментировала Наташа.

Какое место заняла Наташа, если ее слова правдивы?

Р е ш е н и е. В задаче говорится только о первом месте, кто занял второе или третье мы узнать не можем. Значит, Наташа заняла первое место.

Разбор. Ответ верный, а рассуждение – нет. Ученик предполагает, что на основе данных вывод можно сделать *однозначно*. Но, вообще говоря, существуют задачи с несколькими решениями (ответами).

Правильное решение может быть таким. Если Галя сказала правду, то и Люда сказала правду, так как первое место только одно. Но это противоречит словам Наташи. Значит, Галя соврала, а Люда – нет, то есть обе они не заняли первого места. Но кто-то же из трёх его занял, и это может быть только Наташа.

Задача 5 (*начальная школа*). В книге вырваны страницы с 32-ой по 47-ую. Сколько страниц вырвано?

Р е ш е н и е 1. Вырвано $47 - 32 = 15$ страниц.

Р е ш е н и е 2. Из первых 47 страниц не вырванными оказались 31 страница, значит, вырваны $47 - 31 = 16$ страниц или 8 листов.

Разбор. Заметим, что вырвать из книги можно только целый лист. Но в книгах первая страница листа – нечётная (№ 1, 3, 5 , ...). Значит, либо задача поставлена некорректно (невозможно вырвать страницу 32, не вырвав страницу 31), либо следует считать, что вырваны также страницы 31 и 48, всего 18 страниц или 9 листов.

Такая задача может рассматриваться, скорее, как головоломка для решения и обсуждения в классе, чем олимпиадная.

Существование объекта

Задача 6 (5–6 *классы*). Выберем любым образом 5 человек. Докажите, что по крайней мере двое из них имеют одинаковое число знакомых среди выбранных. Считаем, что «знакомство» всегда взаимно.

Р е ш е н и е. Условие задачи неверное. Может быть так, что у первого 0 знакомых, у второго – 1, и т.д. у пятого – 4, у всех разное число.

Разбор. Решение неверное. Не показано, что такое распределение знакомств возможно. И оно действительно невозможно: если первый человек ни с кем не знаком, то он не знаком и с пятым, который должен быть знаком со всеми. Итак, число знакомых может принимать значения из списка (0, 1, 2, 3) или (1, 2, 3, 4). В обоих случаях на 5 человек приходится по 4 возможных значения. По принципу Дирихле два из них обязательно совпадают.

Задача 7 (*алгебра*). Парабола расположена относительно осей координат так, как показано на рисунке. Прямая является касательной к ней в точке 3. Выразить координаты вершины параболы через параметр c.

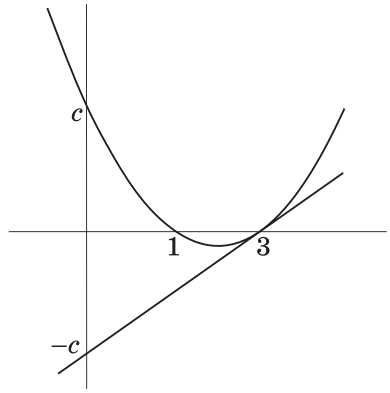

Рис. 1

Р е ш е н и е. Вершина параболы имеет координаты $(2; d)$, значит, уравнение параболы имеет вид $y = k(x - 2)^2 + d = kx^2 - 4kx + 4k + d$. Число c есть значение этого выражения в 0, то есть $c = 4k + d$.

Для записи уравнения касательной найдём угловой коэффициент. Имеем $y' = 2kx - 4k$, $y'(3) = 2k$. Значит, уравнение касательной в точке 3 имеет вид $y_1 = 2k(x - 3)$. Эта прямая пересекает ось Oy в точке $y_1(0) = -6k$, что равно $-c$. Получаем уравнение $4k + d = 6k$, откуда $d = 2k$, $c = 6k$, $k = \frac{c}{6}$, $d = \frac{c}{3}$.

О т в е т. Вершина параболы находится в точке $\left(2; \frac{c}{3}\right)$.

Разбор. Можно заметить, что вершина параболы лежит ниже оси, а мы получили ответ $d = \frac{c}{3} > 0$. Противоречие. Параболы, удовлетворяющей условию задачи, не существует, условие некорректное.

В чем ошибка? Рассуждение, приведенное в задаче, не является равносильным.

Если парабола пересекает ось Ox в точках 1 и 3, то её вершина имеет абсциссу 2, однако обратное неверно! Уравнение параболы будет иметь вид $y = k(x - 1)\times$ $\times(x - 3) = k(x^2 - 4x + 3)$, откуда следует, что $c = y(0) = 3k$. Это противоречит найденному равенству $c = 6k$, т.к. $k > 0$.

Примечание. Эта задача оказалась весьма трудной. Многие участники предлагали свои решения, получая другой результат. Однако они не объясняли, почему же два решения дают разный ответ?

Задача 8 (5–6 *классы*). Прямоугольник разделён двумя вертикальными и двумя горизонтальными отрезками на девять прямоугольных частей. Площади некоторых из получившихся частей указаны на рисунке. Найдите площадь нижней левой части.

30		20
21	35	
?	10	8

Решение. Пусть высота верхнего левого прямоугольника равна 10, тогда его ширина равна $\frac{30}{10} = 3$, ширина правых прямоугольников – $\frac{20}{10} = 2$. Высота правого нижнего прямоугольника равна $\frac{8}{2} = 4$. Значит, искомая площадь равна $3 \cdot 4 = 12$.

Разбор. В решении произвольно выбрана высота верхнего прямоугольника, так что разобран только частный случай. Впрочем, это не повлияло на ответ. Действительно, если вместо 10 считать высоту равной некоторому числу x, получим последовательно для тех же величин значения $\frac{30}{x}$, $\frac{20}{x}$, $\frac{8}{\frac{20}{x}} = \frac{2x}{5}$, так что искомая площадь равна $\frac{30}{x} \cdot \frac{2x}{5} = 12$.

Однако можно заметить, что использованы не все данные, представленные в условии. Можно ли подсчитать ту же площадь по-другому? Например, начав вычисления с прямоугольника площадью 21, получим, что искомая площадь равна 6. Значит, численные данные задачи не согласованы, условие некорректное (такого разбиения на прямоугольники не существует).

a		b
c		d

Можно провести анализ условия и найти ограничения на численные значения. Рассмотрим 4 прямоугольника, с площадями a, b, c, d, лежащие на пересечении двух горизонтальных и двух вертикальных полос. Заметим, что прямоугольники a и b имеют общую высоту, так что их площади относятся как длины их горизонтальных сторон. В таком же отношении находятся и площади c, d. Получаем, что $a : b = c : d$, или $ad = bc$. Для четырёх прямоугольников, находящихся в левом нижнем углу (исходная задача) имеем $21 : 10 \neq 1221 : 35$, так что разбиение, приведенное в задаче, невозможно.

Ответ. Задача некорректна.

Неравносильные преобразования

Задача 9 (*алгебра*). Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2 x = 0.$$

Решение. Введём обозначение $t = \operatorname{tg} x$. Имеем $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+t}{1-t}$, $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, так что уравнение приобретает вид

$$\frac{1+t}{1-t} + \frac{t^2}{1+t^2} = 0.$$

Умножим равенство на $1 - t$ и $1 + t^2$, получим $(1 + t)(1 + t^2) + (1 - t)t^2 = 0$, то есть $2t^2 + t + 1 = 0$. Это уравнение не имеет решений.

О т в е т: решений нет.

Разбор. Ошибка возникла при применении формулы $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+t}{1-t}$. Она верна, только если существуют все входящие в неё тангенсы. Проверим остальные случаи. Если $\operatorname{tg} x = 1$, то $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$. для этих углов $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ не существует, x не входит в ОДЗ. С другой стороны, $\operatorname{tg} x$ не существует при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, все эти значения являются корнями уравнения.

О т в е т: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

Эта задача была рассмотрена в [2].

Задача 10 (*алгебра*). Решить уравнение $x^2 + 2x \sin xy + 1 = 0$.

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде $x^2 + 2x \sin xy + \sin^2 xy + \cos^2 xy = 0$. Выделяем полный квадрат:

$$(x + \sin xy)^2 + \cos^2 xy = 0.$$

Сумма квадратов равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое обращается в 0. Значит, $\cos xy = 0$ и $x = -\sin xy$. Но, если косинус равен 0, то синус этого же аргумента равен ± 1. Но тогда и x принимает значения ± 1. Подставляя эти значения в косинус и пользуясь его чётностью, получаем $\cos y = 0$, откуда $y=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

Разбор. В ответе не указано, что k – целое, однако на олимпиаде эту погрешность можно считать несущественной. Ошибка состоит в неравносильном преобразовании, которое привело к появлению лишних решений.

Действительно, подставляя x в первое уравнение системы, получаем, что

$$\pm 1 + \sin(\pm 1y) = 0,$$

или, в силу нечётности $\sin$, $1 + \sin y = 0$. Значит, $\sin y = -1$, и решения, соответствующие $\sin y = 1$ надо отбросить.

О т в е т: $x = \pm 1$, $y=\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

Несколько вариантов

Существует целый класс задач, в которых условие допускает разные варианты реализации. При этом ученик может не заметить, что разобрал не все варианты.

Особенно много таких задач возникает в геометрии. Например, отрезок длины a можно отложить по прямой влево и вправо, то же касается углов. Кроме того, условие может быть сформулировано нарочито неоднозначно. Скажем, указано, что треугольник прямоугольный, но не указано, какой именно его угол – прямой.

Задачи такого типа на олимпиадах были заимствованы из статьи [3].

Логические ошибки

Задача 11 (5–6 *классы*). Фотография размером 8 см × 10 см заключена в рамку постоянной ширины. Площадь рамки в 2 раза меньше, чем площадь фото. Найти ширину рамки.

Р е ш е н и е. Площадь фото равна 80 см^2, его периметр – 36 см. Площадь рамки равна 40 см^2, значит, ее ширина есть $40:36=1\frac{1}{19}$ (см).

Разбор. Рамка не является прямоугольником, так что ее площадь нельзя вычислять как произведение длины на ширину. Если бы эта задача была предложена старшим школьникам, они могли бы решить задачу алгебраически, она сводится квадратному уравнению. Однако при хорошо подобранных численных данных её можно решить и без уравнений. Например, подбором. Площадь рамки вычислена правильно, она равна 40 см.

Рамка состоит из 4 прямоугольников и 4 квадратов. Возьмем для начала $x = 1$, что даёт рамку площадью $8 + 10 + 8 + 10 + 4 \cdot 1 = 40$. Подходит! Можно подсчитать площадь рамки и по-другому. Стороны большого прямоугольника при $x = 1$ равны 10 и 12 см соответственно. Его площадь равна 120, что совпадает с $80 + 40$ (см^2).

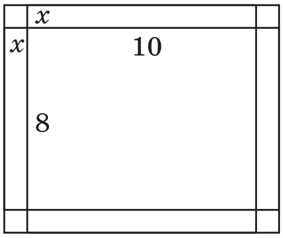

Рис. 2

Ясно, что у более широкой рамки площадь будет больше, а более узкой – меньше, так что решение единственное.

Задача 12 (5–6 *классы*). Выпишем числа $1, 2, \ldots, n$ $(n \geq 10)$. Подсчитаем, сколько раз в них повторяются разные цифры. Может ли при некотором n оказаться, что двоек больше, чем единиц?

Р е ш е н и е. При $n = 1$ единиц больше (двоек нет). При $2 \leq n \leq 9$ – и тех и других по одной. Далее начинаются числа $10, 11, 12, \ldots,$ у которых в каждом есть единица, а двойки встречаются редко. Значит, при $n \geq 10$ единиц всегда больше, чем двоек.

Разбор. И рассуждение, и вывод неправильные. На третьем десятке первая цифра равна 2, так что этих цифр в списке достаточно много. Например, при $n = 29$ число единиц и число двоек равны 13 (их поровну).

Покажем, что ответ на вопрос задачи отрицательный. Здесь можно применить стандартную идею: чтобы сравнить два множества, поставим элементам одного в соответствие элементы другого. Каких «не хватит», тех меньше. Рассмотрим число, у которого на некотором месте стоит 2, например, $a2bc$. Перед ним в списке стоит число $a1bc$. Значит, каждой двойке на каждом месте соответствует ровно одна единица на том же месте. Поэтому единиц не меньше, чем двоек.

Задача 13 (*геометрия*). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ суммы квадратов противоположных сторон равны. Докажите, что диагонали четырёхугольника перпендикулярны.

Р е ш е н и е. Предположим, что диагонали четырёхугольника перпендикулярны. Обозначим точку пересечения диагоналей через O. Применяя теорему Пифагора к треугольникам OAB, OBC, OCD, ODA, получаем, что суммы квадратов каждой пары противоположных сторон равны $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$, а значит, равны между собой.

Разбор. Доказано утверждение, обратное заданному. Некоторые школьники считают, что данное рассуждение есть доказательство «от противного». Но, конечно, это не верно. Доказательство «от противного» должно начинаться с предположения, что диагонали не перпендикулярны. Тогда они образуют две пары вертикальных углов, в одной углы тупые, в другой – острые. Для пары сторон, лежащих напротив тупых углов сумма квадратов больше, чем $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$, для второй пары – меньше. Поэтому такие суммы не могут быть равны.

Задача 14 (*алгебра*). Доказать, что при делении одного целого положительного числа на другое может получиться 0.

Р е ш е н и е. Рассмотрим среди всех дробей $\frac{m}{n}$ с натуральными числителем и знаменателем наименьшую. Если она не равна 0, то её половина меньше её самой, что противоречит выбору дроби. Значит, наименьшая дробь вида $\frac{m}{n}$ равна 0.

Разбор. Условие задачи, конечно, неверно. Ошибка решения в том, что среди таких дробей просто нет наименьшей.

Как показал опыт, сформулировать эту простую мысль удается не всем! Например, предлагалось такое объяснение: раз дробь равна 0, то её половина не меньше её. Но это рассуждение не соответствует сделанному предположению.

Задача 15 (*алгебра*). В определении непрерывности есть утверждение: «Для всех x таких, что $|x - a| < \delta$, выполняется $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.» Для фиксированных $f(x)$, a найдём все пары чисел ε, δ, для которых выполняется это высказывание. Является ли ε функцией от δ или δ функцией от ε? Будет ли эта функций возрастающей? Убывающей?

Решение. Соотношение $|x - a| < \delta$ означает, что x пробегает интервал $(a - \delta;\ a + \delta)$. Соответствующие значения $f(x)$ образуют некоторое множество, которое можно заключить в интервал $(f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon)$. Значит, число ε определяется числом δ. Поэтому $\varepsilon = \varphi(\delta)$. Заметим, что, чем меньше δ, тем меньше множество значений функции $f(x)$ и тем меньше ε. Поэтому функция $\varphi(\delta)$ – убывающая.

Разбор. Ответы на оба вопроса неверные. Предположим, что мы показали, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon_0$. Тогда неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ выполняется для всех ε, больших ε_0. Аналогично, если мы подобрали δ по ε, то подойдёт и любое меньшее δ. Итак, для каждого δ существует бесконечное число подходящих ε, и для каждого ε – бесконечное число δ. Таким образом, ε не является функцией аргумента δ и δ не является функцией аргумента ε.

Поскольку функции, о которой идет речь, не существует, то вопросы о ней не имеют смысла, то есть второй вопрос некорректен.

Замечание. Сведения из математического анализа позволяют найти в этом задании некие функции. Среди всех ε, соответствующих конкретному δ, можно найти «наименьшее» (infimum, $\inf \varepsilon$), но для него будет уже выполняться, вообще говоря, нестрогое неравенство $|f(x) - f(a)| \le \varepsilon$. Аналогично при фиксированном ε существует «наибольшее» δ (точнее, supremum, $\sup \delta$). Эти функции – возрастающие (если пользоваться терминами «возрастающая» и «строго возрастающая»).

Разные задачи

Кроме задач на поиск ошибки, в методической части встречались и другие «задачные сюжеты».

Задача 16 (*геометрия*). Антон написал в решении. «Углы треугольника ABC равны углам треугольника PQR и две стороны первого равны двум сторонам второго. Значит, эти треугольники равны». Прав ли он?

Решение. Треугольники с равными углами подобны между собой. Однако для равенства этих треугольников необходимо, чтобы совпадала пара соответственных сторон, то есть сторон, к которым прилегают попарно равные углы. Попробуем построить неравные треугольники, удовлетворяющие условию задачи. Пусть у первого треугольника стороны равны a, b и c, а у второго – a, b и d. Эти тройки чисел пропорциональны друг другу. Например, $a : b = b : c = d : a = k$. Тогда $b = kc$, $a = kb = k^2c$, $d = ka = k^3c$. Числа a, b, и c будут сторонами треугольника, если для них выполняется неравенство треугольника. Можно считать, что $k > 1$, неравенство достаточно проверить для самой длинной стороны a. Должно выполняться соотношение $k^2 < k + 1$. Значит, $1 < k < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Ответ. Нет, вообще говоря, неправ. Треугольники могут быть неравными.

Замечание. Многие участники догадывались, что ответ ученика неверен, так как выполняются не все условия соответствующей теоремы. Однако само по себе это не засчитывалось как решение. Ведь может существовать и другая «теорема», которая в данном случае выполняется. Приведение контрпримера закрывает вопрос. Как мы видим, треугольники, удовлетворяющие «условию Антона» далеко не произвольны.

Задача 17 (*геометрия*). Ученик помнит, что формула площади треугольника имеет вид то ли $S = \frac{abc}{2R}$, то ли $S = \frac{abc}{4R}$. Предложите ему простой способ выбрать правильную формулу.

Решение. Так как формула верна для всех треугольников, достаточно проверить её для самого простого случая. Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 1. Его площадь равна $\frac{1}{2}$, стороны – 1, 1, $2R$, где R – радиус описанной окружности. Значит, $\frac{abc}{R} = 2$. Теперь ясно, что верна последняя из представленных в задаче формул.

Задача 18 (*алгебра*). Учитель хочет дать на контрольной задачу: «Картина имеет размеры a дм × b дм. Её рамка имеет постоянную ширину, по площади в 2 раза меньше, чем сама картина. Найти ширину рамки.» Нужны несколько вариантов этой задачи, в которых a, b – натуральные, а искомая ширина x равна 1. а) Можно ли при этих условиях составить 6 вариантов? Если нет, б) предложите способ порождения таких вариантов для случая, когда x – произвольное натуральное число.

Решение. Пусть x – ширина рамки. Решим сразу п. б). Ширина картины с рамкой равна $a + 2x$, высота – $b + 2x$, так что площадь рамки есть

$$(a+2x)(b+2x) - ab = \frac{ab}{2}.$$

Это уравнение можно переписать в виде $8x^2 + 4(a + b)x = ab$. Будем решать его как диофантово относительно a и b. Имеем $ab - 4(a + b)x = 8x^2$. В левой и правой части добавим слагаемое $16x^2$. Тогда левая часть разложится на множители $(a - 4x)(b - 4x) = 24x^2$. Значит, произвольное решение имеет вид $a = 4x + p$, $b = 4x + q$, где $pq = 24x^2$. В частности, при $x = 1$ получаем, что $pq = 24$. Достаточно рассмотреть случай, когда $p \le q$, таких вариантов 4 (1, 2, 3, 4). Получаем пары сторон (5; 28), (6; 16), (7; 12), (8; 10).

Ответ. а) (5; 28), (6; 16), (7; 12), (8; 10).
б) $a = 4x + p$, $b = 4x + q$, где $pq = 24x^2$.

В п. б) можно придумать и другие серии ответов. Решением будет считаться любая из них (полное решение не обязательно).

Если положить $p = kx$, $q = lx$, $kl = 24$, получим решения вида $a = (k + 4)x$, $b = (l + 4)x$. Однако такая серия решений не совсем подходит к условию, так как задания разных вариантов будут пропорциональны друг другу.

Заключение

Опыт проведения учительских олимпиад 2012–2014 года показал, что они вызывают большой интерес среди учителей республики. Однако не все участники хорошо представляют себе, что от них требуется, особенно при решении задач методического блока. Поэтому публикация и разбор задач прошлых лет является полезным подспорьем для будущих участников.

Немного об организационной составляющей. Олимпиады проводились ИРО (Институтом развития образования) РТ. К сожалению, пока не удалось провести олимпиаду в очной форме, она проводилась в заочной (электронной) форме. С большим сожалением следует отметить, что многие учителя не были самостоятельны в решениях: находили похожие задачи в интернете или «списывали» друг у друга. В случае, если такие нарушения были явными, участники снимались с конкурса. В случае проведения новых олимпиад в электронной форме этот момент следует учесть и организаторам олимпиады, и методической комиссии.

Литература

1. http://www.mccme.ru/oluch/.

2. *Григорьева И.С.* Такой простой знак равенства. // Математика в школе. – 2000, № 10. – С. 53–54.

3. *Григорьева И.С.* Возможны варианты // Математика в школе. – 2006, № 8. – С. 42–51.