

М. И. Киндер

Казанский государственный университет,

mkinder@rambler.ru

ОБ ИДЕАЛЬНЫХ И СОВЕРШЕННЫХ РАЗБИЕНИЯХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Всякое представление натурального числа суммой натуральных чисел называется разбиением числа. Разбиения изучаются в задачах, прежде всего, комбинаторного и теоретико-числового характера. К классическим комбинаторным относятся задачи подсчета и перечисления разбиений данного типа, в теории чисел решают проблемы об аддитивных представлениях чисел с арифметическими ограничениями на слагаемые.

Разбиение неотрицательного целого числа $M = m_1 + m_2 + \dots + m_s$ назовем *идеальным*, если каждое целое число m от 0 до M можно представить единственным образом в виде $m = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \dots + \alpha_s m_s$, где каждое $i \in \{-1, 0, 1\}$, при этом повторяющиеся части m_i считаются неразличимыми. Если все части разбиения m_i рассматривать как разновесы для весов, каждое такое представление указывает единственный способ взвешивания массы m с помощью гирь массой m_i . При этом $\alpha_i = 0$ означает, что гиря с массой m_i не участвует во взвешивании, а в случае $\alpha_i = -1$ ($\alpha_i = 1$) гиря m_i находится на той же (на другой) чашке весов, что и масса m .

Известно [1], [2], что количество идеальных разбиений числа совпадает с количеством упорядоченных разложений числа $2M + 1$ в произведение натуральных чисел без единичных множителей. Пусть $N > 1$. Количество нетривиальных упорядоченных факторизаций числа $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s}$ зависит только от показателей n_1, n_2, \dots, n_s , обозначим это количество через $T(n_1, n_2, \dots, n_s)$.

Теорема 1. *Для натуральных чисел, разложения которых не содержат квадратов простых чисел, справедливо рекуррентное соотношение*

$$T(1^s) = \sum_{k=0}^{s-1} C_s^k T(1^k), \quad T(1^0) = 1.$$

В следующих теоремах отмечается связь известных комбинаторных чисел и специальных функций с функцией $T(n_1, n_2)$.

Теорема 2. *Количество упорядоченных факторизаций числа $N = p_1 p_2 \dots p_s$ равно экспоненциальному числу Белла порядка s , то есть*

$$T(1, 1, \dots, 1) = \sum_{k=1}^s k! S(s, k) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} C_k^i i^s,$$

где $S(s, k)$ — число Стирлинга второго рода.

Теорема 3. *Количество упорядоченных факторизаций числа $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2}$ равно*

$$\begin{aligned} T(n_1, n_2) &= (-1)^{n_1} 2^{n_2-1} P_{n_1}^{(n_2-n_1, 0)}(-3) = \\ &= \frac{2^{n_1-n_2-1}}{n_1!} \cdot \frac{d^{n_1}}{dx^{n_1}} \left[(1+x)^{n_1} (1-x)^{n_2} \right] \Big|_{x=-3}, \end{aligned}$$

где $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ — многочлен Якоби степени n .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. MacMahon P. A. *Memoir on the Theory of the Compositions of Numbers* // Philosophical Transactions of the Royal Society of London (A). — 1893, **184**. — p. 835-901.

2. Knopfmacher A. Mays M. *Ordered and Unordered Factorizations of Integers* // Mathematica Journal. — 2006, **10**. — p. 72-89.