11. Степенные ряды (область сходимости)

Будем рассматривать степенные ряды, то есть функциональные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n, \tag{$*$}$$

где $b, a_0, a_1, a_2, \ldots$ — некоторые числа. Простой пример степенного ряда это ряд $1 + x + x^2 + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ — сумма членов геометрической прогрессии — который сходится тогда и только тогда, когда $-1 < x < 1$.

Для ряда $(*)$ *радиус сходимости* R вычисляется, исходя из формулы

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad (\text{считаем } \ \frac{1}{0} = \infty, \ \frac{1}{\infty} = 0).$$

Более простые формулы для нахождения R:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

если написанные пределы существуют.

Внутри *интервала сходимости* $(b-R, b+R)$, то есть при $b - R < x < b + R$, степенной ряд $(*)$ сходится, причем абсолютно. Если же $x \in [b-R, b+R]^C$, то ряд $(*)$ расходится. В граничных точках $x = b \pm R$ нужно проводить специальное исследование. Отметим, что обычно применение признаков Коши или Даламбера в предельной форме не дает возможности сделать однозначный вывод и нужно использовать другие методы.

Пример (№2814). В обозначениях $(*)$ имеем: $b = 0$, $a_0 = 0$, $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ $(n > 0)$. Вычислим:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4},$$

откуда радиус сходимости $R = 4$, интервал сходимости $(-4, 4)$.

Подставив граничную точку $x = 4$, получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Для него $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{2n+2}{2n+1} > 1$, то есть $c_{n+1} > c_n$, значит $c_n \not\to 0$ при $n \to \infty$, и заключаем, что в граничной точке $x = 4$ интервала сходимости исследуемый степенной ряд расходится.

В другой граничной точке, $x = -4$, исследование проводится аналогичным образом: убеждаемся. что модуль общего члена получающегося ряда не стремится к нулю, и, следовательно, ряд расходится.