А. С. Кретов, А. П. Павленко, В. Ф. Снигирев, Функциональный кубический интерполяционный сплайн минимальной приведенной кривизны, *Изв. ИМИ УдГУ*, 2006, выпуск 2(36), 189–192

Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2006. №2(36)

УДК 514:519.6

© **А. С. Кретов, А. П. Павленко, В. Ф. Снигирев**
svf@itm.kstu-kai.ru

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ КУБИЧЕСКИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ СПЛАЙН МИНИМАЛЬНОЙ ПРИВЕДЕННОЙ КРИВИЗНЫ

Ключевые слова: кубический сплайн, функциональный сплайн.

Abstract. It is adduced the modified functional of energy of operator of differential equation of bend of beam for reception of functional cubic spline of piecewise constant rigidity.

Введение. Обоснование постановки задачи

В авиастроении при графическом моделировании внешней поверхности самолета для участков обвода с локальным изменением формы уже давно рекомендовалось применение плазовой рейки с соответствующим локальным уменьшением жесткости [1].

При математическом моделировании таких обводов кубическими сплайнами необходимо условие, обеспечивающее уменьшение жесткостных коэффициентов нужных участков сплайна. Такое условие можно сформулировать на основании аналогии уравнений для получения кубического сплайна и для нахождения прогибов балки. В задаче об изгибе балки условие минимума полной потенциальной энергии деформации балки является важнейшим условием. Выражение для полной потенциальной энергии деформации балки — квадратичный функционал от функций прогибов балки. Из условий минимума этого функционала получаются уравнения для определения прогибов балки и другие соотношения. Аналогичное важное условие сформулировано и для функциональных сплайнов [2]. Функциональный сплайн находится из условий минимума некоторого квадратичного функционала [2].

При постановке задачи получения кубического сплайна как функционального сплайна жесткостные коэффициенты его участков естественно находить из условий минимума функционала, аналогичного функционалу потенциальной энергии деформации балки. Такая постановка задачи получения сплайна соответствует задачам об интерполировании функции и об изгибе балки: при уменьшении изгибной жесткости произвольного участка балки потенциальная энергия деформации балки уменьшается, так как, по сравнению с исходной балкой, неослабленные участки балки разгружаются,

Правильность обсуждаемой постановки задачи дополнительно подтверждает следующий предельный случай. Для обеспечения нулевой изгибной жесткости на каждой опоре балки введем шарнирное соединение ее участков. Тогда при заданных вертикальных смещениях опор участки балки не будут деформироваться, сохранят исходную прямолинейную форму. Потенциальная энергия деформации такой балки с шарнирами на опорах равна нулю.

§ 1. Функционал энергии оператора определяющего уравнения

Кубический сплайн кусочно постоянной жесткости s должен удовлетворять определяющему дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$Ls(x) \equiv B_i s^{IV}(x) = 0 \quad \forall x \in (x_{i-1},\ x_i), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \quad (1.1)$$

где B_i — значение изгибной жесткости i - го участка сплайна $s(x)\ \ \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$; $B_i > 0$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

При интерполировании функции f, известной в узлах сетки $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, для сплайна возможны четыре варианта краевых условий:

$$s'(x_0) = f'(x_0), \quad s'(x_n) = f'(x_n); \quad (1.2)$$

$$s''(x_0) = f''(x_0), \quad s''(x_n) = f''(x_n); \quad (1.3)$$

$$s'(x_0) = s'(x_n), \quad s''(x_0) = s''(x_n); \tag{1.4}$$

$$B_k s'''(x_k - 0) = B_{k+1} s'''(x_k + 0), \quad k = 1,\ n-1. \tag{1.5}$$

Третья производная кубического сплайна является измеримой функцией и поэтому она не имеет след. Следовательно, для нее нельзя формулировать какие-либо условия, относящиеся к граничным точкам. Приведенный вариант условий для значений третьей производной сплайна при $x = x_1$, $x = x_{n-1}$ (1.5) называют обычно краевыми условиями четвертого типа.

Функционал энергии оператора L определяющего уравнения (1.1) записывается в виде [3]:

$$F(s, \mathbf{B}) = (Ls, s), \tag{1.6}$$

где $\mathbf{B} = \{B_i\}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ — вектор значений управляющих жесткостных коэффициентов сплайна; (u, v) - скалярное произведение элементов $u(x)$, $v(x)$; $x \in (a, b)$.

Функционал (1.6) далее необходимо преобразовать (см. [3]) в зависимости от варианта краевых условий сплайна (1.2) – (1.5).

§ 2. Функционал для получения сплайна

Для элементов управляющего вектора $\mathbf{B}$ примем условие:

$$\Phi(\mathbf{B}) = B_0(b - a) - \sum_{i=1}^{n} B_i d_i = 0, \tag{2.1}$$

где $d_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$; B_0 — средневзвешенная жесткость сплайна — назначаемый коэффициент; $B_0 > 0$.

Далее, модифицируя методом неопределенных множителей Лагранжа с помощью условия (2.1) функционал (1.6) , получим:

$$F_1(s, \mathbf{B}, \lambda) = F(s, \mathbf{B}) + \lambda \Phi(\mathbf{B}), \tag{2.2}$$

где λ — скалярный множитель Лагранжа.

§ 3. Об алгоритме решения задачи. Замечания

Для нахождения s, $\mathbf{B}$, λ необходимо решить задачу о минимуме функционала (2.2). В работе для численного решения задачи применен градиентный метод прямой минимизации этого функционала.

При заданном векторе $\mathbf{B}$ из условий минимума функционала (1.6) получается система линейных алгебраических уравнений для вычисления коэффициентов кубического сплайна кусочно постоянной жесткости. Этот результат удобно использовать для построения итерационных процессов решения рассматриваемой задачи.

Значение B_0 должно задаваться с учетом удобства вычислений в алгоритме решаемой прикладной задачи с применением рассматриваемого сплайна.

Значения некоторых элементов вектора $\mathbf{B}$ можно фиксировать.

Выражение для функционала (1.6) можно принять в качестве некоторой обобщенной характеристики кривизны сплайна.

Список литературы

1. Андреев В. А., Зворыкин В. А., Коноров Л. А. и др. Расчет и построение контуров самолета на плазе / Под ред. С. С. Ленькова М.: Оборонгиз, 1960. 492 с.
2. Василенко В. А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука, 1983. 216 с.
3. Снигирев В. Ф. Построение вырождающихся сплайнов для решения задач интерполирования функций и геометрического моделирования линий // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1992. Т. 32, № 7. С. 1142–1143.