УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 150, кн. 1 Физико-математические науки *2008*

УДК 517.54

УРАВНЕНИЕ ГАХОВА ДЛЯ СМЕШАННОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПО ПАРАМЕТРУ X НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ПРОСТОЙ ТОЧКОЙ ВЕТВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

С.Р. Насыров, Л.Ю. Низамиева

Аннотация

Доказана разрешимость аналога уравнения Гахова для внешней обратной краевой задачи на римановой поверхности, содержащей единственную точку ветвления на бесконечности. Доказательство основано на методе вращения векторных полей.

Ключевые слова: смешанная обратная краевая задача, уравнение Гахова, вращение векторного поля, риманова поверхность.

Введение

Смешанные обратные краевые задачи для аналитических функций являются важным классом краевых задач с неизвестной (свободной) границей. Как правило, в этих задачах ищутся область с частично неизвестной границей и аналитическая в этой области функция по заданным краевым условиям. На неизвестной части краевые значения неизвестной функции задаются через некоторый параметр, в качестве которого выбирается дуговая абсцисса s, декартова координата x, полярный радиус или полярный угол.

В зависимости от того, содержит искомая область бесконечно удаленную точку или нет, задачи делятся на два класса: внешние и внутренние.

Если известная часть границы полностью отсутствует, то такие задачи называют обратными краевыми задачами. Их систематическое исследование началось с работ Г.Г. Тумашева и М.Т. Нужина (см., например, [1]). Одной из основных обратных краевых задач для аналитических функций является внешняя обратная краевая задача по параметру s в постановке Ф.Д. Гахова. Ф.Д. Гахов нашел уравнение для определения полюса функции, обратной к искомой, и доказал его разрешимость. Это уравнение стало называться его именем. Оно изучалось многими авторами, в том числе Л.А. Аксентьевым и его учениками (см., например, [2, 3]).

Впервые постановку внутренней смешанной обратной краевой задачи по параметру x дал В.Н. Монахов [4]. Им исследовалась разрешимость задачи для областей с полигональной известной границей, а затем аппроксимацией – и для произвольных спрямляемых границ. В работах [5, 6] было замечено, что с использованием результатов [4] можно доказать разрешимость внутренней задачи на римановых поверхностях без точек ветвления с достаточно произвольной границей. Более подробно история вопроса и библиография приведены в [7].

Впервые внешняя смешанная обратная краевая задача по параметру x была исследована в [8]. Г.Р. Галиуллиной получен аналог уравнения Ф.Д. Гахова для отыскания положения неизвестного полюса в верхней полуплоскости в случае, когда известная часть границы полигональна, предложен метод доказательства разрешимости этого уравнения с использованием техники вращения векторных полей.

Представляет интерес исследование смешанных обратных краевых задач на римановых поверхностях с точками ветвления. В [7] была рассмотрена внутренняя смешанная обратная краевая задача по параметру x на полигональных римановых поверхностях с простыми точками ветвления и доказана локальная единственность решения.

В настоящей статье дается постановка внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x на полигональной римановой поверхности, содержащей единственную точку ветвления, расположенную над бесконечно удаленной точкой. Построен аналог уравнения Гахова и доказана его разрешимость.

1. Постановка задачи и построение интегрального представления решения

Пусть D_z – односвязная многолистная область (риманова поверхность) над сферой Римана, содержащая ровно одну точку P, лежащую над ∞ (точка P – простая точка ветвления, других точек ветвления в D_z нет), с границей L_z, которая состоит из известной дуги L_z^1 и искомой дуги L_z^2. В дальнейшем будем считать, что:

1) L_z^1 – полигон с вершинами $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \ldots, n$, причем положительное направление обхода L_z^1 соответствует движению от z_1 к z_n, и $x_1 = a < b = x_n$;

2) L_z^2 такова, что любая прямая, параллельная мнимой оси, пересекает ее не более, чем в одной точке;

3) в своих граничных точках D_z локально однолистна (рис. 1).

Требуется найти L_z^2 и аналитическую в области D_z функцию $\omega(z)$, конформно отображающую D_z на жорданову область D_ω и удовлетворяющую следующим краевым условиям:

а) В плоскости $\omega = \varphi + i\psi$ дуге L_z^2 соответствует дуга L_ω^2 с уравнением $\varphi = f_1(x)$, $\psi = f_2(x)$, где $f_1(x) + if_2(x)$, $x \in [a, b]$, – граничные значения искомой аналитической функции $\omega(z)$ на L_z^2 и $x = \operatorname{Re} z$. Будем предполагать, что функция $\omega(x)$ непрерывно дифференцируема и $\omega'(x) \neq 0$, $a \leq x \leq b$.

б) Уравнение дуги L_ω^1, дополняющей L_ω^2 до замкнутого контура $L_\omega = \partial D_\omega$,

$$\Phi(\varphi, \psi) = 0,$$

считается заданным. Предполагается, что функция $\Phi(\varphi, \psi)$ дважды непрерывно дифференцируема, и гладкие дуги L_ω^1 и L_ω^2 образуют в точках стыка ω_1 и ω_2 ненулевые углы $\pi\gamma_1$ и $\pi\gamma_2$.

Проведем из точек z_1, z_n вверх вертикальные лучи l_1, l_n и обозначим через $\pi\alpha_1$, $\pi\alpha_n$ углы, образованные первым и $(n-1)$-м звеньями ломаной L_1^z с этими лучами. Пусть $\pi\alpha_k$ – внутренние углы области D_z в точках z_k, $k = 2, \ldots, n-1$.

По аналогии с внутренней задачей [6] нетрудно показать, что необходимым условием разрешимости рассматриваемой нами задачи является следующее ограничение на известную часть границы: ломаная L_z^1, дополненная лучами l_1, l_n, является границей многоугольной римановой поверхности без точек ветвления, причем

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - 1) = 5.$$

В дальнейшем будем считать приведенные выше условия выполненными.

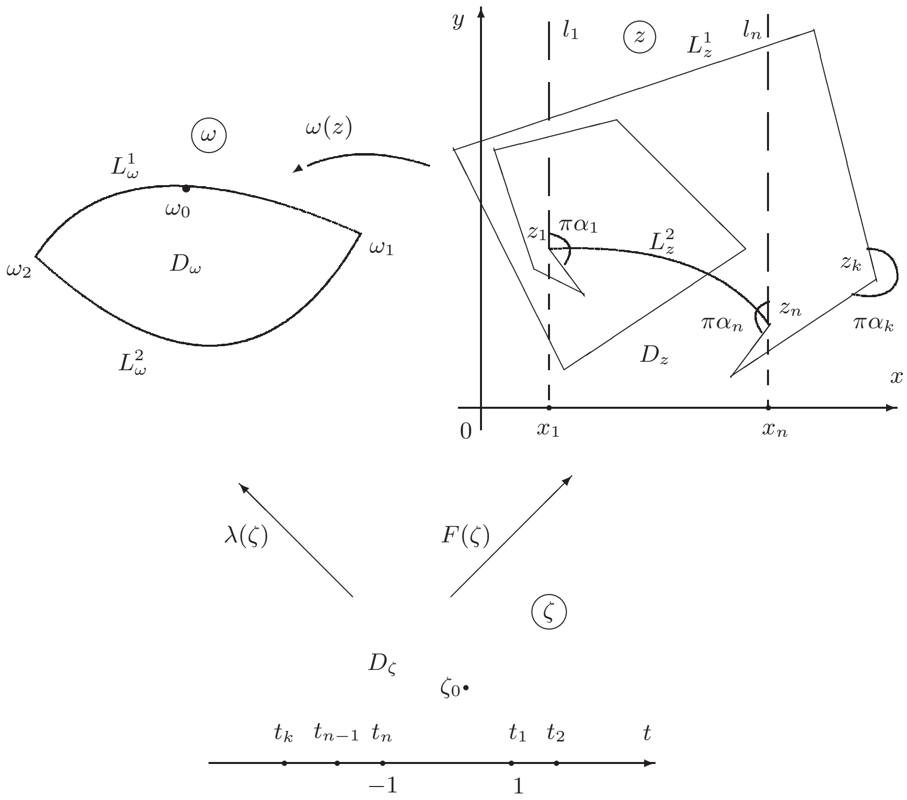

Рис. 1

Для нахождения интегрального представления решения воспользуемся методом, предложенным в [4]. Конформно отобразим полуплоскость $D_\zeta = \{\operatorname{Im}\zeta > 0\}$ на D_ω функцией $\omega = \lambda(\zeta)$ так, чтобы точки ∞, $t_1 = 1$, $t_n = -1$, лежащие на вещественной оси, переходили соответственно в фиксированные точки $\omega_0 \in L_\omega^1$, ω_1 и ω_2. Пусть t_k – точки на границе D_ζ, соответствующие вершинам ломанной L_z^1, $k = 1,\ldots,n$. Обозначим через ζ_0 точку в D_ζ, соответствующую точке ∞ в плоскости z.

Определим функцию $z = F(\zeta) = \omega^{-1}(\lambda(\zeta))$, конформно отображающую верхнюю полуплоскость D_ζ на область D_z. Если она известна, то известно и уравнение $z = F(t)$, $-1 \le t \le 1$, контура L_z^2, а функция $\omega(z)$ восстанавливается по формуле $\omega = \lambda(F^{-1}(z))$. Поэтому в дальнейшем функцию $z = F(\zeta)$ будем называть решением задачи.

Найдем краевые условия, которым на вещественной оси удовлетворяет функция $z = F(\zeta) = x(\zeta) + iy(\zeta)$. Сравнивая граничные значения функций $\omega(z)$ и $\lambda(\zeta)$ на участках, соответствующих L_ω^2, получим соотношение

$$f_1(x) + if_2(x) = \lambda(t),$$

из которого найдем зависимость

$$x = H(t), \quad |t| < 1. \tag{1}$$

Пусть уравнения прямых, на которых лежат стороны полигона, имеют вид

$$a_k x - b_k y = c_k, \quad k = 1,\ldots,n-1.$$

Тогда

$$a_k x(t) - b_k y(t) = c_k, \quad t \in (t_k, t_{k+1}), \quad k = 1, \dots, n-1. \tag{2}$$

Отметим, что здесь через (t_k, t_{k+1}) обозначена часть границы D_ζ в расширенной комплексной плоскости от точки t_k от точки t_{k+1}, проходимая в положительном направлении.

Дифференцируя (1) и (2), получим:

$$a_k \frac{dx(t)}{dt} - b_k \frac{dy(t)}{dt} = 0, \quad t \in (t_k, t_{k+1}), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = h(t), \quad t \in (-1, 1),$$

где $h(t) = H'(t) \le 0$ при $t \in (-1, 1)$, так как функция $x(t)$ монотонно убывает.

Полученные условия представляют собой краевую задачу Гильберта с разрывными коэффициентами (см., например, [9]) для функции $dz(\zeta)/d\zeta$ в полуплоскости D_ζ:

$$\mathrm{Re}[(a(t) + ib(t))dz(t)/dt] = c(t), \; t \in (-\infty, \infty),$$

где

$$a(t) = \begin{cases} a_k, & t \in (t_k, t_{k+1}), \quad k = 1, \dots, n-1, \\ 1, & t \in (-1, 1), \end{cases}$$

$$b(t) = \begin{cases} b_k, & t \in (t_k, t_{k+1}), \quad k = 1, \dots, n-1, \\ 0, & t \in (-1, 1), \end{cases}$$

$$c(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 1, \\ h(t), & t \in (-1, 1). \end{cases}$$

Решение ищем в классе функций $dz(\zeta)/d\zeta$, голоморфных в $D_\zeta \setminus \{\zeta_0\}$, имеющих полюс третьего порядка в точке ζ_0, непрерывно продолжимых на границу $\overline{D}_\zeta$ за исключением, быть может, точек t_k, $1 \le k \le n$, ограниченных в точках t_k, соответствующих вершинам полигона с углами, большими π, и имеющих интегрируемые особенности в остальных точках t_k.

Перепишем задачу Гильберта с разрывными коэффициентами в виде

$$\mathrm{Re}[(a(t) + ib(t))\Phi(t)] = c(t)|t - \zeta_0|^6,$$

где

$$\Phi(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^3 (\zeta - \overline{\zeta}_0)^3 dz(\zeta)/d\zeta.$$

Рассмотрим функцию

$$\Pi(\zeta) = e^{i\mu} \prod_{k=1}^{n} (\zeta - t_k)^{\alpha_k - 1}.$$

Она является аналитической в D_ζ. Фиксируем некоторую однозначную ветвь этой функции и подберем вещественную константу μ таким образом, чтобы $\Pi(t) < 0$, $t \in (-1, 1)$.

Пусть $\alpha_1 \le 1$, $\alpha_n \le 1$. Функция $\Pi(\zeta)$ может быть взята за каноническую функцию однородной задачи, и тогда решение запишется в следующем виде:

$$\Phi(\zeta) = \frac{dz(\zeta)}{d\zeta} (\zeta - \zeta_0)^3 (\zeta - \overline{\zeta}_0)^3 = \frac{\Pi(\zeta)}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{h(t)|t - \zeta_0|^6}{\Pi(t)(t - \zeta)} \, dt + P(\zeta)\Pi(\zeta),$$

где $P(\zeta)$ – некоторый многочлен.

Нетрудно видеть, что на бесконечности $|\Pi(\zeta)| \sim |\zeta|^d$, где $d = \sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k - 1) = 5$. Чтобы искомый контур был конечен, следует положить $P(\zeta) \equiv 0$, так как

$$\frac{\Pi(\zeta)}{(\zeta-\zeta_0)^3(\zeta-\overline{\zeta}_0)^3} \sim \frac{1}{\zeta}, \quad \zeta \to \infty.$$

Итак, единственное решение задачи в случае $\alpha_1 \leq 1$, $\alpha_n \leq 1$, имеет вид

$$z = F(\zeta) = z_1 + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{\zeta} \frac{\Pi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-\zeta_0)^3(\zeta-\overline{\zeta}_0)^3}\int\limits_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^6}{\Pi(t)(t-\zeta)}\,dt. \tag{3}$$

Очевидно, что (3) определяет одно из решений задачи и в случае, когда $\alpha_1 > 1$ или $\alpha_n > 1$.

Отметим, что в интегральное представление решения (3) входят акцессорные параметры t_k, $2 \leq k \leq n-1$. Проблема определения этих параметров является отдельной сложной задачей и в данной статье не исследуется. Основное внимание уделяется вопросу об однозначности аналитической функции, определяемой этим интегральным представлением.

2. Разрешимость уравнения Гахова

Условием однозначности функции $F(\zeta)$, определенной формулой (3), будет служить равенство $c_{-1} = 0$, где c_{-1} – вычет функции $dF(\zeta)/d\zeta$ в точке $\zeta = \zeta_0$. Имеем:

$$\operatorname{res}_{\zeta=\zeta_0}\frac{dF(\zeta)}{d\zeta} = \frac{1}{2}\lim_{\zeta\to\zeta_0}\frac{d^2}{d\zeta^2}\left\{(\zeta-\zeta_0)^3\frac{dz(\zeta)}{d\zeta}\right\}.$$

Вычислим производные функции $(\zeta-\zeta_0)^3 dF(\zeta)/d\zeta$:

$$\frac{d}{d\zeta}\left[(\zeta-\zeta_0)^3\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\right] = \frac{\Pi(\zeta)}{\pi i(\zeta-\overline{\zeta}_0)^3}\left\{\left[-\frac{3}{\zeta-\overline{\zeta}_0}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta-t_j}\right]\widetilde{M}(\zeta)+\widetilde{N}(\zeta)\right\},$$

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}\left[(\zeta-\zeta_0)^3\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\right] = \frac{\Pi(\zeta)}{\pi i(\zeta-\overline{\zeta}_0)^3} \times$$
$$\times\left\{\widetilde{M}(\zeta)\left[\frac{12}{(\zeta-\overline{\zeta}_0)^2}-\frac{6}{\zeta-\overline{\zeta}_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta-t_j}+\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta-t_j}\right)^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{(\zeta-t_j)^2}\right]+\widetilde{N}(\zeta)\left(2\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta-t_j}-\frac{6}{\zeta-\overline{\zeta}_0}\right)+2\widetilde{Q}(\zeta)\right\},$$

где $\beta_j = \alpha_j - 1$, $j = 1,\ldots,n$,

$$\widetilde{M}(\zeta) = \int\limits_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^6}{\Pi(t)(t-\zeta)}\,dt, \quad \widetilde{N}(\zeta) = \int\limits_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^6}{\Pi(t)(t-\zeta)^2}\,dt, \quad \widetilde{Q}(\zeta) = \int\limits_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^6}{\Pi(t)(t-\zeta)^3}\,dt.$$

Тогда

$$\operatorname{res}_{\zeta=\zeta_0}\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}=\frac{\Pi(\zeta_0)}{2\pi i(\zeta_0-\overline{\zeta}_0)^3}\left\{M(\zeta_0)\left[\frac{12}{(\zeta_0-\overline{\zeta}_0)^2}-\right.\right.$$
$$-\frac{6}{\zeta_0-\overline{\zeta}_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta_0-t_j}+\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta_0-t_j}\right)^2-\left.\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{(\zeta_0-t_j)^2}\right]+$$
$$\left.+N(\zeta_0)\left(2\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta_0-t_j}-\frac{6}{\zeta_0-\overline{\zeta}_0}\right)+2Q(\zeta_0)\right\},$$

где

$$M(\zeta_0)=\int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^6}{\Pi(t)(t-\zeta_0)}\,dt,\quad N(\zeta_0)=\int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^6}{\Pi(t)(t-\zeta_0)^2}\,dt,\quad Q(\zeta_0)=\int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^6}{\Pi(t)(t-\zeta_0)^3}\,dt.$$

Ясно, что $\Pi(\zeta)=e^{i\mu}\prod_{k=1}^{n}(\zeta-t_k)^{\beta_k}\neq 0$ при $\zeta\neq t_k,\ k=1,\ldots,n$. Таким образом, точка ζ_0 должна удовлетворять уравнению

$$\left[\frac{12}{(\zeta-\overline{\zeta})^2}-\frac{6}{\zeta-\overline{\zeta}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta-t_j}+\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta-t_j}\right)^2-\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{(\zeta-t_j)^2}\right]M(\zeta)+$$
$$+\left(2\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta-t_j}-\frac{6}{\zeta-\overline{\zeta}}\right)N(\zeta)+2Q(\zeta)=0.\quad (4)$$

Назовем (4) *уравнением Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x.*

Обозначим

$$S(\zeta)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta-t_j}.$$

Тогда (4) эквивалентно уравнению

$$G(\zeta):=\left[12-6(\zeta-\overline{\zeta})S(\zeta)+(\zeta-\overline{\zeta})^2(S^2(\zeta)+S'(\zeta))\right]M(\zeta)+$$
$$+2\left[(\zeta-\overline{\zeta})^2S(\zeta)-3(\zeta-\overline{\zeta})\right]N(\zeta)+2(\zeta-\overline{\zeta})^2Q(\zeta)=0.\quad (5)$$

Докажем, что существует решение данного уравнения в верхней полуплоскости.

Предварительно покажем, что $M(\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}$, обращается в нуль ровно в одной точке $\widetilde{\xi}$, принадлежащей интервалу $(-1,1)$. Действительно, функция

$$M(\xi)=\int_{-1}^{1}\frac{h(t)}{\Pi(t)}(t-\xi)^5dt$$

строго монотонно убывает на вещественной оси и $M(-1)>0$, $M(1)<0$.

Функция $G(\zeta)$ определяет некоторое векторное поле в верхней полуплоскости. Это векторное поле непрерывно продолжается в замыкание верхней полуплоскости за исключением точек t_j, $1 \le j \le n$. Докажем, что это векторное поле обращается в нуль по крайней мере в одной точке ζ верхней полуплоскости.

Рассмотрим область Q, которая получается из полукруга $\{|\zeta| < R,\ \operatorname{Im}\zeta > 0\}$ выбрасыванием кругов $\{|z - t_j| < \varepsilon\}$, $1 \le j \le n$, и $\{|\zeta - \widetilde{\xi}| < \delta\}$. Граница ∂Q состоит из полуокружностей

$$T_R = \{|\zeta| = R,\ \operatorname{Im}\zeta \ge 0\}, \quad T_\varepsilon^j = \{|\zeta - t_j| = \varepsilon,\ \operatorname{Im}\zeta \ge 0\},\ 1 \le j \le n,$$

$$T_\delta = \{|\zeta - \widetilde{\xi}| = \delta,\ \operatorname{Im}\zeta \ge 0\},$$

и отрезков Δ_k, $1 \le k \le n+2$ действительной оси, не содержащих точек t_j, $1 \le j \le n$, и $\widetilde{\xi}$.

Если векторное поле G не обращается в нуль в D_ζ, то оно отлично от нуля на ∂Q. Подсчитаем вращение векторного поля G по границе области Q при достаточно большом R и достаточно малых ε и δ и покажем, что это вращение отлично от нуля. Это будет означать, что векторное поле на самом деле обращается в нуль по крайней в одной точке из области $Q \subset D_\zeta$ (см., например, [10]). Таким образом будет доказана разрешимость уравнения Гахова в D_ζ.

Обозначим через $V_G(\gamma)$ вращение векторного поля G вдоль кривой γ. Имеем

$$V_G(\partial Q) = V_G(T_R) + \sum_{j=1}^{n} V_G(T_\varepsilon^j) + \sum_{k=1}^{n+2} V_G(\Delta_k) + V_G(T_\delta).$$

Обход соответствующих участков границы ∂Q осуществляется так, что область Q при этом остается слева.

Если $\xi \in \Delta_k$, то $G(\xi) = 12M(\xi)$ – непрерывная вещественная функция, не обращающаяся в нуль, поэтому $V_G(\Delta_k) = 0$, $1 \le k \le n+2$.

Найдем теперь $V_G(T_R)$ при больших R. Пусть $\zeta = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$. Нетрудно убедиться в том, что

$$M(\zeta) \sim -a\zeta^2\overline{\zeta}^3,\ N(\zeta) \sim a\zeta\overline{\zeta}^3,\ Q(\zeta) \sim -a\overline{\zeta}^3 \text{ при } R = |\zeta| \to \infty \tag{6}$$

равномерно по θ, где

$$a = \int_{-1}^{1} \frac{h(t)}{\Pi(t)} dt > 0.$$

Также равномерно по θ

$$S(\zeta) \sim \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\zeta} = \frac{5}{\zeta}, \quad S'(\zeta) \sim -\frac{5}{\zeta^2}, \quad R \to \infty. \tag{7}$$

Из (5)–(7) следует, что

$$G(\zeta) \sim -a\zeta^2\overline{\zeta}^{\,3}\left[12 - 6(\zeta - \overline{\zeta})\frac{5}{\zeta} + (\zeta - \overline{\zeta})^2\left(\frac{25}{\zeta^2} - \frac{5}{\zeta^2}\right)\right] +$$
$$+ 2a\zeta\overline{\zeta}^{\,3}\left[(\zeta - \overline{\zeta})^2\frac{5}{\zeta} - 3(\zeta - \overline{\zeta})\right] - 2a\overline{\zeta}^{\,3}(\zeta - \overline{\zeta})^2 = -12a\overline{\zeta}^{\,5}.$$

Тогда при достаточно больших R

$$V_G(T_R)=\int\limits_0^{\pi} d\arg(-12aR^5e^{-i5\theta})=-5\pi.$$

Докажем, что

$$V_G(T_\varepsilon^j)=0,\quad 0\le j\le n. \tag{8}$$

Пусть $\zeta=t_j+\varepsilon e^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$. Имеем, что

$$S(\zeta)\sim\frac{\beta_j}{\zeta-t_j},\quad S'(\zeta)\sim-\frac{\beta_j}{(\zeta-t_j)^2},\quad \varepsilon=|\zeta-t_j|\to 0,$$

равномерно по θ. Тогда

$$G(\zeta)\sim M(t_j)G_1(\zeta),\quad \varepsilon\to 0,$$

где

$$G_1(\zeta)=12-6\beta_j\frac{\zeta-\overline{\zeta}}{\zeta-t_j}-(\beta_j-\beta_j^2)\left(\frac{\zeta-\overline{\zeta}}{\zeta-t_j}\right)^2.$$

Далее,

$$\frac{\zeta-\overline{\zeta}}{\zeta-t_j}=1-e^{-i2\theta},$$

поэтому

$$\operatorname{Re}\frac{\zeta-\overline{\zeta}}{\zeta-t_j}\ge 0,\quad \left|\frac{\zeta-\overline{\zeta}}{\zeta-t_j}\right|\le 2.$$

Если $\beta_j>0$, то

$$\operatorname{Re}G_1(\zeta)\ge 12-12\beta_j-4(\beta_j-\beta_j^2)=4(3-\beta_j)(1-\beta_j)>0.$$

Если же $\beta_j<0$, то

$$\operatorname{Re}G_1(\zeta)\ge 12-4|\beta_j-\beta_j^2|=12-4|\beta_j|(1+|\beta_j|)>0,$$

то есть справедливо (8).

Покажем, наконец, что $|V_G(T_\delta)|=\pi$ при малых δ.

Рассмотрим поведение $M(\zeta)$ и $N(\zeta)$ в окрестности точки $\widetilde{\xi}$. Пусть $\zeta=\widetilde{\xi}+\tau$. Обозначим

$$A_k=\int\limits_{-1}^{1}\frac{h(t)}{\Pi(t)}(t-\widetilde{\xi})^k dt,\quad k\in\mathbb{N}.$$

В силу выбора $\widetilde{\xi}$ имеем $A_5=0$. Кроме того, очевидно, что $A_4>0$. Тогда

$$M(\zeta)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{h(t)}{\Pi(t)}(t-\widetilde{\xi}-\tau)^2(t-\widetilde{\xi}-\overline{\tau})^3\,dt=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\frac{h(t)}{\Pi(t)}[(t-\widetilde{\xi})^5-(2\tau+3\overline{\tau})(t-\widetilde{\xi})^4+\cdots]\,dt=$$

$$=-(2\tau+3\overline{\tau})A_4+O(|\tau|^2),\quad |\tau|\to 0,$$

$$N(\zeta) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{h(t)}{\Pi(t)} (t - \widetilde{\xi} - \tau)(t - \widetilde{\xi} - \overline{\tau})^3 \, dt = A_4 + O(|\tau|), \quad |\tau| \to 0.$$

Следовательно,

$$G(\zeta) = 12M(\zeta) - 6(\zeta - \overline{\zeta})N(\zeta) + O(|\tau|^2) =$$

$$= -12(2\tau + 3\overline{\tau})A_4 - 6(\tau - \overline{\tau})A_4 + O(|\tau|^2) = -30A_4(\tau + \overline{\tau}) + O(|\tau|^2), \quad |\tau| \to 0.$$

Отметим, что в силу того, что функция $G(\zeta)$ является 5-аналитической,

$$G(\zeta) = -30A_4(\tau + \overline{\tau}) + \sum_{k=0}^{5} \overline{\tau}^k \Phi_k(\tau),$$

где функции $\Phi_k(\tau)$ аналитичны в окрестности нуля, и $\Phi_0(0) = \Phi_0'(0) = \Phi_1(0) = 0$. Следовательно, в некотором замкнутом круге $|\tau| \le \delta_0$ эти функции ограничены вместе со своими производными, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \operatorname{Re} G(\widetilde{\xi} + \delta e^{i\theta}) = 60A_4\delta \sin\theta - \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{5} \overline{\tau}^k [\tau \Phi_k'(\tau) - k\Phi_k(\tau)] = 60A_4\delta \sin\theta + O(\delta^2)$$

при $\delta \to 0$. Таким образом, существует $c > 0$ такое, что при малых δ

$$\left| \frac{\partial}{\partial\theta} \operatorname{Re} G(\widetilde{\xi} + \delta e^{i\theta}) - 60A_4\delta \sin\theta \right| \le c\delta^2.$$

Определим при малых δ

$$\theta_0 = \theta_0(\delta) = \arcsin \frac{c\delta}{60A_4}.$$

При $\theta_0 \le \theta \le \pi - \theta_0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \operatorname{Re} G(\widetilde{\xi} + \delta e^{i\theta}) \ge 0,$$

следовательно, функция $\operatorname{Re} G(\widetilde{\xi} + \delta e^{i\theta})$ является монотонно возрастающей функцией по θ на отрезке $[\theta_0, \pi - \theta_0]$.

Теперь рассмотрим значения $G(\widetilde{\xi} + \delta e^{i\theta})$ на отрезках $[0, \theta_0], [\pi - \theta_0, \pi]$. Поскольку

$$G(\widetilde{\xi} + \delta e^{i\theta}) = -60A_4\delta \cos\theta + O(\delta^2), \quad \delta \to 0,$$

равномерно по θ, то при $\theta \in [0, \theta_0]$

$$|G(\widetilde{\xi} + \delta e^{i\theta}) - G(\widetilde{\xi} + \delta)| \le 60(1 - \cos\theta)\delta + O(\delta^2) \le$$

$$\le 60(1 - \cos^2\theta)\delta + O(\delta^2) = O(\delta^2), \ \delta \to 0.$$

Так как

$$G(\widetilde{\xi} + \delta) = 12M(\widetilde{\xi} + \delta) = -60A_4\delta + O(\delta^2), \quad \delta \to 0,$$

при достаточно малых δ, то значения $G(\widetilde{\xi} + \delta e^{i\theta})$ при $\theta \in [0, \theta_0]$ лежат в левой полуплоскости. Аналогично показывается, что при $\theta \in [\pi - \theta_0, \pi]$ и достаточно малых δ значения $G(\widetilde{\xi} + \delta e^{i\theta})$ лежат в правой полуплоскости. В силу монотонности $\operatorname{Re} G(\widetilde{\xi} + \delta e^{i\theta})$ на $[\theta_0, \pi - \theta_0]$ отсюда следует, что при малых δ кривая $G(\widetilde{\xi} + \delta e^{i\theta})$,

$\theta \in [0, \pi]$, пересекает мнимую ось в единственной точке A. Эта точка делит кривую на две части, одна из которых BA лежит в левой полуплоскости, а другая AC – в правой. Поскольку точка C лежит на мнимой оси, а точки B и C – на действительной, получаем, что в случае, когда C лежит в верхней полуплоскости,

$$V_G(T_\delta) = V_G(BA) + V_G(AC) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi,$$

а если – в правой, то

$$V_G(T_\delta) = V_G(BA) + V_G(AC) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Таким образом, вращение векторного поля $V_G(\partial Q) = -5\pi \pm \pi \neq 0$. Это означает, что векторное поле G обращается в нуль по крайней мере в одной точке области Q, следовательно, уравнение Гахова в D_ζ имеет по крайней мере одно решение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00381 и № 06-01-81019-Бел).

Summary

S.R. Nasyrov, L.Yu. Nizamieva. Gakhov Equation for Mixed Inverse Boundary Value Problem on Riemann Surface with a Simple Branch-Point over Infinity.

The paper proves solvability of a Gakhov equation analogue for external mixed inverse boundary value problem on a Riemann surface. The surface is supposed to contain a unique simple branch-point over the infinity. The proof method uses technique of vector field rotation.

Key words: mixed inverse boundary value problem, Gakhov equation, vector field rotation, Riemann surface.

Литература

1. *Тумашев Г.Г., Нужин М.Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 333 с.

2. *Аксентьев Л.А.* Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 2. – С. 3–11.

3. *Аксентьев Л.А., Елизаров А.М., Киндер М.И.* Обратные краевые задачи для многосвязных областей на римановых поверхностях рода нуль, I–III // Тр. семинара по краевым задачам.– Казань: Изд-во Казан. ун-та. I: 1984. – Вып. 21. – С. 19–32; II: 1985. – Вып. 22. – С. 16–29; III: 1987. – Вып. 23. – С. 25–36.

4. *Монахов В.Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. – Новосибирск: Наука, 1977. – 424 с.

5. *Насыров С. Р.* О методе полигональной аппроксимации в смешанных обратных краевых задачах по параметру x. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1982. – 48 с. – Деп. в ВИНИТИ 17.05.82, № 2459-82.

6. *Насыров С.Р.* Смешанная обратная краевая задача на римановых поверхностях // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 10. – С. 25–36.

7. *Насыров С.Р., Фаизов И.З.* Локальная единственность решения смешанной обратной краевой задачи на полигональных римановых поверхностях с простыми точками ветвления // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 2. – С. 97–108.

8. *Галиуллина Г.Р., Насыров С.Р.* Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 10. – С. 48–55.

9. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

10. *Красносельский М.А. и др.* Векторные поля на плоскости. – М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
25.09.07

Насыров Семен Рафаилович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Казанского государственного университета.

E-mail: *snasyrov@ksu.ru*

Низамиева Лилия Юнисовна – старший преподаватель кафедры естественнонаучных дисциплин Казанского кооперативного института.

E-mail: *NizamievaLU@yandex.ru*