АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

- Лекции

1. Е.М. Карчевский, М.М. Карчевский, Линейная алгебра и аналитическая геометрия
2. А.Г. Курош, Курс высшей алгебры
3. А.В. Погорелов, Аналитическая геометрия

- Практика

4. Е.М. Карчевский, Е.В. Рунг, А.Г. Фролов, Семинары по линейной алгебре и аналитической геометрии
5. И.В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре
6. О.Н. Цубербиллер, Задачи и упражнения по аналитической геометрии

ГЛАВА 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Не всякое квадратное уравнение имеет вещественное решение. Самый простой пример — уравнение

$$x^2 + 1 = 0.$$

Ситуация меняется, если ввести в рассмотрение новое число — ***мнимую единицу***. Будем обозначать ее через i и полагать, что

$$i^2 = -1.$$

Тогда это уравнение будет иметь корень

$$\alpha_1 = i.$$

Естественно положить, что

$$(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1.$$

Тогда и число

$$\alpha_2 = -i$$

является корнем уравнения

$$x^2 + 1 = 0,$$

т. е. уравнение, как и аналогичное уравнение

$$x^2 - 1 = 0,$$

имеет два различных корня.

.

Рассматривая уравнение

$$x^2 + q = 0,$$

где

$$q > 0,$$

естественно принять, что оно имеет два корня

$$\alpha_1 = i\sqrt{q}, \quad \alpha_2 = -i\sqrt{q}.$$

.

Числа вида

$$ib,$$

где b — вещественное число, называют <u>***мнимыми***</u>.

Рассмотрим теперь общее квадратное уравнение, записывая его для удобства в приведенном виде:

$$x^2 - 2px + q = 0.$$

Элементарные преобразования дают

$$(x-p)^2 + q - p^2 = 0.$$

Будем считать, что

$$q - p^2 > 0,$$

т. е. дискриминант этого уравнения отрицателен.

.

Теперь естественно положить, что корнями уравнения

$$(x-p)^2+q-p^2=0$$

являются числа

$$\alpha_1=p+i\sqrt{q-p^2},\quad \alpha_2=p-i\sqrt{q-p^2}.$$

.

Числа

$$\alpha_1 = p + i\sqrt{q - p^2}, \quad \alpha_2 = p - i\sqrt{q - p^2}$$

имеют вид

$$a + ib,$$

где a и b — вещественные числа.

Их называют ***комплексными числами***.

Комплексное число

$$a + ib$$

при

$$b = 0$$

совпадает с вещественным числом a, а при

$$a = 0$$

совпадает с мнимым числом ib.

.

Обычно комплексное число будем обозначать буквой z:

$$z = x + iy.$$

Говорят, что x — *вещественная часть* комплексного числа z, а y — его *мнимая часть*.

.

Пусть

$$z = x + iy.$$

Обозначим

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Тогда

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z.$$

.

По определению два комплексных числа

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

и

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

равны, если

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

Естественно теперь попытаться проверить, что числа

$$\alpha_1 = p + i\sqrt{q - p^2}, \quad \alpha_2 = p - i\sqrt{q - p^2}.$$

являются корнями уравнения

$$x^2 - 2px + q = 0,$$

т. е. при подстановке их в это равенство последнее обращается в тождество, но для этого надо уметь выполнять ***алгебраические операции*** над комплексными числами. Дадим соответствующие определения.

.

Под ***суммой*** комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

понимается комплексное число

$$z = x + iy,$$

где

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2,$$

т. е.

$$\mathrm{Re}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\,z_1 + \mathrm{Re}\,z_2,$$

$$\mathrm{Im}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}\,z_1 + \mathrm{Im}\,z_2.$$

.

ПРИМЕР. **Сумма комплексных чисел**

$$z_1 = 1 + i2 \quad \text{и} \quad z_2 = 3 + i4$$

равна числу

$$z = (1 + i2) + (3 + i4) = (1 + 3) + i(2 + 4) = 4 + i6.$$

.

<u>Разностью</u> комплексных чисел z_1 и z_2 называется число

$$z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Ясно, что

$$z_2 + z = z_1.$$

.

<u>Пример.</u> Разность комплексных чисел

$$z_1 = 1 + i2 \quad \text{и} \quad z_2 = 3 + i4$$

равна числу

$$z = (1 + i2) - (3 + i4) = (1 - 3) + i(2 - 4) = -2 - i2.$$

Комплексное число вида

$$0 + 0i$$

называется ***нулевым***. Будем обозначать его символом 0. Для любого комплексного числа z справедливы равенства

$$z + 0 = z, \quad 0 + z = z.$$

Определяя *произведение* комплексных чисел, будем действовать, как при перемножении обычных двучленов, учитывая при этом, что $i^2 = -1$. Получаем, таким образом,

$$z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

т. е. по определению

$$\operatorname{Re}(z_1z_2) = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2,$$

$$\operatorname{Im}(z_1z_2) = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Re} z_2 \operatorname{Im} z_1.$$

Для любого комплексного числа z

$$z0 = 0z = 0.$$

.

<u>Пример.</u> Вычислим произведение комплексных чисел

$$z_1 = 1 + i2 \quad \textbf{и} \quad z_2 = 3 + i4 :$$

$$z_1 z_2 = (1 + i2) \cdot (3 + i4) = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 4) + i(1 \cdot 4 + 3 \cdot 2) = -5 + i10.$$

.

<u>Упражнение.</u> Убедиться, что определенные выше операции сложения и умножения комплексных чисел обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над вещественными числами:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1$

(коммутативность, или перестановочность),

2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

(ассоциативность, или сочетательность),

3) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

(дистрибутивность, или распределительность).

.

По определению полагаем

$$z^2 = zz,$$

и, вообще,

$$z^n = zz \cdots z,$$

где сомножитель повторяется n раз.

.

<u>Упражнение.</u> Непосредственной подстановкой показать, что числа

$$\alpha_1 = p + i\sqrt{q - p^2}, \quad \alpha_2 = p - i\sqrt{q - p^2}.$$

являются корнями уравнения

$$x^2 - 2px + q = 0.$$

Комплексное число z назовем результатом ***деления*** комплексного числа z_1 на z_2, если

$$zz_2 = z_1.$$

Покажем, что если $z_2 \neq 0$, то z как решение этого уравнения существует и определяется единственным образом.

В самом деле, используя формулу

$$zz_2 = (x + iy)(x_2 + iy_2) = xx_2 - yy_2 + i(xy_2 + x_2 y),$$

запишем уравнение

$$zz_2 = z_1$$

более подробно:

$$xx_2 - yy_2 + i(xy_2 + x_2 y) = x_1 + iy_1.$$

.

Приравнивая вещественные и мнимые части равенства

$$xx_2 - yy_2 + i(xy_2 + x_2y) = x_1 + iy_1,$$

получаем

$$xx_2 - yy_2 = x_1,$$

$$xy_2 + yx_2 = y_1.$$

Единственно возможным решением этой системы будет

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

$$y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Эти формулы определяют правило деления комплексных чисел.

.

Другой способ деления комплексных чисел:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

<u>Пример.</u> Разделим комплексное число

$$z_1 = 1 + i2 \quad \textbf{на} \quad z_2 = 3 + i4 :$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i2}{3 + i4} = \frac{(1 + i2)(3 - i4)}{(3 + i4)(3 - i4)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{3^2 + 4^2} + i\,\frac{3 \cdot 2 - 1 \cdot 4}{3^2 + 4^2} = \frac{11}{25} + i\,\frac{2}{25}.$$

Если операнды вещественны, т. е.

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0,$$

то операции

$$\underline{z_1 + z_2} = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = \underline{x_1 + x_2},$$

$$\underline{z_1 - z_2} = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = \underline{x_1 - x_2},$$

$$\underline{z_1 z_2} = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = \underline{x_1 x_2},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1}{x_2}$$

совпадают с операциями над вещественными числами.

.

Таким образом, множество комплексных чисел можно считать расширением множества вещественных чисел.

Джероламо Кардано (Girolamo Cardano; 1501 — 1576) — итальянский математик, инженер, философ, медик и астролог. В <u>1545</u> году впервые записал комплексные корни квадратного уравнения:

$$\alpha_1 = 5 + \sqrt{-15}, \quad \alpha_2 = 5 - \sqrt{-15}.$$

Леонард Эйлер (Leonhard Euler; 1707 — 1783) — швейцарский, немецкий и российский математик и механик. В 1777 году предложил символ i (от лат. imaginarius — мнимый), распространил все стандартные функции на комплексную область.

Иоганн Карл Фридрих Гаусс (Johann Carl Friedrich Gaus; 1777 — 1855) — немецкий математик, механик, физик и астроном. Ввел термин «комплексное число» в 1831 году, указал геометрическую модель комплексных чисел и действий с ними.

§2. ОПЕРАЦИЯ СОПРЯЖЕНИЯ. МОДУЛЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Число

$$\overline{z} = x - iy$$

называют ***сопряженным*** по отношению к комплексному числу

$$z = x + iy$$

Говорят, что числа z и $\overline{z}$ ***комплексно сопряжены***.

Изучим свойства операции сопряжения.

•

$$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x+iy}} = \overline{x-iy} = x+iy = z$$

•

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) =$$

$$= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$$

.

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)} =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(y_1 x_2 + x_1 y_2) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \overline{z}_1 \overline{z}_2.$$

•

$$z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x$$

•

$$z - \overline{z} = (x + iy) - (x - iy) = i2y$$

•

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + iyx + y^2 = x^2 + y^2$$

.

Вещественное неотрицательное число

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

называется ***модулем*** комплексного числа

$$z = x + iy.$$

.

Если

$$z = x + iy = 0,$$

т. е.

$$x = 0, \quad y = 0,$$

то

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

.

Наоборот, если

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 0,$$

то

$$x = 0, \quad y = 0,$$

т. е.

$$z = x + iy = 0.$$

.

Итак,

$$|z| = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$z = 0.$$

<u>Упражнение.</u> Проверить, что для любых двух комплексных чисел z_1, z_2 справедливо равенство

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

.

<u>Упражнение.</u> Проверить, что для любых двух вещественных чисел x, y справедливо неравенство

$$2|xy| \leqslant (x^2 + y^2).$$

Упражнение. Проверить, что для любых двух комплексных чисел z_1, z_2 справедливо неравенство

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

.

Заметим, что

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2|,$$

следовательно,

$$|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

Точно так же

$$|z_2| - |z_1| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

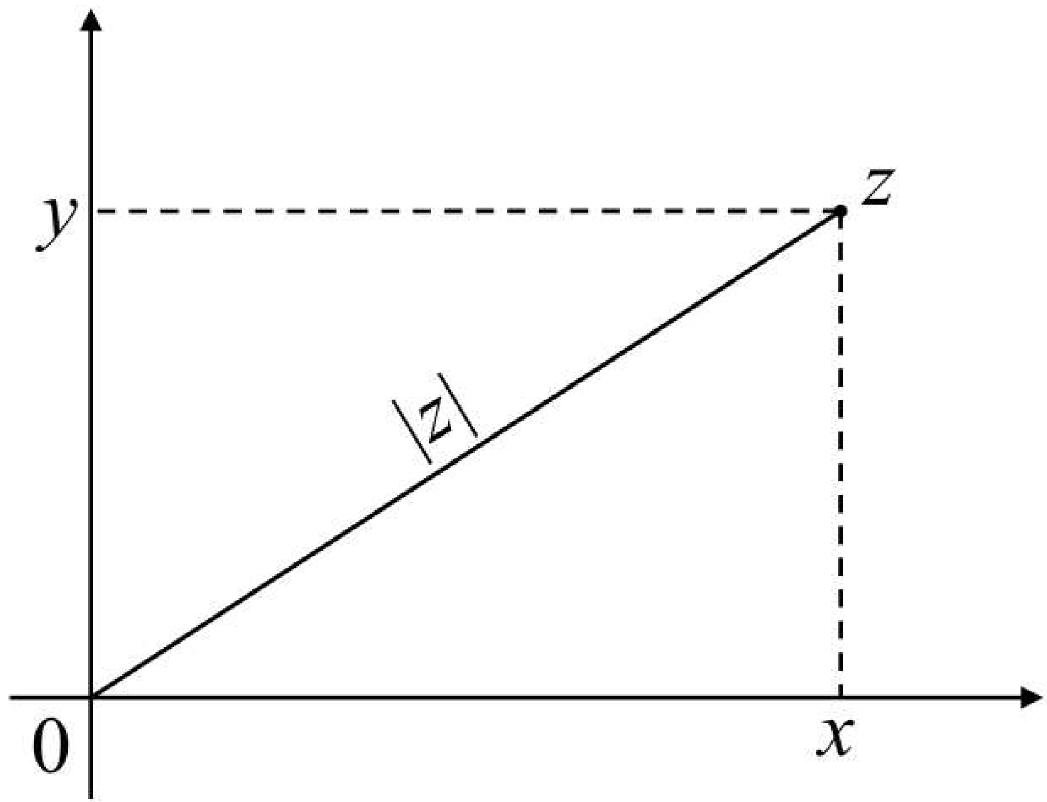
Таким образом,

$$||z_2| - |z_1|| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

Огюстен Луи Коши (Augustin Louis Cauchy; 1789 — 1857) — французский математик и механик. Ввел термины «модуль», «аргумент» и «сопряженное число».

§3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

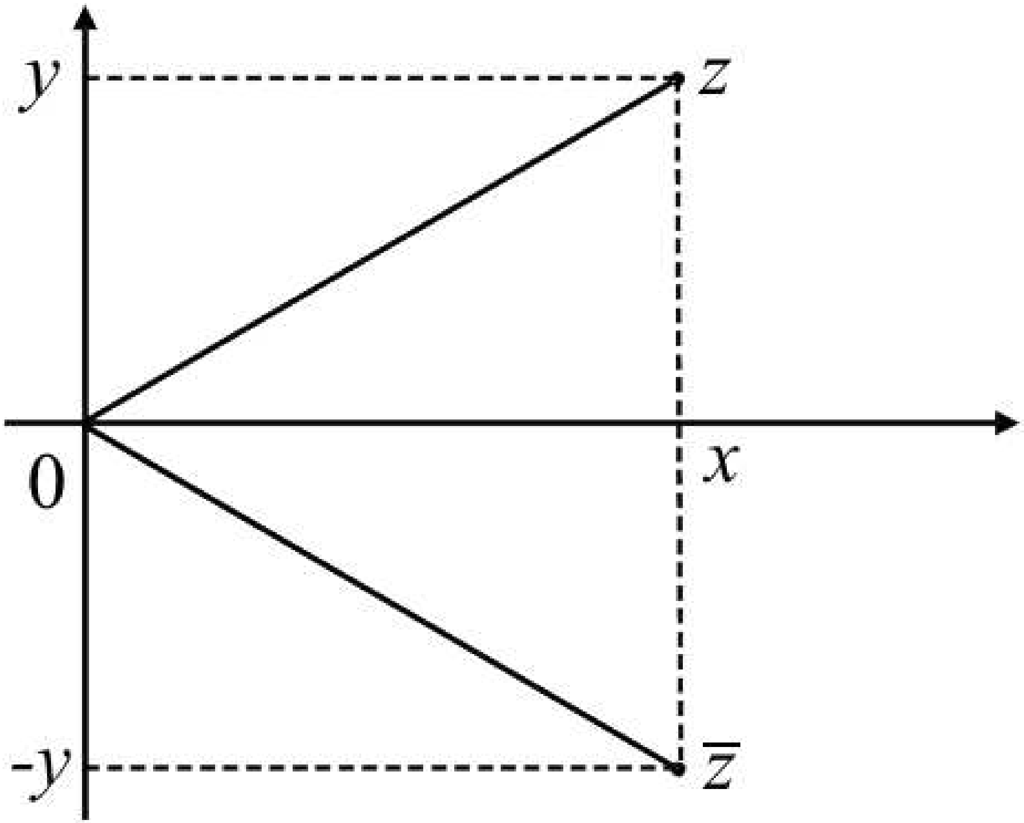
Напомним, что с каждым вещественным числом x можно связать точку на числовой прямой. Аналогичная (но более сложная) геометрическая интерпретация полезна и для комплексных чисел.



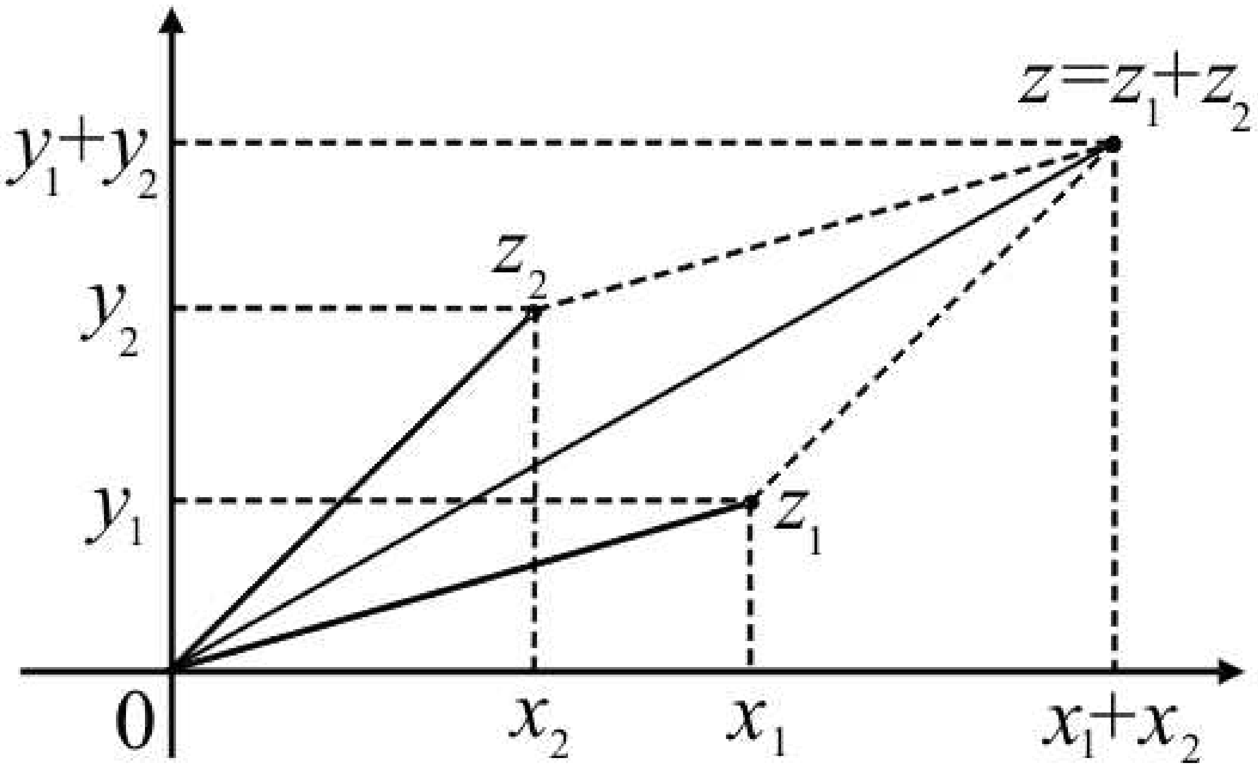
Введем на плоскости декартову систему координат (x, y) и поставим в соответствие каждому комплексному числу $z = x + iy$ точку

$$z = (x, y).$$

Тогда $|z|$ это расстояние от точки z до начала координат.



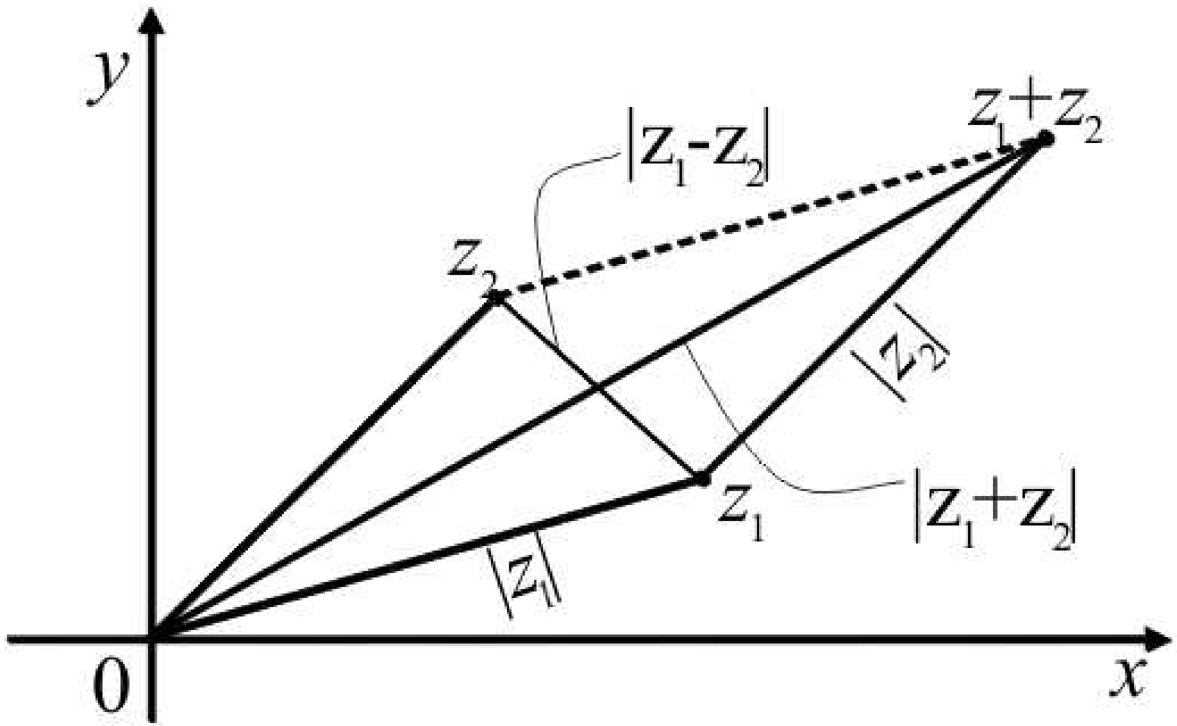
Взаимносопряженные числа симметричны относительно оси x.



Напомним, что при сложении векторов их одноименные координаты складываются. Поэтому суммирование чисел

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

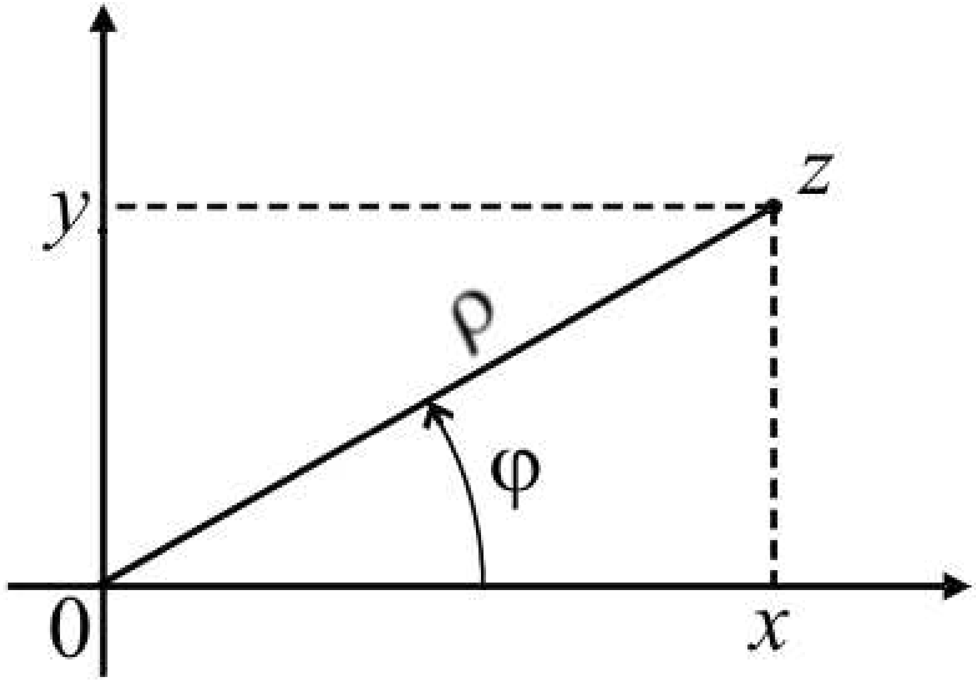
соответствует сложению векторов (x_1, y_1) и (x_2, y_2).



Неравенства

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \quad ||z_2| - |z_1|| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

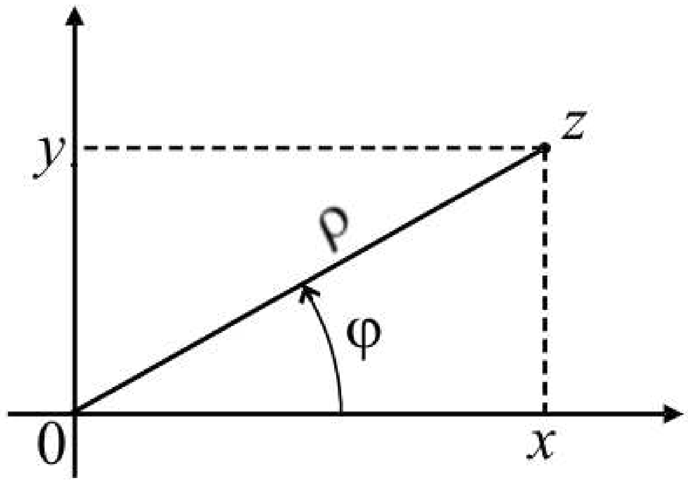
можно интерпретировать теперь как хорошо известные неравенства для сторон треугольника.



Каждое комплексное число (кроме нуля) можно однозначно охарактеризовать двумя параметрами:

$$\varphi = \arg z, \qquad \rho = |z|.$$

Угол $\varphi \in [0, 2\pi)$ отсчитывается от положительного направления оси x против часовой стрелки и называется ***аргументом*** числа z.



Получим явное выражение z через $|z|$ и $\arg z$. Имеем

$$z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|} \right).$$

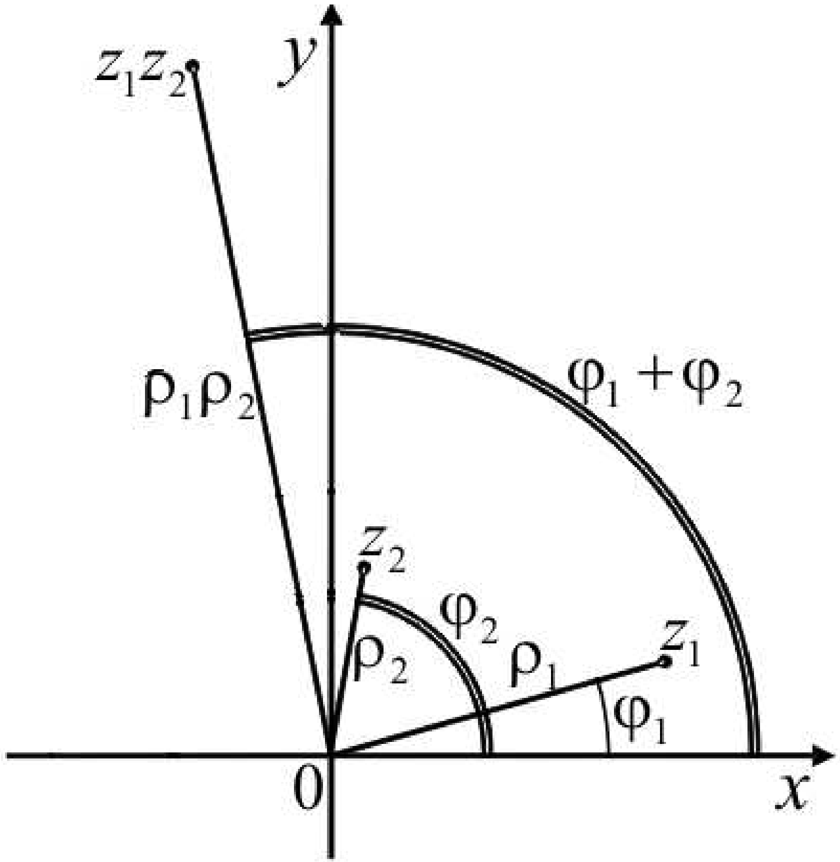
По определению

$$\frac{x}{|z|} = \cos\varphi, \qquad \frac{y}{|z|} = \sin\varphi,$$

т. е.

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

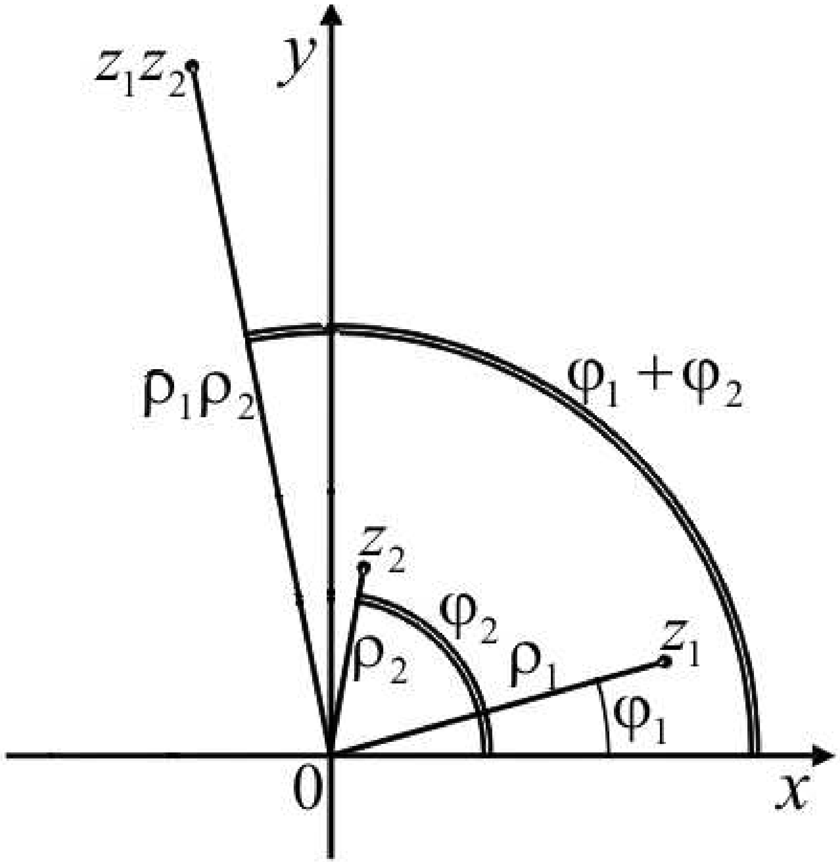
Это *тригонометрическое представление* комплексного числа.



Пусть $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Используя известные тригонометрические соотношения, получим

$$z_1z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

т. е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.



Здесь нужно отметить, что число $\varphi_1 + \varphi_2$ может выйти из отрезка $[0, 2\pi]$, но вследствие периодичности тригонометрических функций мы можем отождествлять их аргументы, отличающиеся на величину, кратную 2π. Аналогичное относится и к другим операциям над комплексными числами в тригонометрической форме.

<u>Пример.</u> Вычислим произведение чисел

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

По формуле

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

имеем

$$z_1 z_2 = 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

.

Используя формулу

$$zz_2 = \rho\rho_2(\cos(\varphi + \varphi_2) + i \sin(\varphi + \varphi_2)),$$

запишем уравнение

$$zz_2 = z_1,$$

в виде

$$\rho\rho_2(\cos(\varphi + \varphi_2) + i \sin(\varphi + \varphi_2)) = \rho_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1).$$

Отсюда

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

т. е. при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

<u>Пример.</u> **Разделим комплексное число**

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \quad \textbf{на} \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

По формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

имеем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

.

Получим формулу для вычисления степеней комплексного числа. Используя

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

непосредственно получаем, что

$$z^2 = zz = \rho^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi),$$

и, вообще, для любого целого числа n (включая нуль и отрицательные целые числа)

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Эту формулу называют ***формулой Муавра***.

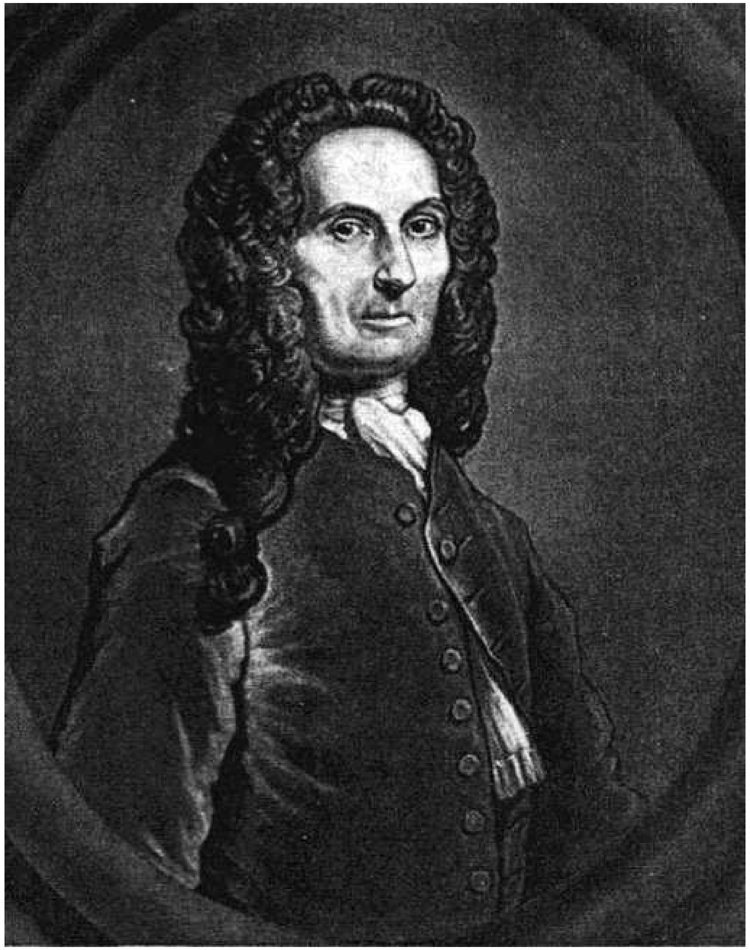
.

<u>Пример.</u> Возведем комплексное число

$$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

в третью степень. По формуле Муавра получаем

$$z^3 = \rho^3\left(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi\right) = 27\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$



Абрахам де Муавр (Abraham de Moivre; 1667 — 1754) — английский математик французского происхождения.

§4. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Дано число

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Пусть

$$\widetilde{z} = \widetilde{\rho}(\cos\widetilde{\varphi} + i\sin\widetilde{\varphi}) = \sqrt[n]{z}, \quad n \geqslant 1.$$

Тогда

$$\widetilde{z}^n = \widetilde{\rho}^n(\cos n\widetilde{\varphi} + i\sin n\widetilde{\varphi}) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Из равенства

$$\widetilde{\rho}^n(\cos n\widetilde{\varphi} + i\sin n\widetilde{\varphi}) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

заключаем, что

$$\widetilde{\rho} = \sqrt[n]{\rho}, \quad n\widetilde{\varphi} = \varphi + 2\pi k, \quad k = 0, 1, \ \ldots,$$

где $\sqrt[n]{\rho}$ — **арифметическое значение корня из** $\rho \geqslant 0$.

Итак,

$$\widetilde{z} = \widetilde{\rho}(\cos\widetilde{\varphi} + i\sin\widetilde{\varphi}),$$

$$\widetilde{\rho} = \sqrt[n]{\rho}, \quad \widetilde{\varphi} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots .$$

Значит, n **чисел**

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k), \quad \varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ \underline{n-1},$$

дают <u>различные</u> значения $\sqrt[n]{z}$**.**

<u>Пример.</u> **Вычислим** $\sqrt[4]{z}$, **где**

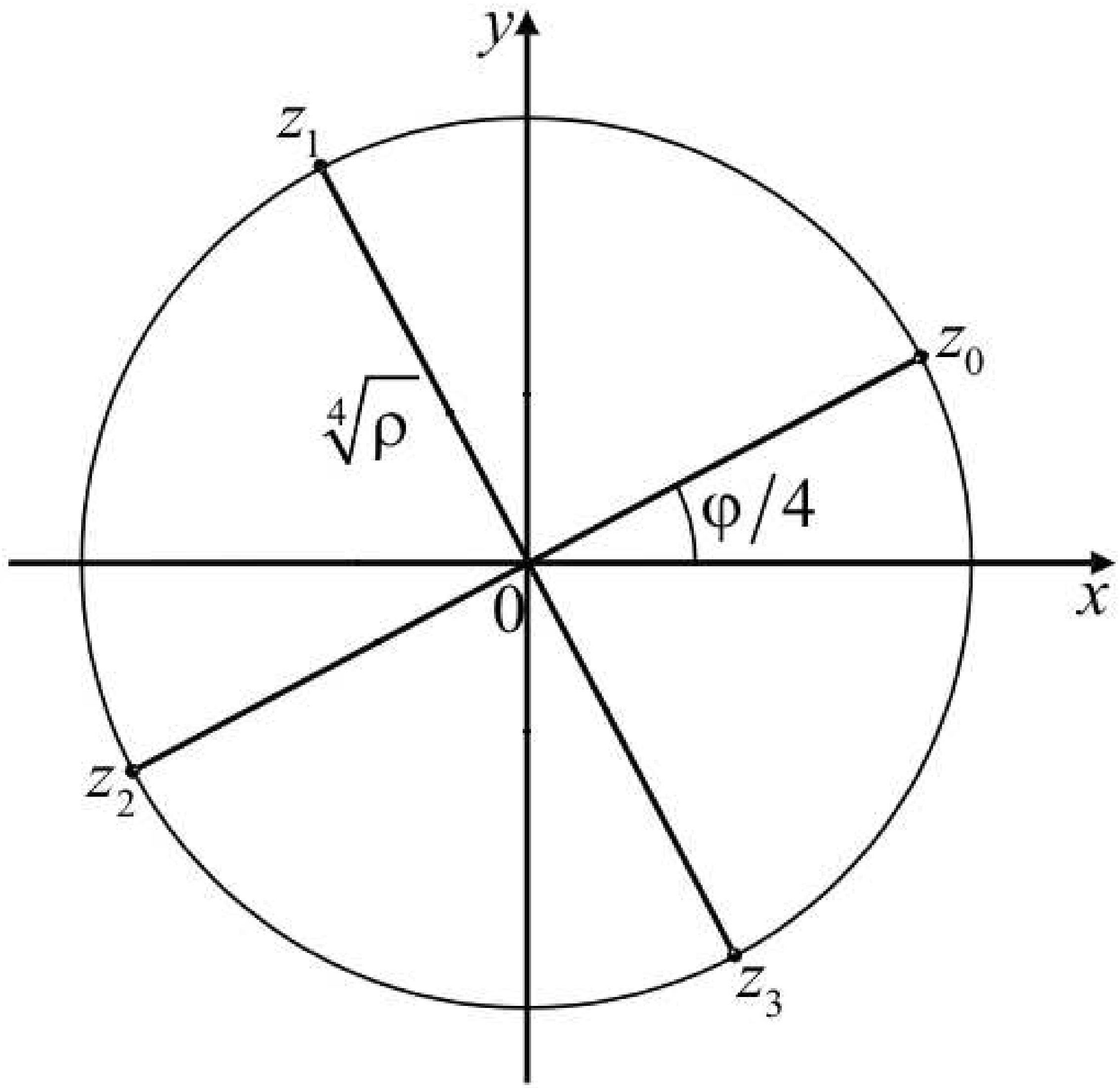
$$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

По формуле

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k), \quad \varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

получаем

$$z_k = \sqrt[4]{3}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k), \quad \varphi_k = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$



У любого комплексного числа (кроме нуля) существует n различных корней степени n, они расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в начале координат и делят ее на n равных частей.

.

Формулу

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k), \quad \varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

часто записывают в несколько иной форме.

Положим

$$q_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Очевидно

$$q_k^n = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)^n =$$

$$= \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k = 1, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

т. е.

$$q_k = \sqrt[n]{1}, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

.

Нетрудно проверить, что

$$z_k = z_0 q_k, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Действительно,

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right),$$

и

$$z_0 q_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right) = z_k.$$

.

Таким образом, вычислив корень

$$z_0 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

остальные корни

$$z_k = z_0 q_k, \quad k = 1,\ \ldots,\ n-1,$$

где

$$q_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},$$

можно получить сдвигами на углы

$$\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 1,\ \ldots,\ n-1,$$

по окружности.