ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 5 (480)

УДК 512

С.Н. ТРОНИН

ОПЕРАДЫ В КАТЕГОРИИ КОНВЕКСОРОВ. II

Данная работа является непосредственным продолжением [1]. Результаты обеих частей анонсированы в [2]. Во второй части вводится конвексорный аналог линейных операд: коноперады, т. е. операды, все компоненты которых являются конвексорами, а операции композиции полилинейны в конвексорном смысле. Примерами таких операд являются операды многомерных стохастических и двоякостохастических матриц, первые компоненты которых — множества обычных квадратных стохастических и двоякостохастических матриц. По-видимому, специалисты по теории вероятностей только начинают искать подходы к изучению этих объектов (см., напр., [3]). После подходящей переформулировки вероятностные автоматы становятся элементами алгебр над операдами многомерных стохастических матриц. Основной же результат данной работы состоит в характеризации многообразий коналгебр над коноперадами: это в точности те многообразия, которые определяются конвексорными аналогами полилинейных тождеств. Это аналогично ситуации, имеющей место в линейном случае [4]–[7].

Δ-линейной называется операда $\mathfrak{R}$, для которой соответствие $n \mapsto \mathfrak{R}(n)$ является функтором в Conv, а отображения композиции Δ-полилинейны. Следуя работам [8], [9], такую операду еще можно было бы назвать коноперадой. Соответственно, алгеброй над Δ-линейной операдой $\mathfrak{R}$ (или, по аналогии с [8], [9], $\mathfrak{R}$-коналгеброй) будем называть $\mathfrak{R}$-алгебру A, которая является конвексором, в которой все операции композиции $\mathfrak{R}(n) \times A^n \to A$ Δ-полилинейны. Гомоморфизмы таких алгебр будут предполагаться Δ-линейными. В остальной части работы Alg-$\mathfrak{R}$ будет обозначать категорию алгебр над Δ-линейной операдой. Категория алгебр и гомоморфизмов Alg-$\mathfrak{R}$ является многообразием Δ-линейных мультиоператорных алгебр в смысле [1]. Сама операда $\mathfrak{R}$ рассматривается в качестве сигнатуры, причем для всех $n \geq 1$ $\mathfrak{R}(n)$ есть множество символов n-арных Δ-полилинейных операций.

Простейший пример Δ-линейной операды: операда $\mathfrak{C}$, у которой для каждого n множество $\mathfrak{C}(n)$ одноэлементно, $\mathfrak{C}(n) = \{\omega_n\}$. Такое множество обладает естественной структурой конвексора $\alpha(\omega_n, \omega_n) = \omega_n$. Операция композиции определяется единственно возможным способом $\omega_m \omega_{n_1} \dots \omega_{n_m} = \omega_{n_1+\dots+n_m}$. Ясно, что эти отображения Δ-полилинейны. Для любой подкатегории $\mathbf{K}$ категории конечных ординалов $\mathbf{FSet}$, удовлетворяющей условиям, сформулированным в [1], на $\mathfrak{C}$ тривиальным образом определяется структура $\mathbf{K}$-операды.

Напомним, что два многообразия алгебр $\mathfrak{V}_1$ и $\mathfrak{V}_2$ называются рационально эквивалентными, если они эквивалентны как категории, причем функтор эквивалентности сопоставляет алгебре из $\mathfrak{V}_1$, являющейся множеством A с некоторым семейством операций, алгебру из $\mathfrak{V}_2$, являющуюся тем же самым множеством A, но уже, возможно, с другим набором операций. Гомоморфизмы из $\mathfrak{V}_1$ как отображения множеств переходят в гомоморфизмы $\mathfrak{V}_2$, являющиеся теми же самыми отображениями. Обратный функтор действует точно таким же образом. Таким образом, алгебры двух многообразий, по сути, это одни и те же множества, а операции, задающие структуру алгебр двух видов, выражаются друг через друга (являются взаимно производными). Рациональная эквивалентность многообразий равносильна изоморфности категорий их свободных алгебр (достаточно даже свободных алгебр конечного ранга). Если многообразия $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00469).

представлены каким-то образом в виде подмногообразий многообразия всех Ω-алгебр, то для их рациональной эквивалентности достаточно, чтобы их свободные алгебры со счетными базисами были изоморфны как Ω-алгебры.

Лемма. *Категория* $\mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{C}_\Sigma$ *рационально эквивалентна категории всех коммутативных ассоциативных конколец (возможно, без единицы). Категория* $\mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{C}_{\mathrm{Id}}$ *рационально эквивалентна категории всех ассоциативных конколец (возможно, без единицы).*

Доказательство. Определение конколец см. в [9]. Это конвексоры, на которых задана бинарная ассоциативная операция $x*y$, являющаяся Δ-билинейной. Лемма доказывается практически так же, как и аналогичное утверждение для случая, когда конвексорная структура на $\mathfrak{C}$ и на алгебрах не учитывается. Хорошо известно, что в этом случае получаются соответственно многообразия всех коммутативных полугрупп (без единицы) и всех полугрупп. Приведем основные этапы рассуждений. Положим $\omega = \omega_2$, $\varepsilon = \omega_1$. Если A есть $\mathfrak{C}$-алгебра, то определим бинарную операцию $A\times A \to A$ следующим образом: $x*y = \omega(xy)$. Эта операция Δ-билинейна по определению. Легко проверяется ассоциативность: $x*(y*z) = \omega(\varepsilon\omega)(xyz) = \omega(\omega\varepsilon)(xyz) = (x*y)*z$. Если определено действие групп подстановок и $\sigma = (1\ 2)$ — транспозиция, то $\sigma\omega(x,y) = \omega(y,x)$, но $\sigma\omega = \omega$, откуда $x*y = y*x$.

Обратно, если дано конкольцо A с операцией умножения $x*y$, то полагаем $\omega_n(x_1,\dots,x_n) = x_1*\dots*x_n$. Проверка свойств алгебры над операдой проводится без затруднений. Ясно, что гомоморфизмами будут и в том и в другом случае одни и те же отображения. В случае, когда $\mathbf{K} = \mathrm{Id}$, т. е. использовать подстановки запрещено, коммутативности не будет, но ассоциативность умножения $x*y$ сохраняется, и получаем категорию ассоциативных конколец. $\square$

Приведем еще несколько более или менее нетривиальных примеров Δ-линейных операд. Положим $\mathfrak{I}(n) = I = [0,1]$ для всех $n = 1,2,\dots$, и пусть $\mathfrak{I}(m)\times\mathfrak{I}(n_1)\times\dots\times\mathfrak{I}(n_m) \to \mathfrak{I}(n_1+\dots+n_m)$ определяется как отображение, сопоставляющее набору чисел из единичного отрезка $(\lambda,\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ их произведение $\lambda\lambda_1\dots\lambda_m$. Для произвольного $f:[n]\to[m]$ и $\lambda\in\mathfrak{I}(n) = I$ полагаем $f\lambda = \lambda\in\mathfrak{I}(m) = I$. Свойства операды проверяются без труда.

Пусть X — произвольное множество. Построим операду многомерных стохастических матриц $SM = SM(X)$. Положим $SM(n)$ равным множеству всех отображений ω из $X\times X^n$ в $[0,1]$ таких, что при любом $\overline{y}\in X^n$ имеет место $\omega(x,\overline{y}) = 0$ для почти всех $x\in X$ и $\sum_{x\in X}\omega(x,\overline{y}) = 1$. Структура конвексора на $SM(n)$ вводится следующим образом: если $\alpha\in[0,1]$, $\omega_1,\omega_2 : X\times X^n\to[0,1]$, то $\alpha(\omega_1,\omega_2)(x,x_1,\dots,x_n) = \alpha(\omega_1(x,x_1,\dots,x_n),\omega_1(x,x_1,\dots,x_n))$. Определим действие Σ_n на $SM(n)$, полагая $(\sigma\omega)(x,\overline{y}) = \omega(x,\overline{y}\sigma)$. Пусть $\omega_i\in SM(n_i)$, $\omega\in SM(m)$, $1\le i\le m$, $\overline{z}_i\in X^{n_i}$, $x\in X$. Полагаем

$$(\omega\omega_1\dots\omega_m)(x,\overline{z}_1\dots\overline{z}_m) = \sum_{y_1,\dots,y_m\in X}\omega(x,y_1\dots y_m)\omega_1(y_1,\overline{z}_1)\dots\omega_m(y_m,\overline{z}_m).$$

Рассмотрим также множество распределений на $X\times U$, т. е. отображений вида $\gamma : X\times U\to[0,1]$ таких, что $\gamma(x,u) = 0$ для любого $u\in U$ для почти всех $x\in X$ и $\sum_{x\in X}\gamma(x,u) = 1$. Обозначим это множество через A_U (или $A_{X,U}$). Структура конвексора на $A_{X,U}$ хорошо известна [9]: $\alpha(\gamma_1,\gamma_2)(x,u) = \alpha\gamma_1(x,u) + (1-\alpha)\gamma_2(x,u)$. Определим композицию SM и A_U следующим образом. Пусть $\omega\in SM(n)$, $\gamma_1,\dots,\gamma_n\in A_U$. Тогда

$$\omega(\gamma_1\dots\gamma_n)(x,u) = \sum_{y_1\dots y_n}\omega(x,y_1\dots,y_n)\gamma_1(y_1,u)\dots\gamma_n(y_n,u).$$

Прямой проверкой доказывается

Теорема 1. $SM(X)$ *есть* Δ*-линейная* Σ*-операда.* $A_{U,X}$ *есть коналгебра над операдой* $SM(X)$*.*

Фактически при бесконечном X можно определить еще одну операду такого же типа, рассматривая те отображения ω из $X \times X^n$ в $\mathfrak{K}(n)$, у которых для каждого $x \in X$ имеет место $\omega(x,\overline{y}) = 0$ для почти всех $\overline{y} \in X^n$, и $\sum\limits_{\overline{y}\in X^n} \omega(x,\overline{y}) = 1$. Введенная нами композиция превращается по сути в умножение многомерных матриц, определенное в [10]. "Бескоординатная" форма этой операды, называемая иногда операдой эндоморфизмов [11], такова. Берется конвексор V, $\mathfrak{E}_V$ состоит из компонент $\mathfrak{E}_V(n) = \mathrm{Conv}(V^{\otimes n}, V)$, а композиция определяется как $\omega\omega_1\omega_2\ldots\omega_m = \omega(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \cdots \otimes \omega_m)$. Σ_n действует следующим образом: $\sigma\omega(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \omega(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)})$. Легко убедиться, что для любой Δ-линейной Σ-операды $\mathfrak{R}$ задание структуры $\mathfrak{R}$-алгебры на V равносильно заданию гомоморфизма операд $\mathfrak{R} \to \mathfrak{E}_V$.

С аналогичного примера, рассмотренного в [12], судя по всему, и следует отсчитывать начало изучения (линейных) операд как самостоятельных объектов. Работа [13], которую принято пока считать исходным пунктом развития теории, вышла спустя более чем два года после [12].

Определим еще операду двоякостохастических многомерных матриц $DSM = DSM(X)$, полагая $DSM(n)$ состоящим из всех тех $\omega \in SM(n)$, $\omega : X \times X^n \to [0,1]$, для которых при любом $x \in X$ имеет место равенство $\sum\limits_{\overline{y}\in X^n} \omega(x,\overline{y}) = 1$.

Теорема 2. *$DSM(X)$ есть Δ-линейная Σ-операда.*

Доказательство проводится проверкой определения. $\square$

Пусть $B = \{0,1\}$ — двухэлементная булева алгебра. Зафиксируем снова множество X и определим операду булевских стохастических матриц $SBM = SBM(X)$. Положим $SBM(n)$, равным множеству всех отображений вида $\omega : X \times X^n \to B$ таких, что при любом $\overline{y} \in X^n$ будет $\omega(x,\overline{y}) = 0$ для почти всех $x \in X$ и $\sum\limits_{x\in X} \omega(x,\overline{y}) = \max\limits_{x\in X} \omega(x,\overline{y}) = 1$. Определим на SBM структуру операды. Положим

$$SBM(m) \times SBM(n_1) \times \cdots \times SBM(n_m) \to SBM(n_1 + \cdots + n_m),$$
$$(\omega\omega_1 \ldots \omega_m)(x, \overline{z}_1 \ldots \overline{z}_m) = \sum_{y_1 \ldots y_m \in X} \omega(x, y_1 \ldots y_m)\omega_1(y_1, \overline{z}_1) \ldots \omega_m(y_m, \overline{x}_m).$$

Здесь сумма означает взятие максимума, а произведение — минимума.

Напомним, что каждая верхняя полурешетка обладает структурой конвексора: достаточно положить $\alpha(x,y) = x + y$ при $\alpha \in (0,1)$, $1(x,y) = x$, $0(x,y) = y$. Отсюда следует, что все $SBM(n)$ являются конвексорами, и определенная только что операция композиции Δ-полилинейна. Определим $BA = BA_{U,X}$ как множество всех отображений $\gamma : X \times U \to B$ таких, что для любого $u \in U$ выполняется $\gamma(u,x) = 0$ для почти всех $x \in X$ и $\sum\limits_{x\in X} \gamma(u,x) = 1$. Композиция $SBM(n) \times BA^n \to BA$ определяется так же, как и выше для SM и A. Зададим отображение $Q : [0,1] \to \{0,1\}$, полагая $Q(0) = 0$, $Q(a) = 1$ при $a > 0$. Построим семейство отображений $Q_n : SM(n) \to SBM(n)$ следующим образом. Если $A \in SM(n)$, то $Q_n(A) \in SBM(n)$ определяется в виде $Q_n(A)(y, x_1 \ldots x_m) = Q(A(y, x_1 \ldots x_m))$. Следуя ([14], с. 32), можно назвать $Q_n(A)$ булевскими шаблонами многомерных стохастических матриц. Там, где это не приводит к недоразумениям, будем обозначать через Q все семейство Q_n, $n = 1, 2, \ldots$

Теорема 3. *Семейство SBM с определенной выше композицией есть операда. На ней также существует естественная структура Δ-линейной операды. $BA_{U,X}$ есть алгебра над $SBM(X)$. Семейство Q есть гомоморфизм Δ-линейных операд, $Q : SM \to SBM$.*

Доказательство. Все утверждения, кроме последнего, доказываются непосредственной проверкой определений. Δ-линейность отображения $Q_n : SM(n) \to SBM(n)$ также очевидна. Проверим, что $Q(AA_1 \ldots A_m) = Q(A)Q(A_1) \ldots Q(A_m)$. Пусть $\overline{z}_i \in X^{n_i}$, $1 \le i \le m$. Тогда $Q(AA_1 \ldots A_m)(x, \overline{z}_1 \ldots \overline{z}_m) = 0$ в том и только том случае, когда $(AA_1 \ldots A_m)(x, \overline{z}_1 \ldots \overline{z}_m) = 0$. Это равносильно тому, что для любого семейства $y_1, \ldots, y_m \in X$ по крайней мере одно из чисел

$A(x, y_1 \dots y_m), A_1(y_1, \overline{z}_1), \dots, A_m(y_m, \overline{z}_m)$ равно нулю, или что по крайней мере одна из компонент булевских шаблонов $Q(A)(x, y_1 \dots y_m), Q(A_1)(y_1, \overline{z}_1), \dots, Q(A_m)(y_m, \overline{z}_m)$ является нулевой. С другой стороны,

$$Q(A)Q(A_1)\dots Q(A_m)(x, \overline{z}_1 \dots \overline{z}_m) = \\ = \max_{y_1, \dots, y_m} (\min(Q(A)(x, y_1 \dots y_m), Q(A_1)(y_1, \overline{z}_1), \dots, Q(A_m)(y_m, \overline{z}_m))),$$

и это выражение равно нулю в том и только том случае, если для любого семейства $y_1, \dots, y_m \in X$

$$\min(Q(A)(x, y_1 \dots y_m), Q(A_1)(y_1, \overline{z}_1), \dots, Q(A_m)(y_m, \overline{z}_m)) = 0,$$

т.е. равно нулю хотя бы одно из $Q(A)(x, y_1 \dots y_m), Q(A_1)(y_1, \overline{z}_1), \dots, Q(A_m)(y_m, \overline{z}_m)$. Итак, обе сравниваемые функции принимают нулевые значения на одних и тех же значениях аргумента. Следовательно, на остальных значениях аргумента они обязаны быть равными единице. □

Последнее утверждение теоремы 3 — это многомерный аналог леммы 1.3.6 из книги ([14], с. 33). Легко заметить, что аналогичный факт справедлив и для алгебр распределений: для них также можно определить булевские шаблоны, причем соответствующие отображения оказываются гомоморфизмами алгебр над операдами. Напомним определение вероятностного автомата [14]. Пусть X — множество входных сигналов, Y — множество выходных сигналов, Q — множество состояний. Вероятностный автомат — это отображение $\gamma : X \times Q \times Y \times Q \to [0, 1]$ такое, что для каждой фиксированной пары $(x, q) \in X \times Q$ имеют место равенства $\gamma(x, q, y, q') = 0$ для почти всех $(y, q') \in Y \times Q$ и $\sum\limits_{(y,q) \in Y \times Q} \gamma(x, q, y, q') = 1$. Подразумевается, что $\gamma(x, q, y, q')$ есть условная вероятность перехода из события q при входном сигнале x в состояние q' при выходном сигнале y. Обозначим через $A = A_{X,Q,Y}$ множество всех таких автоматов, $Z = Y \times Q$, $SM = SM(Z)$. Определим отображения композиции $SM(n) \times A^n \to A$ следующим образом:

$$(\omega\gamma_1 \dots \gamma_n)(x, q, y, q') = \sum_{\substack{y'_1 \dots y'_n \\ q'_1 \dots q'_n}} \omega((y, q'), (y'_1, q'_1) \dots (y'_n, q'_n))\gamma_1(x, q, y'_1, q'_1) \dots \gamma_n(x, q, y'_n, q'_n).$$

Теорема 4. *Определенные выше операции композиции превращают $A_{X,Q,Y}$ в коналгебру над коноперадой SM.*

Доказательство проводится прямой проверкой определения. □

Отметим, что сама операда Δ не является Δ-линейной.

Теорема 5. *Свободная Δ-линейная алгебра с базисом X в многообразии* $\mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{R}_{\mathrm{Id}}$ *имеет вид* $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{R}}(X) = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}(n) \otimes T^n(X)$, *где $T^n(X)$ — свободный конвексор с базисом X^n, а $\coprod$ — копроизведение в категории* Conv. *Если $\mathbf{K}$ — подкатегория категории конечных множеств, обладающая свойствами, сформулированными в* ([1], § 1), *и $\mathfrak{R}$ есть $\mathbf{K}$-операда, то в многообразии Alg-$\mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$, которое является подмногообразием* $\mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{R}_{\mathrm{Id}}$, *свободная алгебра $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{R},\mathbf{K}}(X)$ есть факторалгебра $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{R}}(X)$ по конгруэнции, порожденной всеми парами вида $((f\omega) \otimes (x_1, \dots, x_m)) \sim (\omega \otimes (x_{f(1)}, \dots, x_{f(n)}))$, где $f \in \mathbf{K}(n, m)$, $\omega \in \mathfrak{R}(n)$, $x_1, \dots, x_m \in X$. В случае $\mathbf{K} = \Sigma$ свободные алгебры в Alg-$\mathfrak{R}_{\Sigma}$ имеют вид* $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{R}}(X) = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}(n) \otimes_{\Sigma_n} T^n(X)$.

Доказательство. Для линейных Σ-операд этот факт хорошо известен (см. [7], [11]). В Δ-линейном случае все получается точно так же. Напомним лишь, как действует операда $\mathfrak{R}$ на алгебре $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{R}}(X)$:

$$\omega(\omega_1 \otimes \overline{x}_1, \dots, \omega_m \otimes \overline{x}_m) = (\omega\omega_1 \dots \omega_m) \otimes (\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m).$$

Здесь $\omega \in \mathfrak{R}(m)$, $\omega_i \in \mathfrak{R}(n_i)$, $\overline{x}_i \in X^{n_i}$, $1 \le i \le m$. В случае произвольной категории $\mathbf{K}$ все следует из определения. □

Далее рассматриваются только Σ-операды, и это не будет особо оговариваться. Определим свободную Δ-линейную операду с базисом $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ как операду $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Omega)$ вместе с вложениями $\Omega_n \subseteq \mathfrak{F}(n)$ такими, что для любой Δ-линейной операды $\mathfrak{R}$ любое семейство отображений вида $\Omega_n \to \mathfrak{R}(n)$, $n = 1, 2, \dots$, единственным способом продолжается до гомоморфизма операд $\mathfrak{F} \to \mathfrak{R}$. Свободные операды существуют и строятся примерно так же, как и абсолютно свободные алгебры. А именно, сначала индуктивно строится нелинейная свободная операда $\mathfrak{W}$. Основание индукции: $\Omega_n \subset \mathfrak{W}(n)$ для всех $n \geq 1$, и, кроме того, постулируется существование единицы ("пустого слова") $\varepsilon \in \mathfrak{W}(1)$. Далее, если уже построен терм (слово) $t \in \mathfrak{W}(n)$, то определен терм $\sigma t \in \mathfrak{W}(n)$ для любого $\sigma \in \Sigma_n$, а если определены термы $w \in \mathfrak{W}(m)$, $w_i \in \mathfrak{W}(n_i)$, то по ним определяется терм $ww_1 \dots w_m \in \mathfrak{W}(n_1 + \dots + n_m)$. Чтобы получилась операда, необходимо профакторизовать множество термов по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему все тождества из определения операды в [1]. Стандартным образом показывается выполнимость универсального свойства. Δ-линейная операда $\mathfrak{F}$ есть семейство свободных конвексоров с базисами $\mathfrak{W}(n)$. Операции композиции определяются "по Δ-линейности".

Теорема 6. *Многообразие* Alg-$\mathfrak{F}$ *рационально эквивалентно многообразию всех Δ-линейных Ω-алгебр, так что* $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{F}}(Z) \cong \mathrm{Fr}_{\Omega}(Z)$ *для всех базисов Z. Компонента $\mathfrak{F}(n)$ свободной Δ-линейной Σ-операды с базисом Ω изоморфна (как конвексор и как Σ_n-множество) подмножеству всех однородных n-полилинейных элементов абсолютно свободной Δ-линейной Ω-алгебры* $\mathrm{Fr}_{\Omega}(X)$, *где $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.*

Доказательство. Рассмотрим $\mathfrak{F}$-алгебру A. Так как по построению $\Omega_n \subset \mathfrak{F}(n)$, то из наличия Δ-полилинейных композиций $\mathfrak{F}(n) \times A^n \to A$ следует, что для каждого $\omega \in \Omega_n$ определено Δ-полилинейное отображение $\omega^A : A^n \to A$, и, таким образом, каждая $\mathfrak{F}$-алгебра естественным образом превращается в Ω-алгебру. Обратно, задание структуры Δ-линейной Ω-алгебры на A эквивалентно заданию семейства отображений вида $\Omega_n \to \mathfrak{E}_A(n)$ для всех $n = 1, 2, \dots$ Но согласно определению свободной операды по этому семейству отображений единственным образом строится гомоморфизм операд $\mathfrak{F} \to \mathfrak{E}_A$, что равносильно заданию на A структуры $\mathfrak{F}$-алгебры. Легко проверяется, что эти соответствия структур алгебр взаимно обратны и что в обоих случаях гомоморфизмами являются одни и те же отображения. Таким образом, имеет место изоморфизм категорий именно того вида, который фигурирует в определении рациональной эквивалентности.

Чтобы установить последнее утверждение, рассмотрим подмножества $\mathfrak{F}'(n) \subset \mathrm{Fr}_{\Omega}(x_1, \dots, x_n)$, состоящие из полилинейных элементов. Так как согласно предыдущему $\mathrm{Fr}_{\Omega}(x_1, \dots, x_n)$ можно отождествить с $\coprod\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}(n) \otimes_{\Sigma_n} T^n(X)$, то элементы $\mathfrak{F}'(n)$ имеют вид $\sum\limits_{\sigma} \alpha_s f_s \otimes (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, где $f_s \in \mathfrak{F}(n)$, суммирование ведется по некоторому множеству подстановок $\sigma \in \Sigma_n$ и $\sum\limits_{\sigma} \alpha_s = 1$. Используя свойства тензорного произведения (аналогичные тем, которые справедливы для линейного случая), приводим это выражение к виду $\Big(\sum\limits_{\sigma} \alpha_s (\sigma^{-1} f_s)\Big) \otimes (x_1, \dots, x_n)$ или $f \otimes (x_1, \dots, x_n)$, где $f \in \mathfrak{F}(n)$. Этот элемент можно отождествить с f, что дает искомый изоморфизм. Более формальное обоснование: $T^n(x_1, \dots, x_n)$ разлагается в копроизведение циклических конмодулей над конкольцом — аналогом групповой алгебры группы Σ_n, причем прямые слагаемые соответствуют орбитам действия Σ_n на X^n. В частности, одно из прямых слагаемых — свободный конмодуль с базисом $(x_1, \dots, x_n)$. Поскольку функтор тензорного произведения перестановочен с копроизведениями (ввиду наличия сопряженного, см. [1]) и тензорное произведение $\mathfrak{F}(n)$ над Σ_n на свободный Σ_n-конмодуль с базисом из одного элемента изоморфно $\mathfrak{F}(n)$, то указанное выше соответствие $f \to f \otimes (x_1, \dots, x_n)$ является изоморфизмом конвексоров и даже Σ_n-эквивариантным. $\mathfrak{F}'$ превращается в операду следующим образом. Если даны полилинейные элементы $\omega = f \otimes (x_1, \dots, x_m)$, $\omega_i = f_i \otimes (x_1, \dots, x_{n_i})$, $1 \leq i \leq m$, то $\omega\omega_1 \dots \omega_m$ есть результат подстановки в ω вместо x_i элемента ω_i с одновременной перенумерацией переменных в ω_i для всех $i \geq 2$

$$(ff_1 \dots f_m) \otimes (x_1, \dots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2}, \dots, x_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_m}).$$

Используя данное при доказательстве теоремы 5 описание композиции в $\mathfrak{F}$-алгебре $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{F}}(x_1, \dots, x_n)$, легко убедиться, что изоморфизм конвексоров $\mathfrak{F}(n)$ и $\mathfrak{F}'(n)$ — это изоморфизм операд. Заметим также, что аналогичным образом можно отождествить $\mathfrak{R}(n)$ с подмножеством формальных полилинейных элементов $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{R}}(x_1, \dots, x_n)$ для любой операды $\mathfrak{R}$. $\square$

Элементы $f \otimes (x_1, \dots, x_n)$ будем записывать в виде $fx_1 \dots x_m$. Прежде чем доказывать следующую теорему, напомним, что под конгруэнцией в алгебре A подразумевается подалгебра $A \times A$, которая является отношением эквивалентности на A. Если A — свободная алгебра, то вербальная конгруэнция на A — это вполне инвариантная конгруэнция, т. е. для любого эндоморфизма $\varphi : A \to A$ эндоморфизм $\varphi \times \varphi$ переводит эту подалгебру в себя. Когруэнцией в операде $\mathfrak{R}$ называется подоперада $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ такая, что все $\mathfrak{U}(n)$ являются отношениями эквивалентности в $\mathfrak{R}(n)$. Напомним, что $(\mathfrak{R} \times \mathfrak{R})(n) = \mathfrak{R}(n) \times \mathfrak{R}(n)$, композиция в операде и действие групп подстановок определяются покомпонентно.

Теорема 7. *Существует изоморфизм между решеткой конгруэнций свободной Δ-линейной операды $\mathfrak{F}$ с базисом Ω и решеткой вербальных конгруэнций в абсолютно свободной Δ-линейной Ω-алгебре $\mathrm{Fr}(X)$ со счетным базисом X, порожденных полилинейными элементами. Если $\mathfrak{U}$ — конгруэнция в $\mathfrak{F}$, то соответствующая вербальная конгруэнция $\widetilde{\mathfrak{U}}$ имеет следующий вид: $\coprod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{U}(n) \otimes_{\Sigma_n} T^n(X)$. Точнее, имеется в виду образ при отображении*

$$\coprod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{U}(n) \otimes_{\Sigma_n} T^n(X) \to \coprod_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{F}(n) \times \mathfrak{F}(n)) \otimes_{\Sigma_n} T^n(X) \to \left(\coprod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}(n) \otimes_{\Sigma_n} T^n(X) \right)^2.$$

Первое из участвующих здесь отображений индуцировано вложениями $\mathfrak{U}(n) \subseteq \mathfrak{F}(n) \times \mathfrak{F}(n)$, а второе на порождающих элементах имеет вид $(\omega_1, \omega_2) \otimes \overline{x} \mapsto (\omega_1 \otimes \overline{x}, \omega_2 \otimes \overline{x})$. Имеет место изоморфизм Δ-линейных Ω-алгебр: $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{F}}(X)/\widetilde{\mathfrak{U}} \cong \mathrm{Fr}_{\mathfrak{F}/\mathfrak{U}}(X)$.

Доказательство. Пусть дана вербальная конгруэнция $U \subseteq \mathrm{Fr}(X) \times \mathrm{Fr}(X)$, где X счетно. Рассмотрим множество P всех пар полилинейных элементов вида $(\omega\overline{x}, \mu\overline{x})$, где в $\overline{x} = x_{i_1} \dots x_{i_n}$ все $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ различны, $\omega, \mu \in \mathfrak{F}(n)$. Утверждается, что тогда семейство множеств $\widehat{U} = \mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}(n) \mid n = 1, 2, \dots\}$, $\mathfrak{U}(n) = \{ (\omega, \mu) \in \mathfrak{F}(n)^2 \mid (\omega\overline{x}, \mu\overline{x}) \in P$ для некоторого $\overline{x}\}$ образует конгруэнцию в операде $\mathfrak{F}$. Во-первых, заметим, что выбор $\overline{x}$ для пары (ω, μ) произволен в том смысле, что вместо $\overline{x} = x_{i_1} \dots x_{i_n}$ можно взять любое другое слово $\overline{x}' = x_{j_1} \dots x_{j_n}$ с условием, что все $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$ — различные элементы X. Это следует из инвариантности конгруэнции U: соответствие $x_{i_k} \mapsto x_{j_k}$, $1 \leq k \leq n$, продолжается до эндоморфизма $\mathrm{Fr}(X)$, затем до эндоморфизма $\mathrm{Fr}(X) \times \mathrm{Fr}(X)$, отображающего U в U, а пару $(\omega\overline{x}, \mu\overline{x})$ — в пару $(\omega\overline{x}', \mu\overline{x}')$. Очевидно, что все $\mathfrak{U}(n)$ будут отношениями эквивалентности и конвексорами. Пусть $(\omega, \mu) \in \mathfrak{U}(m)$, $(\omega_i, \mu_i) \in \mathfrak{U}(n_i)$, $1 \leq i \leq m$. Покажем, что $(\omega\omega_1 \dots \omega_m, \mu\mu_1 \dots \mu_m) \in \mathfrak{U}(n_1 + \dots + n_m)$. Выберем $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_m$ — слова в алфавите X так, что $(\omega_i\overline{x}_i, \mu_i\overline{x}_i) \in P$, $1 \leq i \leq m$, и в $\overline{x}_i$, $\overline{x}_j$ нет общих символов для всех $i \neq j$. Это можно сделать ввиду счетности X. Поскольку $U \subseteq \mathrm{Fr}(X) \times \mathrm{Fr}(X)$ — подалгебра $\mathfrak{F}$-алгебры $\mathrm{Fr}(X)$, то для любого $\omega \in \mathfrak{F}(n)$ и любых $(\omega_i\overline{x}_i, \mu_i\overline{x}_i) \in P$, $1 \leq i \leq m$, получим элемент из U

$$\omega(\omega_1\overline{x}_1, \mu_1\overline{x}_1) \dots (\omega_m\overline{x}_m, \mu_m\overline{x}_m) = ((\omega\omega_1 \dots \omega_m)(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m), (\omega\mu_1 \dots \mu_m)(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m)).$$

Но ввиду выбора $\overline{x}_i$ этот элемент должен принадлежать P. Таким образом,

$$(\omega\omega_1 \dots \omega_m, \omega\mu_1 \dots \mu_m) \in \mathfrak{U}(n_1 + \dots + n_m).$$

Пусть $\overline{x} = x_{t_1} \dots x_{t_m}$ — слово в алфавите X такое, что все x_{t_j} различны и $\overline{x}$ не имеет общих символов ни с одним из $\overline{x}_i$, $1 \leq i \leq m$. Тогда $(\omega\overline{x}, \mu\overline{x}) \in P \subset U$. Рассмотрим некоторый эндоморфизм

$\mathrm{Fr}(X)$, отображающий x_{t_j} в $\mu_j\overline{x}_j$, $1 \le j \le m$. Тогда $(\omega\overline{x}, \mu\overline{x})$ отображается в элемент U

$$(\omega(\mu_1\overline{x}_1 \dots \mu_m\overline{x}_m), \mu(\mu_1\overline{x}_1 \dots \mu_m\overline{x}_m)) = ((\omega\mu_1 \dots \mu_m)(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m), (\mu\mu_1 \dots \mu_m)(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m)).$$

Очевидно, однако, что вновь получен элемент из P, так что $(\omega\mu_1 \dots \mu_m, \mu\mu_1 \dots \mu_m) \in \mathfrak{U}(n_1 + \dots + n_m)$. Поскольку $\mathfrak{U}(n_1 + \dots + n_m)$ есть отношение эквивалентности, получаем требуемое включение $(\omega\omega_1 \dots \omega_m, \mu\mu_1 \dots \mu_m) \in \mathfrak{U}(n_1 + \dots + n_m)$. Из инвариантности конгруэнции U также непосредственно следует, что $\mathfrak{U}(n)$ замкнуты относительно действия групп Σ_n.

Из построения соответствия $U \mapsto \widehat{U} = \mathfrak{U}$ ясно, что оно сохраняет включения и произвольные пересечения. Обратное соответствие $\mathfrak{U} \mapsto \widetilde{U}$ определено в формулировке теоремы. Нетрудная проверка показывает, что $\widetilde{U}$ есть конгруэнция. Проверим ее полную инвариантность. Пусть гомоморфизм $\varphi : \mathrm{Fr}(X) \to \mathrm{Fr}(X)$ отображает x_i в $\sum\limits_j \alpha_{i\,j}(w_{i\,j}\overline{x}_{i\,j})$, где $w_{i\,j} \in \mathfrak{F}$, $0 \le \alpha_{i\,j} \le 1$, $\sum\limits_j \alpha_{i\,j} = 1$, и $(u_1x_1 \dots x_m, u_2x_1 \dots x_m)$ — порождающий элемент $\widetilde{U}$ (здесь можно даже не предполагать, что все $x_1, \dots, x_m$ различны). Тогда применение φ к этому элементу дает $(u_1\varphi(x_1) \dots \varphi(x_m), u_2\varphi(x_1) \dots \varphi(x_m))$, что преобразуется к виду (с учетом того, как устроено произведение конвексоров)

$$\sum_{j_1} \dots \sum_{j_m} \alpha_{1\,j_1} \dots \alpha_{m\,j_m}((u_1w_{1\,j_1} \dots w_{m\,j_m})\overline{x}_{j_1 \dots j_m}, (u_2w_{1\,j_1} \dots w_{m\,j_m})\overline{x}_{j_1 \dots j_m}),$$

где $\overline{x}_{j_1 \dots j_m} = \overline{x}_{1\,j_1} \dots \overline{x}_{m\,j_m}$. Остается заметить, что в операде $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$

$$(u_1w_{1\,j_1} \dots w_{m\,j_m}, u_2w_{1\,j_1} \dots w_{m\,j_m}) = (u_1, u_2)(w_{1\,j_1}, w_{1\,j_1}) \dots (w_{m\,j_m}, w_{m\,j_m}),$$

причем $(u_1, u_2) \in \mathfrak{U}(m)$ по выбору, а любая пара $(w, w) \in \mathfrak{U}(k)$, т.к. все $\mathfrak{U}(k)$ — отношения эквивалентности. Следовательно, результат записанной выше композиции также принадлежит подопераде $\mathfrak{U}$. Это доказывает вербальность конгруэнции $\widetilde{U}$.

Покажем взаимную обратность соответствий $U \mapsto \widehat{U}$ и $\mathfrak{U} \to \widetilde{\mathfrak{U}}$. В одну сторону это очевидно: полилинейные элементы из $\widetilde{\mathfrak{U}}$ приводят вновь к операде $\mathfrak{U}$. Проверим, что если $\mathfrak{U} = \widehat{U}$, то $U = \widetilde{\mathfrak{U}}$. До сих пор не использовалось то, что U порождается множеством P как вербальная конгруэнция. Это означает, что произвольный элемент $(z_1, z_2) \in U$ представляется в виде линейной комбинации (с коэффициентами из отрезка $[0, 1]$, сумма которых равна единице) элементов вида $\omega(p_1', p_1'') \dots (p_m', p_m'')$, где $\omega \in \mathfrak{F}(m)$, а каждая пара (p_i', p_i'') получается из некоторого элемента P подстановкой вместо переменных некоторых элементов $\mathrm{Fr}(X)$, причем для каждого отдельно взятого i, $1 \le i \le m$, вместо одинаковых переменных подставляются одинаковые элементы. С помощью рассуждений, сходных с теми, которые выше были использованы для доказательства вербальности $\widetilde{\mathfrak{U}}$, заключаем, что каждый элемент (p_i', p_i'') представляется в виде линейной комбинации элементов вида $(q_i'\overline{x}_i, q_i''\overline{x}_i)$, где $(q_i', q_i'') \in \mathfrak{U} = \widehat{U}$. Следовательно, произвольный элемент U есть линейная комбинация элементов вида

$$\omega(q_1'\overline{x}_1, q_1''\overline{x}_1) \dots (q_m'\overline{x}_m, q_m''\overline{x}_m) = ((\omega q_1' \dots q_m')\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m, (\omega q_1'' \dots q_m'')\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m). \qquad (*)$$

Пара $(\omega q_1' \dots q_m', \omega q_1'' \dots q_m'')$ принадлежит $\mathfrak{U}$. Чтобы убедиться в этом, выберем для каждой пары (q_i', q_i'') слово $\overline{y}_i$ в алфавите X таким образом, что $(q_i'\overline{y}_i, q_i''\overline{y}_i) \in P$, причем в $\overline{y}_i$ и $\overline{y}_j$ нет общих символов при всех $i \ne j$. Поскольку U — подалгебра, то композиция

$$\omega(q_1'\overline{y}_1, q_1''\overline{y}_1) \dots (q_m'\overline{y}_m, q_m''\overline{y}_m) = ((\omega q_1' \dots q_m')\overline{y}_1 \dots \overline{y}_m, (\omega q_1'' \dots q_m'')\overline{y}_1 \dots \overline{y}_m)$$

принадлежит U и очевидно, что она принадлежит и P. Возвращаясь к элементу $(*)$, заключаем, что он принадлежит $\widetilde{U}$. Включение $\widetilde{U} \subseteq U$ очевидно.

Таким образом, получено взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок, между двумя решетками, причем отображение $U \mapsto \widehat{U}$ сохраняет произвольные пересечения. Но так как точная верхняя грань элементов U_1 и U_2 в рассматриваемых решетках есть пересечение всех U таких, что $U_1, U_2 \subseteq U$, то имеет место изоморфизм решеток.

Рассмотрим диаграмму $\mathfrak{U}(n) \overset{v}{\subseteq} \mathfrak{F}(n) \times \mathfrak{F}(n) \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} \mathfrak{F}(n) \xrightarrow{c} \mathfrak{F}(n)/\mathfrak{U}(n)$, в которой π_1, π_2 — естественные проекции на первый и на второй сомножители, v — вложение, а c есть коуравнитель пары $(\pi_1 v, \pi_2 v)$. Как было отмечено в [1], тензорные произведения сохраняют коуравнители, так что в следующей диаграмме $c \otimes 1$ есть коуравнитель пары $((\pi_1 \otimes 1)(v \otimes 1), (\pi_2 \otimes 1)(v \otimes 1))$:

$$\mathfrak{U}(n) \underset{\Sigma_n}{\otimes} T^n(X) \xrightarrow{v\otimes 1} (\mathfrak{F}(n) \times \mathfrak{F}(n)) \underset{\Sigma_n}{\otimes} T^n(X) \underset{\pi_2\otimes 1}{\overset{\pi_1\otimes 1}{\rightrightarrows}} \mathfrak{F}(n) \xrightarrow{c\otimes 1} ((\mathfrak{F}(n)/\mathfrak{U}(n)) \underset{\Sigma_n}{\otimes} T^n(X)).$$

Рассмотрим отображение $d : (\mathfrak{F}(n) \times \mathfrak{F}(n)) \otimes_{\Sigma_n} T^n(X) \to (\mathfrak{F}(n) \otimes_{\Sigma_n} T^n(X))^2$ такое, что $d((\omega_1, \omega_2) \otimes \overline{x}) = (\omega_1 \otimes \overline{x}, \omega_2 \otimes \overline{x})$. Если $p_i : (\mathfrak{F}(n) \otimes_{\Sigma_n} T^n(X))^2 \to \mathfrak{F}(n) \otimes_{\Sigma_n} T^n(X)$, $i = 1, 2$, — естественные проекции, то имеют место очевидные равенства $p_i d = \pi_i \otimes 1$, $i = 1, 2$. Отсюда следует, что $\mathfrak{F}(n)/\mathfrak{U}(n) \otimes_{\Sigma_n} T^n(X)$ — коуравнитель пары $(p_1 d(v \otimes 1), p_2 d(v \otimes 1))$, т.е. фактормножество $(\mathfrak{F}(n) \otimes_{\Sigma_n} T^n(X))^2$ по конгруэнции, являющейся образом $d(v \otimes 1)$. Остается заметить, что в любой категории, где соответствующие операции определены, взятие копроизведения произвольного семейства диаграмм коуравнителей есть также диаграмма коуравнителя. Это значит, что свободная алгебра многообразия Alg-$(\mathfrak{F}/\mathfrak{U})$, имеющая вид $\coprod_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{F}(n)/\mathfrak{U}(n)) \otimes_{\Sigma_n} T^n(X)$, изоморфна факторалгебре $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{F}}(X)$ по конгруэнции $\widetilde{\mathfrak{U}}$. □

Теорема 8. *Многообразия Δ-линейных мультиоператорных алгебр, определяемые Δ-полилинейными тождествами (и только они) имеют вид* Alg-$\mathfrak{R}$ *для подходящей Δ-линейной операды $\mathfrak{R}$.*

Доказательство. Пусть дана коноперада $\mathfrak{R}$. Представим ее в виде фактороперады свободной операды $\mathfrak{F}$ по конгруэнции $\mathfrak{U}$. Тогда Alg-$\mathfrak{R}$ можно вложить в качестве подмногообразия в многообразие Alg-$\mathfrak{F}$, которое можно считать многообразием всех Δ-линейных Ω-алгебр (выбор Ω достаточно произволен, это множество должно лишь находится во взаимно однозначном соответствии с некоторым множеством образующих $\mathfrak{R}$). Из предыдущей теоремы следует, что для счетного X имеет место изоморфизм между $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{R}}(X)$ и факторалгеброй $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{F}}(X)$ по конгруэнции $\widetilde{\mathfrak{U}}$. Но конгруэнция $\widetilde{\mathfrak{U}}$ порождается полилинейными тождествами, а это и означает, что Alg-$\mathfrak{R}$ определяется полилинейными тождествами.

Обратно, пусть дано многообразие Δ-линейных Ω-алгебр $\mathfrak{V}$, определяемое полилинейными тождествами, и F есть свободная алгебра из $\mathfrak{V}$ со счетным базисом X. Согласно условию F изоморфна факторалгебре абсолютно свободной алгебры $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{F}}(X)$ по вербальной конгруэнции, порожденной полилинейными элементами. Но уже известно, что эта конгруэнция имеет вид $\widetilde{\mathfrak{U}}$. Из последнего утверждения предыдущей теоремы следует, что $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{F}}(X)/\widetilde{\mathfrak{U}} \cong \mathrm{Fr}_{\mathfrak{F}/\mathfrak{U}}(X)$ как Δ-линейные Ω-алгебры. Но это означает, что многообразия $\mathfrak{V}$ и Alg-$(\mathfrak{F}/\mathfrak{K})$ совпадают как подмногообразия Alg-$\mathfrak{F}$. □

Заметим, что сходным образом автором было ранее доказано ([4]–[7]), что для многообразий линейных мультиоператорных алгебр (над коммутативными кольцами) класс многообразий, задаваемых полилинейными тождествами, совпадает с классом многообразий вида Alg-$\mathfrak{R}$ (под совпадением понимается, конечно, рациональная эквивалентность). Недавно аналогичный факт установлен и для многообразий супералгебр [15].

Литература

1. Тронин С.Н. *Операды в категории конвексоров.* I // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 3. – С. 42–50.
2. Тронин С.Н. *Операды в категории конвексоров* // Универсальная алгебра и ее приложения. Тез. докл. международн. семинара, посвящ. памяти проф. Л.А. Скорнякова. Волгоград, 6–11 сент. 1999 г. – Волгоград: “Перемена”, 1999. – С. 62–63.

3. Максимов В.М. *Кубические стохастические матрицы и их вероятностные интерпретации* // Теория вероятн. и ее примен. – 1996. – Т. 41. – Вып. 1. – С. 89–106.
4. Тронин С.Н. *О многообразиях, задаваемых полилинейными тождествами* // Тез. сообщ. XIX Всесоюзн. алгебр. конф. 9–11 сент. 1987 г. Ч. 2. Львов, 1987. – С. 280.
5. Тронин С.Н. *О некоторых свойствах финитарных алгебраических теорий* // Тез. сообщ. V Сибирской школы по многообразиям алгебр. систем, 1–5 июля 1988 г. Барнаул, 1988. – С. 68–70.
6. Тронин С.Н. *О некоторых свойствах алгебраических теорий многообразий линейных алгебр.* I. *Многообразия, задаваемые полилинейными тождествами.* – Казанск. гос. ун-т. – Казань, 1988. – 31 с. – Деп. в ВИНИТИ 11.08.88, № 6511-В88.
7. Тронин С.Н. *О ретракциях свободных алгебр и модулей*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. Кишинев, 1989. – 105 с.
8. Скорняков Л.А. *Стохастическая алгебра* // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 7. – С. 3–11.
9. Скорняков Л.А. *Алгебра стохастических распределений* // Изв. вузов. Математика. – 1982. – № 11. – С. 59–67.
10. Гаспарян А.С. *О некоторых приложениях многомерных матриц.* – М.: ВЦ АН СССР, 1983. – 60 с.
11. Ginzburg V., Kapranov M. *Koszul duality for operads* // Duke Math. J. – 1994. – V. 76. – № 1. – P. 203–272.
12. Артамонов В.А. *Клоны полилинейных операций* // УМН. – 1969. – Т. 24. – Вып. 1. – С. 47–59.
13. May J.P. *The geometry of iterated loop spaces* // Lect. Notes Math. – 1972. – V. 271. – 175 p.
14. Бухараев Р.Г. *Основы теории вероятностных автоматов.* – М.: Наука, 1985. – 400 с.
15. Тронин С.Н. *Многообразия супералгебр и линейные операды* // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы школы-конф., посвящ. 130-летию со дня рожд. Д.Ф. Егорова (Казань, 13–18 сент. 1999 г.) – Казань: Изд-во Казанск. матем. общества, 1999. – С. 224–227.

Казанский государственный университет

Поступила
30.12.1999