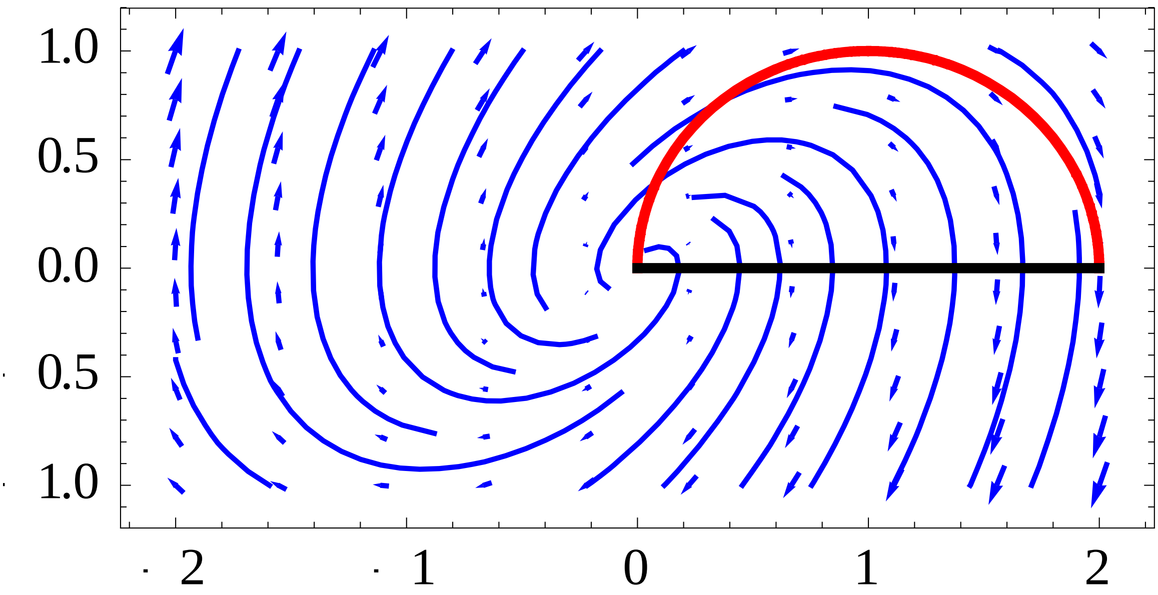
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО
Кафедра аэрогидромеханики

К. А. ПОТАШЕВ

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Учебное пособие



Казань – 2024

УДК 531.01

Принято на заседании учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н.И.Лобачевского
Протокол № 4 от 22 января 2024 г.

Рецензенты
доктор физико-математических наук,
руководитель научного направления
«Математическое моделирование в механике»
ИТПМ СО РАН, Тюменский филиал,
проф. **А.А. Губайдуллин**

доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой геометрии ИММ КФУ
доц. **А.А. Попов**

Поташев К.А.

Основы механики сплошной среды. Практические занятия: Учебное пособие / К.А. Поташев. – Казань: Казанский федеральный университет, 2024. – 57 с.

Учебное пособие предназначено для студентов и преподавателей при изучении и изложении курса по основам механики сплошной среды. Материал отражает содержание практических занятий одноименной дисциплины, читаемой студентам бакалавриата Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского Казанского федерального университета, обучающимся по направлению 01.03.03 – «Механика и математическое моделирование». Пособие содержит набор задач по основам тензорного исчисления и их приложениям к задачам механики сплошной среды. Материал изложен в форме отдельных занятий, содержащих минимально необходимый теоретический материал с основными формулами и определениями, примеры решения типовых задач и набор дополнительных заданий.

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАНЯТИЕ 1. Криволинейные координаты. Базисные векторы. Метрическая матрица. Сопряженный базис 4

ЗАНЯТИЕ 2. Преобразование координат. Инвариантные объекты 10

ЗАНЯТИЕ 3. Операции над тензорами. Физические компоненты вектора..... 15

ЗАНЯТИЕ 4. Альтернирование и симметрирование. Тензорная поверхность, главные значения и главные направления 19

ЗАНЯТИЕ 5. Дифференцирование вектора и тензора по координате 23

ЗАНЯТИЕ 6. Основные дифференциальные операторы 26

ЗАНЯТИЕ 7. Задание движения сплошной среды. Материальная производная по времени 31

ЗАНЯТИЕ 8. Линии тока. Траектории частиц 35

ЗАНЯТИЕ 9. Деформация. Скорость деформации 38

ЗАНЯТИЕ 10. Теорема Коши – Гельмгольца. Потенциал скорости. Циркуляция. Формула Стокса 44

ЗАНЯТИЕ 11. Уравнение неразрывности 48

ЗАНЯТИЕ 12. Напряжения. Уравнения равновесия 52

КРАТКИЙ Справочный материал 56

Литература 57

ЗАНЯТИЕ 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ. БАЗИСНЫЕ ВЕКТОРЫ. МЕТРИЧЕСКАЯ МАТРИЦА. СОПРЯЖЕННЫЙ БАЗИС

Основные формулы и определения

Соглашение о суммировании (правило суммирования Эйнштейна): при наличии у некоторого одночлена двух индексов, обозначенных одной и той же буквой и расположенных один вверху (контравариантный индекс), а другой внизу (ковариантный индекс), предполагается суммирование по всем значениям, которые может принимать данный индекс (для трехмерного пространства – от единицы до трех). Индексы, по которым осуществляется суммирование, называются *немыми индексами* (так как их буквенное обозначение не влияет на результат). Например,

$$a^i b_i = \sum_{i=1}^{3} a^i b_i = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3. \qquad (1.1)$$

Координатной поверхностью $x^i = const$ называют геометрическое место точек, для которых указанная координата постоянна. Например, в координатной плоскости yOz декартовой прямолинейной системы координата x ее точек постоянна и равна нулю.

Координатной линией называют геометрическое место точек, для которых одна и только одна координата переменна. Координатные линии – пересечения координатных поверхностей.

Если координатные линии прямолинейны, то система координат называется *прямолинейной*. В противном случае система координат является *криволинейной*.

Базисные векторы $Э_i$ (или векторы базиса) по определению равны

$$Э_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} = \lim_{\substack{\vartriangle x^i \to 0 \\ x^j, x^k = const}} \frac{\vec{r}\left(x^i + \vartriangle x^i, x^j, x^k\right) - \vec{r}\left(x^i, x^j, x^k\right)}{\vartriangle x^i} \qquad (1.2)$$

направлены по касательным к координатным линиям в данной точке в сторону возрастания соответствующей координаты (индексы i, j, k могут принимать значения 1, 2, 3 и расположены в циклическом порядке). Концы радиус-векторов, стоящих в числителе дроби, лежат на координатной линии x^i.

В отличие от прямолинейных координатных систем в криволинейных системах координат векторы не являются свободными, так как направления и, вообще говоря, величины базисных векторов зависят от точки приложения.

Метрическая матрица

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \left(g_{ij}\right)$$

позволяет выразить квадрат расстояния между парой бесконечно близких точек в виде:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j. \qquad (1.3)$$

Компоненты метрической матрицы могут быть вычислены как скалярное произведение базисных векторов:

$$g_{ij} = Э_i \cdot Э_j. \qquad (1.4)$$

Сопряженной матрицей или обратной к метрической матрице $\left(g_{ij}\right)$ называется матрица $\left(g^{ij}\right)$, если элементы этих двух матриц связаны следующим образом:

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k \text{ или } g^{jk} = G^{jk*}/g, \qquad (1.5)$$

где G^{jk*} – элементы транспонированной матрицы $\left(G^{jk}\right)$; G^{jk} – алгебраическое дополнение к элементу g_{jk}, $g = \left\|g_{ij}\right\|$ – определитель матрицы $\left(g_{ij}\right)$. $G^{jk} = A^{jk}\left(-1\right)^{j+k}$, A^{jk} – миноры к элементу g_{jk}, δ_i^j – *символ Кронекера*, определяемый как

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \qquad (1.6)$$

Сопряженный (обратный, контравариантный) базис векторов $Э^j$ определяется выражением:

$$Э^j = g^{ji}Э_i. \qquad (1.7)$$

Величины с нижней индексацией называются *ковариантными*, с верхней индексацией – *контравариантными*.

Примеры решения задач

Задача 1.1. Дать развернутую запись выражений $M_{i\bullet\bullet}^{\bullet i\alpha}$; $a^i\delta_i^j$; δ_i^i; $a^\alpha b_{\alpha j}$.

Решение.

1. $M_{1\bullet\bullet}^{\bullet 1\alpha} + M_{2\bullet\bullet}^{\bullet 2\alpha} + M_{3\bullet\bullet}^{\bullet 3\alpha}$, индекс α – свободный (по нему нет суммирования);

2. $a^i\delta_i^j = a^1\delta_1^j + a^2\delta_2^j + a^3\delta_3^j = \begin{Bmatrix} a^1, & j=1 \\ a^2, & j=2 \\ a^3, & j=3 \end{Bmatrix} = a^j$;

3. $\delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 3$;   4. $a^1 b_{1j} + a^2 b_{2j} + a^3 b_{3j}$.

Задача 1.2. Определить координатные поверхности и координатные линии сферической системы координат (ССК) r, φ, λ. Показать, что касательные к координатным линиям в точке M сферической системы координат взаимно перпендикулярны.

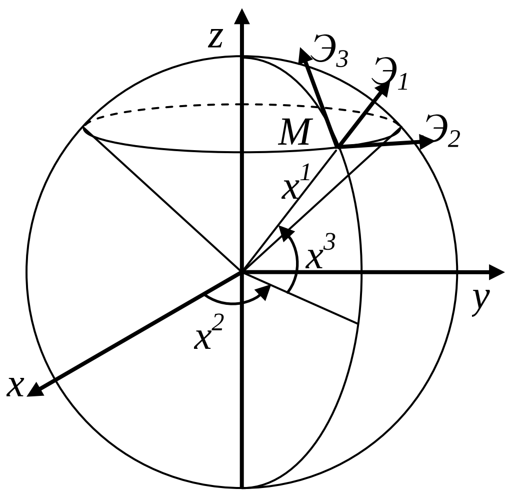


Рис. 1

Решение. Используем обозначения $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = \lambda$ (рис. 1). Координатная поверхность $x^1 = const$ – сфера радиуса $r = x^1$ с центром в точке O; координатная поверхность $x^2 = const$ – полуплоскость, проходящая через ось Oz и точку M; координатная поверхность $x^3 = const$ – коническая поверхность, ось симметрии которой – Oz, образующая, составляет с осью угол $\pi/2 - x^3$.

Координатная линия x^1 – луч, проходящий через O и M; координатная линия x^2 – окружность радиуса $x^1 \cos x^3$, плоскость которой параллельна xOy; координатная линия x^3 – полуокружность радиуса x^1, лежащая в координатной плоскости $x^2 = const$.

Касательные лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях, следовательно, они взаимно перпендикулярны.

Задача 1.3. Определить модули векторов базиса введенной сферической системы координат в точке M.

Решение. $\left|Э_1\right| = \lim\limits_{\substack{\triangle x^1 \to 0 \\ x^2, x^3 = const}} \left|\triangle\vec{r}/\triangle x^1\right| = \lim\limits_{\triangle x^1 \to 0}\left|\triangle x^1/\triangle x^1\right| = 1$, здесь $\triangle\vec{r} = MN$, где M и N – точки, лежащие на координатной линии x^1.

$$\left|Э_2\right| = \lim_{\substack{\triangle x^2 \to 0 \\ x^1, x^3 = const}} \left|\triangle\vec{r}/\triangle x^2\right| = \lim_{\triangle x^2 \to 0}\left|x^1 \cos x^3 \triangle x^2/\triangle x^2\right| = \left|x^1 \cos x^3\right|,$$

$$\left|Э_3\right| = \lim_{\substack{\triangle x^3 \to 0 \\ x^1, x^2 = const}} \left|\triangle\vec{r}/\triangle x^3\right| = \lim_{\triangle x^3 \to 0}\left|x^1 \triangle x^3/\triangle x^3\right| = \left|x^1\right|.$$

Задача 1.4. Найти компоненты g_{ij} в произвольной точке для сферической системы координат. Записать компоненты сопряженной метрической матрицы.

Решение. Запишем выражение длины внутренней диагонали прямоугольного параллелепипеда, сторонами которого являются $\left|dx^1\right|$, $\left|x^1\cos x^3\,dx^2\right|$, $\left|x^1\,dx^3\right|$:

$$ds^2=\left(dx^1\right)^2+\left(x^1\cos x^3\,dx^2\right)^2+\left(x^1\,dx^3\right)^2.$$

Сравнивая полученное соотношение с выражением (1.3), получаем матрицу:

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(x^1\cos x^3\right)^2 & 0\\ 0 & 0 & \left(x^1\right)^2\end{pmatrix}.$$

Это симметричная матрица с нулевыми недиагональными элементами, что характерно для ортогональных систем координат.

Вычисляя по указанным правилам компоненты сопряженной метрической матрицы, получим:

$$\left(g^{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(x^1\cos x^3\right)^{-2} & 0\\ 0 & 0 & \left(x^1\right)^{-2}\end{pmatrix}.$$

Задача 1.5. Найти разложение базисных векторов $Э^j$ по базисным векторам $Э_i$ в точке *M* в случае введенной сферической системы координат.

Решение.

$$Э^1=g^{1i}Э_i=Э_1,\; Э^2=g^{2i}Э_i=\left(x^1\cos x^3\right)^{-2}Э_2,\; Э^3=g^{3i}Э_i=\left(x^1\right)^{-2}Э_3.$$

Задача 1.6. Доказать, что $g^{ij}=Э^i\cdot Э^j$.

Решение. $Э^i\cdot Э^j=Э_k g^{ki}\cdot Э_n g^{nj}=g_{kn}g^{ki}g^{nj}=\left(g_{kn}g^{ki}\right)g^{nj}=\delta^i_n g^{nj}=g^{ij}$.

Задача 1.7. Доказать, что $Э^i\cdot Э_j=\delta^i_j$.

Решение. $Э^i\cdot Э_j=Э_k g^{ki}\cdot Э_j=g_{kj}g^{ki}=\delta^i_j$.

Задача 1.8. Доказать, что $Э_i=g_{ij}Э^j$.

Решение. $g_{ij}Э^j = g_{ij}\left(Э_k g^{kj}\right) = g_{ij}g^{kj}Э_k = \delta_i^k Э_k = Э_i$.

Задачи для решения в аудитории

Задача 1.9. Сколько различных соотношений содержит выражение $g_{ij} = Э_i \cdot Э_j$?

Задача 1.10. Упростить выражения $\delta_i^2 n^i$, $\delta_2^i A_{ji}\delta_1^j$, $\delta_j^i\,\delta_k^j$, $\delta_j^i\delta_k^j\delta_i^k$, $\delta_j^i\,\delta_k^j\,A_i^k$, $\delta_j^i\,A_i^k$, $B_{ij}x^i x^j$, если $B_{ij} = -B_{ji}$.

Задача 1.11. Указать, какая из систем координат с метрической матрицей

$$\text{а)}\begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix},\ \text{б)}\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta_{12} & \cos\theta_{13} \\ \cos\theta_{12} & 1 & \cos\theta_{23} \\ \cos\theta_{13} & \cos\theta_{23} & 1 \end{pmatrix},\ \text{в)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является 1) ортонормированной, 2) нормированной неортогональной, 3) ортогональной ненормированной.

Задача 1.12. Определить компоненты метрической матрицы для косоугольной системы координат, первая ось которой параллельна оси абсцисс декартовой системы координат, а вторая ось образует с первой угол α.

Дополнительные задачи

Задача 1.13. Для заданных матриц

$$\left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix},\ \left(x^i\right) = (2,1,4),\ \left(y^i\right) = (3,7,-1)$$

вычислить а) $a_{ij}\,x^j$, б) $a_{ij}\,x^i$, в) $a_{ij}\,x^i\,y^j$, г) $a_{ij}\,y^i\,x^j$, д) $a_{ij}\,\delta_i^j$, е) $\left(a_{ij} - \dfrac{2}{5}\delta_j^l\,a_{il}\right)x^i\,y^j$.

Задача 1.14. Решить задачи 1.2 – 1.5 в случае цилиндрической системы координат (ЦСК).

Задача 1.15. В некоторых случаях, например при изучении течения в тонком слое вблизи тела, удобно использовать специальную криволинейную систему координат. Если течение рассматривается как плоское, система координат вводится в плоскости следующим образом. Пусть в плоскости течения граница тела – гладкая кривая L, заданная параметрически

$\vec{r} = \vec{f}(s) = a(s)\vec{i} + b(s)\vec{j}$, где s – длина дуги кривой L. Тогда в окрестности кривой каждой точке с радиус-вектором $\vec{r}$ с помощью рассматриваемой системы координат можно поставить в соответствие пару чисел (s,h), определяемых из уравнения (рис. 2)

$$\vec{r} = \vec{f}(s) + \vec{n}(s)h,$$

где $\vec{n}(s)$ – единичная нормаль к кривой L; h – расстояние до L.

Найдите базис системы координат $x^1 = s$, $x^2 = h$ и ковариантные компоненты ее метрического тензора.

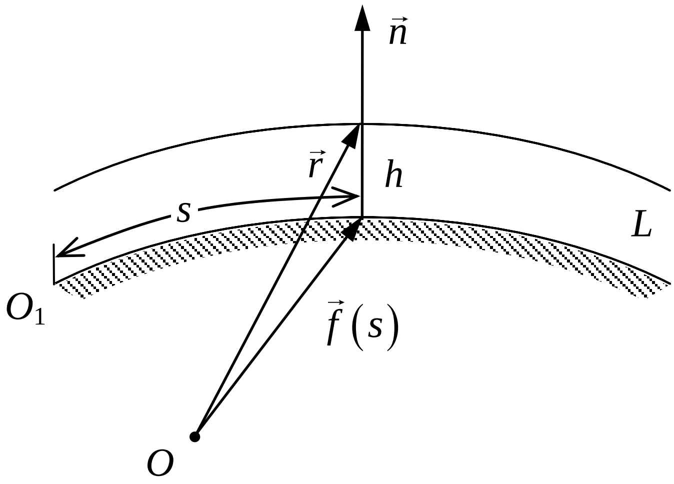


Рис. 2

Ответ: $Э_1 = (a' - hb'', b' + ha'')$, $Э_2 = (-b', a')$; $g_{ij} = \begin{pmatrix} (1 \pm h/R)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 1.16. (*) Показать, что $\left(P_{ijk} + P_{jki} + P_{jik}\right)x^i x^j x^k = 3P_{ijk}\, x^i x^j x^k$.

Задача 1.17. (*) Найти векторы сопряженного базиса, если

$$Э_1 = 3\vec{i} + 8\vec{k},\ Э_2 = \vec{i} + 2\vec{k},\ Э_3 = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k}.$$

ЗАНЯТИЕ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ. ИНВАРИАНТНЫЕ ОБЪЕКТЫ

Основные формулы и определения

Преобразование координат характеризуется соотношениями $x^i = x^i\left(x'^1, x'^2, x'^3\right) = x^i\left(x'^j\right)$ и выражает отображение областей изменения переменных x^i и x'^j друг на друга. Штрих в дальнейшем означает переменную в новой системе координат. Отображение является непрерывным, взаимно однозначным, если якобиан преобразования $\left\|\partial x^i/\partial x'^j\right\| \neq 0,\infty$; при этом якобиан обратного преобразования $\left\|\partial x'^i/\partial x^j\right\| \neq \infty, 0$.

При переходе от одной системы координат к другой используются *формулы преобразования*:

дифференциала:
$$\mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^1}\mathrm{d}x'^1 + \frac{\partial x^i}{\partial x'^2}\mathrm{d}x'^2 + \frac{\partial x^i}{\partial x'^3}\mathrm{d}x'^3 = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\mathrm{d}x'^j, \qquad (2.1)$$

базисных векторов:
$$Э_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^j}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}Э'_j, \quad Э^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^m}Э'^m, \qquad (2.2)$$

компонент метрической матрицы:
$$g_{ij} = Э_i \cdot Э_j = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^j}Э'_\alpha \cdot Э'_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^j}g'_{\alpha\beta}, \quad g^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial x'^\beta}g'^{\alpha\beta}, \qquad (2.3)$$

компонент вектора:
$$a^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}a'^j, \qquad (2.4)$$

компонент тензора второго ранга:
$$T_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^j}{\partial x^\beta}T'_{ij}. \qquad (2.5)$$

Инвариантными относительно преобразования координат называют свойства, не меняющиеся при названном преобразовании. В частности, инвариантным является квадрат расстояния между близкими точками (форма записи остается неизменной):

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^j}g'_{\alpha\beta}\frac{\partial x^i}{\partial x'^\gamma}\mathrm{d}x'^\gamma\frac{\partial x^j}{\partial x'^\nu}\mathrm{d}x'^\nu =$$
$$= \delta^\alpha_\gamma\delta^\beta_\nu g'_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x'^\gamma\,\mathrm{d}x'^\nu = g'_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x'^\alpha\,\mathrm{d}x'^\beta = \mathrm{d}s^2.$$

Вектор $\vec{a}$ – линейная комбинация базисных векторов, инвариантная относительно непрерывного, однозначного преобразования координат:

$$\vec{a} = a^iЭ_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}a'^j\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^i}Э'_\gamma = \delta^\gamma_j a'^jЭ'_\gamma = a'^jЭ'_j. \qquad (2.6)$$

Вектор может быть записан в ко- и контравариантных компонентах:

$$\vec{a} = a^i Э_i = a_j Э^j. \tag{2.7}$$

Здесь a_j, a^i – ко- и контравариантные компоненты вектора.

Тензор второго ранга – линейная комбинация диад базисных векторов, инвариантная относительно непрерывного, однозначного преобразования координат. Тензор второго ранга может быть записан в диадах векторов исходного и сопряженного базиса:

$$\overset{\Rightarrow}{T} = T^{\alpha\beta}\, Э_\alpha \circ Э_\beta = T^{i\cdot}_{\cdot\beta}\, Э_i \circ Э^\beta = T^{\cdot j}_{\alpha\cdot}\, Э^\alpha \circ Э_j = T_{\alpha\beta}\, Э^\alpha \circ Э^\beta. \tag{2.8}$$

Число индексов у компонент тензора $T^{\alpha\beta}$ определяет его ранг. Скаляр – тензор нулевого ранга, вектор – тензор первого ранга. *Матрицей тензора* называется матрица, составленная из его компонент.

Операция *«жонглирования» индексами* производится с использованием компонент метрической матрицы при переходе от ковариантных величин к контравариантным и наоборот. Например,
для компонент вектора:

$$a^i = g^{ij} a_j, \quad a_i = g_{ij} a^j. \tag{2.9}$$

для компонент тензора:

$$T^{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma}\, g_{\alpha\tau} = T^{\alpha\bullet}_{\bullet\gamma}\, g_{\alpha\tau} = T_{\tau\gamma} \quad \text{и} \quad T_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\tau}\, g^{\beta\gamma} = T^{\tau\bullet}_{\bullet\beta}\, g^{\beta\gamma} = T^{\tau\beta}. \tag{2.10}$$

Диадой двух произвольных векторов $\vec{a} \circ \vec{b}$ является элемент девятимерного линейного пространства (тензор второго ранга), характеризуемый разложением: $\vec{a} \circ \vec{b} = a^i b^j\, Э_i \circ Э_j$. Здесь диады $Э_i \circ Э_j,\ i, j = \overline{1,3}$, образуют базис данного девятимерного пространства. *Матрицей диады* является матрица 3×3, составленная из коэффициентов линейной комбинации – $a^i b^j$.

При обозначении диадного произведения знак $(\ )\circ(\ )$ может быть опущен. Скалярное же произведение $(\ )\cdot(\ )$ впредь всегда будем обозначать точкой.

Метрический тензор в качестве компонент имеет элементы метрической матрицы:

$$\overset{\Rightarrow}{g} = g^{ij}\, Э_i \circ Э_j = \delta^i_\beta\, Э_i \circ Э^\beta = \delta^j_\alpha\, Э^\alpha \circ Э_j = g_{\alpha\beta}\, Э^\alpha \circ Э^\beta. \tag{2.11}$$

Примеры решения задач

Задача 2.1. Записать явный вид соотношения $x^i = x^i\left(x'^j\right)$ и якобиана $\left\|\partial x^i / \partial x'^j\right\|$, если $x^i = (x, y, z)$ – декартовы координаты, а $x'^j = (r, \varphi, \lambda)$ – сферические координаты.

Решение:

$$x^1 = x'^1 \cos x'^3 \cos x'^2, \quad x^2 = x'^1 \cos x'^3 \sin x'^2, \quad x^3 = x'^1 \sin x'^3,$$

$$\left\|\partial x^i / \partial x'^j\right\| = \left(x'^1\right)^2 \cos x'^3.$$

Задача 2.2. В сферической системе координат в точке $M = \left(x'^i_M\right) = \left(2\sqrt{2}, 0, \pi/4\right)$ задан вектор $\vec{a} = \left(a'^i\right) = \left(\sqrt{2}, 0, 1\right)$. Записать данный вектор в декартовой системе координат (ДСК).

Решение. Для записи решения задачи необходимо отыскать компоненты вектора в декартовой системе координат.

$$a^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x'^j} a'^j = \left.\frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\right|_M a'^1 + \left.\frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\right|_M a'^2 + \left.\frac{\partial x^1}{\partial x'^3}\right|_M a'^3 =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \cos x'^2_m \cos x'^3_m + 0 - 1 \cdot x'^1_m \cos x'^2_m \sin x'^3_m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1,$$

$$a^2 = \frac{\partial x^2}{\partial x'^j} a'^j = \left.\frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\right|_M a'^1 + \left.\frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\right|_M a'^2 + \left.\frac{\partial x^2}{\partial x'^3}\right|_M a'^3 = 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$a^3 = \frac{\partial x^3}{\partial x'^j} a'^j = \left.\frac{\partial x^3}{\partial x'^1}\right|_M a'^1 + \left.\frac{\partial x^3}{\partial x'^2}\right|_M a'^2 + \left.\frac{\partial x^3}{\partial x'^3}\right|_M a'^3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3.$$

Здесь при вычислении частных производных были использованы координаты точки приложения вектора. Таким образом, в декартовой системе координат:

$$\vec{a} = \left(a^i\right) = (-1, 0, 3) = -1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}\,.$$

Следует обратить внимание, что вектор $\vec{a}$ с теми же компонентами в сферической системе координат, но приложенный к другой точке пространства, имел бы иные компоненты в декартовой координатной системе.

Задача 2.3. Доказать инвариантность и найти представления скалярного произведения векторов.

Решение.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^i Э_i \cdot b^j Э_j = a^i b^j g_{ij} = a^i b_i = a'^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial x'^\alpha} b'_\beta \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^i} = a'^\alpha b'_\beta \delta^\beta_\alpha = a'^\alpha b'_\alpha\,.$$

Задача 2.4. Найти формулу преобразования компонент тензора второго ранга $T^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}$ со смешанным строением индексов при переходе к новой системе координат.

Решение.

$$T^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}Э_\alpha Э^\beta = T'^{i\cdot}_{\cdot j}Э'_i Э'^j = T'^{i\cdot}_{\cdot j}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}Э_\alpha\frac{\partial x'^j}{\partial x^\beta}Э^\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^j}{\partial x^\beta}T'^{i\cdot}_{\cdot j}Э_\alpha Э^\beta.$$

Из сравнения получаем $T^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}\dfrac{\partial x'^j}{\partial x^\beta}T'^{i\cdot}_{\cdot j}$.

Задачи для решения в аудитории

Задача 2.5. Составить матрицу из компонент следующего тензора второго ранга: $\overset{\Rightarrow}{T} = 3\vec{i}\,\vec{i} + 5\vec{i}\,\vec{j} + 4\vec{j}\,\vec{i} - \vec{k}\,\vec{k}$.

Задача 2.6. Задана прямолинейная, косоугольная система координат, угол между двумя координатными линиями в точке равен α, третья координатная линия перпендикулярна первым двум. Определить величины и направления базисных векторов $Э_i$ и $Э^i$.

Задача 2.7. В декартовой системе координат (x, y) к точке $M(1,1)$ приложен вектор $\vec{a}(1,1)$. Следует найти координаты точки M и компоненты a^i вектора $\vec{a}$ в полярной системе координат (r, φ) и в косоугольной системе координат (ξ, ψ), в которой ось ξ параллельна оси x, а ось ψ направлена под углом γ к оси ξ.

> *Задача демонстрирует разницу перевода координат точки и компонент вектора при работе с криволинейными системами координат и их сходство при работе с прямолинейными системами.*

Дополнительные задачи

Задача 2.8. Показать, что компоненты тензора Кронекера δ_i^j не изменяются при преобразованиях координат.

Задача 2.9. Записать явный вид соотношений $x^i = x^i\left(x'^j\right)$, если $\left\{x^i\right\}$ – сферическая, а $\left\{x'^i\right\}$ – прямоугольная декартова СК. Найти якобиан преобразования $\left\|\partial x^i / \partial x'^j\right\|$. Для указанного перехода найти формулу преобразования компонент тензора $T^{2\cdot}_{\cdot 2}$ и $T^{3\cdot}_{\cdot 1}$.

Задача 2.10. Записать матрицы компонент $T^{i\cdot}_{\cdot j}, T^{\cdot j}_{i\cdot}, T_{ij}$, если

$$\left(g^{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \text{ и } \left(T^{ij}\right)=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 6 & 1\end{pmatrix}.$$

Задача 2.11. В цилиндрической СК найдено векторное поле скорости движения сплошной среды $\vec{v}=\left(x^1/t, 1/t,\ 2x^1/t\right)$. 1) Вычислить величину скорости в точке А с заданными цилиндрическими координатами $A\left(1, \pi/2, 2\right)$. 2) Получить запись данного векторного поля в декартовой СК. 3) Определить размерности компонент и модуля вектора скорости в обеих системах координат.

Задача 2.12. (*) Показать, что частные производные произвольной функции $\varphi\left(x^1, x^2, x^3\right)$ преобразуются при переходе к новой системе координат как ковариантные величины.

ЗАНЯТИЕ 3. ОПЕРАЦИИ НАД ТЕНЗОРАМИ. ФИЗИЧЕСКИЕ КОМПОНЕНТЫ ВЕКТОРА

Основные формулы и определения

Тензорное (внешнее) произведение тензоров есть тензор, ранг которого равен сумме рангов сомножителей, а компоненты произведению компонент сомножителей. В частном случае диада - тензорное произведение двух векторов. Если $\overset{\Rightarrow}{T} = T_{ij} Э^i Э^j$, $\overset{\Rightarrow}{D} = D^{\alpha\beta\gamma} Э_\alpha Э_\beta Э_\gamma$, то их тензорное произведение $\overset{\Rightarrow}{TD} = T_{ij} D^{\alpha\beta\gamma} Э^i Э^j Э_\alpha Э_\beta Э_\gamma$ – тензор 5-го ранга.

Сложение тензоров определяется только для тензоров одной валентности. Компоненты тензора суммы определяются как сумма компонент слагаемых с одинаковым строением индексов. Например, если $\overset{\Rightarrow}{T} = T_{ij} Э^i Э^j$ и $\overset{\Rightarrow}{D} = D_{ij} Э^i Э^j$, то тензор $\overset{\Rightarrow}{A} = \overset{\Rightarrow}{T} + \overset{\Rightarrow}{D} = A_{ij} Э^i Э^j = \left(T_{ij} + D_{ij}\right) Э^i Э^j$.

Скалярное произведение тензоров вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \overset{\Rightarrow}{T} \cdot \overset{\Rightarrow}{D} &= T_{ij} Э^i Э^j \cdot D^{\alpha\beta\gamma} Э_\alpha Э_\beta Э_\gamma = T_{ij} D^{\alpha\beta\gamma} Э^i \left(Э^j \cdot Э_\alpha\right) Э_\beta Э_\gamma = \\ &= T_{ij} D^{\alpha\beta\gamma} \delta^j_\alpha Э^i Э_\beta Э_\gamma = T_{i\alpha} D^{\alpha\beta\gamma} Э^i Э_\beta Э_\gamma \end{aligned} \tag{3.1}$$

Скалярное произведение тензоров – тензор, ранг которого меньше суммы рангов сомножителей на два.

Двойное скалярное произведение вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \overset{\Rightarrow}{T} : \overset{\Rightarrow}{D} &= T_{ij} Э^i Э^j : D^{\alpha\beta\gamma} Э_\alpha Э_\beta Э_\gamma = T_{ij} D^{\alpha\beta\gamma} \left(Э^j \cdot Э_\alpha\right)\left(Э^i \cdot Э_\beta\right) Э_\gamma = \\ &= T_{ij} D^{\alpha\beta\gamma} \delta^j_\alpha \delta^i_\beta Э_\gamma = T_{\beta\alpha} D^{\alpha\beta\gamma} Э_\gamma \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

или при другом строении индексов:

$$\begin{aligned} \overset{\Rightarrow}{T} : \overset{\Rightarrow}{D} &= T^{ij} Э_i Э_j : D^{\alpha\beta\gamma} Э_\alpha Э_\beta Э_\gamma = T^{ij} D^{\alpha\beta\gamma} \left(Э_j \cdot Э_\alpha\right)\left(Э_i \cdot Э_\beta\right) Э_\gamma = \\ &= T^{ij} D^{\alpha\beta\gamma} g_{j\alpha} g_{i\beta} Э_\gamma = T_{\beta\alpha} D^{\alpha\beta\gamma} Э_\gamma \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Следом тензора называют двойное скалярное произведение тензора на метрический тензор:

$$\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T} = \mathrm{tr}\overset{\Rightarrow}{T} = \overset{\Rightarrow}{T} : \overset{\Rightarrow}{g}. \tag{3.3}$$

Степенью n тензора называется последовательное n-кратное скалярное произведение тензора самого на себя и обозначается $\overset{\Rightarrow}{T}^n$.

Физические компоненты вектора вводятся для ортогональных систем координат путём нормировки векторов базиса $\vec{e}_i = \dfrac{Э_i}{|Э_i|} = \dfrac{Э_i}{\sqrt{Э_i \cdot Э_i}} = \dfrac{Э_i}{\sqrt{g_{ii}}}$:

$$\vec{a} = a^i\, Э_i = a^i \frac{Э_i}{|Э_i|}|Э_i| = a^i\, \vec{e}_i\, |Э_i| = \left(a^i \sqrt{g_{ii}}\right)\vec{e}_i = a^i_{физ}\,\vec{e}_i \tag{3.4}$$

то есть
$$a^i_{физ} = a^i \sqrt{g_{ii}}\,. \tag{3.5}$$

Примеры решения задач

Задача 3.1. Доказать, что $\overset{\Rightarrow}{g}\cdot\overset{\Rightarrow}{T} = \overset{\Rightarrow}{T}$, где $\overset{\Rightarrow}{T} = T_{ij}Э^iЭ^j$.

Решение.

$$\overset{\Rightarrow}{T}\cdot\overset{\Rightarrow}{g} = T_{ij}\,Э^iЭ^j\cdot g^{\alpha\beta}Э_\alpha Э_\beta = T_{ij}\,g^{\alpha\beta}\,\delta^j_\alpha\,Э^iЭ_\beta = T_{i\alpha}\,g^{\alpha\beta}\,Э^iЭ_\beta = T_{i\bullet}^{\bullet\beta}\,Э^iЭ_\beta = \overset{\Rightarrow}{T}\,.$$

Задача 3.2. Для векторов $\vec{a} = (3;0;4)$, $\vec{b} = (0;2;-6)$ и тензора $\overset{\Rightarrow}{D}$ с матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ в декартовой системе координат вычислить произведения $\vec{a}\cdot\overset{\Rightarrow}{D}$, $\overset{\Rightarrow}{D}\cdot\vec{b}$ и $\vec{a}\cdot\overset{\Rightarrow}{D}\cdot\vec{b}$.

Решение.

Пусть $\vec{a}\cdot\overset{\Rightarrow}{D} = \vec{v}$. Тогда $\left(v_x; v_y; v_z\right) = (3;0;4)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} = (9;-20;6)$.

Пусть $\overset{\Rightarrow}{D}\cdot\vec{b} = \vec{w}$. Тогда $\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Пусть $\vec{a}\cdot\overset{\Rightarrow}{D}\cdot\vec{b} = \vec{v}\cdot\vec{b} = \lambda$. Тогда $\lambda = (9;-20;6)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = -76$.

Задачи для решения в аудитории

Задача 3.3. Представить все формы записи тензора третьего ранга, используя тензорные произведения трех базисных векторов.

Задача 3.4. Доказать, что $\overset{\Rightarrow}{g} \cdot \overset{\Rightarrow}{T} = \overset{\Rightarrow}{T} \cdot \overset{\Rightarrow}{g} = \overset{\Rightarrow}{T}$.

Задача 3.5. В ЦСК найти сумму тензоров:

$$\overset{\Rightarrow}{A} = 2Э^1 Э_1 + 6\left(x^1\right)^{-2} Э^1 Э_2 + 7Э_1 Э_3 + 4\left(x^1\right)^{-2} Э_2 Э^1 + 8Э^2 Э^2,$$

$$\overset{\Rightarrow}{B} = 4Э^1 Э^1 + 5Э^1 Э^2 + 3\left(x^1\right)^{-2} Э_2 Э_1 + 4Э_3 Э^3.$$

Задача 3.6. Пользуясь определением степени тензора, выразить компоненты $\overset{\Rightarrow}{T}^2$, $\overset{\Rightarrow}{T}^3$ через компоненты тензора $\overset{\Rightarrow}{T}$ второго ранга.

Задача 3.7. Доказать, что $a^{\mathrm{i}}_{\text{физ}} = a_{\text{физ i}}$.

Задача 3.8. Аналогично понятию физических компонент вектора $a^i_{\text{физ}}$ ввести понятие физических компонент тензора второго ранга $T^{ij}_{\text{физ}}$.

Дополнительные задачи

Задача 3.9. Найти выражение следа тензора второго ранга через его компоненты.

Задача 3.10. Доказать, что след тензора второго ранга не меняется при переходе к новой системе координат.

Задача 3.11. Задан тензор второго ранга $\overset{\Rightarrow}{T} = 2\vec{i}\,\vec{i} + 3\vec{j}\,\vec{k} + \vec{k}\,\vec{k}$ и тензор первого ранга $\overset{\Rightarrow}{D} = 3\vec{i}$. Определить результаты скалярного умножения $\overset{\Rightarrow}{T} \cdot \overset{\Rightarrow}{D}$ и $[\overset{\Rightarrow}{T} \cdot \overset{\Rightarrow}{D}] \cdot \overset{\Rightarrow}{D}$.

Задача 3.12. Для векторов $\vec{a} = (1;4;0)$, $\vec{b} = (-2;0;3)$ и тензора $\overset{\Rightarrow}{D}$ с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ в декартовой системе координат вычислить произведения $\vec{a} \cdot \overset{\Rightarrow}{D}$, $\overset{\Rightarrow}{D} \cdot \vec{b}$ и $\vec{a} \cdot \overset{\Rightarrow}{D} \cdot \vec{b}$.

Задача 3.13. Вычислить $\overset{\Rightarrow}{T} : \overset{\Rightarrow}{T}$, если $\overset{\Rightarrow}{T}$ – тензор второго ранга.

Задача 3.14. Доказать, что $\overset{\Rightarrow}{g} : \overset{\Rightarrow}{T} = \overset{\Rightarrow}{T} : \overset{\Rightarrow}{g}$.

Задача 3.15. Записать выражение квадрата вектора через его физические компоненты.

Задача 3.16. Решить задачу 2.11 с использованием физических компонент вектора скорости.

Задача 3.17. (*) Различаются ли матрицы, составленные из метрических коэффициентов смешанного типа, в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат?

Задача 3.18. (*) Вычислить $\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}{}^{2}$, $\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}{}^{3}$, если $\overset{\Rightarrow}{T}$ – тензор второго ранга. *Ответ:* $\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}{}^{2} = T^{\alpha\bullet}_{\bullet i}\, T^{i\bullet}_{\bullet\alpha}$, $\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}{}^{3} = T^{\alpha\bullet}_{\bullet i}\, T^{i\bullet}_{\bullet k}\, T^{k\bullet}_{\bullet\alpha}$.

ЗАНЯТИЕ 4. АЛЬТЕРНИРОВАНИЕ И СИММЕТРИРОВАНИЕ. ТЕНЗОРНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ, ГЛАВНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ГЛАВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Основные формулы и определения

Альтернирование и симметрирование тензора – выделение его антисимметричной и симметричной частей. Тензор называется *симметричным* (*антисимметричным*) по некоторой паре индексов, если компоненты его не меняются (изменяют только знак) при перестановке этих индексов местами. При выделении симметричной и антисимметричной частей тензоров второго ранга пользуются тождеством

$$T_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(T_{ij}+T_{ji}\right)+\frac{1}{2}\left(T_{ij}-T_{ji}\right)=S_{ij}+A_{ij}. \tag{4.1}$$

Компоненты S_{ij}, A_{ij} представляют соответственно симметричную и антисимметричную части исходного тензора.

Тензорная поверхность симметричного тензора второго ранга в некоторой точке определяется уравнением:

$$T_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j = C.$$

В осях, соответствующих *главным направлениям*, уравнение поверхности приводится к каноническому виду. Единичный вектор $\vec{e}$, определяющий главное направление, удовлетворяет соотношению:

$$\left(\overset{\Rightarrow}{T}-T\overset{\Rightarrow}{g}\right)\cdot\vec{e}=\vec{0}, \tag{4.2}$$

где T – величина соответствующего главного значения тензора.

Для нахождения главных значений и главных направлений тензора второго ранга необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1. составить и решить относительно T характеристическое уравнение $\det\left(T^{i\bullet}_{\bullet k}-T\,\delta^i_k\right)=0$; в общем случае уравнение третьего порядка имеет три решения, соответствующие трём главным значениям $T_{(1)}$, $T_{(2)}$, $T_{(3)}$,
2. для каждого найденного главного значения $T_{(n)}$ решить систему трёх уравнений $\left(T^{i\bullet}_{\bullet k}-T\,\delta^i_k\right)\cdot e^k_{(n)}=0$ для отыскания трёх компонент соответствующего главного направления $\vec{e}_{(n)}=\left(e^1_{(n)},e^2_{(n)},e^3_{(n)}\right)$;
3. зная компоненты метрической матрицы пространства, нормировать найденные главные вектора.

Первый инвариант тензора второго ранга

$$I_1 = T_{(1)} + T_{(2)} + T_{(3)}. \tag{4.3}$$

Второй инвариант тензора второго ранга:

$$I_2 = T_{(1)}\,T_{(2)} + T_{(2)}\,T_{(3)} + T_{(3)}\,T_{(1)}. \tag{4.4}$$

Третий инвариант тензора второго ранга:

$$I_3 = T_{(1)}\,T_{(2)}\,T_{(3)}. \tag{4.5}$$

Примеры решения задач

Задача 4.1. Установить, по каким парам индексов симметричен или антисимметричен тензор, если для его компонент выполняются равенства

$$\alpha_{ijkl} = \alpha_{ikjl} = -\alpha_{jikl} = -\alpha_{ljki}.$$

Решение. Из первого равенства можно заключить, что тензор симметричен по индексам (2, 3). Из второго (с учетом первого) – антисимметричен по (1, 2). Из последнего – антисимметричен по (1, 4). При решении подобных задач в сквозном равенстве необходимо сопоставлять выражения по принципу «каждый с каждым».

Задача 4.2. Определить матрицы компонент симметричной и антисимметричной частей тензора, если его компоненты заданы матрицей

$$\left(T_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. По (4.1) $\left(T_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

Задача 4.3. Найти главные значения и главные направления тензора $\overset{\Rightarrow}{T}$, если в декартовой системе координат $\left(T^{i\bullet}_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 3-T & -1 & 0 \\ -1 & 3-T & 0 \\ 0 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (1-T)\left[3-T^2-1\right] = 0.$$

Корни этого уравнения определяют три главных значения $T_{(1)}=1$, $T_{(2)}=2$, $T_{(3)}=4$.

Компоненты $e^k_{(1)}$, соответствующие $T_{(1)}=1$, определяются из системы

$$(3-1)e^1_{(1)}-e^2_{(1)}=0, \quad -e^1_{(1)}+(3-1)e^2_{(1)}=0, \quad (1-1)e^3_{(1)}=0.$$

Первые два уравнения имеют лишь тривиальное решение $e^1_{(1)}=e^2_{(1)}=0$. Следовательно, для того, чтобы вектор главного направления не был нулевым, необходимо, чтобы $e^3_{(1)}\neq 0$, что не противоречит третьему уравнению.

Аналогично для второго и третьего главных значений определим:

$$e^1_{(2)}=e^2_{(2)}\neq 0,\ \ e^3_{(2)}=0; \qquad e^1_{(3)}=-e^2_{(3)}\neq 0,\ \ e^3_{(3)}=0.$$

Из условия, что главные векторы являются единичными в декартовой системе координат, отыщем величины их компонент:

$$\vec{e}_{(1)}=\pm\vec{k}, \quad \vec{e}_{(2)}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}+\vec{j}\right), \quad \vec{e}_{(3)}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}-\vec{j}\right).$$

Задачи для решения в аудитории

Задача 4.4. Установить, по каким парам индексов симметричен или антисимметричен тензор, если для его компонент выполняются равенства

$$R_{ijkm}=R_{ikjm},\ \varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{kji},\ G_{ijkm}=G_{jikm}=G_{ijmk}=G_{jimk},$$
$$\beta_{ijk}=\beta_{ikj}=\beta_{kji}=\beta_{jik}.$$

Задача 4.5. Показать, что любой симметричный тензор при переходе к любой другой системе координат преобразуется также в симметричный тензор.

Дополнительные задачи

Задача 4.6. Доказать, что если тензор с компонентами a_{ijk} симметричен по индексам (1, 2) и антисимметричен по индексам (2, 3), то он равен нулю.

Задача 4.7. Зная матрицу $T^{i\cdot}_{\cdot k}$ задачи 4.3, вычислить $\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}$, $\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}{}^2$, $\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}{}^3$. (*Ответ:* 7, 21, 73). Убедиться в том, что а) характеристические уравнения могут быть записаны в виде

$$T^3-I_1T^2+I_2T-I_3=0;$$

б) инварианты могут быть определены следующим образом:

$$I_1 = \mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}, \quad I_2 = \frac{1}{2}\left[\left(\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}\right)^2 - \mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}^2\right], \quad I_3 = \frac{1}{3}\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}^3 - \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}\cdot \mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}^2 + \frac{1}{6}\left(\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}\right)^3.$$

Задача 4.8. Показать, что след антисимметричной части тензора второго ранга равен нулю.

Задача 4.9. Найти главные значения и главные направления тензора $\overset{\Rightarrow}{T}$, если в декартовой системе координат $\left(T^{i\bullet}_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Задача 4.10. Непосредственным вычислением найти инварианты тензора с компонентами $\left(T_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Ответ: $I_1 = 20, \quad I_2 = 123, \quad I_3 = 216$.

Задача 4.11. (*) Пусть $D_{ij} = D_{ji}$. Доказать, что $D^{i\cdot}_{\cdot j} = D^{\cdot i}_{j\cdot}$.

Задача 4.12. (*) В цилиндрической системе координат разложить на симметричную и антисимметричную части тензор

$$\overset{\Rightarrow}{T} = 3Э^1 Э^1 + 8Э^1 Э_3 + \left(x^1\right)^{-2} Э_2 Э^2 + 6Э_3 Э^1 + 4\left(x^1\right)^{-2} Э^3 Э_2 + 4Э^3 Э^3.$$

Задача 4.13. (*) В ортогональной декартовой системе координат найти главные значения и главные направления симметричной части тензора с компонентами $\left(T^{ij}\right) = \begin{pmatrix} a & 2a & 2a \\ 0 & a & 2a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

ЗАНЯТИЕ 5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОРА И ТЕНЗОРА ПО КООРДИНАТЕ

Основные формулы и определения

Коэффициенты связности (символы Кристоффеля первого рода) $\Gamma^k_{\alpha i}$ вводятся при дифференцировании базисных векторов:

$$\frac{\partial Э_\alpha}{\partial x^i} = \Gamma^k_{\alpha i}\, Э_k, \qquad \frac{\partial Э^\alpha}{\partial x^i} = -\Gamma^\alpha_{k i}\, Э^k \tag{5.1}$$

и могут быть вычислены по формулам

$$\Gamma^l_{ik} = \frac{1}{2} g^{ls}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^s}\right). \tag{5.2}$$

Дифференцирование вектора по координате:

– ковариантная производная от контравариантных компонент:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i} \equiv \left(\nabla_i w^\alpha\right) Э_\alpha = \left(\frac{\partial w^\alpha}{\partial x^i} + w^\beta\, \Gamma^\alpha_{\beta i}\right) Э_\alpha, \tag{5.3}$$

– ковариантная производная от ковариантных компонент:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i} \equiv \left(\nabla_i w_\alpha\right) Э^\alpha = \left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial x^i} - w_\beta\, \Gamma^\beta_{\alpha i}\right) Э^\alpha. \tag{5.4}$$

Дифференцирование тензора по координате:

$$\frac{\partial \vec{\vec{T}}}{\partial x^i} \equiv \left(\nabla_i T^{\alpha\beta}\right) Э_\alpha\, Э_\beta = \left(\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^i} + T^{k\beta}\, \Gamma^\alpha_{k i} + T^{\alpha k}\, \Gamma^\beta_{k i}\right) Э_\alpha\, Э_\beta. \tag{5.5}$$

Для ковариантных и смешанных компонент тензора

$$\nabla_i T_{\alpha\beta} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^i} - T_{k\beta}\, \Gamma^k_{\alpha i} - T_{\alpha k}\, \Gamma^k_{i\beta}, \qquad \nabla_i T^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = \frac{\partial T^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}}{\partial x^i} + T^{k\cdot}_{\cdot\beta}\, \Gamma^\alpha_{k i} - T^{\alpha\cdot}_{\cdot k}\, \Gamma^k_{i\beta}. \tag{5.6}$$

Символический *вектор-оператор Гамильтона «набла»*: $\vec{\nabla} = \nabla_i\, Э^i$.

Градиент скалярной функции:

$$\operatorname{grad}\psi = \vec{\nabla}\psi\left(x^i\right) = \nabla_i\, Э^i\, \psi = \nabla_i\, \psi\, Э^i = \frac{\partial \psi}{\partial x^i} Э^i. \tag{5.7}$$

Производная функции по направлению $\vec{n}$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} = \vec{\nabla}\psi \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}. \tag{5.8}$$

Примеры решения задач

Задача 5.1. Вычислить коэффициенты связности в сферической и цилиндрической системах координат.

Решение. С использованием соотношения (5.2) получим, что в сферической системе координат отличны от нуля лишь компоненты

$$\Gamma^1_{22} = -x^1\cos^2 x^3, \quad \Gamma^1_{33} = -x^1, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1/x^1,$$

$$\Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = -\operatorname{tg} x^3, \quad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = 1/x^1, \quad \Gamma^3_{22} = \frac{1}{2}\sin\left(2x^3\right),$$

в цилиндрической системе координат отличны от нуля лишь компоненты

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = 1/r, \; \Gamma^1_{22} = -r.$$

Задача 5.2. Определить производные вектора $\vec{a} = a^i\,Э_i$ по каждой из трех координат x^1, x^2, x^3 цилиндрической системы $\left(x^1 = r, x^2 = \varphi, x^3 = z\right)$, если в этой системе его компоненты: $a^1 = 2r^2 + 3z$, $a^2 = 0$, $a^3 = 5r + 2z^2$.

Решение. Производной тензора первого ранга по координате является также тензор первого ранга $\vec{b} = \dfrac{\partial \vec{a}}{\partial x^j} = \left(\nabla_j a^i\right)Э_i = b^i\,Э_i$, компоненты которого – ковариантные производные компонент исходного тензора:

$$b^i = \nabla_j a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + a^k\,\Gamma^i_{kj}.$$

Тогда компоненты результирующего вектора запишутся так

$$b^1 = \frac{\partial a^1}{\partial x^j} + a^1\,\Gamma^1_{1j} + a^2\,\Gamma^1_{2j} + a^3\,\Gamma^1_{3j} = \frac{\partial a^1}{\partial x^j},$$

$$b^2 = \frac{\partial a^2}{\partial x^j} + a^1\,\Gamma^2_{1j} + a^2\,\Gamma^2_{2j} + a^3\,\Gamma^2_{3j} = a^1\,\Gamma^2_{1j},$$

$$b^3 = \frac{\partial a^3}{\partial x^j} + a^1\,\Gamma^3_{1j} + a^2\,\Gamma^3_{2j} + a^3\,\Gamma^3_{3j} = \frac{\partial a^3}{\partial x^j}.$$

В частности, при $j = 1$ получим

$$b^1 = \frac{\partial a^1}{\partial x^1} = \frac{\partial\left(2r^2 + 3z\right)}{\partial r} = 4r, \quad b^2 = a^1\,\Gamma^2_{11} = 0, \quad b^3 = \frac{\partial a^3}{\partial x^1} = \frac{\partial\left(5r + 2z^2\right)}{\partial r} = 5$$

и результирующий тензор первого ранга принимает вид $\vec{b} = 4r\,Э_1 + 5Э_3$. Аналогично, при $j = 2$ получим $\vec{b} = \left(2r + 3z/r\right)Э_2$. При $j = 3$ $\vec{b} = 3Э_1 + 4z\,Э_3$.

Задачи для решения в аудитории

Задача 5.3. Вывести формулу ковариантного дифференцирования тензора третьего ранга $\vec{\vec{T}} = T^{\alpha\beta\cdot}_{\cdot\cdot\gamma} Э_\alpha Э_\beta Э^\gamma$.

Задача 5.4. В цилиндрической системе координат найти ковариантные производные от ковариантных компонент вектора $\vec{W}$:

$$W_1 = 3x^1 \sin x^2,\ W_2 = \left(x^1\right)^2 \cos x^3,\ W_3 = \left(x^3\right)^2 \ln x^1.$$

Задача 5.5. Найти производную функции $\lambda = x^2 + 2xy - z^2$ по направлению, заданному в ДСК единичным вектором $\vec{n} = \left(2/7; -3/7; -6/7\right)$.

Дополнительные задачи

Задача 5.6. Из определения базисных векторов доказать, что $\Gamma^\alpha_{ij} = \Gamma^\alpha_{ji}$.

Задача 5.7. Доказать равенства: а) $\nabla_i\left(w^\alpha + v^\alpha\right) = \nabla_i w^\alpha + \nabla_i v^\alpha$,
б) $\nabla_i\left(w^\alpha v^\beta\right) = \left(\nabla_i w^\alpha\right) v^\beta + w^\alpha \nabla_i v^\beta$; в) (*) $\nabla_i\left(g_{jk} w^j\right) = g_{kj}\left(\nabla_i w^j\right)$.

Задача 5.8. Вычислить ковариантные производные от компонент вектора в ССК: $w^1 = 2x^1 \cos x^3,\quad w^2 = \ln x^1,\quad w^3 = \operatorname{tg} x^2$.

Задача 5.9. Задано скалярное поле температуры $T = T(x, y, z) = xy - 5z$. В точке пространства $(x = 2, y = 3, z = 0)$ определить максимально и минимально возможные значения ее производной по направлению и указать эти направления.

Задача 5.10. В точке пространства с координатами $x = y = z = 0$ заданы значение давления $p = 1$ и градиент давления $\operatorname{grad} p = 1\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Определите приближенно значение давления в точках, расположенных в малой окрестности данной точки и имеющих координаты $0.01\cdot(1, 2, -1)$ и $0.01\cdot(1, 2, -7/4)$.

Задача 5.11. (*) В ЦСК найти ковариантные производные от ковариантных компонент тензора:

$$\left(T_{ij}\right) = \begin{pmatrix} x^1 \ln x^3 & 0 & x^1 \operatorname{tg} x^2 \\ 0 & x^3 \operatorname{ctg} x^2 & 0 \\ x^1 \operatorname{tg} x^2 & 0 & \left(x^1\right)^2 \sin x^2 \end{pmatrix}.$$

ЗАНЯТИЕ 6. ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Основные формулы и определения

Дифференциальные операторы вводятся как различные виды произведения оператора Гамильтона «набла» на данную величину:

1) *градиент* (тензорное произведение): $\operatorname{grad}(\ )=\vec{\nabla}\circ(\ )$

$$\operatorname{grad}\psi\left(x^i\right)=\frac{\partial\psi}{\partial x^i}Э^i; \tag{6.1}$$

2) *дивергенция* (скалярное произведение): $\operatorname{div}(\ )=\vec{\nabla}\cdot(\ )$

$$\operatorname{div}\vec{a}=\nabla_i a^i=\frac{\partial a^i}{\partial x^i}+a^k\,\Gamma^i_{ki}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(a^\alpha\sqrt{g}\right)}{\partial x^\alpha}\ \text{– формула Вейла;} \tag{6.2}$$

3) *ротор* (векторное произведение): $\operatorname{rot}(\ )=\vec{\nabla}\times(\ )$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{v}\right)^k=\varepsilon^{kij}\,\nabla_i v_j=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\nabla_i v_j-\nabla_j v_i\right); \tag{6.3}$$

где i,j,k образуют циклическую перестановку (1,2,3).

4) *лапласиан* (тензорное и скалярное): $\Delta(\ )=\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}(\ )\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\circ(\ )\right)$.

$$\Delta\psi=\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\psi\right)=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(g^{i\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\sqrt{g}\right). \tag{6.4}$$

В выражении (6.3) использован *псевдотензор Леви – Чевиты*:

$$\varepsilon^{ijk}=\begin{cases}1\big/\sqrt{g}\text{, если }(i,j,k)\text{– четная перестановка,}\\ -1\big/\sqrt{g}\text{, если }(i,j,k)\text{– нечетная перестановка,}\\ 0\text{, если индексы повторяются}\end{cases} \tag{6.5.1}$$

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}\sqrt{g}\text{, если }(i,j,k)\text{– четная перестановка,}\\ -\sqrt{g}\text{, если }(i,j,k)\text{– нечетная перестановка,}\\ 0\text{, если индексы повторяются}\end{cases} \tag{6.5.2}$$

Векторное поле $\vec{a}(x^i)$ называется *потенциальным*, если существует такое скалярное поле $\varphi(x^i)$, что $\vec{a}=\operatorname{grad}\varphi$. Векторное поле $\vec{a}(x^i)$ называется *безвихревым*, если всюду $\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{0}$. Векторное поле $\vec{a}(x^i)$ является *соленоидальным*, если его поток через любую замкнутую поверхность равен нулю, что равносильно условию $\operatorname{div}\vec{a}=0$.

Примеры решения задач

Задача 6.1. Записать градиент скалярной функции в декартовой и сферической системе координат.

Решение. Для декартовой системы координат (ДСК):

$$\operatorname{grad}\psi(x,y,z)=\frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{k}.$$

Для сферической системы координат (ССК):

$$\operatorname{grad}\psi(r,\varphi,\lambda)=\frac{\partial\psi}{\partial r}Э^1+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}Э^2+\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}Э^3.$$

Задача 6.2. Записать дивергенцию вектора в декартовой и сферической системе координат.

Решение. Согласно (6.2) для декартовой системы координат:

$$\operatorname{div}\vec{a}(x,y,z)=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Для сферической системы координат:

$$\operatorname{div}\vec{a}(r,\varphi,\lambda)=\frac{\partial a^1}{\partial r}+\frac{\partial a^2}{\partial\varphi}+\frac{\partial a^3}{\partial\lambda}+\frac{1}{r^2\cos\lambda}\left(a^1\,2r\cos\lambda-a^3r^2\sin\lambda\right)=$$

$$=\frac{\partial a^1}{\partial r}+\frac{\partial a^2}{\partial\varphi}+\frac{\partial a^3}{\partial\lambda}+\frac{2a^1}{r}-a^3\operatorname{tg}\lambda$$

Задача 6.3. Выразить дивергенцию вектора через его физические компоненты в сферической системе координат.

Решение. Используя результат задачи 6.2 и соотношение (3.5), получим

$$\operatorname{div}\vec{a}(r,\varphi,\lambda)=\frac{\partial a_r}{\partial r}+\frac{1}{r\cos\lambda}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial a_\lambda}{\partial\lambda}+\frac{2a_r}{r}-\frac{a_\lambda}{r}\operatorname{tg}\lambda.$$

Здесь физические компоненты векторов обозначены символами соответствующих координат вместо нумерации с подписью «*физ*».

Задача 6.4. Для заданного поля скоростей несжимаемой сплошной среды

$$v_x=x^2,\quad v_y=-3y,\quad v_z=0$$

вычислить суммарную интенсивность источника / стока вещества в объеме

$$V=\{x\in[1,2]\}\cup\{y\in[2,4]\}\cup\{z\in[3,15]\}.$$

Решение. Разность между вытекающим и затекающим через замкнутую поверхность Σ объемом несжимаемой сплошной среды в единицу времени определяет интенсивность источника этого вещества (или стока – в случае отрицательной разности) внутри объема V, ограниченного поверхностью Σ.

Это изменение может быть вычислено с использованием формулы Гаусса – Остроградского:

$$-\mathrm{d}M = \int\limits_{\Sigma} v_n\,\mathrm{d}S = \int\limits_{V} \mathrm{div}\,\vec{v}\,\mathrm{d}V\,.$$

В рамках заданных условий это уравнение запишется в виде:

$$-\mathrm{d}M = \int\limits_{z_1}^{z_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(2x-3\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_{z_1}^{z_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}\left(x^2-3x\right)\Big|_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_{z_1}^{z_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}\left(-2+2\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Таким образом, для заданного поля скоростей в любой части полосы, ограниченной плоскостями $x=1$ и $x=2$, изменения количества вещества не происходит.

Задачи для решения в аудитории

Задача 6.5. Записать выражение лапласиана скалярной функции в произвольной ортогональной системе координат.

Задача 6.6. Записать лапласиан скалярной функции в декартовой и сферической системах координат.

Задача 6.7. Выразить ротор вектора через частные производные его компонент. Записать ротор вектора в декартовой системе координат.

Задача 6.8. Найти физические компоненты векторов $\mathrm{grad}\,\psi,\ \mathrm{rot}\,\vec{v}$ и вычислить $\mathrm{div}\,\vec{v},\ \Delta\psi$ в цилиндрической системе координат, если

$$\psi = \left(r^2 + R^2\sin\varphi\right)\big/\tau,\ \ \vec{v} = \frac{1}{\tau}\left(z\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathcal{Э}_1 + 4z\frac{r^2}{R^3}\mathcal{Э}_2 + r\sin\varphi\,\mathcal{Э}_3\right),$$

где $R(\text{м}), \tau(\text{с})$ – некоторые константы. Определить размерности всех вычисленных величин и компонент векторов.

Задача 6.9. В цилиндрической системе координат по заданному потенциалу векторного поля скорости $\varphi = \dfrac{1}{\tau}\left(x^1\right)^2\cos x^2$ вычислить $\mathrm{div}\,\vec{v}$ и определить размерность полученной величины, если $\tau\left(\text{с}\right)$ – константа.

Задача 6.10. Сплошная среда вращается как твердое тело вокруг некоторой оси с постоянной угловой скоростью ω. В цилиндрической системе координат записать векторное поле скорости $\vec{v}$ точек сплошной среды и вычислить модуль вектора $\mathrm{rot}\,\vec{v}$.

Дополнительные задачи

Задача 6.11. Записать выражение лапласиана скалярной функции в прямолинейной косоугольной системе координат с углом γ между осями x^1, x^2, каждая из которых ортогональна к оси x^3.

Задача 6.12. Записать лапласиан скалярной функции в цилиндрической системе координат.

Задача 6.13. Найти физические компоненты векторов $\mathrm{grad}\,\psi, \mathrm{rot}\,\vec{v}$ и вычислить $\mathrm{div}\,\vec{v}$, $\Delta\psi$ в сферической системе координат, если

$$\psi = \ln\frac{r}{R} + \cos\lambda,\ \vec{v} = \frac{1}{\tau}\left(r\cos\lambda\,Э_1 + \sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\lambda\,Э_2 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cos\varphi\,Э_3 \right).$$

Задача 6.14. Для заданного поля скоростей $\vec{v}(0, y/t, 3z/t)$ несжимаемой сплошной среды вычислить суммарную интенсивность источника в объеме

$$V = \{x \in [0, 4]\} \cup \{y \in [1, 2]\} \cup \{z \in [1, 10]\}.$$

Задача 6.15. Мгновенное поле скоростей твердого тела в ДСК задано в виде $\vec{v} = \vec{a} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{a} + \vec{b} \times \vec{r}$, где компоненты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не зависят от положения рассматриваемой частицы. Показать, что ротор этого поля скорости равен $2b^i Э_i$, а дивергенция равна нулю.

Задача 6.16. Найти выражение ротора вектора скорости $\vec{v} = \vec{v}(r, \varphi)$ для плоского течения в полярных координатах и записать условие $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ (условие несжимаемости сплошной среды).

Задача 6.17. Упростить выражения а) $\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\ f$, б) $\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\ \vec{A}$.

Задача 6.18. Найти решения уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$ в сферических координатах, если функция φ зависит лишь от одной сферической координаты x^1, x^2 или x^3. Рассмотреть все три случая.

Задача 6.19. (*) Записать дивергенцию вектора через его физические компоненты в цилиндрической системе координат.

Задача 6.20. (*) Записать физические компоненты градиента скалярной функции в сферической и в цилиндрической системах координат.

Задача 6.21. (*) Доказать, что а) всякое потенциальное векторное поле является безвихревым, б) всякое безвихревое поле является потенциальным.

Задача 6.22. (*) Показать, что тензор с компонентами $B_{ik} = \varepsilon_{ijk} a_j$ антисимметричен.

ЗАНЯТИЕ 7. ЗАДАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. МАТЕРИАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ПО ВРЕМЕНИ

Основные формулы и определения

Лагранжева (материальная) система координат ξ^i связана с деформирующейся средой. Лагранжевы координаты материальных частиц остаются неизменными в течение всего процесса движения сплошной среды.

Эйлерова (лабораторная) система координат x^i связана с наблюдателем.

Если какое-либо свойство сплошной среды описано с помощью переменных Лагранжа или Эйлера, то имеем соответственно лагранжево или эйлерово описание.

Материальная (полная, индивидуальная, субстанционная) производная

$$\frac{\mathrm{d}[\ ]}{\mathrm{d}t} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \xi^i = const}} \frac{[\ ](t+\Delta t) - [\ ](t)}{\Delta t} = \left.\frac{\partial [\ ]}{\partial t}\right|_{\xi^i = const} = \frac{\partial}{\partial t}[\ ] + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)[\ ]. \tag{7.1}$$

Первое слагаемое (*частная производная по времени*) выражает скорость изменения величины в фиксированной точке пространства («заморожены» эйлеровы координаты точки измерения, поле измеряемой величины изменяется). Второе слагаемое называется *конвективной производной* и выражает скорость изменения величины при перемещении наблюдателя (измерительного прибора) со скоростью сплошной среды $\vec{V}$ при фиксированном распределении данной величины в пространстве (точка измерения двигается со сплошной средой, поле величины «заморожено»).

Для скалярной величины $A\left(t, x^i\right)$ формула (7.1) дает выражение

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{\xi^i = const} = \frac{\partial A}{\partial t} + v^i\left(\nabla_i A\right) = \frac{\partial A}{\partial t} + v^i \frac{\partial A}{\partial x^i}. \tag{7.2}$$

Примененный к вектору скорости $\vec{V}$, оператор материальной производной имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot \operatorname{grad}\vec{v}\right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v^i \nabla_i \vec{v}. \tag{7.3}$$

Контравариантные компоненты вектора ускорения $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ равны

$$a^j = \frac{\partial v^j}{\partial t} + v^i \nabla_i v^j = \frac{\partial v^j}{\partial t} + v^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} + v^i v^\beta \Gamma^j_{\beta i}. \tag{7.4}$$

Примеры решения задач

Задача 7.1. Дано описание движения сплошной среды (континуума) $x^1 = \xi^1 e^t + \xi^3\left(e^t - 1\right)$, $x^2 = \xi^3\left(e^t - e^{-t}\right) + \xi^2$, $x^3 = \xi^3$. а) С какой точки зрения описано движение? б) Убедиться, что лагранжевы координаты точек сплошной среды совпадают со значениями эйлеровых координат в началаный момент времени. в) Выразить лагранжевы координаты через эйлеровы.

Решение. а) Лагранжево описание. б) При $t = 0$ $x^1 = \xi^1, x^2 = \xi^2, x^3 = \xi^3$. в) $\xi^1 = x^1 e^{-t} - x^3\left(1 - e^{-t}\right)$, $\xi^2 = x^2 - x^3\left(e^t - e^{-t}\right)$, $\xi^3 = x^3$.

Задача 7.2. Определить компоненты вектора скорости точки сплошной среды как функции а) лагранжевых, б) эйлеровых координат и времени. Движение сплошной среды задано соотношениями задачи 7.1.

Решение.

а)
$$v^1 = \left.\frac{\partial x^1}{\partial t}\right|_{\xi^i = const} = \xi^1 e^t + \xi^3 e^t = \left(\xi^1 + \xi^3\right)e^t,$$
$$v^2 = \left.\frac{\partial x^2}{\partial t}\right|_{\xi^i} = \xi^3\left(e^t + e^{-t}\right), \quad v^3 = \left.\frac{\partial x^3}{\partial t}\right|_{\xi^i} = 0.$$

б) учитывая эйлерово описание движения, выразим ξ^i через x^i и t. В итоге имеем: $v^1 = x^1 + x^2$, $v^2 = x^3\left(e^t + e^{-t}\right)$, $v^3 = 0$.

Задача 7.3. Записать компоненты вектора $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ в сферической системе координат.

Решение. Используя найденные ранее коэффициенты связности, получим:

$$a^1 = \frac{\partial v^1}{\partial t} + v^1\frac{\partial v^1}{\partial r} + v^2\frac{\partial v^1}{\partial \varphi} + v^3\frac{\partial v^1}{\partial \lambda} - r\cos^2\lambda\left(v^2\right)^2 - r\left(v^3\right)^2,$$

$$a^2 = \frac{\partial v^2}{\partial t} + v^1\frac{\partial v^2}{\partial r} + v^2\frac{\partial v^2}{\partial \varphi} + v^3\frac{\partial v^2}{\partial \lambda} + \frac{2v^1v^2}{r} - \frac{2v^2v^3}{tg\lambda},$$

$$a^3 = \frac{\partial v^3}{\partial t} + v^1\frac{\partial v^3}{\partial r} + v^2\frac{\partial v^3}{\partial \varphi} + v^3\frac{\partial v^3}{\partial \lambda} + \frac{2v^1v^3}{r} + \frac{\left(v^2\right)^2\sin 2\lambda}{2}.$$

Задачи для решения в аудитории

Задача 7.4. Какое из двух соотношений дает эйлерово описание преобразования: 1) $\xi^i = \xi^i\left(x^j, t\right)$ 2) $x^i = x^i\left(\xi^j, t\right)$.

Задача 7.5. Получить вектор ускорения частицы, движущейся с постоянной скоростью по окружности (*центростремительное ускорение*).
Ответ: ускорение с одной ненулевой компонентой $a^1 = -\dfrac{V^2}{r}$.

Задача 7.6. Ввести пространственную СК и лагранжевы координаты частиц и найти закон движения в случаях
а) твердое тело движется поступательно с постоянной скоростью $\vec{V}$;
б) твердое тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ (сравнить варианты выбора ДСК и ЦСК).

Задача 7.7. Описание движения сплошной среды, занимавшей первоначально куб с единичной стороной (рис. 3), дается выражениями задачи 7.1.
а) Какое движение совершает точка A?
в) Какое движение совершает точка B?
(*Ответ:* деформация чистого сдвига).

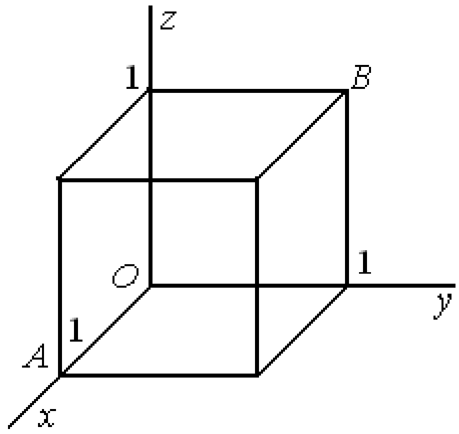


Рис. 3

Задача 7.8. Дано поле скоростей в декартовой системе координат:
$v^1 = \dfrac{x^1}{1+t}$, $v^2 = \dfrac{2x^2}{1+t}, v^3 = \dfrac{3x^3}{1+t}$.

Найти компоненты ускорения $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{V}/\mathrm{d}t$ в эйлеровых и лагранжевых переменных.

Ответ: $\left\{a^1 = 0, a^2 = \dfrac{2x^2}{(1+t)^2}, a^3 = \dfrac{6x^3}{(1+t)^2}\right\}$, $\left\{a^1 = 0, a^2 = 2\xi^2, a^3 = 6\xi^3(1+t)\right\}$.

Дополнительные задачи

Задача 7.9. Поле скоростей задано в переменных Лагранжа $v^1 = -\xi^2 e^{-t}$, $v^2 = -\xi^3$, $v^3 = 2t$. Найти компоненты ускорения в эйлеровой системе координат. *Ответ:* $a^1 = e^{-t}\left(x^2 + t x^3 - t^3\right)$, $a^2 = 0$, $a^3 = 2$.

Задача 7.10. Дан закон движения сплошной среды $x=\xi^1$, $y=e^t\left(\xi^2+\xi^3\right)/2+e^{-t}\left(\xi^2-\xi^3\right)/2$, $z=e^t\left(\xi^2+\xi^3\right)/2-e^{-t}\left(\xi^2-\xi^3\right)/2$. Определить компоненты скорости в эйлеровой и лагранжевой форме.

Задача 7.11. Вектор перемещения задан в лагранжевых координатах $u^1=\xi^1\left(e^{at}-1\right)$, $u^2=\xi^2\left(e^{bt}-1\right)$, $u^3=\xi^3\left(e^{ct}-1\right)$. Найти вектор скорости $\vec{v}=d\vec{u}/dt$ как функцию эйлеровых координат x^i.

Задача 7.12. Поле скоростей в ДСК задано вектором $\vec{v}=\dfrac{\left(x^1\right)^2 t}{L\tau^2}Э_1+\dfrac{x^2 t^2}{L\tau^3}Э_2+\dfrac{x^1 x^3}{L\tau}Э_3$, $L(\text{м})$, $\tau(\text{с})$ – константы. Определить скорость и ускорение частицы, находящейся в момент $t=\tau$ в точке $P(L,3L,2L)$.

ЗАНЯТИЕ 8. ЛИНИИ ТОКА. ТРАЕКТОРИИ ЧАСТИЦ

Основные формулы и определения

Линия тока – линия, в каждой точке которой касательная направлена вдоль вектора скорости. Через одну неособую точку может проходить только одна линия тока. Если определить линию в виде радиус-вектора как функции ее дуговой координаты $\vec{r}(s)$, то согласно определению получим

$$\vec{v} \parallel \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} \;\Rightarrow\; \vec{v} = c\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} \;\Rightarrow\; v^i = c\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s},\, i = 1..3,\, c = \mathrm{const}. \tag{8.1}$$

Отсюда получаем уравнения, определяющие в каждый фиксированный момент времени t линии тока:

$$\mathrm{d}\ell = \frac{\mathrm{d}s}{c} = \frac{\mathrm{d}x^1}{v^1\left(t, x^1, x^2, x^3\right)} = \frac{\mathrm{d}x^2}{v^2\left(t, x^1, x^2, x^3\right)} = \frac{\mathrm{d}x^3}{v^3\left(t, x^1, x^2, x^3\right)}. \tag{8.2}$$

Константы интегрирования определяют конкретную линию тока, проходящую через заданную точку сплошной среды.

Поверхность тока – совокупность линий тока, проведенных через некоторый контур L, каждая точка которого не является особой.

Трубка тока – часть объема сплошной среды, ограниченная поверхностью тока, построенной на некотором замкнутом контуре C.

Траектория частицы – линия, вдоль которой передвигается частица сплошной среды. Траектории можно отыскать, интегрируя по времени дифференциальные уравнения, определяющие скорость частицы с фиксированными лагранжевыми координатами:

$$\vec{v} = \left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\right|_{\xi=\mathrm{const}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}Э_i = v^i Э_i \;\Rightarrow\; v^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t},\, i = 1..3. \tag{8.3}$$

Константы интегрирования определяются, по заданному положению частицы в некоторый момент времени. При этом следует помнить, что

$$v_j = v^i g_{ij} = v^1 g_{1j} + v^2 g_{2j} + v^3 g_{3j}. \tag{8.4}$$

Примеры решения задач

Задача 8.1. Найти поля скорости и ускорения в лагранжевом и эйлеровом описаниях, если движение среды в ДСК происходит по закону

а) трехосное растяжение тела:

$$x = a(t)\xi^1,\; y = b(t)\xi^2,\; z = c(t)\xi^3;$$

б) простой сдвиг:

$$x=\xi^1+b(t)\xi^2,\ y=\xi^2,\ z=\xi^3;$$

в) однородная деформация при одновременном вращении тела с закрепленной точкой:

$$x^i=A_{ij}(t)\xi^j,\ \det\left\|A_{ij}\right\|\neq 0.$$

Решение: а) $v^1=\dot{a}\dfrac{x}{a},\ v^2=\dot{b}\dfrac{y}{b},\ v^3=\dot{c}\dfrac{z}{c};\ a^1=\ddot{a}\dfrac{x}{a};\ a^2=\ddot{b}\dfrac{y}{b};\ a^3=\ddot{c}\dfrac{z}{c};$

б) $v^1=\dot{b}y,\ v^2=v^3=0;\ a^1=\ddot{b}y,\ a^2=a^3=0;$

в) $v^i=B_{ik}x^k, a^i=C_{ik}x^k, \mathrm{B}=\dot{\mathrm{A}}\mathrm{A}^{-1}, \mathrm{C}=\ddot{\mathrm{A}}\mathrm{A}^{-1}.$

Задачи для решения в аудитории

Задача 8.2. Можно ли по известным траекториям частиц среды найти закон ее движения?

Задача 8.3. Можно ли по известным в данный момент линиям тока найти мгновенное поле скорости?

Задача 8.4. Могут ли частицы среды двигаться ускоренно, если
а) скорости всех частиц одинаковы?
б) в каждой точке пространства скорость не изменяется со временем?

Задача 8.5. Плотность каждой индивидуальной частицы несжимаемой среды остается постоянной. Может ли в какой-нибудь точке пространства происходить изменение плотности со временем?

Задача 8.6. Найти линии тока и траектории частиц и охарактеризовать структуру движения среды, если в декартовой системе координат оно происходит с полем скорости

а) $v^1=-\omega x^2, v^2=\omega x^1, v^3=u,\quad \omega, u=\mathrm{const};$

б) $v^1=-Ax^2, v^2=Bx^1, v^3=0,\quad A,B=\mathrm{const}>0;$

в) $v^1=-V\sin(\omega t), v^2=V\cos(\omega t), v^3=0,\quad \omega, V=\mathrm{const}.$

Ответ: а) винтовые линии вокруг оси x^3;

б) $\left(x^1\right)^2/A+\left(x^2\right)^2/B=c^2,\ x^3=\xi^3,\ c=\mathrm{const};$

в) траектории – $\left(x^1-\xi^1-\dfrac{V}{\omega}\right)^2+\left(x^2-\xi^2\right)=\left(\dfrac{V}{\omega}\right)^2,\ x^3=\xi^3;$

линии тока – $x^1-c_1=-\left(x^2-c_2\right)\mathrm{tg}(\omega t_0),\ x^3=c_3,\ c_i=\mathrm{const}$

Дополнительные задачи

Задача 8.7. Ввести лагранжевы координаты и найти закон движения сплошной среды, линии тока и траектории, если поле скорости в ДСК имеет вид

а) $\vec{v}=\left(\dfrac{Q(t)}{2\pi}\dfrac{x^1}{r^2},\dfrac{Q(t)}{2\pi}\dfrac{x^2}{r^2},0\right),\ r=\sqrt{x^{12}+x^{22}},Q(t)>0;$

б) $\vec{v}=\left(\dfrac{Q(t)}{2\pi}\dfrac{x^1}{R^3},\dfrac{Q(t)}{2\pi}\dfrac{x^2}{R^3},\dfrac{Q(t)}{2\pi}\dfrac{x^3}{R^3}\right),\ R=\sqrt{x^{12}+x^{22}+x^{32}},Q(t)>0;$

в) $\vec{v}=\left(-Ax^1,Bx^2,0\right),\ A,B=const>0.$

Дополнительно решить пп. а), б) с использованием цилиндрической и сферической систем координат соответственно.

Задача 8.8. Движение континуума в ДСК задано уравнениями: $x^1=A+\dfrac{e^{-B\lambda}}{\lambda}\sin\left[\lambda\left(A+\omega t\right)\right],\ x^2=-B-\dfrac{e^{-B\lambda}}{\lambda}\cos\left[\lambda\left(A+\omega t\right)\right],\ x^3=\xi^3$. Доказать, что траектории всех частиц – окружности, а величина скорости постоянна. Определить связь между A и B и лагранжевыми координатами ξ^1,ξ^2, совпадающими с $x^1(0),\ x^2(0)$.

Задача 8.9. Движущаяся среда имеет поле скорости $\vec{v}=\left(kx^1,-kx^2,0\right),\ k=\text{const}$ и поле плотности $\rho=\rho_0+Ax^2e^{kt};\ \rho_0,A=\text{const}$. Найти скорость изменения плотности в произвольной частице сплошной среды. *Ответ*: 0.

Задача 8.10. В движущейся с полем скоростей $\vec{v}=\left(-\omega x^2,\omega x^1,0\right);\ \omega=\text{const}$ сплошной среде поддерживается поле температуры $T=T_0\exp\left[-\dfrac{t}{\tau}-\left(x^1/a\right)^2-\left(x^2/b\right)^2-\left(x^3/c\right)^2\right]$. Найти скорость изменения температуры в частице сплошной среды, находящейся в момент времени t_0 в точке с координатами (a,b,c). $T_0,\tau,a,b,c=\text{const}$.

Ответ: $T_0\left(2\omega\dfrac{b^2-a^2}{ab}-\dfrac{1}{\tau}\right)e^{-3-\frac{t_0}{\tau}}$.

ЗАНЯТИЕ 9. ДЕФОРМАЦИЯ. СКОРОСТЬ ДЕФОРМАЦИИ

Основные формулы и определения

Операция	**Перемещение** $\vec{u} = u_i\, Э^i$	**Скорость** $\vec{v} = v_i\, Э^i$
Градиент	$\overset{\Rightarrow}{u} = \vec{\nabla} \circ \vec{u} = u_{ij} Э^i Э^j$ $u_{ij} = \nabla_i u_j$ тензор градиента перемещений	$\overset{\Rightarrow}{h} = \vec{\nabla} \circ \vec{v} = h_{ij} Э^i Э^j$ $h_{ij} = \nabla_i v_j$ тензор градиента скорости
Выделение симметричной части	$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i\right)$ тензор линейных или бесконечно малых деформаций	$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right)$ тензор линейных или бесконечно малых скоростей деформации
Выделение антисимметричной части	$\theta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j - \nabla_j u_i\right)$ тензор (жесткого) поворота/вращения	$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i\right)$ тензор завихренности (скоростей поворота)
Ротор	$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u}$ $W^k = \frac{1}{\sqrt{g}}\theta_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\nabla_i u_j - \nabla_j u_i\right)$ вектор поворота	$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v}$ $\omega^k = \frac{1}{\sqrt{g}}\omega_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i\right)$ вектор вихря
Выделение шаровой части симметричного тензора	$\varepsilon^0_{ij} = \varepsilon_M\, \delta_{ij},\ \varepsilon_M = \varepsilon_{kk}/3$ изменение объема растяжение/сжатие	$e^0_{ij} = e_M\, \delta_{ij},\ e_M = e_{kk}/3$ скорость изменения объема растяжения/сжатия
Выделение девиаторной части симметричного тензора	$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\, \varepsilon_M$ изменение формы деформации сдвига	$e'_{ij} = e_{ij} - \delta_{ij}\, e_M$ изменение формы скорости сдвига
Приведение симметричной части к главным осям	$\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(3)}$ главные деформации	$e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}$ главные скорости деформаций

Уравнения совместности в случае бесконечно малых деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x^k \partial x^m} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{km}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x^j \partial x^m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jm}}{\partial x^i \partial x^k} = 0. \quad (9.1)$$

Вихревой линией называется такая линия, касательная к которой в каждой точке движущейся среды направлена по вектору вихря $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v}$. Уравнения вихревых линий имеют вид

$$\mathrm{d}x^1/\omega^1 = \mathrm{d}x^2/\omega^2 = \mathrm{d}x^3/\omega^3 = \mathrm{d}s. \quad (9.2)$$

Примеры решения задач

Задача 9.1. Считая деформации малыми, записать выражения для геометрических компонент тензора деформаций в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

Решение:

а) ДСК
$$\begin{cases} \varepsilon^{xx} = \partial u^x/\partial x, \quad \varepsilon^{yy} = \partial u^y/\partial y, \quad \varepsilon^{zz} = \partial u^z/\partial z, \\ \varepsilon^{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^x}{\partial y} + \frac{\partial u^y}{\partial x}\right), \quad \varepsilon^{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^x}{\partial z} + \frac{\partial u^z}{\partial x}\right), \quad \varepsilon^{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^y}{\partial z} + \frac{\partial u^z}{\partial y}\right), \end{cases}$$

б) ЦСК
$$\begin{cases} \varepsilon^{11} = \frac{\partial u^1}{\partial r}, \quad \varepsilon^{22} = \frac{\partial u^2}{\partial \varphi} + r u^1, \quad \varepsilon^{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^1}{\partial \varphi} + \frac{\partial u^2}{\partial r} - \frac{2u^2}{r}\right), \\ \varepsilon^{33} = \frac{\partial u^3}{\partial z}, \quad \varepsilon^{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^2}{\partial z} + \frac{\partial u^3}{\partial \varphi}\right), \quad \varepsilon^{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^1}{\partial z} + \frac{\partial u^3}{\partial r}\right), \end{cases}$$

в) ССК
$$\begin{cases} \varepsilon^{11} = \frac{\partial u^1}{\partial r}, \quad \varepsilon^{22} = \frac{\partial u^2}{\partial \varphi} + u^1 \sin\lambda\cos\lambda + r u^1 \sin^2\lambda, \\ \varepsilon^{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^1}{\partial \varphi} + \frac{\partial u^2}{\partial r} - \frac{2u^2}{r}\right), \quad \varepsilon^{33} = \frac{\partial u^3}{\partial \lambda} + r u^1, \\ \varepsilon^{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^2}{\partial \lambda} + \frac{\partial u^3}{\partial \varphi}\right) - \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda} u^2, \quad \varepsilon^{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^1}{\partial \lambda} + \frac{\partial u^3}{\partial r} - \frac{2u^3}{r}\right). \end{cases}$$

Задача 9.2. Для некоторого момента времени задано векторное поле скорости движения сплошной среды в декартовой системе координат $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = x\vec{i} - 3yz\vec{j} + 2z\vec{k}$. Что можно сказать о характере движения частицы среды, находящейся в данный момент времени в точке пространства с координатами $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$?

Решение. Поле скоростей позволяет определить поступательную, деформационную и вращательную составляющие движения любой частицы среды. Скорость движения данной частицы определяется подстановкой координат частицы в векторное поле скорости: $\vec{v} = 2\vec{i} - 18\vec{j} + 6\vec{k}$.

Согласно физическому смыслу дивергенции вектора, для векторного поля скорости течения (при отсутствии в потоке внутренних источников массы) $\operatorname{div}\vec{v}$ определяет относительную скорость изменения объема бесконечно малой индивидуальной частицы: $\lim\limits_{V\to 0}\dfrac{\dot{V}}{V} = \operatorname{div}\vec{v} = \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial(-3yz)}{\partial y} + \dfrac{\partial(2z)}{\partial x} = -3z + 3$.

Для данной частицы $\operatorname{div}\vec{v} = -6 < 0$, что говорит о проявлении в данный момент времени тенденции к сжатию частицы, уменьшению ее объема и увеличению плотности.

Согласно физическому смыслу ротора вектора, для векторного поля скорости течения $\operatorname{rot}\vec{v}$ определяет мгновенную угловую скорость $\vec{\omega}$ вращательного движения бесконечно малой индивидуальной частицы:

$$2\vec{\omega} = \operatorname{rot}\vec{v} = \left[\frac{\partial(2z)}{\partial y} - \frac{\partial(-3yz)}{\partial z}\right]\vec{i} - \left[\frac{\partial(2z)}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z}\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial(-3yz)}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right]\vec{k} = 3y\vec{i}.$$

Для данной частицы $2\vec{\omega} = 6\vec{i}$ – ось вращения параллельна оси Ox, вращение происходит против хода часовой стрелки по отношению к этой оси.

Зависимость величин $\vec{v}, \operatorname{div}\vec{v}, \operatorname{rot}\vec{v}$ от координат говорит о том, что частицы деформируемой среды в общем случае движутся с разными скоростями, испытывают различные деформации и вращательные движения.

Рекомендуется дополнительно проанализировать тензор градиента скорости движения сплошной среды.

Задача 9.3. Некоторое движение сплошной среды задано в декартовой системе координат полем скоростей $v^1 = 0$, $v^2 = A\left(x^1x^2 - \left(x^3\right)^2\right)e^{-Bt}$, $v^3 = A\left(\left(x^2\right)^2 - x^1x^3\right)e^{-Bt}$, где A, B – константы. Найти тензор градиента скорости и вычислить тензор скоростей деформации и тензор завихренности в точке $P(1, 0, 3)$ в момент $t = 0$.

Решение. Тензор градиента скорости равен $\left(\dfrac{\partial v^i}{\partial x^j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x^1 & -2x^3 \\ -x^3 & 2x^2 & -x^1 \end{pmatrix} A e^{-Bt}$. Этот тензор можно вычислить в точке P в момент $t=0$. Его симметричная и антисимметричная составные части являются тензорами скоростей деформации и завихренности:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & -6A \\ -3A & 0 & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1.5A \\ 0 & A & -3A \\ -1.5A & -3A & -A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.5A \\ 0 & 0 & -3A \\ -1.5A & 3A & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 9.4. Доказать, что для поля скоростей в ДСК $\vec{v} = \left(Ax^3 - Bx^2\right)Э_1 + \left(Bx^1 - Cx^3\right)Э_2 + \left(Cx^2 - Ax^1\right)Э_3$ вихревые линии являются прямыми. Написать их уравнения. Доказать, что такое поле скоростей представляет вращение абсолютно твердого тела, так как для него тензор скоростей деформаций равен нулю.

Решение. По определению вектора вихря $2\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = 2\left(CЭ_1 + AЭ_2 + BЭ_3\right)$. Тогда уравнения вихревых линий будут $A\,dx^3 = B\,dx^2$, $B\,dx^1 = C\,dx^3$, $C\,dx^2 = A\,dx^1$. Интегрируя их, найдем уравнения вихревых линий в конечной форме $x^3 = Bx^2/A + K_1$, $x^1 = Cx^3/B + K_2$, $x^2 = Ax^1/C + K_3$, где K_i – постоянные интегрирования.

Вычислим матрицу тензора градиента скорости: $\left(\dfrac{\partial v^i}{\partial x^j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -B & A \\ B & 0 & -C \\ -A & C & 0 \end{pmatrix}$. Поскольку этот тензор антисимметричен в любой точке СС, то его симметричная составляющая (тензор скоростей деформаций) представляет собой нулевой тензор также во всех точках сплошной среды.

Задача 9.5. Удовлетворяются ли уравнения совместности для деформированного состояния СС, заданного в ДСК матрицей ТД

$$\left(\varepsilon_{ij}\right) = \begin{pmatrix} x^2 & y^2 & xz \\ y^2 & z & z^2 \\ xz & z^2 & 5 \end{pmatrix}?$$

Решение. Из 81 уравнения совместности только шесть различны:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{(\partial x^2)^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{(\partial x^1)^2} = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^1 \partial x^2}, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{(\partial x^3)^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{(\partial x^2)^2} = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x^2 \partial x^3}, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{(\partial x^1)^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{(\partial x^3)^2} = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x^3 \partial x^1},
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x^1}\left(-\dfrac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^3} \right) = \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2 \partial x^3}, \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1} - \dfrac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^3} \right) = \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^3 \partial x^1}, \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial x^3}\left(\dfrac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^3} \right) = \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^1 \partial x^2}.
\end{cases}
$$

Непосредственной подстановкой в них заданных компонент матрицы деформаций можно удостовериться, что уравнения совместности выполняются.

Задачи для решения в аудитории

Задача 9.6. Задано поле перемещений в сопутствующей системе координат $\vec{u} = \left(\xi^1 - \xi^2\right)^2 Э^1 + \left(\xi^2 + \xi^3\right)^2 Э^2 - \xi^1 \xi^2 Э^3$, являющейся в начальный момент времени декартовой прямоугольной. При ограничениях, принятых в теории малых деформаций, определить тензор деформаций и тензор поворота в индивидуальной точке с лагранжевыми координатами $\xi^1 = 0$, $\xi^2 = 2$, $\xi^3 = -1$.

Задача 9.7. Однородное тело подвергается деформации сдвига так, что все плоскости, параллельные плоскости $x_1 O x_2$, переходят в себя и все точки тела перемещаются в направлении единичного вектора $\vec{l} = l^1 \vec{e}_1 + l^2 \vec{e}_2$, параллельного этой плоскости. 1) Найти тензор малых деформаций тела. 2) Записать условия, когда суммарного изменения объема сплошной среды не происходит.

Дополнительные задачи

Задача 9.8. Дано поле перемещений $u^1 = 3x^1 \left(x^2\right)^2$, $u^2 = 2x^3 x^1$, $u^3 = \left(x^3\right)^2 - x^1 x^2$. Определить тензор деформаций $\varepsilon_{ij}\left(x^1, x^2, x^3\right)$ и проверить, удовлетворяются ли условия совместности.

Ответ: $\left(\varepsilon_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 3\left(x^2\right)^2 & 3x^1 x^2 + x^3 & -x^2/2 \\ 3x^1 x^2 + x^3 & 0 & x^1/2 \\ -x^2/2 & x^1/2 & 2x^3 \end{pmatrix}$, да.

Задача 9.9. Некоторое течение задано полем скоростей в декартовой системе координат $v^1 = 0$, $v^2 = A\left(x^1 x^2 - \left(x^3\right)^2\right)e^{-Bt}$, $v^3 = A\left(\left(x^2\right)^2 - x^1 x^3\right)e^{-Bt}$, где A, B – константы. Найти тензор градиента скорости $\partial v^i / \partial x^j$ для этого движения и вычислить компоненты тензора скоростей деформации e^{ij} и тензора скоростей поворота w^{ij} в точке $P(1,0,3)$ в момент времени $t = 0$. Будет ли сплошная среда сжиматься при таком движении?

Задача 9.10. Дано стационарное поле скоростей $\vec{v} = \left[\left(x^1\right)^3 - x^1\left(x^2\right)^2\right]Э_1 + \left[\left(x^1\right)^2 x^2 + x^2\right]Э_2$. Найти скорости частиц в точках $Q_1(1,0,3)$, $Q_2\left(1, {}^3\!/_4, 3\right)$, $Q_3\left(1, {}^7\!/_8, 3\right)$ относительно скорости частицы в точке $P(1,1,3)$, отнесенные к расстоянию от этих точек до точки P. К чему стремятся такие скорости точек Q_i при стремлении последних к точке P?

Задача 9.11. Что можно сказать об изменении объема и формы индивидуальной частицы сплошной среды, деформированное состояние которой характеризуется тензором с матрицей

$$\left(\varepsilon_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & -5 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}?$$

Задача 9.12. Малая деформация задана тензором градиента перемещений

$$\left(u_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}.$$

а) Определить тензор чистой деформации и тензор поворота.

б) Найти главные значения и главные направления деформации тела.

в) Найти направление оси вращения и угол поворота тела.

Задача 9.13. Сравнить траектории и вихревые линии для заданных полей скорости в ДСК, если a, b, c, k – некоторые константы:

а) простого растяжения $\vec{v}(ax, 0, 0)$;

б) трехстороннего неравномерного растяжения $\vec{v}(ax, by, cz)$;

в) простого сдвига $\vec{v}(ay, 0, 0)$;

г) чистого сдвига $\vec{v}(ky, kx, 0)$;

д) для поля скоростей $\vec{v}(-ky, kx, 0)$;

е) для поля скоростей $\vec{v}(cy - bz, az - cx, bx - ay)$.

ЗАНЯТИЕ 10. ТЕОРЕМА КОШИ – ГЕЛЬМГОЛЬЦА. ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТИ. ЦИРКУЛЯЦИЯ. ФОРМУЛА СТОКСА

Основные формулы и определения

Теорема Коши – Гельмгольца для точки M' из малой окрестности т. M

$$\vec{v}(M') = \vec{v}(M) + e_{ij}\,\mathrm{d}x^i Э^j + \omega_{ij}\,\mathrm{d}x^i Э^j, \tag{10.1}$$

или

$$\vec{v}(M') = \vec{v}(M) + e_{ij}\,\mathrm{d}x^i Э^j + \vec{\omega}\times \mathrm{d}\vec{r}. \tag{10.2}$$

здесь использованы компоненты e_{ij} тензора скорости деформации, компоненты ω_{ij} тензора вихря и вектор вихря $\vec{\omega}$:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right),\ \omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right),\ \vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v}. \tag{10.3}$$

Потенциалом поля скорости $\vec{v}$ называется такая функция φ, что

$$\vec{v} = \operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi, \quad v_i Э^i = \nabla_i \varphi Э^i, \quad v_i = \nabla_i\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = v^j g_{ij}. \tag{10.4}$$

Циркуляцией скорости по контуру называется величина

$$\Gamma = \int_A^B v_s\,\mathrm{d}s = \int_A^B \left(\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{s}\right) = \int_A^B \left(\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r}\right) = \int_A^B v_i\,\mathrm{d}x^i,\ \Gamma = \oint_C v_s\,\mathrm{d}s. \tag{10.5}$$

Формула Стокса для циркуляции по замкнутому контуру имеет вид

$$\Gamma = \oint_C v_s\,\mathrm{d}s = 2\int_\Sigma \omega_n\,\mathrm{d}\sigma, \tag{10.6}$$

где $\mathbf{n}$ – такая нормаль к поверхности, с которой обход контура C происходит против часовой стрелки (для правой системы координат).

Примеры решения задач

Задача 10.1. В ЦСК в точке $M(2,0,1)$ известны компоненты скорости $v_M^i = (0, 0.5, 1)$, вихря $\omega_M^k = \left(\frac{1}{8}, 0, -\frac{1}{16}\right)$ и тензора скорости деформации $e_{12} = e_{21} = -\frac{3}{8}$, $e_{23} = e_{32} = \frac{1}{4}$ (остальные равны нулю). Требуется определить скорость в точке $M'(2+a, b, 1+c)$ с помощью теоремы Коши – Гельмгольца.

Решение. Подставим в (10.2) заданные величины и вектор $\mathrm{d}\vec{r} = (a,b,c)$:

$$v_{M'}^j = v_M^j + e_{ij}\mathrm{d}x^i + \varepsilon_{jkn}\omega^k \mathrm{d}x^n;$$

$$\left(v_{M'}^{j}\right)=\begin{pmatrix} v_M^1+e_{11}\mathrm{d}x^1+e_{21}\mathrm{d}x^2+e_{31}\mathrm{d}x^3+\sqrt{g}\left(\omega^2\mathrm{d}x^3-\omega^3\mathrm{d}x^2\right)\\ v_M^2+e_{12}\mathrm{d}x^1+e_{22}\mathrm{d}x^2+e_{32}\mathrm{d}x^3+\sqrt{g}\left(\omega^3\mathrm{d}x^1-\omega^1\mathrm{d}x^3\right)\\ v_M^3+e_{13}\mathrm{d}x^1+e_{23}\mathrm{d}x^2+e_{33}\mathrm{d}x^3+\sqrt{g}\left(\omega^1\mathrm{d}x^2-\omega^2\mathrm{d}x^1\right)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0-\dfrac{3}{8}b+2\left(\dfrac{1}{16}b\right)\\ 0.5-\dfrac{3}{8}a+\dfrac{1}{4}c+2\left(-\dfrac{1}{16}a-\dfrac{1}{8}c\right)\\ 1+\dfrac{1}{4}b+2\left(\dfrac{1}{8}b\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0-\dfrac{b}{4}\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{2}\\ 1+\dfrac{b}{2}\end{pmatrix}$$

Задача 10.2. Для плоского движения $\vec{v}\left(k\,y,-k\,x\right)$ в ДСК найти вектор вихря $\vec{\omega}$ и вычислить циркуляцию скорости по контурам MN, NP, PQ, QM, MP и по замкнутому контуру $C=MNPQ$, если $M\left(a,b\right)$, $N\left(c,b\right)$, $P\left(c,d\right)$, $Q\left(a,d\right)$. Для контура C проверить формулу Стокса. Выполнить расчеты для двух случаев: а) $\left(a,b,c,d\right)=\left(0,0,L,L\right)$; б) $\left(a,b,c,d\right)=\left(-L,-L,L,L\right)$.

Решение. Вектор вихря имеет одну ненулевую компоненту в направлении, ортогональном плоскости течения: $\vec{\omega}=\left(0,0,-k\right)$. Значения циркуляции

$$\Gamma_{MN}=\int\limits_M^N v_s\,\mathrm{d}s=\int\limits_a^c v_x\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c k\,b\,\mathrm{d}x=k\,b\left(c-a\right)=\left\{0;-2kL^2\right\},$$

$$\Gamma_{NP}=\int\limits_N^P v_s\,\mathrm{d}s=\int\limits_b^d v_y\,\mathrm{d}y=-\int\limits_b^d k\,c\,\mathrm{d}y=-k\,c\left(d-b\right)=\left\{-kL^2;-2kL^2\right\},$$

$$\Gamma_{PQ}=\int\limits_c^a v_x\,\mathrm{d}x=k\,d\left(a-c\right)=\left\{-kL^2;-2kL^2\right\},$$

$$\Gamma_{QM}=\int\limits_d^b v_y\,\mathrm{d}y=-k\,a\left(b-d\right)=\left\{0;-2kL^2\right\},$$

$$\Gamma_C=\oint\limits_C v_s\,\mathrm{d}s=2\int\limits_\Sigma \omega_n\,\mathrm{d}\sigma=2\int\limits_a^c\int\limits_b^d -k\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=-2k\left(c-a\right)\left(d-b\right)=\left\{-2kL^2;-8kL^2\right\}.$$

Задачи для решения в аудитории

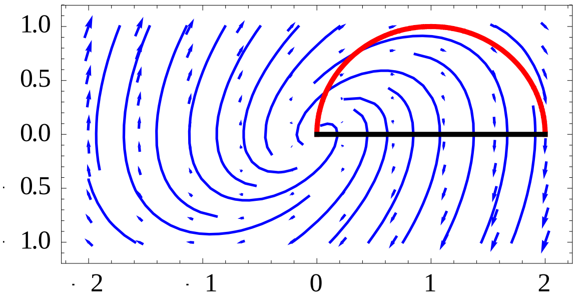
Задача 10.3. В ЦСК задано поле скоростей $\vec{v} = v_i Э^i = \left(0, \dfrac{z}{r\tau}, \dfrac{L}{\tau}\right)$, $L(\text{м}), \tau(\text{с})$ – константы. Является ли поле потенциальным или вихревым? В первом случае найти потенциал течения, во втором – вектор вихря.

Задача 10.4. По заданному в ЦСК потенциалу $\varphi = C\left[z^2 + (r\cos\theta)^2\right]$ определить векторное поле скорости течения.

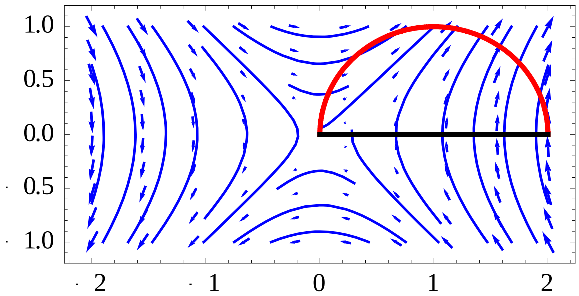
Задача 10.5. Вычислить циркуляцию по контурам

$$L_1 = AB,\ A(0,0), B(2,0) \text{ и } L_2 : \vec{r}(t) = (1 - \cos t, \sin t), 0 \le t \le \pi$$

и определить наличие потенциала поля скорости, заданного в ДСК в виде



а) $\vec{v} = (y, y - x)$;



б) $\vec{v} = (y, x)$.

Дополнительные задачи

Задача 10.6. В ДСК в точке $M(1,2,3)$ задана скорость $\vec{v}(1,0,0)$, компоненты тензора скоростей деформации $e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и вектора вихря $\vec{\omega} = (0,0,2)$. Требуется определить скорость в точке $M'(1.01, 2.02, 3.01)$ с помощью теоремы Коши – Гельмгольца и дать физическую интерпретацию результату.

Задача 10.7. В ДСК задано поле скоростей $v_x = 4ax,\ v_y = 0,\ v_z = -4az$. Является ли такое поле потенциальным или вихревым? В первом случае найти потенциал течения, во втором – вектор вихря.

Ответ: $\varphi = 2a\left(x^2 - z^2\right) + C$.

Задача 10.8. По заданному в ДСК потенциалу $\varphi = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$ определить векторное поле скорости течения.

Ответ: $v_x = \dfrac{2\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $v_y = -\dfrac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $v_z = 0$.

Задача 10.9. По заданному в ЦСК закону движения $\vec{v} = v_i\,Э^i = \left(a r^2\cos^2\varphi,\, bz\left(1+\mathrm{tg}\varphi\right),\, c\left(z+r\right)\sin\varphi\right)$ вычислить циркуляцию скорости по контурам AB, BD и C, если $A\left(1,\pi/4,2\right)$, $B\left(3,\pi/4,2\right)$, $D\left(3,\pi/4,5\right)$ (контуры лежат на координатных линиях) и $C=\left\{r=1,\, 0\le\varphi<2\pi,\, z=0\right\}$. Для замкнутого контура проверить формулу Стокса.

Ответ:

$$\Gamma_{AB} = \int\limits_1^3 a r^2\cos^2\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{26}{3}a\cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{13a}{3},$$

$$\Gamma_{BD} = \int\limits_2^5 c\left(z+r\right)\sin\varphi\,\mathrm{d}z = \frac{c}{\sqrt{2}}\left[\frac{z^2}{2}+3z\right]_2^5 = \frac{39c}{2\sqrt{2}},$$

$$\Gamma_C = \int\limits_0^{2\pi} v_2\,\mathrm{d}\varphi = bz_{=0}\left[-\ln\left(\cos\varphi\right)\right]_0^{2\pi} = 0,$$

$$\Gamma_C = 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \omega^3\sqrt{g_{33}}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 ar\sin\varphi\cos\varphi\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 0.$$

ЗАНЯТИЕ 11. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Основные формулы и определения

Уравнение неразрывности в отсутствие источников и стоков может быть записано в различных формах:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \tag{11.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0. \tag{11.2}$$

Здесь ρ – плотность сплошной среды, $\vec{v}$ – вектор скорости.

Примеры решения задач

Задача 11.1. Представить дифференциальное уравнение неразрывности в произвольной криволинейной эйлеровой системе координат, используя частные производные.

Решение. Запишем уравнение (11.2), использовав формулу Вейла (6.2):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \left(\sqrt{g}\, \rho v^{\alpha}\right)}{\partial x^{\alpha}} = 0.$$

Задача 11.2. Записать уравнение неразрывности в физических компонентах вектора скорости.

Решение.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\rho v^1_{\text{физ}} \sqrt{g_{22}\, g_{33}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\rho v^2_{\text{физ}} \sqrt{g_{11}\, g_{33}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\rho v^3_{\text{физ}} \sqrt{g_{11}\, g_{22}} \right) \right) = 0.$$

Задача 11.3. Записать уравнение неразрывности в физических компонентах вектора скорости в сферической системе координат.

Решение.

$$r^2 \cos\lambda \frac{\partial \rho}{\partial t} + \cos\lambda \frac{\partial}{\partial r}\left(\rho v_r\, r^2\right) + r\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\rho v_{\varphi}\right) + r\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\rho v_{\lambda} \cos\lambda\right) = 0.$$

Задачи для решения в аудитории

Задача 11.4. Сплошная среда движется радиально, и модуль скорости может зависеть только от времени и от расстояния от полюса. Записать уравнение неразрывности. Найти решение этого уравнения и выяснить его механический смысл для а) несжимаемой среды; б) установившегося движения.

Ответ: $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+v\dfrac{\partial\rho}{\partial r}+\dfrac{\rho}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(vr^2\right)=0$, а) $r^2v=c(t)$, б) $r^2\rho v=c$.

Задача 11.5. Пусть каждая частица сплошной среды движется по сфере. Записать уравнение неразрывности. Рассмотреть меридиальное движение $v_\varphi=0$ и движение по параллелям $v_\lambda=0$.

Задача 11.6. В начальный момент времени плотность однородной сплошной среды составляла $1000\,\text{кг/м}^3$. Сплошная среда мгновенно начала одномерное движение вдоль оси x с полем скорости $v=x/A+B/t$, где $A=10\,\text{с}$, $B=100\,\text{м}$. Требуется оценить распределение плотности в сплошной среде через 1 секунду после начала движения.

Дополнительные задачи

Задача 11.7. Записать дифференциальное уравнение неразрывности в декартовых координатах.

Задача 11.8. Показать, что поле скоростей $v^i=Ax^i/r^3$, где $r^2=\sum\limits_{i=1}^{3}x^i\,x^i$ и A – произвольная константа, удовлетворяет уравнению неразрывности несжимаемой среды, записанному в декартовой системе координат.

Задача 11.9. Записать уравнение неразрывности, если при движении сплошной среды траектории частиц расположены на поверхностях коаксиальных круговых цилиндров.

Задача 11.10. Пусть Ω – площадь поперечного сечения трубки тока. Показать, что уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Omega)+\frac{\partial}{\partial s}(\rho\Omega v)=0,$$

где s – дуговая координата вдоль нити тока в направлении потока, а v – модуль средней скорости в сечении трубки тока.

Задача 11.11. Дано плоское течение несжимаемой жидкости в ДСК:

$$v^1=A\left[\left(x^1\right)^2-\left(x^2\right)^2\right]\Big/r^4,\quad v^2=2Ax^1x^2/r^4,\quad v^3=0,$$

где $r^2=\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2$ и $A=\text{const}$. Доказать, что поле скоростей удовлетворяет уравнению неразрывности и является безвихревым.

Задача 11.12. В начальный момент времени плотность однородной сплошной среды составляла 1000 кг/м^3. Сплошная среда мгновенно начала одномерное движение вдоль оси x с полем скорости $v = C/x$, где $C = 10\ м^2/с$. Требуется оценить значения плотности в сплошной среде через 1 мс после начала движения в точках $x_0 = 0$ м, $x_1 = 1$ м, $x_2 = 10$ м, $x_3 = 100$ м.

Задача 11.13. (*) Для поля скоростей $v^i = x^i \big/ (1+t)$ показать, что $\rho x^1 x^2 x^3 = \rho_0 \xi^1 \xi^2 \xi^3$, $\rho_0 = \rho\big|_{t=0}$, где x^i, ξ^i – соответственно эйлеровы и лагранжевы координаты; причем $\xi^i = x^i(t=0)$.

Задача 11.14. (*) В анизотропных пористых средах скорость фильтрации $\vec{u}$ (м/с) выражается *законом Дарси*[1]:

$$\vec{u} = -\frac{1}{\mu} \overset{\Rightarrow}{K} \cdot \nabla p,$$

где μ – динамическая вязкость жидкости (Па с), p – давление в жидкости (Па), $\overset{\Rightarrow}{K}$ – тензор абсолютной проницаемости пористой среды (м^2).

1) Записать выражения для вычисления компонент скорости фильтрации.

2) Записать выражение для вычисления проекции скорости фильтрации на направление $\vec{n}$.

3) Записать уравнение неразрывности $\operatorname{div}\vec{u} = 0$ в терминах функции давления p.

Задача 11.15. (*) Проницаемость некоторой однородной анизотропной пористой среды в ДСК задана тензором

$$\left(K^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Вычислить компоненты вектора скорости фильтрации при $\mu = 1$, $\nabla p = (1;0)$ и $\nabla p = (0;1)$ и изобразить векторы $\vec{u}$ и ∇p.

2) Определить главные значения и главные направления тензора проницаемости и дать их физическую трактовку.

---

[1] В качестве аналогии можно представить закон теплопроводности Фурье для сред с анизотропией коэффициента теплопроводности, если давление заменить температурой, а вектор скорости фильтрации – вектором плотности теплового потока.

3) Вычислить расход жидкости через отрезок AB, если $\nabla p = (1;0)$, $A(4;3)$, $B(1;7)$.

Ответ:

1) $\vec{u} = -\frac{1}{\mu}\left(1;\sqrt{2}\right)$, $\vec{u} = -\frac{1}{\mu}\left(\sqrt{2};2\right)$;

2) $k_1 = 3$, $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1;\sqrt{2}\right)$; $k_2 = 0$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{2};1\right)$ – направления, в которых $\vec{u} \parallel \nabla p$;

3) $4 + 3\sqrt{2} \approx 8.24$.

ЗАНЯТИЕ 12. НАПРЯЖЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Основные формулы и определения

p_{ij} – компоненты *тензора напряжений* $\overset{\Rightarrow}{P}$ сплошной среды.

Вектор полного напряжения $\vec{P}_n$ на площадке с единичной нормалью $\vec{n}$ вычисляется по формуле

$$\vec{P}_n = \overset{\Rightarrow}{P} \cdot \vec{n} = p_{ij} Э^i Э^j \cdot n^k Э_k = p_{ij} n^j Э^i = P_{n,i} Э^i. \tag{12.1}$$

Нормальное p_n и *касательное* τ напряжения в любой точке сплошной среды на площадке с единичной нормалью $\vec{n}$ определяются тензором напряжений в этой точке и ориентацией площадки:

$$p_n = \vec{P}_n \cdot \vec{n} = P_{n,i} Э^i \cdot n^k Э_k = P_{n,i} n^i, \tag{12.2}$$

$$\tau = \sqrt{\vec{P}_n \cdot \vec{P}_n - (p_n)^2} = \sqrt{P_{n,i} P_n^i - (p_n)^2}. \tag{12.3}$$

Главные площадки – площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения. Направления по нормали к этим площадкам определяют *главные направления* тензора напряжений, а нормальные напряжения, действующие на этих площадках, называются *главными напряжениями* или *главными значениями* тензора напряжений. Главные направления и главные напряжения $P_{(1)} > P_{(2)} > P_{(3)}$ определяются по правилам нахождения главных осей и главных значений тензора второго ранга.

Инварианты $\Sigma_{\text{I}}, \Sigma_{\text{II}}, \Sigma_{\text{III}}$ тензора напряжений позволяют вычислять следующие характеристики.

Среднее напряжение

$$\sigma = \Sigma_{\text{I}}/3 = \left(P_{(1)} + P_{(2)} + P_{(3)}\right)\big/3. \tag{12.4}$$

Интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{2}\sqrt{3\Sigma_{\text{II}} - \Sigma_{\text{I}}^2}\big/2. \tag{12.5}$$

Максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \left(\Sigma_{\text{III}} - \Sigma_{\text{I}}\right)/2. \tag{12.6}$$

Компоненты *шарового тензора напряжений*

$$S_{ij} = \sigma g_{ij} \tag{12.7}$$

характеризуют лишь ту часть полных напряжений, которые вызваны изменением объема индивидуальных частиц и не связаны с их формоизменением.

Компоненты *девиатора тензора напряжений* дополняют компоненты шарового тензора до исходного тензора напряжений:

$$D_{ij} = p_{ij} - \sigma g_{ij} \qquad (12.8)$$

и характеризуют ту часть полных напряжений, которые связаны лишь с изменением формы индивидуальных частиц и не связаны с изменением их объема.

Уравнения равновесия записываются в виде

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial x^j} + \rho f_i = 0, \qquad (12.9)$$

ρ – плотность среды, f_i – компоненты вектора плотности массовых сил.

Примеры решения задач

Задача 12.1. Напряженное состояние в некоторой точке задано тензором напряжений с матрицей $\left(p_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{pmatrix}$. Определить константы a, b, c так, чтобы вектор напряжения на площадке с единичной нормалью $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(Э_1 + Э_2 + Э_3\right)$ в декартовой системе координат был равен нулю.

Решение. По уравнению (12.1) для данных тензора напряжений и вектора нормали величина $P_{n,i} = p_{ij} n^j$ должна быть равна нулю. Запишем это в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ откуда } \begin{cases} a + b = -1, \\ a + c = -1, \\ b + c = -1. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, получим $a = b = c = -1/2$. Тогда итоговая матрица тензора напряжений имеет вид:

$$\left(p_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \sigma & -\sigma/2 & -\sigma/2 \\ -\sigma/2 & \sigma & -\sigma/2 \\ -\sigma/2 & -\sigma/2 & \sigma \end{pmatrix}.$$

Задача 12.2. Напряженное состояние сплошной среды в ДСК задано полем тензора напряжений с компонентами $\left(p_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2xy & 3y^2 & 0 \\ 3y^2 & 0 & z \\ 0 & z & 1 \end{pmatrix}$.

Определить вектор полного напряжения, нормальное и касательное напряжения в точке $A\left(2,1,\sqrt{3}\right)$ на площадке, касательной к цилиндрической поверхности $y^2+z^2=4$.

Решение. Компоненты напряжения в точке среды A принимают вид

$$\left(p_{ij}\right)_A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ 3 & 0 & \sqrt{3}\\ 0 & \sqrt{3} & 1\end{pmatrix},$$

а единичный вектор нормали в точке A к поверхности $\Phi\left(x,y,z\right)=y^2+z^2-4=0$ определяется вектором $\vec{n}=\operatorname{grad}\Phi\big/\left|\operatorname{grad}\Phi\right|$:

$$\operatorname{grad}\Phi\big|_P=\nabla\left(y^2+z^2-4\right)\Big|_P=\left(2y\vec{j}+2z\vec{k}\right)\Big|_P=2\vec{j}+2\sqrt{3}\vec{k},$$

$$\left|\operatorname{grad}\Phi\right|_P=4,\ \vec{n}=\left(\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k}\right)\Big/2.$$

В итоге вектор полного напряжения (12.1) определяется как

$$\vec{P}_n=\left(p_{11}n^1+p_{12}n^2+p_{13}n^3\right)\vec{i}+\left(p_{21}n^1+p_{22}n^2+p_{23}n^3\right)\vec{j}+$$

$$+\left(p_{31}n^1+p_{32}n^2+p_{33}n^3\right)\vec{k}=\frac{3}{2}\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k},$$

а нормальное (12.2) и касательное (12.3) напряжения будут равны:

$$p_n=P_{n,1}n^1+P_{n,2}n^2+P_{n,3}n^3=\left(3/2\right)\cdot 0+\left(3/2\right)\cdot\left(1/2\right)+\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}/2\right)=9/4,$$

$$\tau=\sqrt{P_{n,i}P_n^i-\left(p_n\right)^2}=\sqrt{39}/4.$$

Дополнительные задачи

Задача 12.3. Для заданного тензора напряжений

$$\left(p_{ij}\right)=\begin{pmatrix}p & a\\ a & p\end{pmatrix}$$

определить шаровой тензор, девиатор, главные значения и главные направления исходного тензора и девиатора. Проанализировать результат.

Задача 12.4. Напряженное состояние сплошной среды задано матрицей

$$\left(p_{ij}\right)=\begin{pmatrix}3x^2 & 4xy & -5z\\ 4xy & 0 & 0\\ -5z & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Определить вектор напряжения в точке $A\left(\sqrt{2};2;1\right)$ на площадке, касательной в этой точке к цилиндрической поверхности $y^2+2x^2=8$.

Задача 12.5. Тензор напряжений в точке сплошной среды задан матрицей $\left(p_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Определите вектор полного напряжения $\vec{P}_n$ в данной точке на площадке, ориентация которой задается единичным вектором нормали $\vec{n}=\left(2Э_1-2Э_2+Э_3\right)/3$.

Задача 12.6. Какой вид должны иметь компоненты вектора плотности массовых сил f_i, если при распределении напряжений $\left(p_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 3x^1x^2 & 5\left(x^2\right)^2 & 0 \\ 5\left(x^2\right)^2 & 0 & 2x^3 \\ 0 & 2x^3 & \sigma \end{pmatrix}$ в ДСК выполнены уравнения равновесия?

Ответ: $f_1=-13x^2/\rho,\ f_2=-2/\rho,\ f_3=0$.

Задача 12.7. Напряженное состояние во всех точках тела задано тензором напряжений с компонентами

$$\left(p_{ij}\right)=\begin{pmatrix} \left(x^1\right)^2x^2 & \left(1-\left(x^2\right)^2\right)x^1 & 0 \\ \left(1-\left(x^2\right)^2\right)x^1 & \left(\left(x^2\right)^3-3x^2\right)/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\left(x^3\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Определить: а) распределение массовых сил, если уравнения равновесия выполнены всюду, б) величины главных напряжений в точке $A\left(a,0,2\sqrt{a}\right)$, в) максимальное касательное напряжение в точке A, г) главные значения девиатора напряжений в точке A.

Ответ: а) $f_3=-4x^3$, б) $\{a,-a,8a\}$, в) $\pm4.5a$, г) $\{-11a,-5a,16a\}/3$.

Задача 12.8. Однородное тело находится под действием растягивающего усилия σ кг/м^2, направленного вдоль единичного вектора $\vec{l}=l^i\vec{e}_i$. Определить тензор напряжения этого тела.

КРАТКИЙ СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Цилиндрическая система координат	Сферическая система координат
Метрическая матрица	
$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(x^1\right)^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(x^1\cos x^3\right)^2 & 0\\ 0 & 0 & \left(x^1\right)^2\end{pmatrix}$
Сопряженная метрическая матрица	
$\left(g^{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(x^1\right)^{-2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	$\left(g^{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(x^1\cos x^3\right)^{-2} & 0\\ 0 & 0 & \left(x^1\right)^{-2}\end{pmatrix}$
Коэффициенты связности (ненулевые)	
$\Gamma^2_{21}=\Gamma^2_{12}=1/r$, $\Gamma^1_{22}=-r$	$\Gamma^1_{22}=-x^1\cos^2 x^3,\quad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=1/x^1,\quad \Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=1/x^1,$ $\Gamma^1_{33}=-x^1,\quad \Gamma^2_{23}=\Gamma^2_{32}=-\operatorname{tg}x^3,\quad \Gamma^3_{22}=\frac{1}{2}\sin\left(2x^3\right)$

Формулы преобразования при переходе к новой системе координат

$$Э_i=\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}Э'_j,\quad Э^j=\frac{\partial x^j}{\partial x'^m}Э'^m,\quad T_{ij}=\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^j}T'_{\alpha\beta},\quad T^{ij}=\frac{\partial x^i}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial x'^\beta}T'^{\alpha\beta}$$

Формулы дифференцирования и дифференциальных операторов

$$\frac{\partial Э_\alpha}{\partial x^i}=\Gamma^k_{\alpha i}Э_k,\quad \frac{\partial Э^\alpha}{\partial x^i}=-\Gamma^\alpha_{ki}Э^k,\quad \nabla_i w^\alpha=\frac{\partial w^\alpha}{\partial x^i}+w^\beta\Gamma^\alpha_{\beta i},\quad \nabla_i w_\alpha=\frac{\partial w_\alpha}{\partial x^i}-w_\beta\Gamma^\beta_{\alpha i},$$

$$\nabla_i T^{\alpha\beta}=\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^i}+T^{k\beta}\Gamma^\alpha_{ki}+T^{\alpha k}\Gamma^\beta_{ki},\qquad \vec\nabla=\nabla_i Э^i,$$

$$\operatorname{grad}\psi=\vec\nabla\circ\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x^i}Э^i,\quad \operatorname{div}\vec a=\vec\nabla\cdot\vec a=\nabla_i a^i=\frac{\partial a^i}{\partial x^i}+a^k\Gamma^i_{ki}=\frac{1}{\sqrt g}\frac{\partial\left(a^\alpha\sqrt g\right)}{\partial x^\alpha},$$

$$\operatorname{rot}(\ )=\vec\nabla\times(\ ),\quad \left(\operatorname{rot}\vec v\right)^k=\varepsilon^{kij}\nabla_i v_j=\frac{1}{\sqrt g}\left(\nabla_i v_j-\nabla_j v_i\right),$$

$$\Delta\psi=\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\psi\right)=\frac{1}{\sqrt g}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(g^{i\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\sqrt g\right),$$

$$\text{в ортог. СК }\Delta\psi=\frac{1}{\sqrt g}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}g_{33}}{g_{22}}}\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}}\frac{\partial\psi}{\partial x^3}\right)\right].$$

Материальная производная по времени

$$\frac{\mathrm dA}{\mathrm dt}=\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{\xi^i=const}=\frac{\partial A}{\partial t}+v^i\left(\nabla_i A\right)=\frac{\partial A}{\partial t}+v^i\frac{\partial A}{\partial x^i},$$

$$a^j=\frac{\partial v^j}{\partial t}+v^i\nabla_i v^j=\frac{\partial v^j}{\partial t}+v^i\frac{\partial v^j}{\partial x^i}+v^i v^\beta\Gamma^j_{\beta i}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1,2. М.: Наука. 1978.
2. Клоков В.В., Филатов Е.И., Насибулин В.Г. Механика сплошной среды. Методическая разработка практических занятий. Казань: Лаборатория оперативной полиграфии КГУ, 1987. – 45 с.
3. Практические занятия по механике сплошной среды: учебно-методическое пособие / К.А.Поташев. – Казань: Казанский университет, 2010. – 44 с.
4. Механика сплошных сред в задачах / Под общ. ред. М.Э.Эглит Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: ЛЕНАНД, 2017.– 640 с. (Классический учебник МГУ.)
5. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: «Мир», 1974. – 320 с.
6. Нигматулин Р.И. Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика. – М.: ГЕОТАР. – Медиа, 2014.
7. Бабкин А.В., Селиванов В.В. Основы механики сплошных сред: Учебник для втузов. – 3-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 376 с. (Прикладная механика сплошных сред: В 3 т. / Науч. ред. В.В. Селиванов; Т. 1).
8. Кильчевский Н.А. Основы тензорного исчисления с приложениями к механике. Киев: «Наукова думка», 1972. – 148 с.
9. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по механике сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. – 200 с.
10. Прокопьев В.П., Нустров В.С., Гасилов Г.Л. Механика сплошной среды в примерах и задачах. Учебное пособие. Свердловск: Изд-во Уральского гос. ун-та, 1979. – 108 с.
11. Губайдуллин А.А. Введение в механику сплошной среды: учебное пособие. Тюмень: ТюмГУ, 2020. - 207 с.
12. Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды: Учебник для вузов. – М.: Наука, 2000. – 214 с.
13. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 352 с.
14. Коренев Г.В. Тензорное исчисление: Учебное пособие: Для вузов. – М.: Изд-во МФТИ, 2000. – 240 с.
15. Денисова И.П. Введение в тензорное исчисление и его приложения. Учебное пособие. – 2-е изд., стер. – М.: Издательство УНЦ ДО, 2004. – 230 с.