§4. ПРИЗНАК ЛИНЕЙНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Любой оператор, действующий в пространстве $\mathbf{X}_n$, имеет не более чем n различных собственных чисел.

<u>Теорема.</u> Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ \ldots, \lambda_p$ — попарно различные собственные числа оператора

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n.$$

Пусть $x^1, x^2, \ \ldots, x^p$ — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, причем

$$\mathcal{A}x^k = \lambda_k x^k, \quad k = \ 1, \ 2, \ \ \ldots, \ p.$$

Тогда векторы $x^1, x^2, \ \ldots, x^p$ линейно независимы.

.

Доказательство. Предположим противное. Тогда в множестве векторов

$$x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^p$$

можно указать максимальную линейно независимую подсистему. Не ограничивая общности рассуждений можно считать, что это — векторы

$$x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^r, \quad r < p.$$

Обозначим через L_r подпространство пространства $\mathbf{X}_n$, натянутое на линейно независимые собственные векторы

$$x^1, \; x^2, \; \ldots, \; x^r.$$

Оно имеет размерность r и инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, т. к. любое собственное подпространство оператора является его инвариантным подпространством.

Пусть

$$\mathcal{A}_{L_r} : L_r \to L_r$$

есть сужение оператора $\mathcal{A}$ на L_r. Тогда числа

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots, \ \lambda_r$$

есть собственные числа оператора $\mathcal{A}_{L_r}$. Все они различны.

.

Ненулевой вектор x^{r+1} линейно зависит от

$$x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^r$$

поэтому принадлежит L_r и

$$\mathcal{A}_{L_r} x^{r+1} = \mathcal{A} x^{r+1} = \lambda_{r+1} x^{r+1},$$

т. е. λ_{r+1} — собственное число оператора $\mathcal{A}_{L_r}$, но оператор

$$\mathcal{A}_{L_r} : L_r \to L_r$$

действует в пространстве размерности r и потому не может иметь больше чем r различных собственных чисел. $\square$

Если все собственные числа оператора

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$$

различны, то соответствующие им собственные векторы

$$x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$$

линейно независимы и образуют <u>базис пространства</u> $\mathbf{X}_n$.

.

По построению

$$\mathcal{A}x^k = \lambda_k x^k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

значит, матрица оператора $\mathcal{A}$ с различными собственными числами

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$$

в базисе $\{x^k\}_{k=1}^n$ имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Пример. Найдем все собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, получим

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0.$$

Очевидно,

$$\lambda = 1$$

есть корень уравнения

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0.$$

Нетрудно проверить, что

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13).$$

.

Корни уравнения

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

есть

$$\lambda = 2 \pm 3i.$$

Таким образом,

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 + 3i, \quad \lambda_3 = 2 - 3i$$

есть собственные числа матрицы A.

.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Значит координаты собственного вектора, отвечающего

$$\lambda_1 = 1,$$

есть решение однородной системы уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0, \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 &= 0, \\ -4x_1 \qquad\quad + 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

.

Определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому ранг матрицы системы уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0, \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 &= 0, \\ -4x_1 \qquad\quad + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

равен двум и, следовательно, эта система уравнений может иметь лишь одно линейно независимое решение.

.

Положим

$$x_3 = 1$$

и найдем x_1, x_2, решая систему уравнений

$$3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0,$$

$$x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 0.$$

Получим

$$3x_1 - 5x_2 = -7,$$

$$x_1 - 5x_2 = -9,$$

следовательно,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

Таким образом, вектор

$$(1, 2, 1)$$

есть решение системы уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0, \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 &= 0, \\ -4x_1 \qquad\quad + 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу $\lambda_1 = 1$, есть множество векторов вида

$$c(1, 2, 1),$$

где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Значит координаты собственного вектора, отвечающего

$$\lambda_2 = 2+3i,$$

есть решение однородной системы уравнений

$$(2-3i)x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0,$$

$$x_1 - (6+3i)x_2 + 9x_3 = 0,$$

$$-4x_1 + (3-3i)x_3 = 0.$$

.

Определитель

$$\begin{vmatrix} 2-3i & -5 \\ 1 & -(6+3i) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому координаты собственного вектора найдем, решая систему уравнений

$$(2-3i)x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0,$$
$$x_1 - (6+3i)x_2 + 9x_3 = 0$$

при

$$x_3 = 1.$$

Получим

$$x_1 = (3-3i)/4, \quad x_2 = (5-3i)/4.$$

Таким образом, множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу

$$\lambda_2 = 2 + 3i,$$

есть множество векторов вида

$$c(3 - 3i, 5 - 3i, 4),$$

где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

Совершенно аналогичные вычисления показывают, что множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу

$$\lambda_3 = 2 - 3i,$$

есть множество векторов вида

$$c(3 + 5i, 5 + 3i, 4),$$

где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

В рассматриваемом примере все собственные числа различны. Соответствующие им собственные векторы образуют базис пространства $\mathbb{C}^3$. Это видно и из того, что определитель составленный из их координат, не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3-3i & 5-3i & 4 \\ 3+5i & 5+3i & 4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В случае, когда характеристический полином имеет кратные корни, соответствующих им линейно независимых векторов может оказаться меньше, чем n, и они не будут базисом пространства $\mathbf{X}_n$.

.

<u>Пример.</u> Найдем все собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение есть

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

Система уравнений для отыскания координат собственного вектора имеет, следовательно, вид

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0,$$
$$5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0,$$
$$-x_1 \qquad\qquad - x_3 = 0.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому ранг матрицы этой системы равен двум, и линейное пространство решений системы одномерно.

.

Нетрудно видеть, что вектор

$$x = (1, 1, -1)$$

есть решение системы

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0, \\ -x_1 \qquad\quad - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, множество всех собственных векторов матрицы — это множество векторов вида

$$c(1, 1, -1),$$

где c — произвольное не равное нулю число.

Понятно, что собственные векторы матрицы в рассматриваемом случае не образуют базиса в пространстве $\mathbb{C}^3$.

```
A =
     4    -5     7
     1    -4     9
    -4     0     5
```

Характеристический полином

```
B =
 [  4-lambda,        -5,          7]
[         1, -4-lambda,         9] =
[        -4,          0,  5-lambda]
                                           2              3
 = 13 - 17 lambda + 5 lambda  - lambda
```

Собственные числа

```
lambda =
      1
 2+3*i
 2-3*i
```

Собственные числа, вычесленные с помощью eigs

```
ans =
   2.0000 - 3.0000i
   2.0000 + 3.0000i
   1.0000
```

Матрица однородной системы, которой удовлетворяет x1

```
B1 =
[  3, -5,  7]
[  1, -5,  9]
[ -4,  0,  4]
```

ФСР однородной системы

```
x1 =
 1
 2
 1
```

Собственное подпространство, отвечающее lamda_1

```
ans =
   c
 2*c
   c
```

Матрица однородной системы, которой удовлетворяет x2

```
B2 =
[  2-3*i,     -5,       7]
[      1, -6-3*i,       9]
[     -4,      0,  3-3*i]
```

ФСР однородной системы
x2 =
 (3/4)-(3/4)*i
 (5/4)-(3/4)*i
 1

Собственное подпространство, отвечающее lamda_2
ans =
 (3-3*i)*c
 (5-3*i)*c
 4*c

Матрица однородной системы, которой удовлетворяет x3
B3 =
[2+3*i,   -5,   7]
[1, -6+3*i,   9]
[-4,   0, 3+3*i]

ФСР однородной системы
x3 =
 (3/4)+(3/4)*i
 (5/4)+(3/4)*i
 1

Собственное подпространство, отвечающее lamda_3
ans =
 (3+3*i)*c
 (5+3*i)*c
 4*c

Матрица, составленная из собственных векторов и ее определитель
C =
[1,   2,   1]
[3-3*i, 5-3*i,   4]
[3+3*i, 5+3*i,   4]

ans =
12*i

>>

```
close all
clear all
clc
A=[4 -5 7; 1 -4 9; -4 0 5]
disp('Характеристический полином')
syms lambda
D=diag([lambda lambda lambda]);
B=A-D
p=det(B);
pretty(p)
disp('Собственные числа')
lambda=solve(p,lambda)
disp('Собственные числа, вычисленные с помощью eigs')
eigs(A)
disp('Матрица однородной системы, которой удовлетворяет x1')
B1=subs(B,'lambda',lambda(1))
disp('ФСР однородной системы')
syms x1 c
x1 = sym(null(double(B1),'r'))
disp('Собственное подпространство, отвечающее lamda_1')
c*x1
disp('Матрица однородной системы, которой удовлетворяет x2')
B2=subs(B,'lambda',lambda(2))
disp('ФСР однородной системы')
syms x2
x2 = sym(null(double(B2),'r'))
disp('Собственное подпространство, отвечающее lamda_2')
c*x2*4
disp('Матрица однородной системы, которой удовлетворяет x3')
B3=subs(B,'lambda',lambda(3))
disp('ФСР однородной системы')
syms x3
x3 = sym(null(double(B3),'r'))
disp('Собственное подпространство, отвечающее lamda_3')
c*x3*4
disp('Матрица, составленная из собственных векторов и ее
определитель')
C=[x1 x2*4 x3*4].'
det(C)
```

```
A =
     2    -1     2
     5    -3     3
    -1     0    -2

Характеристический полином
B =
[  2-lambda,        -1,         2]
[         5, -3-lambda,         3]=
[        -1,         0, -2-lambda]
                                              2              3
= 1 + 3 lambda + 3 lambda  + lambda

Собственные числа
lambda =
 -1
 -1
 -1

Собственные числа, вычисленные с помощью eigs
ans =
  -1.0000 - 0.0000i
  -1.0000 + 0.0000i
  -1.0000

Матрица однородной системы, которой удовлетворяет x1
B1 =
[  3, -1,  2]
[  5, -2,  3]
[ -1,  0, -1]

ФСР однородной системы
x1 =
  1
  1
 -1

Собственное подпространство, отвечающее lamda_1
ans =
  c
  c
 -c


>>
```

```
close all
clear all
clc
A=[2 -1 2; 5 -3 3; -1 0 -2]
disp('Характеристический полином')
syms lambda
D=diag([lambda lambda lambda]);
B=A-D
p=det(B);
pretty(-p)
disp('Собственные числа')
lambda=solve(p,lambda)
disp('Собственные числа, вычисленные с помощью eigs')
eigs(A)
disp('Матрица однородной системы, которой удовлетворяет x1')
B1=subs(B,'lambda',lambda(1))
disp('ФСР однородной системы')
syms x1 c
x1 = -sym(null(double(B1),'r'))
disp('Собственное подпространство, отвечающее lamda_1')
c*x1
```