что замкнутые множества $F_k(r)$ *при достаточно малом* r *содержат шары и содержатся в шарах вида* $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_k| \le \mu_k r(1+O(r^{n-1}))$, $\delta_k(r)=\delta_k+\alpha_k r^{n-2}+o(r^{n-2})$, $r\to 0$, *где* $\delta_k\neq 0, \alpha_k$ *– вещественные числа,* $\mu_k>0$, $k=1,\dots,m$. *Тогда для емкости конденсатора* $C(r)=(\{\Gamma,F_1(r),\dots,F_m(r)\},\{0,\delta_1(r),\dots,\delta_m(r)\},B)$ *при* $r\to 0$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\frac{cap\, C(r)}{(n-2)\omega_{n-1}}=\left(\sum_{k=1}^{m}\delta_k^2\mu_k^{n-2}\right)r^{n-2}-Mr^{2n-4}+o(r^{2n-4}),$$

где $M=-\sum\limits_{k=1}^{m}(\delta_k^2\mu_k^{2n-4}R_k^{2-n}+2\alpha_k\delta_k\mu_k^{n-2})+\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{m}\delta_k\delta_l\mu_k^{n-2}\mu_l^{n-2}(n-2)\omega_{n-1}g_B(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_l,\Gamma)$.

Заметим, что при $\Gamma=\partial B$ и постоянных уровнях потенциала δ_k соответствующая асимптотика была получена в работе [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2023-946 от 16 февраля 2023 года.

Литература

1. Дубинин В.Н. Асимптотика емкости конденсатора с переменными уровнями потенциала // Сиб. матем. журн. – 2020. – Т. 61. – № 4. – С. 796–802.

2. Дубинин В.Н., Прилепкина Е.Г. Об экстремальном разбиении пространственных областей // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 1998. – Т. 254. – С. 95–107.

ASYMPTOTICS OF A SPATIAL CONDENSER MODULE WITH VARIABLE POTENTIAL LEVELS

A. S. Afanaseva-Grigorieva

The study of the asymptotics of condenser module with two plates goes back to the classical works of Gretsch and Teichmuller. The case of the condenser with three or more plates with variable potential levels has been studied in recent works by V.N. Dubinin. In this paper, the capacity of a spatial condenser with variable potential levels is studied. The second term of the capacity asymptotics is established when the plates are pulled into points.

Keywords: condenser, Robin function, Green function, module.

UDC 517.98

COMMUTATORS AND HYPONORMAL OPERATORS

M. Akhmadiev[1], H. Alhasan[2], A. Bikchentaev[3], P. Ivanshin[4]

1 *mg.akhmadie@mail.ru*; Department of Mathematics, Kazan National Research Technological University, 420015, Kazan, Russia.
2 *hassanmalhassan@gmail.com*; Department of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, 420008, Kazan, Russia.
3 *airat.bikchentaev@kpfu.ru*; Department of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, 420008, Kazan, Russia.
4 *pivanshi@yandex.ru*; Department of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, 420008, Kazan, Russia.

Let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space over the field $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ be the $*$-algebra of all linear bounded operators on $\mathcal{H}$, let $|X| = \sqrt{X^*X}$ for $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. An operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ is a commutator if $A = [S, T] = ST - TS$ for some $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Let $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ and $X \geq 0$. If the operator XY is a non-commutator, then $X^p Y X^{1-p}$ is a non-commutator for every $0 < p < 1$. Let $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ be p-hyponormal for some $0 < p \leq 1$. If $|A^*|^r$ is a non-commutator for some $r > 0$ then $|A|^q$ is a non-commutator for every $q > 0$.

Keywords: Hilbert space; linear operator; commutator; hyponormal operator; trace.

Let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space over the field $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ be the $*$-algebra of all linear bounded operators on $\mathcal{H}$. For a C^*-subalgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ put

$$\mathcal{A}_0 = \{X \in \mathcal{A} : X = \sum_{n\geq 1} [X_n, X_n^*] \text{ for } (X_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}, \text{ the series } \|\cdot\|\text{−converges}\}.$$

It is known that $\mathcal{A}_0$ coincides with the zero-space of all finite traces on $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$. For a wide class of C^*-algebras that contains all von Neumann algebras we can consider only finite sums of the indicated form. Elements of unital C^*-algebras without tracial states can be represented as finite sums of commutators. Our work continues article [3] that possesses the following results: Let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space, $\dim \mathcal{H} = +\infty$. 1) Let a Hermitian operator $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ be a non-commutator and $\sigma(X)$ be the spectrum of X. Then $f(X)$ is a non-commutator for every continuous function $f : \sigma(X) \to \mathbb{R}$ with $f(x) \neq 0$. 2) Let $X = U|X|$ be the polar decomposition of an operator $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Then the following conditions are equivalent: (i) X is a non-commutator; (ii) U and $|X|$ are non-commutators. 3) For a Hermitian operator $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ the following conditions are equivalent: (i) X is a commutator; (ii) the Cayley transform $\mathcal{K}(X)$ is a commutator. 4) Let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space and $\dim \mathcal{H} \leq +\infty$, $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ and $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $P = P^2$. If $AB = \lambda BA$ for some $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ then the operator AB is a commutator. The operator AP is a commutator if and only if PA is a commutator. Our results here concern the facts stated above. Let $\dim \mathcal{H} = +\infty$. The algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ is known to possess a proper uniformly closed ideal $\mathcal{J}$ that contains all other proper uniformly closed ideals of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Let $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ and $X \geq 0$. If the operator XY is a non-commutator, then $A = X^p Y X^{1-p}$ is a non-commutator for every $0 < p < 1$. Differences of idempotents in C^*-algebras are naturally related to the quantum Hall effect [1], [2]. Let $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ be idempotents, $P^\perp = I - P$. Then $P - Q$ is a non-commutator if and only if exactly one of the following conditions holds: (i) $Q, P^\perp \in \mathcal{J}$; (ii) $P, Q^\perp \in \mathcal{J}$. Let $A = A_+ - A_-$ be the Jordan decomposition of a Hermitian operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Then A is a non-commutator if and only if exactly one of A_+ or A_- is a non-commutator. Let $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ be p-hyponormal for some $0 < p \leq 1$. If $|A^*|^r$ is a non-commutator for some $r > 0$ then $|A|^q$ is a non-commutator for every $q > 0$. Let $\mathcal{H}$ be separable and $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ be a non-commutator. If A is hyponormal (or cohyponormal) then A is normal. We also present results in the setting of $\dim \mathcal{H} < +\infty$. For instance, for any unitary matrix $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ there exists $\varphi \in [-\pi, \pi]$ such that the inverse Cayley transform of $e^{i\varphi}U$ possesses zero trace.

References

1. Bikchentaev A.M. Differences of idempotents in C^*-algebras // Sib. Math. J. – 2017. – V. 58. – № 2. – P. 183–189.

2. Bikchentaev A.M. Differences of idempotents in C^*-algebras and the quantum Hall effect // Theoret. and Math. Phys. – 2018. – V. 195. – № 1. – P. 557–562.

3. Bikchentaev A.M. Commutators in C^*-algebras and traces // Annals Funct. Anal. – 2023. – V. 14. – № 2. – Article 42, 14 p.

КОММУТАТОРЫ И ГИПОНОРМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

М. Г. Ахмадиев, Х. Алхасан, А. М. Бикчентаев, П. Н. Иваньшин

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – $*$-алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, пусть $|X| = \sqrt{X^*X}$ для $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ является коммутатором, если $A = [S,T] = ST - TS$ для некоторых $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Пусть $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $X \geq 0$. Если оператор XY не коммутатор, то X^pYX^{1-p} не коммутатор для любого $0 < p < 1$. Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ p-гипонормален для некоторого $0 < p \leq 1$. Если $|A^*|^r$ — некоммутатор для некоторого $r > 0$, то $|A|^q$ — некоммутатор для каждого $q > 0$.

Ключевые слова: гильбертово пространство; линейный оператор; коммутатор; гипонормальный оператор; след.

УДК 517.977.55

ВНУТРЕННОСТЬ ИНТЕГРАЛА ОТ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

М. В. Балашов[1]

1 *balashov73@mail.ru*; Институт им. В.А. Трапезникова проблем управления РАН.

Исследуется зависимость радиуса шара с центром в нуле, вписанного в значения интеграла от многозначного отображения, от верхнего предела интегрирования. Для некоторых типов многозначных отображений найдены точные асимптотики радиуса по верхнему пределу, когда верхний предел стремится к нулю. Рассмотрены приложения в некоторых задачах со множеством достижимости линейной управляемой системы.

Ключевые слова: многозначное отображение, интеграл Аумана, линейная задача быстродействия.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое компактное множество, $0 \in U$, $F(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица с гладкими компонентами, $B_r(x)$ — замкнутый евклидов шар с центром $x \in \mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$. Рассмотрим интеграл от многозначного отображения $F(s)U$

$$\mathcal{F}(t) = \int_0^t F(s)U\,ds. \tag{1}$$

Многозначный интеграл мы будем понимать в смысле интеграла Аумана [1]

$$\int\limits_0^t F(s)U\,ds = \left\{ \int\limits_0^t F(s)u(s)\,ds \;:\; u(s) \in U - \text{измеримый селектор} \right\}.$$

По теореме Ляпунова о векторной мере значение интеграла (1) есть выпуклое и замкнутое множество [2]. Теорию интегралов от многозначных отображений можно найти в монографии [3], см. также цитированную в монографии литературу.