Об одном уравнении с ядром Т. Карлемана и его приложении в проблеме моментов

1 Разностное (функциональное) уравнение

Рассмотрим единичный квадрат

$$R := \{z \in \mathbb{C} : -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{1}{2}\}.$$

Пусть, кроме того, $I = (-\frac{1}{2}, 0), l_1 = -\frac{i}{2} + I,\ l_{k+1} = i^k l_1, k = 1, 2, 3,$ $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{4} l_k$. Основная цель данной работы – исследовать девятиэлементное разностное (функциональное) уравнение

$$\mathfrak{V} f(z) := f(z) + \sum_{j=1}^{8} f(\sigma_j(z)) = g(z), z \in R. \tag{1}$$

Пусть выполнены следующие предположения:

1. функция $g(z)$ голоморфна в R, $g^+ \in H_\mu(\partial R), \mu \in (0, 1]$;
2. функции σ_j – это преобразования (сдвиги) из соответствующей двякопериодической группы с периодами 1 и i, отличные от тождественного преобразования и такие что $\overline{R} \cap \sigma_j(\overline{R}) \neq \emptyset$.
3. функция $f(z)$ голоморфна в $D := \mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma}$, исчезает на бесконечности и имеет граничные значения $f^\pm(t)$ на Γ, удовлетворяющие условию Гельдера.

Ясно, что $\mathfrak{V}$ - линейный разностный оператор с постоянными коэффициентами, коммутирующий с дифференцированием. Тем не менее, к нему неприменимы обычные методы исследования. Это связано с тем, что множество голоморфности этого оператора распадается на 2 связные компоненты - квадрат R и его внешность. Другими словами, соотношение (1), вообще говоря, не выполняется на множестве, содержащем R. Это же справедливо и для однородного уравнения

$$\mathfrak{V}f(z) = 0. \tag{2}$$

Очевидно, что уравнению (2) удовлетворяет и любая производная, причем система $\{f^{(j)}(z)\}, j = 0, 1, \dots, n$, линейно независима. Для гарантии конечности числа решений дополнительно потребуем, чтобы граничные значения $f^{\pm}(t)$ имели в концах Γ, самое большее, логарифмические особенности. Такой класс решений обозначим через B. Впервые подобный подход и его приложения к проблеме моментов были предложены в работах [2] и [3].

2 Интегральное уравнение

Будем искать решение уравнения (1) в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z}, z \notin \Gamma, \tag{3}$$

с неизвестной гельдеровской плотностью. Тогда из (1) получаем

$$\mathfrak{A}\varphi(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}A(z,\tau)\varphi(\tau)d\tau = g(z), z \in R,$$

где

$$A(z,\tau) := \frac{1}{\tau - z} + \sum_{j=1}^{8}\frac{1}{\tau - \sigma_j(z)}. \tag{4}$$

Ядро (4) называется ядром Т.Карлемана для двоякопериодической группы. Впервые интегральные операторы с ядрами подобной структуры предложил использовать Т.Карлеман на международном математическом конгрессе в Цюрихе в 1932 году для регуляризации частного случая задачи, носящей его имя (т.н. "задача о скачке", [4]). Однако исследование полученного уравнения Фредгольма Т.Карлеман не провел даже в предложенном им самим случае, когда R - фундаментальный многоугольник фуксовой группы. В дальнейшем целый ряд исследователей с большим или меньшим успехом попытались ликвидировать этот пробел (см., например, [5]-[7]). Ценность идеи Т.Карлемана состояла в том, что в его ядре, в отличии от квазиавтоморфного аналога ядра Коши, содержалось лишь конечное число слагаемых. Не вдаваясь в подробности большого числа исследований по этой тематике, подчеркнем три обстоятельства:

1). Задача Карлемана в случае, когда R - фундаментальный многоугольник фуксовой группы, полностью исследована другим методом - сведением к задаче Римана на римановой поверхности ([6], [8]).

2). В данной статье вместо границы параллелограмма периодов рассматривается лишь его "половина"Γ, т.е. интеграл типа Коши (3) является голоморфной, а не кусочно-голоморфной функцией.

3). Впервые классическое ядро Т.Карлемана используется не для исследования краевых задач со сдвигом, а для получения результатов в теории целых функций экспоненциального типа.

Заметим, что в работе [3] использовались ядра, содержащие меньшее число слагаемых, чем ядро (4). В частности, они не содержали в качестве одного из слагаемых ядра Коши.

Теперь вернемся к исследованию уравнения (1). Возьмем точку $t \in \Gamma$ и пусть $z \to t$ из R. Тогда, с учетом формулы Ю.В.Сохоцкого -Племеля имеем: из (1)

$$\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} A(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = g^{+}(t), t \in \Gamma. \tag{5}$$

Пусть теперь $z \to \alpha(t) \in \partial R \setminus \overline{\Gamma}$. Здесь $\alpha(t) = \{t + i^{k}, t \in l_k\}$ – сдвиг Карлемана, изменяющий ориентацию ∂R и удовлетворяющий условию $\alpha(\alpha(t)) = t$. Он индуцирован порождающими преобразованиями соответствующей двоякопериодической группы и обратными к ним. Поэтому мы получаем

$$-\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} A(\alpha(t),\tau)\varphi(\tau)d\tau = g^{+}(\alpha(t)), t \in \Gamma. \tag{6}$$

Вычитая из равенства (5) равенство (6) получаем интегральное уравнение

$$\mathfrak{K}\varphi(t) := \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = g^{+}(t) - g^{+}(\alpha(t)), t \in \Gamma, \tag{7}$$

с ядром

$$K(t,\tau) := A(t,\tau) - A(\alpha(t),\tau) \tag{8}$$

Уравнение (7) является уравнением Фредгольма 2-го рода, т.к. ядро (8) ограничено (конкретные оценки см. ниже в доказательстве леммы 1). Рассмотрим вначале соответствующее однородное уравнение

$$\mathfrak{K}\varphi = 0. \tag{9}$$

Лемма 1 *Фундаментальная система решений (ф.с.р.) уравнения (9) содержит не более одной функции.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда ф.с.р. содержит функцию φ со свойством

$$\int_\Gamma \varphi(\tau)d\tau = 0. \tag{10}$$

Считаем оператор $\mathfrak{K}$ определенным на банаховом пространстве $C(\overline{\Gamma})$ с нормой $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(t)| : t \in \overline{\Gamma}\}$. Без ограничения общности можно считать, что этот максимум достигается на l_1. Положим $u = \tau - t$. Тогда

$$K(t,\tau) = \frac{1}{u+i} + \frac{1}{u+1+i} + \frac{1}{u-1+i} + \frac{1}{u-2i} + \frac{1}{u+1-2i} + \frac{1}{u-1-2i}.$$

В силу условия (10) вместо ядра (8) можно рассматривать "подправленное" ядро $K_1(t,\tau) = K(t,\tau) - K(t,0)$. Оценим сверху величины

$$b_j(t) = \left|\int_{l_j} K_1(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau\right|.$$

Ясно, что

$$K_1(t,\tau)\tau^{-1} = \frac{1}{(u+i)(t-i)} + \frac{1}{(u++1+i)(t-1-i)} + \frac{1}{(u-1+i)(t+1-i)}$$

$$-\frac{1}{(u-2i)(t+2i)} - \frac{1}{(u-1-2i)(t+1+2i)} - \frac{1}{(u+1-2i)(t-1+2i)},$$

причем $|\tau| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$. Непосредственная оценка каждого из 6 слагаемых из простых геометрических соображений дает $|K_1(t,\tau)| < 3$. Отсюда $b_j(t) \le 1.5\|\varphi\|, j = 1,2,3,4$. Поскольку $6 < 2\pi$, то отсюда $\|\varphi\| = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 2 *Фундаментальная система решений уравнения (9) содержит единственную функцию φ_0, удовлетворяющую условиям*

$$\int_\Gamma \varphi_0(\tau)d\tau = 1, \varphi_0(i\tau) = -i\varphi_0(\tau). \tag{11}$$

Фундаментальная система решений союзного уравнения

$$\mathfrak{K}'\varphi = 0 \tag{12}$$

состоит только из постоянной. Неоднородное уравнение (7) безусловно разрешимо.

Доказательство. Ядро (4) кососимметрично, т.е.

$$\mathfrak{K}'\psi = \psi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (A(t,\tau) - A(t,\alpha(\tau)))\psi(\tau)d\tau = 0.$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (A(t,\tau) - A(t,\alpha(\tau)))d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (A(t,\tau)d\tau = 1,$$

откуда следует второе утверждение леммы, то есть ф.с.р. однородного уравнения (9) содержит единственную функцию φ_0. Заменим в соотношении (9) τ и t на $-\tau$ и $-t$ соответственно. Тогда функция $\varphi_0(-t)$ также удовлетворяет (3)ю Значит, функция $\varphi_0(t)$ либо четна, либо нечетна. Но первое невозможно, поскольку из четности следует (10) и в силу леммы 1 получаем $\varphi_0(t) \equiv 0$. Поскольку $\varphi_0(it)$ также удовлетворяет (3), то нечетная функция $\varphi_0(t)$ удовлетворяет второму из условий (11). Разрешимость неоднородного уравнения (7) следует из альтернатив Фредгольма, так как

$$\int_\Gamma (g^+(t) - g^+(\alpha(t)))dt = \int_{\partial R} g^+(t)dt = 0,$$

что и завершает доказательство леммы.

Получим дополнительную информацию о свойствах φ_0. Поскольку $\mathfrak{K}\varphi_0 = 0$, то $(\mathfrak{A}\varphi_0)^+(t) = (\mathfrak{A}\varphi_0)^+(\alpha(t))$, что в силу теории краевой задачи Карлемана со сдвигом α для прямоугольника [9] имеем $\mathfrak{A}\varphi_0 = c$, а в силу нечетности φ_0 эта постоянная есть нуль.

Покажем теперь, что функция φ_0 не может обращаться в нуль во всех концах (узлах)Г. Другими словами, единственное нетривиальное решение однородного уравнения (2)

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi_0(\tau) d\tau}{\tau - z} \tag{13}$$

хотя бы на одном конце Г имеет логарифмическую особенность. Предположим противное. В силу свойств ядра (8) решение $\varphi_0 \in C^\infty(\overline{\Gamma})$. Возьмем уравнение $\mathfrak{A}\varphi_0(z) = 0$ и продифференцируем его. Затем воспользуемся тем свойством ядра (4), что $\partial A \backslash \partial z = -\partial A \backslash \partial \tau$ и проинтегрируем по частям, т.е. $\mathfrak{A}\varphi_0'(z) = 0 \Rightarrow \mathfrak{T}\varphi_0'(t) = 0$. Функция $\varphi_0'(t)$ четна и по лемме 1 имеем $\varphi_0'(t) \equiv 0$. Итак, функция $\varphi_0'(t)$ может быть лишь кусочно постоянной, а это противоречит нашему предположению.

Осуществим теперь обратный переход от неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода (7) к исходному разностному уравнению (1). Заметим, что безусловная разрешимость уравнения (7) вовсе не означает безусловной разрешимости уравнения (1). Действительно, (7)$\Leftrightarrow \mathfrak{A}^+(t) - \mathfrak{A}^+(\alpha(t)) = g^+(t) - g^+(\alpha(t)) \Rightarrow \mathfrak{A}^+(t) = g^+(t) + C$. Осталось выяснить, когда С=0. Для этого равенство

$$\frac{\varphi(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma A(t,\tau)\varphi(\tau) d\tau = g^+(t) + C$$

умножим на $\varphi_0(t)$ и проинтегрируем по Г, воспользовавшись кососимметричностью ядра. В результате получим

$$C = \int_\Gamma \varphi_0(t)\varphi(t) dt - \int_\Gamma \varphi_0(t) g^+(t) dt$$

Теорема 1 *Однородное функциональное уравнение* $\mathfrak{V}f = 0$ *имеет в класс B единственное нетривиальное решение (13). Неоднородное уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда*

$$\int_\Gamma \varphi_0(t) g^+(t) dt = \int_\Gamma \varphi_0(t)\varphi(t) dt. \tag{14}$$

Здесь φ_0 *есть функция из леммы 2, а* φ_0 *– решение неоднородного уравнения Фредгольма (7).*

Замечание 1 *При нечетном свободном члене уравнение (1) всегда разрешимо, поскольку условие разрешимости (14) выполняется автоматически (интеграл по* Γ *от нечетной функции равен нулю).*

Замечание 2 *Разностное уравнение* $(\mathfrak{V}f)(z) = 1, z \in R$, *неразрешимо в классе* B. *По заданной функции* $g(z)$ *всегда можно подобрать постоянную* c *такую что уравнение* $(\mathfrak{V}f)(z) = g(z) + c, z \in R$, *будет разрешимо в этом классе.*

3 Неклассическая проблема моментов

Рассмотрим приложение полученных результатов в проблеме моментов для целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.). Функция $f(z) \in B$ является нижней функцией, ассоциированной по Борелю с ц.ф.э.т. $F(z)$ (верхней функцией), см. [10] , гл. 1, параграф 1. Введем прежде всего ц.ф.э.т.

$$F_0(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi_0(\tau)\exp(\tau z)d\tau, F_0(iz) = F_0(z), \tag{15}$$

сопряженную по Борелю с нижней функцией (13). Ее индикаторной диаграммой (совпадающей с сопряженной индикаторной диаграммой) будет квадрат R.

Замечание 3 *Выясним, когда нижняя функция* $f \in B$ *имеет своей сопряженной индикаторной диаграммой некоторое "меньшее"выпуклое множество* $R_1 \subset R$. *Тогда функция аналитически продолжима из* R *в некоторую окрестность бесконечно удаленной точки и* $g(\infty) = 0$, *то есть она сама является нижней функцией. При сделанных предположениях разностное уравнение (1) выполняется и в окрестности бесконечно удаленной точки. Применяя преобразование Бореля, получим* $F(\lambda)H(\lambda) = G(\lambda)$, *где* $G(\lambda)$ *– верхняя функция, ассоциированная по Борелю с* g, *а* $H(\lambda) = 1 + \sum_{j=0}^{8}\exp(-\lambda\sigma_j(0))$ *– характеристический квазиполином. Частное* $G(\lambda)/H(\lambda)$ *должно быть целой функцией, и ее нижняя функция* $f(z)$ *принадлежит классу* B. *Этот случай не очень интересен, поскольку речь идет о "переопределенной"классической постановке. Ясно, что для функции (13) вышеизложенное не выполняется, поскольку в противном случае* $G \equiv 0$ *и* $f_0 \equiv 0$, *что приводит к противоречию.*

Итак, ц.ф.э.т. (15) имеет кусочно-тригонометрический индикатор

$$h_0(\theta) = \frac{1}{2}(\cos\theta + \sin\theta), \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], h_0(\theta + \frac{\pi}{2} = h_0(\theta),$$

и тип $\sigma_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Теорема 2 *Ц.ф.э.т. (15) имеет вполне регулярный рост (в.р.р.).*

Доказательство. Дважды проинтегрируем по частям интеграл (15); получим

$$-2\pi i F_0(z) = z^{-1}\exp(z\tau)\varphi_0(\tau)|_\Gamma - z^{-2}\exp(z\tau)\varphi_0'(\tau)|_\Gamma + z^{-2}\int_\Gamma \exp(z\tau)\varphi_0''(\tau)d\tau. \tag{16}$$

Возьмем лучи $\arg z = \frac{\pi}{4}(2k-1), k = 1, 2, 3, 4,$ – направления наибольшего роста, на которых значения индикатора равны типу. Поскольку

$$\int_\Gamma |\varphi_0^{(k)}(\tau)||d\tau| < \infty$$

для любого k, то при $\varphi_0(t_1) \neq 0$ (здесь t_1 -вершина квадрата) асимптотическое поведение ц.ф.э.т. (15) на направлениях наибольшего роста полностью определяется первым приращением в правой части (16), то есть она имеет в.р.р. на этих лучах. Пусть $\varphi_0(t_1) = 0$. Еще раз возьмем интеграл в правой части (16) по частям. Совершенно аналогично получим, что функция (15) может не иметь в.р.р. на этих лучах только в случае $\varphi_0'(t_1) = 0$. Продолжая это рассуждение, получаем, что если в.р.р. не имеет места на этих лучах, то $\varphi_0^{(k)}(t_1) = 0, k = 1, 2, \ldots$. Тогда в силу определения функции $\varphi_0(t)$ и структуры ядра (8) выпонены условия теоремы Принсгейма ([11], стр. 102), то есть в некоторой окрестности вершин квадрата $t_k, k = 1, 2, 3, 4$, получим $\varphi_0 \equiv 0$. Но тогда $F_0 \equiv 0$ (см. замечание 3). Осталось заключить, что функция (15) имеет в.р.р. на направлениях наибольшего роста. Тогда она имеет в.р.р. внутри каждой из координатных четвертей, где у нее тригонометрический индикатор ([12]б стр. 186), что завершает доказательство.

Следствие 1 *Множество корней ц.ф.э.т. (15) имеет нулевую плотность внутри каждой из координатных четвертей (см. [12], стр. 202).*

Пусть $g(iz) = -ig(z)$. Тогда $f(iz) = -if(z)$. Перепишем уравнение (1) в виде $f(z) = g(z) - f(z+1) - f(z+1-i) - f(z+1+i) + f(1-z) + f(1+$

$i-z)+f(1-i-z)+if(1-iz)-f(1+iz)$, $z\in R$. Тогда

$$f(z)=g(z)+2\int\limits_0^\infty F(x)e^{-x}((1+2\cos x)\operatorname{sh}xz-\sin xz)dx,$$

и отсюда

$$f^{(4n+3)}(0)=g^{(4n+3)}(0)+4\int\limits_0^\infty F(x)x^{4n+3}e^{-x}(1+\cos x)dx. \qquad (17)$$

Замечание 4 *Тем же самым приемом, что в [13] (стр. 115) можно показать, что*

$$\int\limits_0^\infty F(x)x^{4n+1}e^{-x}\cos xdx=0, k=0,1,2,\dots.$$

См. по этому поводу также [3].

Равенства (17) можно рассматривать как интерполяционную задачу, связывающую коэффициенты Маклорена нижней функции и моменты Стильтьеса верхней функции относительно веса $(1+\cos x)\exp(-x)$.

Пусть ищется функция $f\in B$ такая что

$$f(z)=\sum_{n=0}^\infty f_n z^{4n+3}$$

в окрестности нуля и

$$\frac{4}{(4n+3)!}\int\limits_0^\infty F(x)e^{-x}(1+\cos x)x^{4n+3}dx-f_n=g_n, n=1,2,3,\dots, \qquad (18)$$

где g_n – заданные числа, а $F(z)$ – преобразование Бореля функции f.

Теорема 3 *Если $g_n\equiv 0$, то задача (18) имеет единственное нетривиальное решение. Если функция*

$$g(z)=\sum_{n=0}^\infty \frac{g_n z^{4n+6}}{(4n+6)!}$$

голоморфна в квадрате R и непрерывна в его замыкании (например, если радиус сходимости этого ряда больше $\frac{\sqrt{2}}{2}$), то задача (18) безусловно разрешима.

В заключение отметим, что для функции $f \in B$ интеграл $\int_{\partial R} |f^{-}(t)|^2 |dt|$ сходится. В силу обобщения известной теоремы Пэли - Винера ([12], стр. 502-503) справедливо представление

$$f(z) = \sum_{j=1}^{4} \exp{(t_j z)} g_j(-iz \exp{i\theta_j}),$$

где $g_j(z)$ – целые функции, интегрируемые с квадратом на вещественной оси, а $\theta_j = \frac{\pi}{2}(j-1)$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Список литературы

[1] Напалков В.В. Уравнения свертки в многомерных пространствах - М., Наука, 1982г.-240с.

[2] Гарифьянов Ф.Н. Проблема обращения особого интеграла и разностных уравнений для функций, аналитических вне квадрата. //Изв.Вузов Математика-1993-№7-с.7-16.

[3] Гарифьянов Ф.Н. Моменты Стильтьеса целых функций экспоненциального типа. //Математические заметки, 2000, т. 7, №5, с.674-679.

[4] Carleman T. Sur la theorie des equations integrales et ses applications. – Verhardlungen des Internationalen Mathematiker Kongresses. Zürich, 1932, Bd.1, P.138 – 151

[5] Показеев В.И. Краевая задача Карлемана для фундаментального многоугольника - учен.зап.Казан.ун-та, 1964, кн123, №9, с.40-57.

[6] Чибрикова Л.И. Граничные значения теории аналитических функций на римановых поверхностях. - В сб.: матем.анализ. итоги науки и техн. М., ВИНИТИ АН. СССР, 1980, Т.18, с.3-66.

[7] Аксентьева Е.П., Гарифьянов Ф.Н. К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана.//Изв.Вузов. Математика-1983-№4-с.43-51.

[8] Зверович Э.И. Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях//Успехи мат.наук 1971 Т26, №1, с.113-179.

[9] Чибрикова Л.И. О краевых задачах для прямоугольника. - учен.зап.Казан.ун-та, 1964, кн.123, №9, с.15-39.

[10] Бибербах Л.Аналитическое продолжение . М.Наука, 1967, 240с.

[11] Мандельбройт С. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. - изд-во иностр.лит., М, 1955г.-267с.

[12] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М, ГИТТЛ, 1956, 632с.

[13] Титчмарш Е. Теория функций. М., Наука, 1980, 463 с.