Дорогие студенты, вы зашли в так называемую “Виртуальную аудиторию,” в которой к каждому понедельнику я буду заносить материал новых лекций. Если у вас возникают какие-либо вопросы, то вы можете присылать их мне по электронной почте

volodinstudent@gmail.com

На ваши вопросы я буду отвечать вам reply’ем. В конце текста каждой лекции будут предложены задания, которые вам следует выполнить и выслать мне по почте (или, по крайней мере, сообщать, что вы “на проводе”). О том, как их выполнить я могу вам рассказать в Виртуальной Аудитории, если нажмете на слово Форум и напишите ваши вопросы.

Пока, в ближайшее время, студентам открыт доступ в университет, так что вы можете приходить ко мне (ауд. 1205) в часы ваших занятий по расписанию для консультаций.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Лекция 6

Вероятностные модели старения и износа

Доказанное предложение позволяет нам достаточно просто установить распределение случайной величины τ, реализация которой соответствует моменту первого достижения пуассоновским процессом заданного уровня h.

Следствие 15.1. *Случайная величина τ имеет гамма-распределение* $\mathrm{G}(m,\ \lambda^{-1})$, *где параметр формы m принимает целочисленное значение, равное h, если h целое, и равное* $[\,h\,]+1$, *если h дробное.*

Доказательство. Немедленно вытекает из результата предложения 15.1, поскольку

$$\tau=\sum_{1}^{m}\tau_k,$$

где $\tau_1,\ldots,\tau_m$ независимы и одинаково распределены в соответствии с показательным распределением $\mathrm{E}(\lambda^{-1})$ (напомним, что именно таким образом вводилось гамма-распределение в §12).

Впрочем, распределение момента τ появления k-го события в процессе Пуассона можно получить используя распределение Пуассона, постулат независимости приращений и постулат ординарности:

$$P(t\leqslant\tau\leqslant t+\Delta t)=P(X(t)=m-1,\ X(t+\Delta t)-X(t)=1)=$$

$$P(X(t)=m-1)\cdot P(X(t+\Delta t)-X(t)=1)=$$

$$\frac{(\lambda t)^{m-1}e^{-\lambda t}}{(m-1)!}\cdot\lambda\Delta t=\frac{\lambda^m}{\Gamma(m)}t^{m-1}e^{-\lambda t}\Delta t=f(t)\Delta t,\ \ t\to 0.$$

Из приведенных соотношений, в силу произвольной малости Δt, следует, что $f(t)$ – функция плотности гамма-распределения.

Установленная связь гамма-распределения с пуассоновским потоком событий открывает новую область приложений этого распределения. Это – *вероятностные модели* *износа и старения.* Простейший пример построения такой модели дает исследование процесса износа протектора автомобильной шины. Резонно считать, что различного рода препятствия, возникающие на пути движения автомобиля и приводящие к резкому торможению, реализуют пуассоновский поток событий. Каждое резкое торможение приводит к уменьшению глубины r протектора на определенную (предположим, для простоты,– одинаковую) величину Δr. В таком случае "облысение" шин наступит после m торможений, где m в соответствии со следствием 15.1 определяется уровнем $h = r/\Delta r$.

Проиллюстрируем этот метод построения модели на одной из центральных задач *теории восстановления*, имеющей большие применения в практике и теории надежности систем, подвергаемых в процессе их эксплуатации ремонту (восстановлению), профилактике и резервированию компонент с высокой частотой отказа.

Гамма-распределение $\mathbf{G}(\lambda,\,\theta)$. Рассматривается система, долговечность которой определяется моментом отказа ξ_1 ее отдельного элемента. Предположим, что $\xi_1 \sim \mathrm{E}(\theta)$, то есть функционирование элемента протекает в рамках постулата "отсутствие последействия". Система имеет резерв, состоящий из $n-1$ таких же элементов, и при отказе работающего элемента мгновенно подключается запасной. Таким образом, общая долговечность системы определяется реализацией случайной величины $\xi = \sum_1^n \xi_i$, в которой слагаемые независимы и одинаково распределены по показательному закону $\mathrm{E}(\theta)$ с характеристической функцией (см. пример 12.4) $\varphi_1(t) = (1 - \mathbf{i}\theta t)^{-1}$.

В силу пункта 3^0 предложения 12.1 характеристическая функция ξ равна $\varphi(t) = (1-\mathbf{i}\theta t)^{-n}$. Применяя обратное преобразование Фурье к $\varphi(t)$, получаем функцию плотности распределения долговечности

$$f(x) = f(x\,|\,n,\,\theta) = \frac{1}{(n-1)!\theta^n}x^{n-1}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}, \quad x > 0,$$

(естественно, $f(x) = 0$ при $x \leqslant 0$).

Как будет видно в дальнейшем, полученное распределение долговечности с заменой целочисленного параметра n на произвольный положительный параметр λ описывает долговечность не только резервированных (или восстанавливаемых при отказе) систем, но и долговечность систем, подверженных износу, старению, накоплению усталости, в общем, всему тому, что постепенно накапливается, а потом приводит к "гибели". В связи с этими замечаниями мы определяем *гамма-распределение* $\mathrm{G}(\lambda,\,\theta)$ посредством функции плотности

$$f(x\,|\,\lambda,\,\theta) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)\theta^\lambda}x^{\lambda-1}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}, \quad x > 0;\ \lambda > 0,\ \theta > 0,$$

где

$$\Gamma(\lambda) = \int\limits_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-x}dx$$

– гамма-функция Эйлера.

Семейство гамма-распределений $\{\mathrm{G}(\lambda,\,\theta), (\lambda,\theta) \in \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}_+\}$ содержит, как частный случай, показательное распределение ($\lambda = 1$). Гамма-распределение унимодально: если $\lambda \leqslant 1$, то $\mathrm{mod}X = 0$, а при $\lambda > 1$ мода $\mathrm{mod}X = \theta(\lambda - 1)$.

У гамма-распределения существуют моменты любого порядка:

$$\alpha_k = \mathbf{E}\,\xi^k = \frac{1}{\Gamma(\lambda)\,\theta^\lambda}\int\limits_0^\infty x^{\lambda+k-1}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}dx =$$

$$\frac{\Gamma(\lambda+k)\,\theta^{\lambda+k}}{\Gamma(\lambda)\,\theta^\lambda} = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1)\theta^k.$$

В частности, $\mathbf{E}\,\xi = \lambda\theta,\ \mathbf{D}\,\xi = \lambda\theta^2$.

Пример 3.2. *Оценка параметров гамма-распределения* $\mathrm{G}(\lambda,\,a)$. У этого двухпараметрического распределения среднее равно λa, а дисперсия – λa^2. Решение системы уравнений

$$\lambda a = \overline{X}, \quad \lambda a^2 = S^2$$

дает оценки

$$\hat{a}_n = \frac{S^2}{\overline{X}}, \quad \hat{\lambda}_n = \frac{\overline{X}^2}{S^2},$$

которые, как и в предыдущем примере, не являются функциями достаточной статистики

$$T\left(X^{(n)}\right) = \left(\sum\nolimits_1^n X_k,\ \prod\nolimits_1^n X_k\right),$$

и как показывают не совсем простые вычисления, их риски далеки от возможного минимума. Тем не менее, очевидная вычислительная простота оценок параметров гамма-распределения по методу моментов обеспечивает их популярность в практических применениях.

Пример 4.2. *Оценка параметров гамма-распределения* $\mathrm{G}(a,\,\lambda)$. У этого распределения функция плотности

$$f(x\,|\,\theta) = \frac{1}{a^\lambda\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}\exp\left\{-\frac{x}{a}\right\},\ x>0,\ \theta=(a,\,\lambda),$$

отлична от нуля только на положительной полуоси, и логарифмическое правдоподобие

$$\mathcal{L}(a,\,\lambda\,|\,X^{(n)}) = -n\lambda\ln a - n\ln\Gamma(\lambda) + (\lambda-1)\sum_1^n \ln X_k - \frac{1}{a}\sum_1^n X_k.$$

Составляем уравнения правдоподобия:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a} = -\frac{n\lambda}{a} + \frac{1}{a^2}\sum_1^n X_k = 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} = -n\ln a - n\psi(\lambda) + \sum_1^n \ln X_k = 0,$$

где $\psi(\lambda) = d\ln\Gamma(\lambda)/d\lambda$ – так называемая пси-функция Эйлера. Исключая из первого уравнения параметр a и подставляя полученный результат во второе, получаем трансцендентное уравнение

$$\ln\lambda - \psi(\lambda) = \ln\overline{X} - \frac{1}{n}\sum_1^n \ln X_k,$$

которое в силу свойства монотонности функции $\ln\lambda - \psi(\lambda)$ имеет единственное решение. При численном решении этого уравнения может оказаться полезной асимптотическая ($\lambda \to \infty$) формула

$$\ln\lambda - \psi(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{12\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right).$$

Контрольные вопросы.

1. Эта лекция имела целью познакомить вас с новым классом вероятностный моделей, где наблюдаются не числовые случайные величины, а случайные функции – траектории случайных процессов. Задачи по статистической идентификации таких моделей в нашем специальном курсе рассматриваться не будут, для этого существует особый специальный курс, который вы можете посещать. В качестве контрольного вопроса я хотел бы предложить вам в некотором смысле "литературную" задачу: укажите новые реальные природные объекты типа тех, что приведены в Примерах 15.1-15.5.