Известия вузов. Математика
2019, № 3, с. 90–95

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

А.М. БИКЧЕНТАЕВ

ИДЕАЛЬНЫЕ F-НОРМЫ НА C^*-АЛГЕБРАХ. II

Аннотация. Изучены ассоциированные со следом φ на C^*-алгебре $\mathcal{A}$ идеальные F-нормы $\|\cdot\|_p$, $0 < p < +\infty$. Если A, B из $\mathcal{A}$ с $|A| \le |B|$, то $\|A\|_p \le \|B\|_p$. Имеем, что $\|A\|_p = \|A^*\|_p$ для всех A из $\mathcal{A}$ $(0 < p < +\infty)$ и $\|\cdot\|_p$ является полунормой для $1 \le p < +\infty$. Оценено расстояние от произвольного элемента из унитальной $\mathcal{A}$ до подалгебры скаляров в полунорме $\|\cdot\|_1$. Исследованы геометрические свойства полуортогональных проекторов из $\mathcal{A}$. Если след φ конечен, то множество всех конечных сумм попарных произведений проекторов и полуортогональных проекторов (взятых в любом порядке) из $\mathcal{A}$ с коэффициентами из $\mathbb{R}^+$ не плотно в $\mathcal{A}$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, проектор, полуортогональный проектор, унитарный оператор, неравенство, C^*-алгебра, след, идеальная F-норма.

УДК: 517.98

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-3-90-95

Введение. Статья продолжает исследования [1]–[3]. Изучены ассоциированные со следом φ на C^*-алгебре $\mathcal{A}$ идеальные F-нормы $\|\cdot\|_p$, $0 < p < +\infty$. Если $A, B \in \mathcal{A}$ с $|A| \le |B|$, то $\|A\|_p \le \|B\|_p$. Имеем $\|A\|_p = \|A^*\|_p$ для всех $A \in \mathcal{A}$ $(0 < p < +\infty)$ и $\|\cdot\|_p$ является полунормой для $1 \le p < +\infty$. Если $\mathcal{A}$ унитальна с единицей I и φ конечен, то

$$\inf_{c \in \mathbb{C}} \|A - cI\|_1 \le \|A - \varphi(A)\varphi(I)^{-1}I\|_1 \le 2 \inf_{c \in \mathbb{C}} \|A - cI\|_1 \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A}.$$

Исследованы геометрические свойства полуортогональных проекторов из $\mathcal{A}$. Если $\varphi \ne 0$, то множество всех конечных сумм попарных произведений проекторов и полуортогональных проекторов (взятых в любом порядке) из $\mathcal{A}$ с коэффициентами из $\mathbb{R}^+$ не плотно в $\mathcal{A}$.

1. Определения и обозначения. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — $*$-алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Коммутантом множества $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется множество

$$\mathcal{X}' = \{Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : XY = YX \quad \text{для всех} \quad X \in \mathcal{X}\}.$$

$*$-Подалгебра $\mathcal{M}$ алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется алгеброй фон Неймана, действующей в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, если $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$. Если $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то $\mathcal{X}'$ — алгебра фон Неймана, а $\mathcal{X}''$ — наименьшая алгебра фон Неймана, содержащая $\mathcal{X}$.

Поступила в редакцию 10.09.2018, после доработки 17.09.2018. Принята к публикации 26.09.2018

Благодарности. Работа выполнена при поддержке субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9).

C^*-алгеброй называется комплексная банахова $*$-алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Любую C^*-алгебру можно реализовать как C^*-подалгебру в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (Гельфанд–Наймарк; см. [4], теорема 3.4.1). Элемент $A \in \mathcal{A}$ называется *полуортогональным проектором*, если $A^*A = (A + A^*)/2$ ([5], [6]). Для C^*-алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$, $\mathcal{A}^{\mathrm{sp}}$, $\mathcal{A}^{\mathrm{u}}$ и $\mathcal{A}^+$ будем обозначать ее подмножества проекторов, полуортогональных проекторов, унитарных элементов и положительных элементов соответственно. Если $A \in \mathcal{A}$, то $|A| = \sqrt{A^*A} \in \mathcal{A}^+$. Пусть $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ — множество всех конечных сумм попарных произведений проекторов и полуортогональных проекторов (взятых в любом порядке) из $\mathcal{A}$ с коэффициентами из $\mathbb{R}^+$.

Следом на C^*-алгебре $\mathcal{A}$ называется такое отображение $\varphi : \mathcal{A}^+ \to [0, +\infty]$, что $\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{A}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$); $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{A}$. След φ называется *точным*, если $\varphi(X) = 0 \Longrightarrow X = 0$, $X \in \mathcal{A}^+$; *полуконечным*, если $\varphi(A) = \sup\{\varphi(B) : B \in \mathcal{A}^+, B \leq A, \varphi(B) < +\infty\}$ для каждого $A \in \mathcal{A}^+$. Конечный след (т. е. $\varphi(X) < +\infty$ для всех $X \in \mathcal{A}^+$) корректно продолжается по линейности до функционала на $\mathcal{A}$, который будем обозначать той же буквой φ.

2. Полунормы, ассоциированные со следом на C^*-алгебрах.

Лемма ([7]). *Если $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана и $A, B \in \mathcal{M}$, то существуют такие изометрии $U, V \in \mathcal{M}$, что $|A + B| \leq U|A|U^* + V|B|V^*$. Если C^*-алгебра $\mathcal{A}$ унитальна и $A, B \in \mathcal{A}$, то для каждого числа $\varepsilon > 0$ существуют такие $U, V \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$, что $|A + B| \leq U|A|U^* + V|B|V^* + \varepsilon I$.*

Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра. Предположим для отображения $\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ выполнено условие

$$\rho(A) = \rho(A^*) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

Для унитальной алгебры $\mathcal{A}$ положим $\rho(A)^{(1)} = \inf\limits_{c \in \mathbb{C}} \rho(A - cI)$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Если $\rho(UAU^*) = \rho(A)$ для всех $A \in \mathcal{A}$ и $U \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$, то $\rho(UAU^*)^{(1)} = \rho(A)^{(1)}$ для всех $A \in \mathcal{A}$ и $U \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$. Если ρ является полунормой на $\mathcal{A}$, то $\rho^{(1)}$ также является полунормой. Из выполнения условия (1) для ρ следует его выполнение для $\rho^{(1)}$: имеем $\rho(A)^{(1)} \leq \rho(A)$ и

$$\rho(A^*)^{(1)} = \inf_{c \in \mathbb{C}} \rho(A^* - cI) = \inf_{c \in \mathbb{C}} \rho((A - \overline{c}I)^*) = \inf_{c \in \mathbb{C}} \rho(A - \overline{c}I) = \rho(A)^{(1)} \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A}.$$

Пусть φ — след на C^*-алгебре $\mathcal{A}$. Для всех $A \in \mathcal{A}$ положим

$$\|A\|_p = \begin{cases} \varphi(|A|^p), & \text{если } 0 < p \leq 1; \\ \varphi(|A|^p)^{1/p}, & \text{если } 1 \leq p < +\infty. \end{cases}$$

Пусть τ — полуконечный полунепрерывный снизу след на C^*-алгебре $\mathcal{A}$ и (π, ν) — представление C^*-алгебры $\mathcal{A}$, связанное со следом τ ([8], 6.6.4). Тогда для "естественного" точного нормального полуконечного следа ν на алгебре фон Неймана $\mathcal{M} = \pi(\mathcal{A})''$, порожденной $\pi(\mathcal{A})$ ([8], A60) выполняется соотношение $\nu(\pi(X)) = \tau(X)$ для любого $X \in \mathcal{A}^+$. Для всех $A, B \in \mathcal{A}$ и $0 < p < +\infty$ имеем $\|A + B\|_p \leq \|A\|_p + \|B\|_p$. Пусть $0 < p \leq 1$, тогда в силу леммы получаем

$$\begin{aligned} \tau(|A + B|^p) &= \nu(\pi(|A + B|^p)) = \nu((\pi(|A + B|))^p) = \nu(|\pi(A) + \pi(B)|^p) \leq \\ &\leq \nu((U\pi(|A|)U^* + V\pi(|B|)V^*)^p) \leq \nu((U\pi(|A|)U^*)^p) + \nu((V\pi(|B|)V^*)^p) = \\ &= \nu((\pi(|A|)^{\frac{1}{2}}U^*U\pi(|A|)^{\frac{1}{2}})^p) + \nu((\pi(|B|)^{\frac{1}{2}}V^*V\pi(|B|)^{\frac{1}{2}})^p) \leq \\ &\leq \nu(\pi(|A|^p)) + \nu(\pi(|B|^p)) = \tau(|A|^p) + \tau(|B|^p). \end{aligned}$$

Неравенство треугольника для $\|\cdot\|_2$ следует из неравенства Коши–Буняковского, и даже для произвольного (не обязательно следового) положительного функционала φ. Для всех $A \in \mathcal{A}$ и $0 < p < +\infty$ имеем

$$\tau(|A|^p) = \tau((A^*A)^{p/2}) = \nu(\pi((A^*A)^{p/2})) = \nu((\pi(A^*A))^{p/2}) = \nu((\pi(A^*)\pi(A))^{p/2}) = \\ = \nu((\pi(A)^*\pi(A))^{p/2}) = \nu((\pi(A)\pi(A)^*)^{p/2}) = \nu((\pi(A)\pi(A^*))^{p/2}) = \\ = \nu((\pi(AA^*))^{p/2}) = \nu(\pi((AA^*))^{p/2}) = \tau((AA^*)^{p/2}) = \tau(|A^*|^p),$$

т. е. $\|\cdot\|_p$ удовлетворяет условию (1). Для τ аналогично проверяется

Предложение 1. *Если $0 < p < +\infty$ и $A, B \in \mathcal{A}$ с $|A| \le |B|$, то $\|A\|_p \le \|B\|_p$.*

Заметим также, что для $0 < p \le 1$ это утверждение (для произвольного следа φ) следует из операторной монотонности функции $f(t) = t^p$ на $\mathbb{R}^+$. Для $1 < p \le 2$ имеем $|A|^{p-1} \le |B|^{p-1}$ и

$$\varphi(|A|^p) = \varphi(|A|^{\frac{p-1}{2}} \cdot |A| \cdot |A|^{\frac{p-1}{2}}) \le \varphi(|A|^{\frac{p-1}{2}} \cdot |B| \cdot |A|^{\frac{p-1}{2}}) = \\ = \varphi(|B|^{\frac{1}{2}} \cdot |A|^{p-1} \cdot |B|^{\frac{1}{2}}) \le \varphi(|B|^{\frac{1}{2}} \cdot |B|^{p-1} \cdot |B|^{\frac{1}{2}}) = \varphi(|B|^p).$$

Теорема 1. *Пусть φ — конечный след на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$. Тогда*

$$\|A\|_1^{(1)} \le \left\|A - \frac{\varphi(A)}{\varphi(I)} I\right\|_1 \le 2\|A\|_1^{(1)} \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A}.$$

Схема доказательства. Покажем, что

$$\varphi\left(\left|A - \frac{\varphi(A)}{\varphi(I)} I\right|\right) \le 2\varphi(|A - cI|) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A} \quad \text{и} \quad c \in \mathbb{C}.$$

Поскольку

$$A - \frac{\varphi(A)}{\varphi(I)} I = (A - cI) - \left(\frac{\varphi(A)}{\varphi(I)} I - cI\right) \quad \text{и} \quad \left|\frac{\varphi(A)}{\varphi(I)} I - cI\right| = \frac{1}{\varphi(I)} |\varphi(A - cI)| I,$$

в силу леммы для каждого числа $\varepsilon > 0$ существуют такие $U, V \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$, что

$$\left|A - \frac{\varphi(A)}{\varphi(I)} I\right| \le U|A - cI|U^* + V\left|\frac{\varphi(A)}{\varphi(I)} I - cI\right| V^* + \varepsilon I.$$

Поэтому

$$\varphi\left(\left|A - \frac{\varphi(A)}{\varphi(I)} I\right|\right) \le \varphi(U|A - cI|U^*) + \varphi\left(V\left|\frac{\varphi(A)}{\varphi(I)} I - cI\right| V^*\right) + \varepsilon\varphi(I) = \\ = \varphi(|A - cI|) + \varphi\left(\left|\frac{\varphi(A)}{\varphi(I)} I - cI\right|\right) + \varepsilon\varphi(I) = \varphi(|A - cI|) + \varphi\left(\frac{1}{\varphi(I)} |\varphi(A - cI)| I\right) + \varepsilon\varphi(I) \le \\ \le 2\varphi(|A - cI|) + \varepsilon\varphi(I)$$

для всех $A \in \mathcal{A}$ и $c \in \mathbb{C}$.

Предложение 2. *Пусть $0 \ne a_k \in \mathbb{C}$ и $A_k \in \mathcal{A}$ с $A_k^* A_k = a_k A_k^* + \overline{a}_k A_k$ для $k = 1, \dots, n$. Тогда*

(i) *$\frac{1}{2a_k} A_k \in \mathcal{A}^{\mathrm{sp}}$ для всех $k = 1, \dots, n$;*

(ii) *если $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re}\lambda < 0$, то $\lambda I \ne \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{a}_k A_k$.*

Для проверки (ii) предположим, что $\lambda I = \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k A_k$. Тогда $\overline{\lambda} I = \sum_{k=1}^{n} a_k A_k^*$ и

$$0 \geq \mathrm{Re}\,(\lambda) I = \frac{\lambda I + \overline{\lambda} I}{2} = \sum_{k=1}^{n} A_k^* A_k.$$

Поэтому $A_k^* A_k = 0$ и $A_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$ имеем противоречие.

Предложение 3. *Пусть φ — конечный след на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$, $0 \neq a \in \mathbb{C}$ и $A \in \mathcal{A}$ с $A^*A = aA^* + \overline{a}A$. Тогда $\|A\|_1^{(1)} \leq |a|\varphi(I)$.*

Схема доказательства. Пусть $\varphi \neq 0$ и $\tau(A) = \frac{\varphi(A)}{\varphi(I)}$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Тогда $\tau(\sqrt{B}) \leq \sqrt{\tau(B)}$ для всех $B \in \mathcal{A}^+$ (это — коммутативная ситуация) и

$$\inf_{c\in\mathbb{C}} \tau(|A - cI|) = \inf_{c\in\mathbb{C}} \tau(\sqrt{A^*A - cA^* - \overline{c}A + |c|^2 I}) \leq$$
$$\leq \inf_{c\in\mathbb{C}} \sqrt{\tau(A^*A - cA^* - \overline{c}A + |c|^2 I)} = \sqrt{\inf_{c\in\mathbb{C}} \tau(A^*A - cA^* - \overline{c}A + |c|^2 I)} = \delta.$$

Если $A^*A = aA^* + \overline{a}A$ для некоторого $0 \neq a \in \mathbb{C}$, то $\delta \leq |a|$. В силу теоремы 1 имеем

$$b = \varphi\left(\left|A - \frac{\varphi(A)}{\varphi(I)} I\right|\right) \leq 2|a|$$

и для $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sp}}$ (т. е. при $a = 1/2$) получим $b \leq 1$.

В $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ существуют унитальные C^*-подалгебры с тривиальным множеством проекторов [9]. В контраст с этим, полуортогональных проекторов в унитальных C^*-алгебрах “почти” достаточно для аддитивного порождения этих алгебр.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная C^*-алгебра с единицей I. Каждый элемент $T \in \mathcal{A}$ представляется в виде конечной суммы $T = \sum_k T_k$ с $T_k \in \{-I\} \cup \mathcal{A}^{\mathrm{sp}}$.*

Схема доказательства. В ([10], с. 252) показано, что для всех $T \in \mathcal{A}$ и всех $\varepsilon > 0$ существуют $U_1, U_2, U_3 \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$ такие, что $T = (\|T\| + \varepsilon)(U_1 + U_2 + U_3)$ (более сильный результат см. в [11]). Пусть ε выбрано так, чтобы $\|T\| + \varepsilon \in \mathbb{N}$. Существует биекция между $\mathcal{A}^{\mathrm{u}}$ и множеством нормальных элементов из $\mathcal{A}^{\mathrm{sp}}$, задаваемая соотношением $U = 2S - I$. Тогда, выбрав $S_1, S_2, S_3 \in \mathcal{A}^{\mathrm{sp}}$, соответствующие U_1, U_2, U_3, получаем

$$T = (\|T\| + \varepsilon)(2S_1 - I + 2S_2 - I + 2S_3 - I) = (\|T\| + \varepsilon)(2(S_1 + S_2 + S_3) - 3I).$$

Из п. (ii) предложения 2 следует, что элемент $-I$ не представляется в виде конечной суммы элементов из $\mathcal{A}^{\mathrm{sp}}$.

В работе [12] Л. Марку назвал выполняющееся для некоторых C^*-алгебр равенство

$$\mathcal{A} = \Big\{\sum_k P_k Q_k R_k : P_k, Q_k, R_k \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}\Big\}$$

([13], следствие 6) феноменальным и сопоставил его с тем, что иногда (см. [13], лемма 4) множество

$$\Big\{\sum_k \lambda_k Q_k R_k : \lambda_k \in \mathbb{R},\ Q_k, R_k \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}\Big\}$$

даже не плотно в C^*-алгебре $\mathcal{A}$.

Теорема 3. *Пусть φ — конечный след на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$. Тогда*

$$\inf_{X\in\mathcal{F}(\mathcal{A})} \|-A - X\| > 0 \quad \text{для каждого} \quad A \in \mathcal{A}^+ \quad \text{с} \quad \varphi(A) > 0.$$

Схема доказательства. Для произвольных элементов $T \in \mathcal{A}^{\rm sp}$ и $P \in \mathcal{A}^{\rm pr}$ имеем

$$0 \le \varphi(PT^*TP) = \varphi(T^*TP) = \frac{1}{2}\varphi(TP + T^*P) = \\ = \frac{1}{2}(\varphi(TP) + \overline{\varphi(TP)}) = \operatorname{Re}\varphi(TP) = \operatorname{Re}\varphi(PT).$$

Пусть $A \in \mathcal{A}^+$ с $\varphi(A) > 0$. Если указанный inf равен нулю, то для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существуют такие конечные наборы $\{\lambda_n\}_{n=1}^l \subset (0,\infty)$, $\{P_n\}_{n=1}^l \subset \mathcal{A}^{\rm pr}$, $\{T_n\}_{n=1}^l \subset \mathcal{A}^{\rm sp}$ и $j \in \{1,2,\dots,l\}$, что

$$\Big\| -A - \sum_{k=1}^{j} \lambda_k P_k T_k - \sum_{k=j+1}^{l} \lambda_k T_k P_k \Big\| < \varepsilon.$$

Для $z = \sum_{k=1}^{j} \varphi(\lambda_k P_k T_k) + \sum\limits_{k=j+1}^{l} \varphi(\lambda_k T_k P_k) \in \mathbb{C}$ имеем $\operatorname{Re} z \ge 0$. Теперь

$$\Big|\varphi\Big(-A - \sum_{k=1}^{j} \lambda_k P_k T_k - \sum_{k=j+1}^{l} \lambda_k T_k P_k\Big)\Big| = |-\varphi(A) - \operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z| \ge \varphi(A)$$

— противоречие с непрерывностью положительного линейного функционала φ.

Следствие. Пусть на C^*-алгебре $\mathcal{A}$ существует нетривиальный конечный след. Тогда множество $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ не плотно в $\mathcal{A}$.

Это утверждение дополняет лемму 4 из [13].

Литература

[1] Бикчентаев А.М. *Идеальные F-нормы на C^*-алгебрах*, Изв. вузов. Матем., № 5, 69–74 (2015).

[2] Бикчентаев А.М. *Неравенство для следа на унитальной C^*-алгебре*, Матем. заметки **99** (4), 483–488 (2016).

[3] Бикчентаев А.М. *О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов*, III. *Коммутаторы в C^*-алгебрах*, Матем. сб. **199** (4), 3–20 (2008).

[4] Мерфи Дж. *C^*-алгебры и теория операторов* (Факториал, М., 1997).

[5] Gross J., Trenkler G., Troschke S.-O. *On semi-orthogonality and a special class of matrices*, Linear Algebra Appl. **289** (1–3), 169–182 (1999).

[6] Бикчентаев А.М. *Полуортогональные проекторы в гильбертовом пространстве*. В кн.: На рубеже веков. Научн.-исследов. ин-т матем. и механ. им. Н.Г. Чеботарева Казанск. гос. ун-та. 1998–2002 гг., с. 108–114, Изд-во Казан. матем. о-во, Казань, 2003.

[7] Akemann C.A., Anderson J., Pedersen G.K. *Triangle inequalities in operator algebras*, Linear Multilinear Algebra **11** (2), 167–178 (1982).

[8] Диксмье Ж. *C^*-алгебры и их представления* (Наука, М., 1974).

[9] Blackadar B. *A simple unital projectionless C^*-algebra*, J. Operator Theory **5** (1), 63–71 (1981).

[10] Kadison R., Pedersen G. *Means and convex combinations of unitary operators*, Math. Scand. **57** (2), 249–266 (1985).

[11] Haagerup U. *On convex combinations of unitary operators in C^*-algebras*. In: Progress in Math. V. 84. “Mappings of operator algebras”, p. 1–13, Birkhäuser, Boston, 1990.

[12] Marcoux L.W. *Projections, commutators and Lie ideals in C^*-algebras*, Math. Proc. R. Ir. Acad. **110A** (1), 31–55 (2010).

[13] Бикчентаев А.М. *О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов*, Сиб. матем. журн. **46** (1), 32–45 (2005).

Айрат Мидхатович Бикчентаев

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

A.M. Bikchentaev

Ideal F-norms on C^*-algebras. II

Abstract. We study ideal F-norms $\|\cdot\|_p$, $0 < p < +\infty$ associated with a trace φ on a C^*-algebra $\mathcal{A}$. If A, B of $\mathcal{A}$ are such that $|A| \leq |B|$, then $\|A\|_p \leq \|B\|_p$. We have $\|A\|_p = \|A^*\|_p$ for all A from $\mathcal{A}$ ($0 < p < +\infty$) and $\|\cdot\|_p$ is a seminorm for $1 \leq p < +\infty$. We estimate the distance from any element of unital $\mathcal{A}$ to the scalar subalgebra in the seminorm $\|\cdot\|_1$. We investigate geometric properties of semiorthogonal projections from $\mathcal{A}$. If a trace φ is finite, then the set of all finite sums of pairwise products of projections and semiorthogonal projections (in any order) of $\mathcal{A}$ with coefficients from $\mathbb{R}^+$ is not dense in $\mathcal{A}$.

Keywords: Hilbert space, linear operator, projection, semiorthogonal projection, unitary operator, inequality, C^*-algebra, trace, ideal F-norm.

Airat Midkhatovich Bikchentaev

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru