

**ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА  
ИМЕНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО**

**ТОМ 50**

**ЛОБАЧЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2014**

**Материалы Тринадцатой молодежной  
школы-конференции  
(Казань, 24 – 29 октября 2014 г.)**

**Казанское математическое общество  
2014**



Российский фонд фундаментальных исследований

Издание осуществлено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-31-10222)

УДК 51+533  
ББК 22.1 – 22.1  
Т78

Печатается по рекомендации Редакционно-издательского  
совета Казанского математического общества

Научные редакторы – доц. Ю. А. Альпин, проф. И. Б. Бадриев, доц. Д. В. Бережной,  
проф. В. И. Жегалов, проф. С. Р. Насыров, доц. А. М. Нигмедзянова,  
доц. Е. Н. Сосов, проф. Л. Р. Шакирова  
Составитель – Р. К. Губайдуллина

**Т78 Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 50/ Казанское математическое общество. «Лобачевские чтения – 2014» // *Материалы Тринадцатой молодежной научной школы-конференции.* – Казань: Издательство Казанского математического общества, 2014. – Т. 50. – 186 с.**

Сборник содержит материалы Тринадцатой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2014», организованной на базе Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета. Школа-конференция проведена в Казани с 24 по 29 октября 2014 года при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Книга предназначена для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, специализирующихся в различных областях математики, механики и их приложений.

УДК 51+533  
ББК 22.1 – 22.1

© Казанское математическое общество, 2014  
© Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2014

**Е. Л. Авербух, А. А. Куркин, Т. Г. Талипова**

*Нижегородский государственный технический*

*университет им. Р.Е. Алексеева,*

*Институт прикладной физики РАН,*

*Averbukh.Lena@gmail.com*

## **СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ ИЗОТЕРМ МОРСКИХ ПЛЕНОК**

Гашение поверхностных волн пленками ПАВ важно с точки зрения индикации крупномасштабных процессов в океане с помощью дистанционных методов зондирования. Одним из основных параметров, влияющих на затухание ряби, является упругость пленки, которая характеризуется её изотермой, то есть зависимостью давления пленки от занимаемой ей площади. Кроме того, упругость морских пленок влияет на состояние обмена на границе воздух-океан.

В настоящей работе проводится анализ изотерм образцов пленок, собранных за несколько лет в прибрежной зоне Черного моря, они сравниваются с данными, взятыми в Атлантическом океане и заливе Сан-Диего. Давление в пленке аппроксимируется полиномиальной зависимостью 3-й степени. Средние значения постоянного члена и коэффициентов этого многочлена сопоставимы с их стандартным отклонением. Квадратичные и кубические коэффициенты превышают стандартное отклонение соответствующих средних значений на два порядка величины, поэтому приблизить изотермы поверхностно-активных пленок с использованием единой универсальной полиномиальной функции для определенного района Мирового океана не представляется возможным. В работе представлены распределения коэффициентов для использования в вероятностных

экспресс-моделях определения упругих свойств пленок на морской поверхности.

Представленные результаты получены в рамках выполнения базовой части государственного задания № 2014/133, при поддержке стипендии Президента Российской Федерации СП-202.2013.5 (Е.А.) и в рамках гранта РФФИ 12-05-00472 (Т.Т.).

**Е. Л. Авербух, А. А. Куркин, Т. Г. Талипова**

*Нижегородский государственный технический*

*университет им. Р.Е. Алексеева,*

*Институт прикладной физики РАН,*

*Averbukh.Lena@gmail.com*

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯ  
СКОРОСТИ ГРАВИТАЦИОННО-КАПИЛЛЯРНЫХ  
ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ  
В ПРИСУТСТВИИ МОРСКОЙ ПЛЕНКИ**

Пленочные загрязнения естественного и антропогенного происхождения (цветение водорослей, морской мусор, загрязнение нефтью и т. п.), покрывающие морскую поверхность, влияют на биохимические процессы обмена, экологию приповерхностной зоны, а также поверхностные волны, избирательно подавляя коротковолновые компоненты ветрового волнения и изменяя структуру течений в пограничных слоях.

Упругость пленок приводит к возникновению вязкоэластических волн Марангони на поверхности бесконечно глубокой вязкой жидкости. Исследованию полей горизонтальной и вертикальной скорости гравитационно-капиллярных волн и волн Марангони на поверхности маловязкой жидкости посвящены

работы [1, 2], а в работе [3] авторы представили аналитическое выражение для дисперсионных зависимостей обеих мод, не ограничиваясь узким диапазоном значений вязкости и упругости. Нами исследована вертикальная структура полей скорости в обеих модах без ограничений на вязкость жидкости и упругость поверхностной пленки.

Исследование компонент скорости базируется на решении линейаризованных уравнений Навье–Стокса в рамках двумерного движения с учетом граничных условий на поверхности бесконечно глубокой вязкой жидкости (кинематическим граничным условием, условием равенства нормальных и тангенциальных напряжений, а также условием баланса органического вещества в рамках адвекционной модели). Дисперсионное соотношение может быть описано полиномом 7-й степени с двумя безразмерными параметрами упругости и вязкости. Численный расчет корней и построение на его основе поля скорости позволили изучить области параметров, в которых воздействие поперечных и продольных мод приводит к изменениям в вертикальной структуре скорости. Выделены области значений параметров, для которых в вертикальной структуре поля скорости происходит смена знака в погранслое.

Представленные результаты получены в рамках выполнения базовой части государственного задания № 2014/133, при поддержке стипендии Президента Российской Федерации СП-202.2013.5 (Е.А.) и в рамках гранта РФФИ 12-05-00472 (Т.Т.).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Левич В. Г. *Физико-химическая гидродинамика*. – М.: Госиздат физико-математической литературы, 1959. – 699 с.
2. Dorrestein R. *General linearized theory of the effect of surface films on water ripples* // Amsterdam Proc. Acad. Sci. –

1951. – V. B54. – P. 260–272.

3. Авербух Е. Л., Куркин А. А., Степанянц Ю. А., Талипова Т. Г. *Дисперсионные свойства волн на поверхности вязкой жидкости, покрытой упругой пленкой* // Изв. РАН. МЖГ. – 2014. – № 6.

**А. А. Аганин, Т. Ф. Халитова**

*Институт механики и машиностроения*

*Казанского научного центра РАН,*

*taliny@mail.ru*

### **УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ПУЗЫРЬКЕ, ОБРАЗОВАННОМ СЛИЯНИЕМ КАВИТАЦИОННЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ**

При фокусировки ударных волн внутри кавитационных пузырьков могут достигаться экстремально высокие температуры, плотности и давления [1]. В литературе, в основном, рассматривается фокусировка сферических ударных волн внутри сферического пузырька при его сильном расширении-сжатии. Однако, в реальности пузырек и ударные волны в нем являются несферическими. Это может быть связано, например, с действием силы тяжести, слиянием пузырьков или их разрушением. Кроме того, известно, что сферическая форма пузырька при сжатии и ударной волны при сжатии является неустойчивой. В настоящей работе рассматриваются деформации радиально сходящихся ударных волн внутри пузырька, образованного слиянием двух одинаковых сферических кавитационных микрополостей в пучности давления ультразвуковой стоячей волны. Амплитуда колебаний давления в волне

полагается равной 15 бар, статическое давление – 1 бар, частота колебания –  $2\pi \times 19.3$  кГц. Считается, что образующие пузырек микрополости возникают в виде кавитационных зародышей (радиусом 10–100 нм) в момент  $t = 0$ , когда напряжения в жидкости являются максимальными растягивающими. В промежутке  $0 < t < t_0$  кавитационные микрополости расширяются. В момент слияния в исследуемый пузырек  $t_0$  температура жидкости и пара равна 293.15 К, давление в пузырьке равно давлению насыщения, радиус пузырька равен  $R_0$ . В дальнейшем пузырек сначала расширяется до радиуса  $R_m \approx 450$  мкм, а затем сжимается до радиуса  $R_c \approx 25$  мкм. Движение пара в пузырьке и окружающей жидкости описывается двумерными уравнениями динамики невязкого теплопроводного газа, которые решаются численно с применением методики работы [2].

Показано влияние радиуса кавитационных микрополостей в момент слияния на деформации радиально-сходящихся ударных волн в образованном пузырьке. Возникающая в пузырьке в конце его сжатия радиально-сходящаяся ударная волна в момент своего образования сначала по форме подобна пузырьку. В процессе своего схождения она деформируется. При этом, чем меньше радиус микрополостей в момент слияния, тем ближе форма ударной волны к сферической в момент вхождения в “горячее ядро” (малую центральную область пузырька радиуса  $r \leq 4$  мкм). Так, если при  $R_0/R_m = 0.00056$  ударная волна графически не отличима от сферической в момент вхождения в “горячее ядро”, то при  $R_0/R_m = 0.0022$  она в этот момент уже похожа на тонкую цилиндрическую трубку. В результате, можно ожидать, что степень кумуляции энергии при  $R_0/R_m = 0.00056$  будет выше, чем при  $R_0/R_m = 0.0022$ .

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Taleyarkhan R. P. et. al *Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation* // Science. – 2002. – V. 295. – P. 1868–1873.
2. Аганин А. А., Халитова Т. Ф., Хисматуллина Н. А. *Численное моделирование радиально сходящихся ударных волн в полости пузырька* // Математическое моделирование. – 2014. – Т. 26. – № 4. – С. 3–20.

**И. И. Аксанова, Д. З. Уразова**

*Высокогорская СОШ № 2,*

*ilsio50@mail.ru*

**НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ  
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ**

Мы строим новые геометрические фракталы на плоскости, применяя три основных способа: геометрический, с помощью  $L$ -кодов и с применением системы итерированных функций.

Построение фракталов геометрическим способом начинается с двух фигур: инициатора и генератора. В наших примерах в качестве инициатора берется единичный квадрат. Далее этот квадрат разбивается на несколько квадратов и выбирается  $k$  из них. В результате получаем множество, которое называется генератором или первой итерацией фрактала. Вторая итерация получается из первой, если мы заменим каждый из  $k$  выбранных квадратов на генератор, масштабированный нужным образом. Далее этот процесс продолжается. При стремлении числа итераций к бесконечности мы получаем искомый фрактал. Геометрическим способом нами построены несколько новых фракталов.



Метод  $L$ -кодов чаще используется для построения фрактальных кривых на плоскости. Простейший код состоит из нескольких букв  $E$  и знаков “+” и “-”. Кроме этого, задаются два угла:  $\varphi$  и  $\varphi_0$ . По заданному коду строится ломаная. Букве  $E$  соответствуют отрезки одинаковой длины. Знак “+” означает, что последующий отрезок мы строим из конца предыдущего в направлении, образующем с предыдущим отрезком угол  $\varphi$ , а знак “-” означает, что вместо  $\varphi$  берется угол  $(-\varphi)$ . Угол  $\varphi_0$  определяет наклон первого отрезка к оси  $OX$ .

Построим с помощью  $L$ -кодов новый фрактал, названный нами “Солнышко”. Сначала строим кривую по начальному коду  $E-E-E-E-E-E-E-E-E-E-E-E-E$  с углами  $\varphi_0 = 0$  и  $\varphi = \pi/6$ , и получаем правильный 12-ти угольник. Затем каждую букву  $E$  в начальном коде мы заменяем на так называемый код замены  $E + E - E + E$  и строим соответствующую ломаную. В полученном на первом этапе коде мы опять заменяем каждую букву  $E$  на тот же код замены и продолжаем этот процесс. Нами построены несколько итераций указанного фрактала.

Основой третьего способа является применение систем итерированных функций. Возьмем систему сжимающих аффинных преобразований  $f_j(x, y)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , евклидовой плоскости. Если эту систему применить к некоторой точке плоскости, то получим  $n$  точек. Далее к полученным точкам мы опять применяем эту систему функций и продолжаем итерационный процесс. При стремлении числа итераций к бесконечности предельным множеством будет некоторый фрактал.

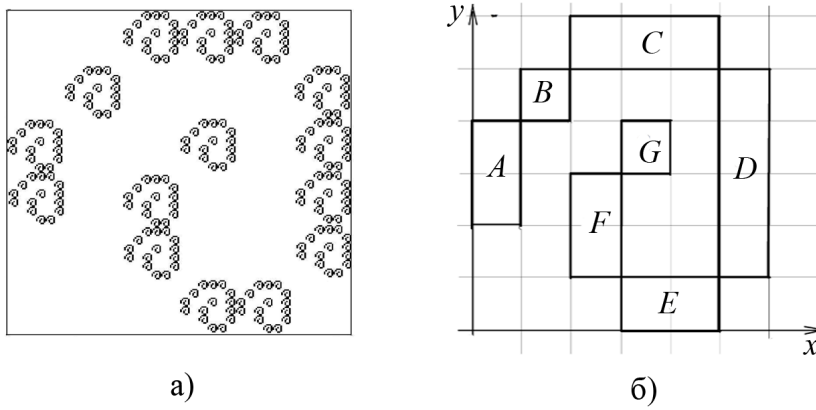


Рис. 1. Фрактал и его генератор.

В нашей работе мы решаем обратную задачу – находим системы итерированных функций, описывающих заданный геометрический фрактал. Рассмотрим фрактал, представленный на рис. 1а. Инициатором этого фрактала является единичный квадрат. Генератор фрактала изображен на рис. 1б. Разобьем его на семь прямоугольников:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  и  $G$ . Для нахождения системы итерируемых функций нами найдены аффинные сжимающие преобразования, переводящие инициатор в эти прямоугольники.

На основе найденной системы мы можем строить любое конечное число итераций фрактала.

К. Ф. Амозова, Е. Г. Ганенкова

*Петрозаводский государственный университет,*

*amokira@rambler.ru, g\_ek@inbox.ru*

**О  $\beta$ -ДОСТИЖИМОСТИ В КЛАССЕ  
 $\alpha$ -ДОСТИЖИМЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО НУЛЯ  
ОБЛАСТЕЙ**

Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $(x, y)$  – скалярное произведение. Обозначим через  $\mathbb{B}^n[x, R]$  и  $\mathbb{B}^n(x, R)$  замкнутый и открытый евклидовы шары с центром в точке  $x$  радиуса  $R$ .

**Определение [1].** Пусть  $\alpha \in [0; 1]$ . Область  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in D$ , называется  $\alpha$ -достижимой относительно точки  $a \in D$ , если для каждой точки  $p \in \partial D$  существует такое число  $r = r(p) > 0$ , что конус

$$K_+(p, a, \alpha, r) = \left\{ x \in \mathbb{B}^n[p, r] : \left( x - p, \frac{p - a}{\|p - a\|} \right) \geq \|x - p\| \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right\}$$

содержится в  $\mathbb{R}^n \setminus D$ .

Класс  $\alpha$ -достижимых областей подробно изучался в [1 – 3]. В [1] было доказано, что  $\alpha$ -достижимые области являются звездообразными и удовлетворяют *условию конуса*, важному для приложений, например таких, как теория интегральных представлений функции, теоремы вложения, вопросы граничного поведения функций, разрешимости задачи Дирихле.

В данной работе представлено еще одно свойство  $\alpha$ -достижимых областей.

Пусть  $A_\rho^\alpha$  – класс  $\alpha$ -достижимых относительно нуля областей  $D$ , таких что  $\min_{p \in \partial D} \|p\| = \rho$ ,  $\rho \in (0; +\infty)$ . Обозначим через

$\Omega_D^\beta \subset D$  множество, состоящее из тех точек, относительно которых область  $D \in A_\rho^\alpha$  является  $\beta$ -достижимой,  $0 \leq \beta \leq \alpha$ .

**Теорема.** 1) Если  $\alpha \in [0; 1)$ ,  $\beta \in [0; \alpha]$  или  $\alpha = 1, \beta \neq 0$ , то

$$\bigcap_{D \in A_\rho^\alpha} \Omega_D^\beta = \mathbb{B}^n \left[ 0, \rho \sin \frac{(\alpha - \beta)\pi}{2} \right].$$

2) Если  $\alpha = 1, \beta = 0$ , то  $\bigcap_{D \in A_\rho^1} \Omega_D^0 = \mathbb{B}^n(0, \rho)$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности и при поддержке РФФИ (проект № 14-01-00510).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Liczberski P., Starkov V. V. *Domains in  $\mathbb{R}^n$  with conical accessible boundary* // J. Math. Anal. Appl. – 2013. – V. 408. – No 2. – P. 547–560. DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.06.029
2. Амозова К. Ф., Старков В. В.  *$\alpha$ -достижимые области, негладкий случай* // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13. – Вып. 3. – С. 3–8.
3. Амозова К. Ф. *Достаточные условия  $\alpha$ -достижимости области в негладком случае* // Проблемы анализа. – Изд. ПетрГУ, 2013. – Т. 2 (20). – № 1. – С. 3–11.

**П. Д. Андреев**

*Северный (Арктический) федеральный  
университет им. М. В. Ломоносова,  
pdandreev@mail.ru*

## **НОРМА В ПРОСТРАНСТВЕ, КАСАТЕЛЬНОМ К $G$ -ПРОСТРАНСТВУ БУЗЕМАНА НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ**

Понятие  $G$ -пространства было введено Г. Буземаном в ряде статей 40-х годов 20 века. Подробный обзор теории  $G$ -пространств приведён в книге [1]. В частности, в ней даётся определение  $G$ -пространств неположительной кривизны.

В статье [2] доказывается, что всякое  $G$ -пространство Буземана неположительной кривизны является топологическим многообразием. Основным инструментом в доказательстве служит конструкция касательного конуса  $K_p X$  к данному пространству  $X$  в его произвольной точке  $p$ . Конус  $K_p X$  строится как метрическое пространство с новой метрикой  $d^*$ , заданной на том же множестве  $X$ . Свойства касательного конуса перечислены в следующей теореме.

**Теорема 1.** *Пусть  $(X, d)$  – односвязное  $G$ -пространство Буземана неположительной кривизны. Тогда его касательный конус  $K_p X = (X, d^*)$  также является  $G$ -пространством Буземана неположительной кривизны, причём*

- для любых  $y, z \in X$  выполнено неравенство  $d^*(y, z) \leq d(y, z)$ ;
- отображение  $\text{Id}: X \rightarrow X$  является гомеоморфизмом пространства  $X$  на  $K_p X$ ;

- семейство прямых в смысле метрики  $d^*$ , проходящих через точку  $p$ , совпадает с аналогичным семейством прямых в смысле метрики  $d$ , причём вдоль каждой такой прямой выполняется равенство  $d = d^*$ ;
- на пространстве  $K_p X$  действует группа  $H$  положительных гомотетий с центром  $p$ .

Односвязное  $G$ -пространство Буземана  $X$  неположительной кривизны называется пространством конического типа с вершиной  $p \in X$ , если тождественное отображение  $\text{Id} : X \rightarrow K_p X$  является изометрией. Это свойство выполняется тогда, и только тогда, когда на  $X$  действует группа положительных гомотетий с центром  $p$ . В частности, конус  $K_p X$  является пространством конического типа с вершиной  $p$ . Детальное изучение геометрии пространств конического типа приводит к следующей теореме.

**Теорема 2.** Пусть  $(X, d)$  – односвязное  $G$ -пространство Буземана неположительной кривизны конического типа. Тогда оно изометрично некоторому конечномерному нормированному пространству со строго выпуклой нормой.

Таким образом,  $G$ -пространства Буземана неположительной кривизны можно в определённом смысле рассматривать как сингулярный аналог финслеровых пространств.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00219 А).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Буземан Г. *Геометрия геодезических*. – М.: Физматлит, 1962. – 503 с.

2. Андреев П. Д. *Доказательство гипотезы Буземана для  $G$ -пространств неположительной кривизны* // Алг. Ан. – 2014. – Т. 26. – № 2. – С. 1–20.

**А. И. Афонина, И. Р. Каюмов, А. Н. Чупрунов**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,*

*sanyagir189@mail.ru, ikaumov@kpfu.ru,*

*Alexey.Chuprunov@ksu.ru*

## О ВЕРОЯТНОСТИ РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ ПО ЯЧЕЙКАМ

Пусть  $m_i, i \in \mathbf{N}$ , – независимые одинаково распределенные неотрицательные целочисленные случайные величины, определенные на вероятностном пространстве  $(\Omega_1, \mathfrak{A}, \mathbf{P}_1)$ ,  $(\eta_{i1}, \dots, \eta_{iN})$ ,  $1 \leq i \leq N$ , – обобщенные независимые одинаково распределенные схемы размещения  $m_i(\omega_1)$  частиц по  $N$  ячейкам, определенные на другом вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ . Рассматривается вероятность  $p_{nN} = p_{nN}(r, \omega_1)$  события, состоящего в том, что в каждой ячейке каждой схемы размещения содержится не более  $r$  частиц, где  $r$  – фиксированное число, т. е.  $p_{nN} = \prod_{i=1}^N \mathbf{P}\{\eta_{i1} \leq r, \dots, \eta_{iN} \leq r\}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathbf{E} \frac{m_1^{r+1}}{a_1^n} < \infty$ , величины  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $\frac{n}{N^r} \rightarrow \beta$ , где  $\beta < \infty$ . Тогда для почти всех  $\omega_1 \in \Omega_1$

$$\mathbf{P}(A_{n,N}) \rightarrow e^{-\beta \frac{a_{r+1} \mathbf{E}(m(m-1)\dots(m-r))}{a_1^{r+1}}}.$$

Асимптотическое поведение функции распределения случайной величины  $p_{nN}(\omega_1)$  описывается теоремой:

**Теорема 2.** Пусть  $\mathbf{E} \frac{m!m^{r+1}}{a_1^m} < \infty$ , а величины  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $\frac{n}{N^r} \rightarrow \beta$ , где  $\beta < \infty$ ,  $\sigma^2$  – дисперсия случайной величины  $m(m-1)\cdots(m-r)$ . Тогда

$$\mathbf{P}_1(G < x) \rightarrow \Phi(x)$$

для всех  $x \in \mathbb{R}$ , где

$$G(\omega_1) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left( \mathbf{E}(m(m-1)\cdots(m-r)) + \frac{a_1^{r+1}n}{N^r a_{r+1}} \ln(\mathbf{P}(A_{n,N}(\omega_1))) \right)$$

и

$$A_{nN} = A_{nN}(\omega_1) = \mathbf{P}(\cap_{i=1}^n \{\eta_{i1} \leq r, \dots, \eta_{iN} \leq r\}).$$

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Авхадиев Ф. Г., Каюмов И. Р., Чупрунов А. Н. *Исследование вероятности успешного размещения частиц по ячейкам методами комплексного анализа* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2003. – Т. 19. – С. 6–7.
2. Чупрунов А. Н., Хамдеев Б. И. *О вероятности исправления ошибок при помехоустойчивом кодировании, когда число ошибок – случайное множество* // Изв. вузов. Матем. – 2010. – Вып. 8. – С. 81–88.



**И. И. Ахмадуллин**

*Самарский государственный аэрокосмический  
университет им. ак. С. П. Королева,  
fatalityxl@yandex.ru*

**АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА  
СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ,  
ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ,  
ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ**

В классической механике движения твердых тел относительно неподвижной точки большое внимание уделяется так называемым интегрируемым случаям Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, в которых уравнения движения имеют первые интегралы, позволяющие сократить порядок системы до единицы. В работе осуществляется математическое моделирование движения относительно неподвижной точки тяжёлого твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, и производится определение влияния вязкой жидкости, находящейся в полости твердого тела, на его динамику. Для движения тяжёлого твердого тела относительно неподвижной точки наиболее интересно рассмотреть интегрируемые случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

Целью работы является построение математической модели движения твердого тела с вязкой жидкостью и получение аналитических зависимостей, позволяющих проводить анализ движения. Математические модели движения твердого тела с вязкой жидкостью приведены к интегрируемым случаям, и проведено сравнение движения твердого тела с жидкостью и без жидкости.

Численное интегрирование уравнений движения показало,

что движения систем с жидкостью и без неё сходны, а, следовательно, для исследования движения возмущённых систем можно применить асимптотические методы хотя бы на начальном этапе движения. В работе получены приближенные аналитические зависимости параметров движения твердого тела с вязкой жидкостью от времени методом Пуанкаре.

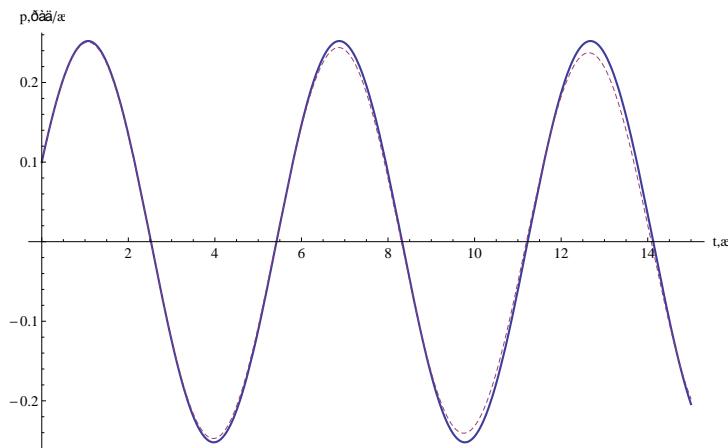


Рис. 1. Зависимость проекции угловой скорости от времени

На рис. 1 пунктиром изображено численное интегрирование, а синей линией — аналитическое решение методом Пуанкаре. Из графика видно, что аналитическое решение довольно хорошо совпадает с численным на начальном интервале времени, что соответствует теории метода Пуанкаре. Аналитическое решение имеет весьма громоздкий вид, поэтому в тексте тезисов формулы не приведены.

Полученные результаты можно использовать при качественном исследовании движения систем, содержащих полости, заполненные жидкостью.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Черноусько Ф. Л. *Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость*. – М.: ВЦ АН СССР, 1968. – 286 с.
2. Маркеев А. П. *Теоретическая механика*. – М.: Наука, 1990. – 416 с.
3. Моисеев Н. Н. *Асимптотические методы нелинейной механики*. – М.: Наука, 1969. – 380 с.

**Д. Ю. Ахметов**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
akhmetov.dy@gmail.com*

**МЕТОД ВАЛИДАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
ДОКУМЕНТОВ В ЭЛЕКТРОННОЙ  
ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ**

Предложен метод загрузки электронных документов, подготовленных в нотации  $\text{\TeX}$ , в журнальную систему Open Journal Systems (OJS) [1], расположенную на платформе Science-Tatarstan [2] (<http://science.tatarstan.ru>).

Метод валидации, применяемый на платформе, позволяет проверить загружаемый файл в журнальной системе на соответствие редакционным правилам оформления статей, в частности, использование стилевых конструкций и правил оформления библиографии.

При загрузке файлов статей в журнальную систему OJS отсутствует валидация типа загружаемых файлов. Вместо текстового документа можно загрузить файл мультимедиа, либо другого формата; ограничение составляет лишь размер файла,

выставляемый веб-сервером (на платформе Science-Tatarstan установлено ограничение в 10 МБ). Следующая задача состоит в выделении метаданных из загруженных файлов статей.

В работе [3] предложен метод загрузки файла в нотации  $\text{\TeX}$  в журнальную систему OJS.

Автоматическая стилевая валидация документа в нотации  $\text{\TeX}$  представляет собой проведение синтаксического анализа текстового документа, реализованного на серверной стороне платформы Science-Tatarstan.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-07-97018-р\_поволжье) и РГНФ (проект № 14-03-12004).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Open Journal Systems* // Public Knowledge Project. – URL: <http://pkp.sfu.ca/ojs/>.

2. Ахметов Д. Ю., Герасимов А. Н., Грачев А. О., Елизаров А. М., Липачев Е. К. *Облачная платформа поддержки электронных научных изданий* // Мат. VI Междун. науч.-практ. конф. “Электронная Казань 2014” (ИКТ в образовании: технологические, методические и организационные аспекты их использования): Часть 1. – Казань: Юниверсум, 2014. – С. 13–19.

3. Ахметов Д. Ю., Елизаров А. М., Липачев Е. К. *Стилевая валидация математических документов в электронном научном журнале* // Тр. конф. по компьютерной и когнитивной лингвистике “TEL’2014 Языковая семантика: Модели и технологии”. – Казань, 2014. – С. 25–27.

**И. С. Балафендиева, Д. В. Бережной,**

**М. К. Сагдатуллин, Л. Р. Секаева**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,*

*Berzhnoi.Dmitri@mail.ru, LRSekaeva@kpfu.ru*

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
ОБДЕЛКИ ТОННЕЛЯ МЕТРОПОЛИТЕНА,  
РАСПОЛОЖЕННОМ В ГРУНТЕ СЛОЖНОЙ  
ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ**

В работе предложена конечно-элементная методика расчета деформирования обделки тоннеля метрополитена, расположенного в сухом и водонасыщенном грунте. Для моделирования взаимодействия между элементами деформируемых конструкций и грунтовыми средами используется специальный “контактный” конечный элемент, позволяющий учесть все случаи взаимодействия контактирующих поверхностей. Решен ряд задач деформирования кольца обделки тоннеля метрополитена, расположенного в грунте сложной физической природы.

При проектировании современных транспортных и строительных сооружений часто практикуются работы в грунтах, находящихся в сложнейших физико-геологических условиях. Традиционно в механике деформируемого твердого тела используются методики, в которых используется лагранжево описание сплошной среды. В этом случае формулируется краевая задача в дифференциальной или вариационной формах, для решения которой возможно использование различных численных алгоритмов. В последнее время получили развитие пошаговые методы нагружения, в соответствии с которыми процесс деформирования представляется как последовательность равновесных состояний, и переход из текущего состояния в по-

следующее определяется приращением нагрузки, изменением граничных условий или расчетной области и т.д. При моделировании взаимодействия элементов конструкций с грунтами в большинстве случаев для адекватной оценки характера деформирования используются различные методики контактного взаимодействия элементов конструкций между собой и с грунтом. Для описания пластического деформирования обычно используется связь между приращениями компонент тензора обобщенных напряжений и тензора деформаций Коши–Грина в виде уравнений Прандтля–Рейсса для упрочняющегося материала.

Для моделирования механического контакта используется специальный контактный элемент, позволяющий учесть возможные различные случаи взаимодействия между собой контактирующих поверхностей, в частности, отрыва, проскальзывания с трением и т.д.

Будем считать, что первоначальное обжатие контактного конечного элемента всегда существует.

Для решения нелинейной задачи используется итерационный метод, являющийся комбинацией метода начальных напряжений и метода дополнительной деформации.

Разработана и реализована методика определения напряженно-деформированного состояния в обделке тоннеля метрополитена на основе уточненных моделей. Рассматривалась задача о взаимодействии кольца обделки с грунтовым массивом, достигнувшем предельного состояния. Численные расчеты свидетельствуют о достижении грунтом предельного состояния в части расчетной области.

Еще одна расчетная схема предполагает решение стационарной задачи консолидации грунтовой среды, которая учиты-

вает взаимное влияние давления грунтовых вод и напряженно-деформированного состояния скелета грунта. Проведены исследования течения грунтовых вод на напряженное состояние в грунте и обделке. Для этого на боковых поверхностях расчетной области задавались некоторые условные значения потока. В этом случае давление грунтовых вод приобретало неравномерность распределения по горизонтали и появлялась боковая составляющая нагрузки. В кольце обделки уровень напряжений незначительно увеличивается.

Предложенный метод решения задач механики с конкретными приложениями относится к современной технологии научного сопровождения, проектирования и строительства сложных объектов. Его использование позволяет проследить за изменением напряженно-деформированного состояния и поля перемещений структурно изменяющейся расчетной области от начала и до конца строительства. Это позволяет более точно и технически грамотно принимать проектные решения для различных этапов строительных работ, что зачастую нельзя сделать, опираясь только на существующие СНиПы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Голованов А. И., Бережной Д. В. *Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел*. – Казань, 2001. – 300 с.
2. Бережной Д. В., Голованов А. И., Луканкин С. А., Секаева Л. Р. *Моделирование поведения железобетонной обделки тоннеля в деформируемом грунте с учетом одностороннего контактного взаимодействия ее блоков через упругие прокладки* // Вестник Казан. гос. технич. ун-та. – 2010. – № 2. – С. 4–9.

3. Бережной Д. В., Кузнецова И. С., Саченков А. А. *Моделирование пластического деформирования многослойного грунта в зоне опоры многопролетного моста* // Учен. зап. Казан. унта. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152. – Кн. 1. – С. 116–125.

**А. С. Бегун, Е. О. Хусаинова**

*Институт автоматизации и процессов управления  
Дальневосточного отделения РАН, Владивостокский  
государственный университет экономики и сервиса,  
ustinova@iacp.dvo.ru*

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ**

В настоящей работе рассматривается класс задач о вискозиметрических течениях упруговязкопластических материалов между жесткими коаксиальными цилиндрами. Для математического описания исследуемых процессов используется модель больших упругопластических деформаций [1], обобщенная на случай учета вязких свойств материала при пластическом течении в [2]. Рассмотрено деформирование материала за счет поворота и винтового движения одного из цилиндров, изучен совместный случай поворота одной из жестких поверхностей и продавливания материала между цилиндрами. На жестких поверхностях отдельно рассмотрены случаи прилипания и случая проскальзывания материала.

Найдены условия зарождения и закономерности развития вязкопластических течений. Показано, что пластическое течение всегда начинается в окрестности внутреннего жесткого



цилиндра, и области вязкопластического течения развиваются одинаково как при движении внутреннего цилиндра, так и при движении внешнего. Рассчитаны поля напряжений, деформаций, перемещений и скоростей.

Получены решения задач, когда в окрестности одного из жестких цилиндров находится слой эластичной неньютоновской смазки. Изучены условия возникновения течения в слое смазки и в основном материале. Указаны значения максимальной скорости, при которой течение не выходит за слой смазки.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ № МК-2879.2014.1 и Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам на выполнение НИР (№ 2014/292).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В. *Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях* // ДАН. – 1996. – Т. 347. – № 2. – С. 199–201.
2. Ковтанюк Л. В., Шитиков А. В. *О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов* // Вестник ДВО РАН. – 2006. – № 4. – С. 87–93.

**А. Ф. Бекназарян**

*Казанский государственный энергетический университет,  
abeknazaryan@yahoo.com*

## ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть  $\Gamma$  – подгруппа группы вещественных чисел  $\mathbb{R}$ , всюду плотная относительно евклидовой топологии  $\tau$ , и  $G$  – группа характеров группы  $\Gamma$ :  $G = \hat{\Gamma}$ . По теореме двойственности Понтрягина группа характеров группы  $G$  изоморфна группе  $\Gamma$ :  $\hat{G} \cong \Gamma$ . С помощью  $G$  мы определяем декартово произведение  $G \times [0, \infty)$  и склеиваем в точку слой  $G \times \{0\}$ . Полученное пространство обозначается через  $\Delta$  и называется обобщенной плоскостью. Отметим, что данная конструкция принадлежит Аренсу и Зингеру [1]. Пространство  $\Delta$  канонически отождествляется с пространством  $\mathcal{C} = \{\alpha r : \alpha \in G, r \in [0, \infty)\}$  – аналогом комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , состоящем из гомоморфизмов  $\alpha r : \Gamma \rightarrow \mathbb{C} : a \mapsto \alpha(a)r^a$ . Для удобства, мы обычно принимаем  $\Delta = \mathcal{C}$ , представление  $s = \alpha r$  элемента  $s \in \Delta$  называем полярным разложением, а число  $r$  – модулем элемента  $s$ . Также обозначим через  $\Delta_1 = \{s \in \Delta, |s| \leq 1\}$  и  $\Delta_1^0 = \{s \in \Delta, |s| < 1\}$  соответственно замкнутый и открытый единичный круги на обобщенной плоскости.

Пусть  $\mathcal{O}(\Delta_1^0)$  – пространство обобщенных аналитических функций на  $\Delta_1^0$  (см. [2]),  $A = P(\Delta_1)$  – равномерная алгебра на  $\Delta_1$ , порожденная полиномами, и  $\text{Re}A$  – пространство вещественных частей функций из  $A$ .

**Определение.** *Непрерывная на  $\Delta_1^0$  функция  $f$  называется обобщенной гармонической функцией, если она локально аппроксимируется функциями из  $\text{Re}A$ , то есть для каждой*

точки из  $\Delta_1^0$  существует такая окрестность, что функция  $f$  аппроксимируется в этой окрестности функциями из  $\text{ReA}$ .

**Теорема.** Существует гармоническая функция  $u \in \mathcal{H}(\Delta_1^0)$  такая, что  $u \notin \text{ReO}(\Delta_1^0)$ .

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Arens R., Singer I. M. *Generalized analytic functions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – V. 81. – P. 379–393.
2. Григорян С. А. *Обобщенные аналитические функции* // Успехи матем. наук. – 1994. – Т. 49. – № 2. – С. 3–43.

**Р. И. Бикмухаметов**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
ravil.bkt@gmail.com*

#### ВЫЧИСЛИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОРЯДКИ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ ОТНОШЕНИЯ НА НИХ

Работа посвящена изучению алгоритмической сложности естественных отношений на вычислимых линейных порядках, а именно, отношений соседства  $S$ , отношения блока  $F$ , отношения плотности  $dn$ , отношения предельности слева  $P^-$  и отношения предельности справа  $P^+$ , определения которых можно найти, например, в работе [1].

Дж. Реммелом и С. Гончаровым и, позднее, Л. Фейнером [2] было установлено, что существует вычислимый линейный порядок  $\mathcal{L}$  такой, что в любой его вычислимой копии отношение соседства  $S_{\mathcal{L}}$  невычислимо. С другой стороны, М. Мозес [3] показал, что вычислимость отношения блока  $F_{\mathcal{A}}$  в некоторой вычислимой копии  $\mathcal{A}$  произвольного порядка  $\mathcal{L}$  влечет существование такого его вычислимого представления  $\mathcal{B}$ , что отношение

соседства  $S_{\mathcal{B}}$  вычислимо.

В работе изучены возможные варианты алгоритмической зависимости естественных отношений на классе вычислимых представлений вычислимого линейного порядка. В частности, доказано, что нет других зависимостей, кроме той, которую установил М. Мозес.

Другим направлением исследования является вопрос о конструктивизируемости начального сегмента вычислимого линейного порядка с добавленными отношениями плотности  $dn$ , предельности справа  $P^+$  и предельности слева  $P^-$ . М. Зубков [4] исследовал отношения соседства  $S$  и блока  $F$  на начальных сегментах вычислимых линейных порядков, что позволило ему получить более простое доказательство результата Коулза–Доуни–Хусаинова [5] о существовании вычислимого линейного порядка с неконструктивизируемым  $\Pi_2^0$ -начальным сегментом. Для этого им были построены вычислимые структуры  $\langle L, <_{\mathcal{L}}, S_{\mathcal{L}} \rangle$  и  $\langle L, <_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{L}} \rangle$ , содержащие неконструктивизируемые  $\Pi_1^0$ -начальные сегменты.

В работе рассмотрены случаи для оставшихся естественных отношений на линейных порядках, а именно, отношений плотности  $dn$ , предельности справа  $P^+$  и предельности слева  $P^-$ . Доказано существование вычислимых структур  $\langle L, <_{\mathcal{L}}, dn_{\mathcal{L}} \rangle$ ,  $\langle L, <_{\mathcal{L}}, P_{\mathcal{L}}^+ \rangle$  и  $\langle L, <_{\mathcal{L}}, P_{\mathcal{L}}^- \rangle$ , содержащих неконструктивизируемые  $\Pi_1^0$ -начальные сегменты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бикмухаметов Р. И. *Алгоритмическая независимость естественных отношений на вычислимых линейных порядках* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155. – № 3. – С. 80–90.
2. Downey R. G. *Computability theory and linear orderings*

// Handbook of Recursive Mathematics. – 1998. – V. 2. – P. 823–976.

3. Moses M. *Recursive properties of isomorphism types* // Monash Univ., Clayton, Victoria, Australia, 1983.

4. Зубков М. В. *О начальных сегментах вычислимых линейных порядков с дополнительными вычислимыми предикатами* // Алгебра и логика. – 2009. – Т. 48. – № 5. – С. 564–579.

5. Coles R. J., Downey R. G., Khoussainov B. *On initial segments of computable linear orders* // Order. – 1997. – V. 14. – No 2. – P. 107–124.

**С. В. Болдырь, Н. И. Насырова**

*Северный (Арктический) федеральный университет,  
Казанский национальный исследовательский  
технический университет (КАИ),  
ngoza@yandex.ru*

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ С ОДНИМ РЕБРОМ НА ПЛОСКОСТИ**

Простые модели динамических систем часто используют для описания развития биологических популяций. В связи с этим, представляет интерес исследование динамики дискретных вещественных отображений, зависящих от нескольких параметров. В работе исследуется отображение

$$F : \begin{cases} x \mapsto f(x + y), \\ y \mapsto px, \end{cases} \quad \text{где} \quad f(t) = \begin{cases} 1 + at, & t \leq 0, \\ 1 - bt, & t > 0, \end{cases}$$

а переменные  $x$ ,  $y$  и параметры  $a$ ,  $b$  и  $p$  принимают вещественные значения. Это отображение называют популяционным распределением, зависящим от возрастной структуры группы.

С помощью аналитических методов проведено исследование динамики отображения  $F$ , найдены неподвижные и двухпериодические точки отображения, области их существования и области, где найденные точки имеют различные типы, т. е. являются притягивающими, отталкивающими или седловыми.

**Теорема 1.** Пусть  $p \neq -1$ . Если  $a > \frac{1}{1+p}$ , то в области  $x + y \leq 0$  отображение  $F$  имеет неподвижную точку

$$(x_-, y_-) = \left( \frac{1}{1-a-ap}, \frac{p}{1-a-ap} \right).$$

Если  $b > -\frac{1}{1+p}$ , то в области  $x + y > 0$  отображение  $F$  имеет неподвижную точку

$$(x_+, y_+) = \left( \frac{1}{1+b+bp}, \frac{p}{1+b+bp} \right).$$

Типы неподвижных точек определяются следующими условиями на параметры  $a$ ,  $b$  и  $p$ .

Неподвижная точка  $(x_+, y_+)$  является отталкивающей при  $p \in (-\infty, -1)$  и  $b \in \left(-\frac{1}{1+p}, +\infty\right)$ ;  $p \in (1/2, 1)$  и  $b \in \left(\frac{1}{p}, -\frac{1}{p-1}\right)$ ;  $p > 1$  и  $b \in \left(\frac{1}{p}, +\infty\right)$ ;  $p \in (-1, -1/2)$  и  $b \in \left(\frac{1}{p}, -\frac{1}{1+p}\right)$ .

Неподвижная точка  $(x_+, y_+)$  является седловой при  $p \in (-1, 1)$  и  $b \in \left(-\frac{1}{p-1}, +\infty\right)$ . Неподвижная точка  $(x_+, y_+)$  является притягивающей при  $p \in (-1, -1/2)$  и  $b \in \left(\frac{1}{p}, -\frac{1}{p-1}\right)$ ;  $p \in (-1/2, 1/2)$  и  $b \in \left(-\frac{1}{p+1}, -\frac{1}{p-1}\right)$ ;  $p \in (1/2, +\infty)$  и  $b \in \left(-\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}\right)$ .

Неподвижная точка  $(x_-, y_-)$  является отталкивающей при  $p \in (-\infty, -1)$  и  $a \in \left(-\frac{1}{p}, +\infty\right)$ ;  $p \in (1, +\infty)$  и  $a \in \left(\frac{1}{p-1}, +\infty\right)$ .  
 неподвижная точка  $(x_-, y_-)$  является седловой при  $p \in (-\infty, -1)$  и  $a \in \left(\frac{1}{p-1}, \frac{1}{p+1}\right)$ ;  $p \in (-1, 1)$  и  $a \in \left(\frac{1}{p+1}, +\infty\right)$ ;  
 $p \in (1, +\infty)$  и  $a \in \left(\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p-1}\right)$ . неподвижная точка  $(x_-, y_-)$  является притягивающей при  $p \in (-\infty, -1)$  и  $a \in \left(\frac{1}{p-1}, -\frac{1}{p}\right)$ .

Найдены условия существования двупериодической орбиты.

**Теорема 2.** При выполнении условий

$$\frac{1+a+p-ap^2}{1+bp+ab-ap-abp^2} > 0, \quad \frac{1-b+p+bp^2}{1-ap+ab+pb-abp^2} \leq 0,$$

отображение  $F$  имеет двупериодические точки

$$\left( \frac{1+bp+a}{1+bp+ab-ap-abp^2}, \frac{p(1-b-ap)}{1+bp+ab-ap-abp^2} \right),$$

$$\left( \frac{1-b-ap}{1-ap+ab+pb-abp^2}, \frac{p(1+a+bp)}{1-ap+ab+pb-abp^2} \right).$$

С помощью пакета “Mathematica” нами построены области существования двупериодической орбиты. Определяя типы двупериодических точек, мы получили квадратное уравнение

$$\lambda^2 + \lambda(2abp - ab^2 - b^2p) - ab^2p^3 = 0,$$

имеющее два вещественных корня  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Сравнивая  $|\lambda_1|$  и  $|\lambda_2|$  с 1, можем сделать выводы о типе двупериодической орбиты. Нами построены области значений параметров, где двупериодическая орбита имеет различные типы. Исследовано поведение отображения  $F$  на границах этих областей.

Мы благодарим проф. Г. Сёдербакку за постановку задачи и научные консультации.

**М. А. Бутякова, Л. Р. Шакирова**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
mariya.butyakova@mail.ru, liliana008@mail.ru*

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ ИДЕИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО**

Доклад посвящен раскрытию методологических и методических идей изложения математических дисциплин в гимназии и университете, предложенных Н.И. Лобачевским. Будет показано, что ценные фундаментальные вопросы философии, методики и истории математики и изучение опыта ее преподавания Лобачевским являются полезными для современного математического образования в школе и университете.

Первое десятилетие своей педагогической деятельности Н.И. Лобачевский сосредоточился на главном вопросе методического характера: об основаниях геометрии. Он считал, что первыми требованиями при преподавании математики должны быть требования ясности и, вместе с тем, строгости изложения всех основных положений курса геометрии. Из записей лекций, составленных студентами в 1815 — 1816 гг., видим, что он, не удовлетворяясь тем, что в основании геометрии лежит постулат о параллельных прямых, не являющийся ни очевидным, ни доказанным, пытается доказать его как теорему. (Подобно попыткам Лежандра и Крелля). Затем Лобачевский предлагает подход к теории параллельных прямых, основанный на понятии о направлении. Однако отсутствие достаточной строгости в доказательствах, а также собственный подход к постулату о параллельных его не удовлетворял. К 1823 г. он выработал оригинальный учебник геометрии, отличный от евклидовых традиций, основную идею которого выразил в определении геометрии: “Часть чистой Математики, в которой предписывают-



ся способы измерять пространство, называется Геометрией». Таким образом, задачу геометрии автор видит в измерении пространственных величин, стремится обобщить, объединить однородные по своему характеру измерения на плоскости и в пространстве, включить в курс простейшие задачи на построение в пространстве. Учебник Лобачевского историк математики называют одним из первых фузионистских курсов геометрии. Исторический опыт решения проблемы слитного преподавания стереометрии и планиметрии является весьма актуальным, ибо она разрешена уже в пропедевтических курсах геометрии в младших классах (Н.С. Походова и др.), созданы учебники геометрии для основной школы (И.Ф. Шарыгин, Л.Н. Ерганжиева, В.А. Гусев и др.).

Известно, что соображения методического характера, желание создать безупречную в методическом смысле геометрию приводят Лобачевского к созданию новой геометрии (в работах «О началах геометрии» (1829) и «Геометрические исследования по теории параллельных линий» (1840), «Обзрения преподавания чистой математики» за 1824 — 1825 и 1825 — 1826 уч. гг.). Методические рекомендации Лобачевского по обучению геометрии в гимназиях будут полезны будущим учителям математики и учащимся школ для лучшего усвоения и правильного понимания школьного курса геометрии.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Болгарский Б. В. *Казанская школа математического образования. Ч. 1.* — Казань, 1966. — 260 с.
2. Смирнова И. М. *Идея фузионизма в преподавании школьного курса геометрии* // Математика (еженедельное приложение к газете «Первое сентября»). — 1998. — № 17. — С. 1.

3. *Николай Иванович Лобачевский: историко-биографический сборник.* – Казань: Жиен, 2014. – 656 с.

**И. И. Валеев, М. В. Фалилеева**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет*

## **ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ПЛАНИМЕТРИИ**

Для методического анализа представления темы “Четырехугольник” в школьном курсе геометрии нами было изучено четыре учебных пособия по школьному курсу планиметрии. Это учебные пособия для общеобразовательных школ авторов А.В. Погорелова и Л.С. Атанасяна, для профильных классов – И.М. Смирнова и И.Ф. Шарыгина. Обращаясь к понятиям и их свойствам по теме “Четырехугольник”, мы изучили определения четырехугольника, классификацию, свойства и признаки, а также выделили такие числовые характеристики, как число задач на выпуклые и невыпуклые четырехугольники, на построение четырехугольников циркулем и линейкой.

Важнейшим вопросом формирования любого математического понятия является выделение автором определения, поскольку именно оно является ключом к работе со свойствами, признаками и выделением видов в изучаемом понятии. Так, в учебных пособиях И.Ф. Шарыгина и И.М. Смирнова четырехугольник определяется через ограниченную часть плоскости, в остальных – как ломаная, обладающая определенными свойствами. Первое определение позволяет более широко и точно работать с отношением принадлежности точек и отрезков четырехугольнику, соответственно, более комфортно работать с

невыпуклым четырехугольником, что в дальнейшем дает возможность, например, на дополнительных занятиях ввести самопересекающийся четырехугольник. Введение данных трех видов четырехугольников, в свою очередь, позволяет без малейших затруднений обратиться к понятию четырехугольника при изучении координатного или векторного методов (например, рассматривать четырехугольник более широко без видов через множество четырех точек-вершин). Не можем не отметить, что в 9 классе в пособии А.В. Погорелова определение многоугольника проводится через ограниченную часть плоскости, но оно вступает в противоречие с ранее усвоенным (в 8 классе) детьми определением четырехугольника как фигуры, состоящей из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков.

Обратимся к классификациям четырехугольников, предлагаемых авторами учебных пособий. В учебном пособии А.В. Погорелова в 8 классе не предлагается деление четырехугольников на выпуклые и невыпуклые. Сразу после введения определения четырехугольника идет работа с параллелограммом, трапецией и их видами. Таким образом, у учащихся скорее всего сложится неверное представление о том, что классификация четырехугольника ограничена видами выпуклого четырехугольника с параллельными сторонами. Даже после введения понятия многоугольника в 9 классе определяются выпуклые, но нет ни слова о невыпуклых многоугольниках. У остальных авторов при определении четырехугольника (или многоугольника) предлагается два вида четырехугольников – выпуклые и невыпуклые. Но у Л.С. Атанасяна в списке задач к параграфу, где представлены определения выпуклых и невыпуклых многоугольников, нет ни одного упражнения на закрепление понятия

невыпуклый четырехугольник. Далее в первых задачах на закрепление понятий параллелограмма, трапеции, ромба, квадрата, прямоугольника используется понятие выпуклого четырехугольника, но постепенно выходит из употребления. Позднее в учебном пособии встречается понятие четырехугольника, но только в сочетании с параллелограммом и его видами. Такое часто повторяющееся сочетание приводит к неправильному формированию понятия “четырёхугольник” у учащихся, что сужает возможность его правильного использования при решении задач. В учебных пособиях И.М. Смирнова и И.Ф. Шарыгина система задач к параграфу направлена на сравнение свойств выпуклых и невыпуклых многоугольников.

Дальнейший анализ показывает, что представление темы “Четырёхугольники” в учебных пособиях, широко используемых в обучении учащихся 7 – 9 классов, не всегда полно формирует понятие четырёхугольника в целом.

**А. Р. Вахитова**

*Самарский государственный аэрокосмический  
университет им. акад. С. П. Королёва,  
alsu.vakhitova03@mail.ru*

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ДВИЖЕНИЯ СПУСКАЕМОГО АППАРАТА  
С ЧАСТИЧНОЙ ЗАКРУТКОЙ**

Одной из важных задач механики космического полета является проблема пространственной ориентации спускаемых аппаратов (СА). Неправильная ориентация СА может привести к нештатному нагреву, неправильному направлению тормозного импульса и, в конце концов, к разрушению СА. Ориентация

может осуществляться с помощью управляющих реактивных двигателей, а также при помощи маховиков, вращая которые внутренними электродвигателями, происходит изменение угловой скорости и ориентации СА. Второй вариант является более выгодным, так как не требует топливных затрат, но возникает проблема поиска зависимостей внутренних управляющих моментов от времени для различных режимов движения. В данной работе рассматривается движение СА как системы четырех тел, проводится построение математической модели движения трехроторного гиростата в атмосфере, получение решений дифференциальных уравнений движения, определение моментов внутреннего взаимодействия.

На основании теоремы об изменении кинетического момента механической системы составляются динамические уравнения движения гиростата с учетом воздействия момента аэродинамической силы. Для определения ориентации несущего тела к динамическим уравнениям добавляются известные кинематические уравнения Эйлера и кинематические связи между относительными угловыми скоростями и углами относительного закручивания роторов. Управление угловой скоростью несущего тела и его пространственной ориентацией осуществляется изменением относительных угловых скоростей роторов. Полученные результаты можно использовать при исследовании движения перспективных СА, использующих частичную закрутку для управления движением вокруг центра масс.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Алексеев А. В. *Движение системы соосных тел с медленно вращающимися роторами* // Сб. тр. XII Всерос. научн.-техн. семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм.

ун-та, 2006. – Т. 35. – С. 9–12.

2. Асланов В. С. *Пространственное движение тела при спуске в атмосфере*. – М.: Физматлит, 2004. – 106 с.

3. Асланов В. С. *Стабилизация спускаемого аппарата частичной закруткой при осуществлении неуправляемого спуска в атмосфере* // Космические исследования. – 2002. – Т. 40. – № 2. – С. 193–200.

**Р. А. Вепринцев**

*Тулский государственный университет,  
veprintsevroma@gmail.com*

### ОБ ОПЕРАТОРЕ СПЛЕТЕНИЯ ДАНКЛЯ

Будем придерживаться обозначений и определений, принятых в [1]. В предлагаемом исследовании мы также существенно опираемся на работу [2], в которой доказано, что при почти всех  $x \in \mathbb{R}^d$  представляющие меры  $\mu_x^\kappa$  оператора сплетения Данкля  $V_\kappa$  абсолютно непрерывны относительно сужения стандартной меры Лебега в пространстве  $\mathbb{R}^d$  на его борелевскую  $\sigma$ -алгебру, если функция кратности  $\kappa$  удовлетворяет условию положительности

$$\forall \alpha \in R_+ \quad \kappa(\alpha) > 0. \quad (1)$$

М. Рёслер в [3] доказала, что для всех полиномов  $p$  на  $\mathbb{R}^d$

$$V_\kappa p(x) = \int_{\mathbb{R}^d} p(y) d\mu_x^\kappa(y), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (2)$$

Перейдем от семейства мер  $\{\mu_x^\kappa\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ , определенных на борелевской  $\sigma$ -алгебре пространства  $\mathbb{R}^d$ , к семейству мер  $\{\overline{\mu}_x^\kappa\}$ , где  $\overline{\mu}_x^\kappa$  есть единственное продолжение меры  $\mu_x^\kappa$  на  $\sigma$ -алгебру измеримых по Лебегу множеств в  $\mathbb{R}^d$ .

Посредством равенства (2) оператор  $V_\kappa$  продолжается на класс функций  $C(\mathbb{R}^d)$ . В [1] построен оператор  $V_\kappa$  из  $L_{1,\gamma_\kappa}(\mathbb{B}^d)$  в  $L_{1,\kappa}(\mathbb{S}^{d-1})$ .

Справедлива

**Теорема 1.** Пусть функция кратности  $\kappa$  удовлетворяет условию (1). Тогда справедливы следующие утверждения:

(а) Если  $\varphi \in L_{\infty,\gamma_\kappa}(\mathbb{B}^d)$ , то

$$V_\kappa \varphi(x) = \int_{\mathbb{B}^d} \varphi(y) d\overline{\mu}_x^\kappa(y) \quad \text{почти всюду на } \mathbb{S}^{d-1}.$$

(б) Для произвольного измеримого по Лебегу центрально-симметричного множества  $A \subset \mathbb{B}^d$

$$\overline{\mu}_x^\kappa(A) = \overline{\mu}_{-x}^\kappa(A) \quad \text{почти всюду на } \mathbb{S}^{d-1}.$$

(в) Для произвольного измеримого по Лебегу множества  $A \subset \mathbb{B}^d$

$$\overline{\mu}_x^\kappa(A) + \overline{\mu}_{-x}^\kappa(A) = \overline{\mu}_x^\kappa(-A) + \overline{\mu}_{-x}^\kappa(-A) \quad \text{почти всюду на } \mathbb{S}^{d-1}.$$

При доказательстве положений (б) и (в) теоремы 1 используются следующая теорема и положение (а) теоремы 1.

**Теорема 2.** (1) Если  $\varphi \in L_{1,\gamma_\kappa}(\mathbb{B}^d)$  и  $\varphi(-x) = \varphi(x)$  почти всюду на  $\mathbb{B}^d$ , то  $V_\kappa \varphi(-x) = V_\kappa \varphi(x)$  почти всюду на  $\mathbb{S}^{d-1}$ .

(2) Если  $\varphi \in L_{1,\gamma_\kappa}(\mathbb{B}^d)$  и  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$  почти всюду на  $\mathbb{B}^d$ , то  $V_\kappa \varphi(-x) = -V_\kappa \varphi(x)$  почти всюду на  $\mathbb{S}^{d-1}$ .

Автор выражает признательность В. И. Иванову.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00045), Министерства образования и науки РФ (госзадание № 1.1333.2014К).

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вепринцев Р. А. *Некоторые вопросы гармонического анализа Данкля на сфере и шаре* // Изв. ТулГУ. Естественные науки. – 2013. – Вып. 3. – С. 6–26.
2. Triméche K. *Absolute continuity of the representing measures of the Dunkl intertwining operator and of its dual and applications* // Adv. Pure Appl. Math. – 2010. – V. 1. – Iss. 2. – P. 195–222.
3. Rösler M. *Positivity of Dunkl's intertwining operator* // Duke Math. J. – 1999. – V. 98. – No 3. – P. 445–463.

**С. С. Вихарев**

*Волгоградский государственный университет,  
vhr1987@mail.ru*

**АССИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ  
СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ  
ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ НА КВАЗИМОДЕЛЬНЫХ  
РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ**

Данная работа посвящена вопросам существования положительных решений уравнения Гинзбурга–Ландау на так называемых квазимодельных римановых многообразиях. Опишем их подробнее.

Пусть некомпактное риманово многообразие  $M$  изометрично прямому произведению  $\mathbb{R}_+ \times S_1 \times S_2 \times \dots \times S_k$ , где все  $S_i$  – компакты без края размерности  $n_i$  с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + g_1^2(r)d\theta_1^2 + g_2^2(r)d\theta_2^2 + \dots + g_k^2(r)d\theta_k^2,$$

где все  $g_i(r)$  – положительные гладкие на  $\mathbb{R}_+$  функции, а  $d\theta_i^2$  – метрика на соответствующем компакте  $S_i$ .



Рассмотрим на  $M$  уравнение

$$-\Delta u = c(x)f(u). \quad (1)$$

Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа–Бельтрами на  $M$ ,  $c(x) > 0$  на  $M$ , а  $f$  – локально-липшицева функция на  $[0, a]$ , такая что

$$f(0) = f(a) = 0, \quad f(u) > 0 \text{ на } (0, a).$$

Всюду ниже будем предполагать существование положительных констант  $c_1, c_2$ , таких что  $0 < c_1 \leq c(x) \leq c_2 < +\infty$ .

Данное уравнение является аналогом стационарного уравнения Гинзбурга–Ландау в многомерном случае:

$$-\Delta u = \alpha u - \beta u^3,$$

где  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$ .

Пусть  $G(r) = g_1^{n_1}(r)g_2^{n_2}(r) \cdot \dots \cdot g_k^{n_k}(r)$ .

**Теорема.** Пусть для некоторой константы  $q > 1$  выполнено

$$\limsup_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{\frac{2}{q-1}} \left( \frac{\int_{\rho/4}^{2\rho} G(r)dr}{\int_{\rho/2}^{\rho} G(r)dr} \right)^{\frac{1}{q-1}} \int_{2\rho}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} = +\infty$$

и существуют  $\delta(q) > 0$  и  $\sigma(q, \delta) > 0$  такие, что для всех  $s \in (0, \delta)$  выполнено неравенство  $f(s) \geq \sigma s^q$ .

Тогда любое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию  $0 \leq u \leq a$ , является тождественной константой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-97038-р\_поволжье\_а).

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Dancer E. N., Du Yihong *Some remarks on Liouville type results for quasilinear elliptic equations* // Proc. Amer. Math. Soc. – 2002. – V. 131. – No 6. – P. 1891–1899.
2. Bidaut-Veron M., Pohozaev S. I., *Non-existence results and estimates for some nonlinear elliptic problems* // J. Anal. Math. – 2001. – V. 84. – P. 1–49.

**Т. А. Волковая**

*Кубанский государственный университет,  
филиал в г. Славянске-на-Кубани,  
vta1987@yandex.ru*

**СИНТЕЗ В ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ЯДРЕ ДВУХ  
АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ**

Пусть  $\Omega$  – выпуклая область в  $\mathbf{C}$ ;  $H_{\Omega}(\theta)$  – опорная функция области  $\Omega$  в смысле комплексного анализа;  $H$  – пространство функций, аналитических в  $\Omega$ , с топологией равномерной сходимости на компактах;  $\pi(z)$  – целая функция вполне регулярного роста при некотором уточненном порядке  $\rho(r) \rightarrow \rho \in (0, 1)$  с всюду положительным индикатором. В этом случае существует такое  $\kappa \geq 1$ , что вне некоторого множества нулевой относительной меры  $\kappa^{-1}|z| \leq \hat{\mu}(|\pi(z)|) \leq \kappa|z|$ , где  $\hat{\mu}(r) = \nu(\ln r)$ ,  $\nu$  – обратная к функции  $\mu(r) := r^{\rho(r)}$ .

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор бесконечного порядка  $\pi(D) : H \rightarrow H$ . Очевидно, что он непрерывен. Говорят, что замкнутое  $\pi(D)$ -инвариантное подпространство  $W \subseteq H$  допускает спектральный синтез, если оно совпадает с замыканием в  $H$  линейной оболочки корневых элементов оператора  $\pi(D)$ , содержащихся в  $W$ .

Пусть  $S := \{S_1, S_2\}$  – система линейных непрерывных функционалов на  $H$  с характеристическими функциями  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  соответственно. Рассмотрим замкнутое  $\pi(D)$ -инвариантное подпространство

$$W_S := \{f \in H : \langle S_n, \pi(D)^k f \rangle = 0, S_n \in S, k \in \{0, 1, \dots\}\} \subseteq H.$$

Если  $S_1 = S_2$ , то подпространство  $W_S$  допускает спектральный синтез (случай  $\pi(\zeta) \in \mathbf{C}[\zeta]$  рассмотрен [1], общий случай – в [2]). Рассмотрим случай  $S_1 \neq S_2$ .

Пусть имеет место представление  $\mathcal{F} = \varphi f F$  и  $\mathcal{G} = \varphi g G$ , где  $\varphi$  – некоторая целая функции, а  $f, F, g, G$  являются композициями вида  $f := \hat{f} \circ \pi$ ,  $F := \hat{F} \circ \pi$ ,  $g := \hat{g} \circ \pi$ ,  $G := \hat{G} \circ \pi$ , где  $\hat{f}$ ,  $\hat{F}$ ,  $\hat{g}$ ,  $\hat{G}$  – тоже некоторые целые функции. Пусть  $\hat{\Lambda} := \{\hat{\lambda}_i\}$ ,  $\hat{\Gamma} := \{\hat{\gamma}_i\}$  – последовательности нулей функций  $\hat{F}$  и  $\hat{G}$ , все элементы  $\hat{\Lambda}$  и  $\hat{\Gamma}$  лежат вне единичного круга и

$$\Delta := \max \left\{ \sup_{\hat{\lambda}_n \in \hat{\Lambda}} \frac{n}{\hat{\mu}(|\hat{\lambda}_n|)}; \sup_{\hat{\gamma}_n \in \hat{\Gamma}} \frac{n}{\hat{\mu}(|\hat{\gamma}_n|)} \right\} < +\infty,$$

а для индикаторов  $h_{f\mathcal{G}}$ ,  $h_{g\mathcal{F}}$  функций  $f\mathcal{G}$  и  $g\mathcal{F}$  и некоторой ограниченной тригонометрически выпуклой  $2\pi$ -периодической функции  $h(\theta)$  выполнены оценки:  $\max\{h_{f\mathcal{G}}(\theta), h_{g\mathcal{F}}(\theta)\} < h(\theta) < H_\Omega(\theta)$ .

**Теорема.** *Если для некоторого  $\delta > 0$ , удовлетворяющего условию  $h(\theta) + \delta < H_\Omega(\theta)$ , нулевые множества  $\hat{\Lambda}$  и  $\hat{\Gamma}$  можно упорядочить так, что выполнено неравенство*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln S_n}{\hat{\mu}(t_n)} < -\kappa^{1+2\rho} \left( 2\kappa \frac{\Delta}{\delta} \right)^{\frac{2}{1-\rho}} (h + \delta),$$

где  $S_n := \sum_{i \geq n} \left| \frac{1}{\hat{\gamma}_i} - \frac{1}{\hat{\lambda}_i} \right|$ ,  $t_n := \max_{i=1, \dots, n} \max\{|\hat{\lambda}_i|, |\hat{\gamma}_i|\}$ ,

$$h = h_{\max} - \min\{h_{\min}; 0\}, \quad h_{\max} := \max_{\theta} h(\theta), \quad h_{\min} := \min_{\theta} h(\theta),$$

то замкнутое  $\pi(D)$ -инвариантное подпространство  $W_S \subseteq H$  допускает спектральный синтез.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Красичков-Терновский И. Ф. *Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. I. Теорема двойственности* // Матем. сб. – 1991. – Т. 182. – № 11. – С. 1559–1588.

2. Письменный Р. Г. *Главные подмодули и инвариантные подпространства аналитических функций* // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Славянск-на-Кубани, 2010. – 104 с.

**А. Р. Гайнуллина**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
GaynullinaAlina@gmail.com*

#### СВОБОДНЫЕ КОММУТАТИВНЫЕ ОПЕРАДЫ

В работах [1] и [2] было введено понятие коммутативной операды. Коммутативные операды (над фиксированной вербальной категорией) образуют подмногообразие в многообразии всех операд, рассматриваемых как многосортные универсальные алгебры. Следовательно, должны существовать свободные алгебры этого подмногообразия, то есть свободные коммутативные операды. В данной заметке получены первые результаты об их строении.

Напомним конструкцию свободных  $\Sigma$ -операд из работы [1] (с. 687–688). Пусть  $S$  – линейно упорядоченное множество,  $S^*$  – свободный моноид с базисом  $S$ . Рассмотрим операду  $G$  с компонентами  $G(n) = (S^*)^n$ . Определим в ней подопераду

$PC_S$ . Элементы  $PC_S(n)$  – это упорядоченные последовательности  $(w_1, \dots, w_n)$  слов в алфавите  $S$ , такие, что совокупность  $\{w_1, \dots, w_n\}$  является “префиксным кодом”, т. е. все эти слова различны, и ни одно из них не является префиксом другого.

**Теорема 1.**  $PC_S$  является свободной  $\Sigma$ -операцией с базисом  $X_S = \{X_{S,n} | n \geq 1\}$ , где  $X_{S,n}$  состоит из элементов  $(s_1, \dots, s_n)$ ,  $s_1, \dots, s_n \in S$  и  $s_1 < \dots < s_n$ . Для любого семейства  $\Omega = \{\Omega_n | \Omega_n \subseteq X_{S,n}, n \geq 1\}$  подоперация операнды  $PC_S$ , порожденная этим семейством, будет свободной операцией с базисом  $\Omega$ . Для любого семейства непересекающихся множеств  $\Omega = \{\Omega_n | n \geq 1\}$  можно найти линейно упорядоченное множество  $S$  и набор инъективных отображений  $\Omega_n \rightarrow X_{S,n}$  для всех  $n \geq 1$ .

Рассмотрим свободный коммутативный моноид  $Z$ , порожденный тем же множеством  $S$ . Ему соответствует коммутативная операнда  $Z$  с компонентами  $Z(n) = Z^n$ .

**Теорема 2.**  $\Sigma$ -подоперация операнды  $Z$ , порожденная элементами множества  $X_S = \{X_{S,n} | n \geq 1\}$ , определяемого как в теореме 1, является свободной коммутативной  $\Sigma$ -операцией с базисом  $X_S$ . Любая свободная коммутативная операнда изоморфна подоперанде такого вида.

Отметим, что изучение коммутативных операнд имеет также и прикладное значение (см. [3]).

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому (Приволжскому) федеральному университету для выполнения проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 2045).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тронин С. Н. *Опералы и многообразия алгебр, определяемые полилинейными тождествами* // Сиб. матем. журн. – 2006. – Т. 47. – № 3. – С. 670–694.
2. Тронин С. Н. *Естественные мультипреобразования мультифункторов* // Изв. вузов. Матем. – 2011. – № 11. – С. 58–71.
3. Tronin S. N., Gaynullina A. R. *Some applications of the operad theory in public-key cryptography* // Мат. конф. “Алгебра и математическая логика: теория и приложения” (г. Казань, 2–6 июня 2014 г.) и сопутствующей молодежной летней школы “Вычислимость и вычислимые структуры”. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – С. 146–147.

**А. В. Галанин**

*Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского, ООО НПП “Прима”,  
al@galanin.nnov.ru*

**ПОИСК МИНИМАЛЬНОГО НАБОРА  
ОДНОМЕРНЫХ ЦИКЛОВ, ПОРОЖДАЮЩИХ  
БАЗИС ГРУППЫ ОДНОМЕРНЫХ ГОМОЛОГИЙ  
ЗАМКНУТОГО МНОГООБРАЗИЯ**

Пусть полиэдр  $P$  –  $m$ -мерное замкнутое многообразие,  $s \in V$  – фиксированная точка. Также известны значения индексной вектор-функции  $J$  (см. [5]) относительно некоторого базиса  $H_{m-1}(P)$ . Здесь  $H_k(P)$  – группы гомологий  $P$  с коэффициентами из поля  $\mathbb{Z}_2$ ,  $k = 1, \dots, m$ ,  $L : C_1(P) \rightarrow \mathbb{R}$  – неотрицательная весовая функция.

**Определение.** Рассмотрим все наборы  $z_1, \dots, z_k$  1-циклов полиэдра  $P$ , проходящих через точку  $s$ . Отсортируем внутри каждого набора циклы по значению  $L(z_i)$ , а сами наборы – лексикографически по значениям  $L$  на циклах набора.

Алгоритм поиска минимального набора циклов, проходящих через заданную точку и порождающих базис  $H_1(P)$ :

**Шаг 1.** Нахождение минимальных путей до всех вершин  $P$  из точки  $s$  с помощью алгоритма Дейкстры (см. [1]).

**Шаг 2.** Для каждого ребра  $P$  строится цикл, полученный объединением ребра и минимальных путей от его концов к точке  $s$ .

**Шаг 3.** Сортировка полученных циклов по неубыванию длин.

**Шаг 4.** Нахождение первых  $p$  линейно независимых циклов из ранее отсортированного набора прямым ходом метода Гаусса.

Алгоритм позволяет выполнить поиск за время

$$O(n \lg n + np^2),$$

где  $n$  – количество симплексов в полиэдре,  $p$  – ранг  $H_{m-1}(P)$ .

В работе [4] описан аналогичный жадный алгоритм для задачи поиска минимального набора циклов, образующего базис  $H_1(P)$  для двумерных многообразий без края, в [2] и [3] метод обобщён для многообразий произвольной размерности. Предложенный автором метод применим для замкнутых многообразий произвольной размерности, что отличает его от метода из [4], при этом имеет лучшую асимптотическую сложность, чем методы из [2] и [3].

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. *Алгоритмы: построение и анализ*. – М. : Вильямс, 2006.
2. Chen C., Freedman D. *Measuring and computing natural generators for homology groups* // Computational Geometry. – 2010. – V. 43. – No 2. – P. 169–181.
3. Dey T. K., Sun J., Wang Y. *Approximating loops in a shortest homology basis from point data* // Proceedings of the 2010 annual symposium on Computational geometry / ACM. – 2010. – P. 166–175.
4. Erickson J., Whittlesey K. *Greedy optimal homotopy and homology generators* // Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms / Society for Industrial and Applied Mathematics. – 2005. – P. 1038–1046.
5. Lapteva A. V., Yakovlev E. I. *Index vector-function and minimal cycles* // Lobachevskii J. of Math. – 2006. – V. 22. – P. 35–46.

**Э. И. Галимова, Н. В. Тимербаева**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет*

**СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА  
РОССИЙСКОЙ И СИНГАПУРСКОЙ МЕТОДИК  
ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ**

Математика является основной, а часто и основополагающей, частью общего образования. Ни одна область человеческой деятельности не сможет обойтись без математики. Школьное математическое образование способствует овладению знаниями, необходимыми в современном мире; приобретению на-



выков логического и алгоритмического мышления; формированию ответственности; воспитанию способности к адекватному и объективному восприятию окружающего мира.

Как известно, учебный курс математики постоянно оказывается перед необходимостью преодолевать противоречие между математикой – развивающейся наукой и стабильным ядром математики – учебным предметом. Развитие науки требует непрерывного обновления содержания математического образования, сближения учебного предмета с наукой.

В настоящее время в ряде школ Республики Татарстан широко используется сингапурская методика преподавания. Поэтому нам представлялось интересным сравнить методики преподавания математики в двух странах, а, именно, российской и сингапурской методик. Проведенный сравнительный анализ позволяет заметить, что в российской методике обучения большинство учащихся большую часть урока остаются наблюдателями, слушают мнение других. В качестве преимуществ данной методики можно отметить развитие мыслительной деятельности учащихся; развитие математических способностей; формирование интереса к учению; воспитание активности в обучении; формирование творческого начала.

В основу же, так называемой, сингапурской системы преподавания положены коммуникативность и сотрудничество. Эта система основана на командных формах работы, создании психологически комфортной, безопасной среды для обучающихся, использовании разнообразных структур как для академических целей, так и для классбилдинга (объединение класса), тимбилдинга (объединение команды), ученики могут работать в парах или группах и т.д. Общаясь с соседом, проговаривая ему выученные формулировки, имея возможность научить

кого-то тому, что знаешь сам, и получить, в случае необходимости, консультацию или разъяснение, ученики формируют и позитивное отношение к предмету, и навыки выполнения различных заданий.

Традиционное обучение, присущее российской системе, основывается на принципе “учитель – ученик”, где урок проходит в виде лекции, а за урок успевают ответить только два-три ученика. По сингапурской системе во время урока задействован весь класс. Каждый ребенок должен быть услышан. Сингапурская методика преподавания развивает в ученике жизненно необходимые в любое время качества, такие как коммуникативность, сотрудничество, критическое мышление, креативность.

Следует заметить, что в обеих методиках обучения математике большая роль в отборе средств, методов и приемов работы на уроке отводится учителю. Успех дела зависит во многом от того, насколько глубоко проникает учитель в специфику учебного материала, насколько умело ставит учебные познавательные задачи, учитывает уровень общей и математической подготовки учащихся, их личностные качества, насколько умело прогнозирует результаты использования того или иного средства, метода или приема.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Калуненко А. М. *О преимуществах системно-деятельностного подхода к педагогическому дискурсу* // Вестник Иркутского гос. лингвистического ун-та. – Иркутск, 2012. – № 4.
2. Петрова М. А. *Отличительные особенности компетентностного и системно-деятельностного подходов в образовании* // Системно-деятельностный подход в разноуровневом вариативном образовании: проблемы, идеи, опыт реализации. Материалы науч.-практ. интернет-конф. – 2012.

Г. Р. Галиулина, Е. Р. Садыкова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
galiulina.guzal@mail.ru

## ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

В математике тема “Неравенства” занимает одно из важных мест. В школе дети начинают изучать эту тему уже в начальных классах, где они знакомятся со свойствами неравенств и методами их решения в простейших случаях. Решение задач с помощью неравенств используется в каждой области математики: в алгебре, в геометрии, в теории вероятностей, в математической физике и других дисциплинах. На практике учащиеся сталкиваются с тем, что некоторые задачи невозможно решить стандартным способом, то есть могут применяться замечательные неравенства, такие как неравенства Коши, Бернулли, Коши–Буняковского.

В школьном курсе математики рассматриваются различные неравенства. Многие из них основаны на очень простом неравенстве о средних, появившемся еще в древние времена:  $\frac{1}{2}(a + b) \geq \sqrt{ab}$ , где  $a, b > 0$ .

Известно, что великий французский математик Огюстен Луи Коши (1789–1857) в начале XIX века занимался обобщением этого неравенства. Самым интересным оказалось обобщение, которое показано в виде следующей теоремы.

**Теорема** (Неравенство Коши). *Среднее геометрическое положительных чисел не больше среднего арифметического этих же чисел:  $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ , где  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ .*

Равенство в неравенстве Коши достигается, когда все участвующие в нём числа одинаковы.

С помощью неравенства Коши можно находить наибольшее и наименьшее некоторых выражений. Например, если сумма положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  равна  $a$ , то произведение этих чисел принимает наибольшее значение при  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{a}{n}$  и это наибольшее значение равно  $(\frac{a}{n})^n$ . Если произведение положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  равно  $b$ , то их сумма принимает наименьшее значение при  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \sqrt[n]{b}$ , и это значение равно  $n \cdot \sqrt[n]{b}$ .

Следующее неравенство, которое представляет особый интерес и часто применяется при решении задач – это неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x \geq -1, \quad n \geq 0.$$

Равенство в нем достигается тогда и только тогда, когда  $n=1$  или  $x=0$ .

Применяя неравенство Бернулли, решим уравнение:  $\sqrt[7]{1-\sqrt{1-x^2}} + \sqrt[7]{1+\sqrt{1-x^2}} = 2$ . Имеем

$$(1+\sqrt{1-x^2})^{\frac{1}{7}} + (1-\sqrt{1-x^2})^{\frac{1}{7}} \leq 1 + \frac{1}{7}\sqrt{1-x^2} + 1 - \frac{1}{7}\sqrt{1-x^2} = 2.$$

Равенство возможно лишь при  $\sqrt{1-x^2} = 0$ , т. е.  $x = \pm 1$ . Проверкой убеждаемся, что  $x = \pm 1$  – корни уравнения.

Одним из красивейших неравенств является неравенство Коши–Буняковского: для любых чисел  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2).$$

Докажем, что для любого допустимого значения  $x$  выполняется неравенство  $\sqrt{2x+7} + 2\sqrt{3+5x} + 3\sqrt{4-7x} \leq 14$ . Применим неравенство Коши–Буняковского, которое дает для любого допустимого значения  $x$  соотношение:

$$\sqrt{2x+7} + 2\sqrt{3+5x} + 3\sqrt{4-7x} \leq$$

$$\leq \sqrt{(\sqrt{2x+7})^2 + (\sqrt{3+5x})^2 + (\sqrt{4-7x})^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = 14.$$

В заключение отметим, что материал о замечательных неравенствах полезен при решении заданий единого государственного экзамена и задач повышенного уровня сложности.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гомонов С. А. *Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения: 10 – 11 классы. Учебное пособие. 2-е изд.* – М.: Просвещение, 2006. – 256 с.
2. Иванов О. А. *Элементарная математика для школьников, студентов, преподавателей.* – М.: МЦНМО, 2009. – 384 с.
3. Коровкин П. П. *Неравенства.* – М.: Наука, 1983. – 56 с.
4. Седракян Н. М., Авоян А. М. *Неравенства. Методы доказательства.* – М.: Физматлит, 2002.

**Л. И. Гафиятуллина**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
gafiyat@gmail.com*

#### **НЕРАВЕНСТВА ТИПА ПОЛИА–СЕГЁ И МАКАИ ДЛЯ ЕВКЛИДОВОГО МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ**

Пусть  $\Omega$  – односвязная область на комплексной плоскости,  $\rho(z, \partial\Omega)$  – расстояние от точки  $z$  до границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ ,  $\rho(\Omega)$  – радиус максимального вписанного в область  $\Omega$  круга,  $A(\Omega)$  – площадь области  $\Omega$ . Физический функционал

$$P(\Omega) := 2 \iint_{\Omega} u(z, \Omega) dA \quad (1)$$

называется жесткостью кручения области  $\Omega$ , где  $u(z, \Omega)$  – решение краевой задачи  $\Delta u = -2$  в  $\Omega$ ,  $u = 0$  на границе  $\partial\Omega$ .

В 1951 г. Г. Поля и Г. Сегё доказали, что для любой выпуклой области имеет место неравенство

$$P(\Omega) \geq \frac{1}{2} A(\Omega) \rho(\Omega)^2, \quad (2)$$

равенство в котором достигается, когда  $\Omega$  – круг.

В 1962 г. Е. Макай было получено обратное неравенство, а именно, что для любой выпуклой области

$$P(\Omega) < \frac{4}{3} A(\Omega) \rho(\Omega)^2, \quad (3)$$

причем постоянная  $4/3$  – наилучшая из возможных.

Рассмотрим геометрический функционал

$$I_2(\Omega) := 2 \iint_{\Omega} \rho(z, \partial\Omega)^2 dA, \quad (4)$$

который называется евклидовым моментом инерции области  $\Omega$  относительно границы.

**Теорема 1.** Пусть  $\Omega$  – выпуклая область на плоскости. Тогда имеет место следующее неравенство

$$I_2(\Omega) \geq \frac{1}{6} A(\Omega) \rho(\Omega)^2, \quad (5)$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\Omega$  – описанный около окружности многоугольник.

**Теорема 2.** Для любой выпуклой области  $\Omega$  имеет место неравенство

$$I_2(\Omega) < \frac{1}{3} A(\Omega) \rho(\Omega)^2, \quad (6)$$

при этом равенство имеет место для вырожденных областей.

В частности, равенство в теореме 2 достигается в пределе для узких прямоугольников со сторонами  $a$  и  $b$ , где  $b/a \rightarrow 0$ . Неравенство (5) является аналогом неравенства Г. Полия и Г. Сегё, а (6) – аналогом неравенства Е. Макаи.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Салахудинов Р. Г. *Введение в геометрическую теорию изопериметрических неравенств, I*. – Казань: КФУ, 2013. – 100 с.
2. Салахудинов Р. Г. *Изопериметрические свойства евклидовых граничных моментов односвязной области* // Изв. вузов. Матем. – 2013. – № 8. – С. 66–79.
3. Полия Г., Сегё Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике*. – М.: Физматгиз, 1962. – 336 с.
4. Makai E. *On the principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam* // Studies in Math. Analysis and Related Topics.– Stanford University Press, 1962. – P. 227–231.

**А. А. Горшков**

*Нижегородский национальный исследовательский  
университет им. Н.И. Лобачевского,  
tiger-nn@mail.ru*

### **УСТОЙЧИВЫЙ СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Особенностью задач оптимизации является их возможная некорректность [1], которая выражается в несуществовании

классических решений и неустойчивости этих решений в зависимости от возмущений исходных данных. Устойчивый принцип Лагранжа в секвенциальной форме на основе метода двойственной регуляризации [2] позволяет решать некорректные задачи. Отличие секвенциального подхода от классических методов [3] заключается в переходе с языка оптимальных элементов на язык минимизирующих последовательностей [4].

В работах [1], [2] метод двойственной регуляризации рассматривался в гильбертовом пространстве. Однако в некоторых конкретных оптимизационных задачах возникает необходимость использования равномерно выпуклого банахова пространства в качестве несущего пространства допустимых элементов исходной оптимизационной задачи.

В докладе приводится пример задачи оптимального управления с функциональными ограничениями для линейного параболического уравнения в дивергентной форме. Ее особенностью является то, что функционалы, задающие ограничения типа равенства и неравенства определяются посредством значений решения параболического уравнения в некотором дискретном наборе точек, возможно и граничных, области изменения независимых переменных начально-краевой задачи. Последнее обстоятельство требует погружения множества допустимых элементов в рефлексивное, а именно, в равномерно выпуклое банахово пространство суммируемых с  $p$ -й степенью,  $2 < p < +\infty$ , функций.

Отмеченная выше задача может быть сведена к задаче выпуклого программирования, следующего вида:

$$f^0(z) \rightarrow \min, \quad A^0 z = h^0, \quad g_i^0(z) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad z \in D \subset Z, \quad (1)$$

где  $f^0 : D \rightarrow R$  – липшицевый строго равномерно выпуклый



непрерывный функционал,  $A^0 : Z \rightarrow H$  – линейный непрерывный оператор,  $g_i^0 : D \rightarrow R$ ,  $i = 1, \dots, m$ , – липшицевы выпуклые функционалы,  $g^0(z) \equiv (g_1^0(z), \dots, g_m^0(z))^*$ ,  $h^0 \in H$ , – заданный элемент,  $D$  – выпуклое замкнутое ограниченное множество,  $Z$ ,  $H$  – рефлексивные пространства.

Для задачи (1), а следовательно, и для оптимизационных задач, сводящихся к ней, может быть получен устойчивый секвенциальный принцип Лагранжа, который является устойчивым по отношению к ошибкам исходных данных, более того, при определенных естественных условиях на исходные данные задачи сильно сходится к ее решению. При этом отсутствие в исходной и возмущенной задачах седловой точки функционала Лагранжа никоим образом не влияет на эту сходимость.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00199-а, № 13-07-97028-р\_поволжье\_а, № 13-02-12155-офи\_м), Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014–2016 гг. (шифр заявки 1727), а также при поддержке гранта в рамках соглашения от 27 августа 2013 г. № 02.В.49.21.0003 между Министерством образования и науки РФ и Нижегородским госуниверситетом им. Н. И. Лобачевского.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сумин М. И. *Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности* // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. – 2007. – Т. 47. – № 4. – С. 602–625.

2. Сумин М. И. *Об устойчивом секвенциальном принципе Лагранжа в выпуклом программировании и его применении при решении неустойчивых задач* // Тр. Ин-та матем. и мех.

УрО РАН. – 2013. – Т. 19. – № 4. – С. 231–240.

3. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. *Оптимальное управление*. – М.: Наука, 1979. – 432 с.

3. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*. – М.: Наука, 1977. – 624 с.

**Р. К. Губайдуллина**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
grenata@mail.ru*

### **О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Рассматривается нелинейное сингулярное интегральное уравнение вида

$$K(u) \equiv a(x)u(x) + \int_D \frac{f(\theta)h(x, y, u(y))}{|x - y|^2} dy = g(x), \quad \theta = \frac{x - y}{|x - y|}, \quad (1)$$

где  $D$  – круг единичного радиуса с центром в начале координат,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2) \in D$  – его точки,  $|x - y|$  – евклидово расстояние между этими точками, функции  $a(x) \in C(D)$ ,  $g(x) \in L_2(D)$  – данные,  $u(x) \in L_2(D)$  – искомая; характеристика  $f(\theta) \in L_1[0, 2\pi]$  удовлетворяет необходимому и достаточному условию существования сингулярного интеграла из (1) в смысле главного значения [1]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = 0,$$

а данная функция  $h(x, y, z) \in C(D \times D)$  при произвольно фиксированном  $z$  и удовлетворяет условию Лишица по третьему аргументу при фиксированных  $x, y$ .

Отметим, что нами ранее (см., напр., главу II в диссертации [2], в частном случае  $h(x, y, z) = h_1(x, y) \cdot z$  ( $h_1 \in C(D \times D)$ ) получены простые достаточные условия существования и единственности решения уравнения (1), а также на их основе обоснованы простые вычислительные схемы итерационного, проекционного и проекционно-итеративного методов; при этом полученные для указанных методов оценки погрешности автоматически реагируют на структурные свойства заданных функций.

В данном сообщении мы решаем аналогичные вопросы для уравнения (1). При обосновании приближенных схем нами используется метод гладких операторов. Полученные результаты распространяются также на аналоги уравнения (1), заданные в  $n$ -мерном единичном шаре с центром в начале координат.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Михлин С. Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
2. Губайдуллина Р. К. *Приближения решений одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений* // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Казань: КФУ, 2012. – 105 с.

**И. А. Гундырев**

*Омский государственный университет*

*им. Ф. М. Достоевского,*

*gundyrev@omsu.ru*

**О СУЩЕСТВОВАНИИ ВНУТРЕННЕЙ ПОДОБНО  
ОДНОРОДНОЙ МЕТРИКИ НА ЛОКАЛЬНО  
КОМПАКТНОМ ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВЕ  
СВЯЗНОЙ ГРУППЫ**

Обозначим через  $\mathbb{R}_+$  мультипликативную группу положительных вещественных чисел. Для произвольных топологических групп  $G_1, G_2$  обозначим через  $G_1 \ltimes G_2$  полупрямое произведение групп, снабженное топологией произведения на пространстве  $G_1 \times G_2$ .

**Определение 1.** *Биекция  $f: X \rightarrow X$  метрического пространства  $(X, \rho)$  на себя называется  $\alpha$ -подобием ( $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ), если для любых точек  $x, y \in X$  выполняется равенство:*

$$\rho(f(x), f(y)) = \alpha \cdot \rho(x, y).$$

*Биекция  $f: X \rightarrow X$  называется подобием, если  $f$  –  $\alpha$ -подобие при некотором  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ .*

**Определение 2.** *Метрическое пространство  $X$  называется однородным (подобно однородным), если группа его изометрий (подобий) действует транзитивно на  $X$ .*

**Определение 3.** *Метрика  $\rho$  на пространстве  $X$  называется подобно однородной относительно действия группы  $G$  на  $X$ , если группа  $G$  действует транзитивно на  $X$ , и любой элемент  $g \in G$  является подобием пространства  $(X, \rho)$ .*

Начало изучения подобно однородных пространств с внутренней метрикой положено в статье [1]. Сформулированная

в [1] гипотеза о строении локально компактных подобно однородных неоднородных пространств с внутренней метрикой доказана в статье [2].

Основным результатом является

**Теорема.** Пусть  $X = G/H$  – эффективное локально компактное фактор-пространство связной полной топологической группы  $G$  с компактно-открытой топологией относительно канонического левого действия  $G$  на  $G/H$ . Пространство  $X$  допускает внутреннюю метрику с группой подобий  $G$  (включающей и элементы, не являющиеся изометриями) относительно этого действия тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1.  $G$  – хаусдорфова связная локально компактная группа с первой аксиомой счетности;
2.  $H$  – компактная подгруппа в  $G$ ;
3.  $G/H$  – локально связно;
4. Для некоторой подгруппы  $I$  в  $G$  существует изоморфизм топологических групп  $\Phi: G \rightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot) \ltimes I$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Берестовский В. Н. Подобно однородные локально полные пространства с внутренней метрикой // Изв. вузов. Матем. – 2004. – № 11. – С. 3–22.
2. Гундырев И. А. Строение подобно однородных неоднородных локально компактных пространств с внутренней метрикой // Матем. тр. – 2014. – Т. 17. – № 2. – (в печати).

**А. И. Давлетшин**

*Институт механики и машиностроения*

*Казанского научного центра РАН,*

*anas.davletshin@gmail.com*

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ**

При теоретическом изучении гидродинамического взаимодействия газовых пузырьков в жидкости широко используются математические модели, представляющие собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиусов пузырьков и координат их центров. Так, в работе [1] подобная модель построена для изучения взаимодействия двух сферических пузырьков, а в [2] – для исследования произвольного количества таких пузырьков. Аналогичная модель взаимодействия сферических пузырьков предлагается и в настоящей работе. В отличие от модели работы [1] она допускает рассчитывать взаимодействие произвольного числа пузырьков, а в отличие от модели работы [2] – позволяет делать это при более близком расположении пузырьков друг к другу.

В предлагаемой модели предполагается, что пузырьки находятся в пучности интенсивной стоячей волны с давлением, изменяющимся по гармоническому закону. Колебания давления жидкости вызывают радиальные пульсации пузырьков, что в свою очередь приводит к их взаимодействию. В результате взаимодействия пузырьки в ходе расширения-сжатия могут перемещаться в пространстве. Газ в пузырьках принимается идеальным гомобарическим, его давление – изменяющимся по адиабатическому закону. Считается, что эффекты вязкости и

сжимаемости жидкости малы. Поэтому они учитываются с помощью поправок к уравнениям взаимодействия пузырьков, выведенным в предположении, что жидкость является идеальной несжимаемой. Вывод уравнений взаимодействия осуществляется методом сферических функций с использованием интеграла Коши–Лагранжа, кинематических и динамических граничных условий на поверхности пузырьков. При этом применяется полученное в [3] компактное выражение преобразования сферических функций при переходе от системы координат, связанных с одним пузырьком, к системе координат, связанных с другим.

Полученные уравнения взаимодействия пузырьков имеют четвертый порядок точности (что на порядок выше, чем в [2]) относительно  $R/D$ , где  $R$  – характерный радиус пузырьков, а  $D$  – характерное расстояние между ними.

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Отделения ЭММиПУ РАН № 13 ОЭ.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Аганин А. А., Давлетшин А. И. *Уточненная модель взаимодействия сферических газовых пузырьков в жидкости* // Матем. моделирование. – 2009. – Т. 21. – № 9. – С. 89–98.
2. Doinikov A. A. *Mathematical model for collective bubble dynamics in strong ultrasound fields* // J. Acoust. Soc. Am. – 2004. – V. 116. – No 2. – P. 821–827.
3. Аганин А. А., Давлетшин А. И. *Преобразование сферических функций при моделировании взаимодействия газовых пузырьков в жидкости* // Волны и вихри в сложных средах. Сб. материалов школы. – Москва: МАКС Пресс, 2013. – С. 49–51.

**А. С. Елгушова, Э. И. Фазлеева**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
Aelgushova@yandex.ru, elmira.fazleeva@mail.ru*

**РОЛЬ ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ  
ПРИ ИЗУЧЕНИИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ  
В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ 5 КЛАССА**

Главным в работе учителя при обучении натуральным числам в 5 классе является достижение понимания всеми учащимися основных свойств и признаков арифметических действий над натуральными числами, так как этот материал пригодится ученикам в будущем (в старших классах) при выполнении многих нестандартных заданий. Неоценимую пользу при этом могут принести занимательные задачи.

Занимательная задача – это задача, вызывающая у ученика непроизвольный интерес, характерными признаками которой являются: развивающая направленность; использование нестандартных форм и способов представления данных; использование в данных задачи вымышленных или реальных персонажей; построение решения без применения математических выкладок; необычно поставленные вопросы.

Определившись с типологиями занимательных задач с натуральными числами и оценив их роль при усвоении темы “Натуральные числа”, мы задались вопросом: встречаются ли в действующих учебниках математики 5 класса задачи данного характера и каков их состав. Были проведены анализ и оценка состава занимательных задач по теме “Натуральные числа” трех учебников для 5 класса общеобразовательных учреждений: учебник “Математика” под редакцией У.В. Дорофеева (здесь всего 6 % из всех задач являются занимательными);



учебник “Арифметика” под редакцией С.М. Никольского (14 %); учебник “Математика” под редакцией Н.Я. Виленкина (5 %).

В результате данного анализа мы пришли к выводу, что необходимо дополнить системы задач конкретных учебников по рассматриваемой теме занимательными задачами.

Наши рекомендации:

– занимательные задачи по теме “Натуральные числа” в учебниках по математике для 5 класса, в первую очередь, необходимо выделять каким-либо образом (например, подчеркивание, указание символом и т.д.);

– занимательные задачи рекомендуем включать после изучения определенной темы как можно чаще, при этом типология задачи должна соответствовать изученной теме.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Виленкин Н. Я., Жохов В. И., Чеснаков А. С., Шварцбург С. И. *Математика. Учеб. для 5 кл. общеобразоват. учреждений.* – М: “Мнемозина”, 2013. – 280 с.

2. Галкин Е. В. *Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами. Учеб. пособие для учащихся 7–11 кл.* – Челябинск: Взгляд, 2005. – 271 с.

3. Дорофеев Г. В., Шарыгин И. Ф., Суворов С. Б. *Математика. Учеб. для 5 кл. общеобразоват. учреждений.* – М: Просвещение, 12-е изд., 2011. – 303 с.

4. Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н., Шевкин А. В. *Арифметика. Учеб. для 5 кл. общеобразоват. учреждений.* – М: Просвещение, 11-е изд., 2012. – 272 с.

**В. И. Жегалов, А. Н. Миронов, Е. А. Уткина**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,*

*vzhegalov@yandex.ru*

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДОМИНИРУЮЩЕЙ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Речь идет об уравнениях вида

$$L(u) \equiv \frac{\partial^m u(x)}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m-1, \\ \alpha_s \leq m_s, s=\overline{1, n}}} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = f(x), \quad (1)$$

где  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – декартовы координаты точки  $x$ ,  $m = m_1 + \dots + m_n$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $m_s$ ,  $\alpha_s$  – целые неотрицательные числа,  $m > 1$ ,  $u(x)$  – искомая, а  $a_\alpha$ ,  $f$  – известные функции. Признаком, отличающим уравнения вида (1) от других уравнений с частными производными, является наличие первого слагаемого в правой части (1), представляющего собой доминирующую производную: все остальные входящие в (1) производные получаются из нее отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования по какой-либо из независимых переменных. Заметим, что подобный признак всегда имеет место для обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому можно рассматривать (1) как класс уравнений с частными производными, наиболее близкий к классу линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

При  $m_s = 1$ ,  $s = \overline{1, n}$ , уравнение (1) вошло в математическую литературу под именем Л. Бианки, который одновременно с О. Николетти еще в 1895 г. [1], [2] рассматривал его как

многомерное обобщение хорошо известного в математической физике уравнения

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f. \quad (2)$$

Впоследствии обнаружили различные прикладные аспекты обсуждаемых уравнений. Частные случаи (1) возникают при моделировании процессов вибрации и играют существенную роль в теории аппроксимации, теории отображений, к ним сводится задача интегрального представления преобразования одних линейных дифференциальных операторов в другие [3], [4], [5]. Такие уравнения встречаются в теории упругости, при изучении фильтрации жидкости в трещиноватых породах, влагопереноса в почвогрунтах, передачи тепла в гетерогенных средах, моделировании различных биологических процессов и явлений, при изучении распространения волн в диспергирующих средах, а также в теории оптимальных процессов и обратных задачах.

Среди указанных уравнений наиболее известными являются указанное И. Н. Векуа [6, с. 258] основное дифференциальное уравнение изгиба тонкой сферической оболочки

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} + 2 \right) \left( \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} + \frac{\delta E h R^2}{D} \right) u = \Phi(z, \zeta),$$

а также уравнения Аллера и Буссинеска–Лява

$$u_t = (au_x + bu_{xt})_x, \quad u_{ttxx} - u_{tt} + u_{xx} = 0. \quad (3)$$

Первое из них описывает процесс переноса почвенной влаги в зоне аэрации, а второе встречается при изучении продольных волн в тонком упругом стержне с учетом эффектов поперечной инерции. Недавно [7] было обнаружено, что второе уравнение (3) возникает также в связи с исследованием движения волн в

периодических слоистых средах. К виду (1) относятся и поли-вibrационные уравнения Д. Манжерона.

После Л. Бианки и О. Николетти различные вопросы, связанные с уравнениями вида (1), изучали за рубежом Н. Bateman, E. Lahaye, H. Hornich, D. Mangeron, M. Ogustoreli, D. Colton, S. Easwaran, V. Radochova, A. Corduneanu, W. Rundell, M. Stecher и др. В нашей стране интерес к общему уравнению вида (1) при  $n = 2$  возник в связи с задачами теории упругости. Статьи Н. И. Мусхелишвили (1919 г.) и И. Н. Векуа (1937 г.) положили начало целому направлению исследований в данной области, развивавшемуся в течение ряда десятилетий до работ А. П. Солдатова, М. Х. Шханукова, О. М. Джохадзе и др. (примерно до 1987 г.). При  $n > 2$  из публикаций на русском языке, появившихся до 1990 г., можно отметить работу [8], где ряд вопросов, относящихся к общему уравнению (1), рассматривался методами функционального анализа. Еще раньше (1956, 1958 г.г.) вышли работы М. К. Фатте [9], [10]. Во второй из них, автор, отмечая, что “Бианки и Николетти разработали лишь формальную часть теории, не вдаваясь в аналитические детали” представил вариант метода Римана, более соответствующий современному уровню строгости рассуждений.

В 90-х годах в Казани сформировалась группа, ведущая систематические исследования в обсуждаемой области (В. И. Жегалов, В. А. Севастьянов, Е. А. Уткина, А. Н. Миرون, О. А. Тихонова (Кощеева), А. А. Кунгурцев, Л. Б. Миронова и др.). Участниками группы был разработан новый вариант метода Римана для уравнения Бианки. Сохранилась лишь общая схема метода, а обе основные его составляющие были изменены: функция Римана определялась в предложенном ва-

рианте как решение некоторого интегрального уравнения, а основное дифференциальное тождество было взято в другой форме. Все это позволило получить более лаконичную и прозрачную схему решения задач Гурса и Коши, чем в работах предыдущих авторов. Кроме того, предложенный вариант оказался конструктивным в том смысле, что удалось выделить ряд новых случаев, когда решение может быть записано в явном виде. Для того же уравнения были поставлены и изучены новые характеристические задачи с нормальными производными в граничных условиях.

Далее естественно было перейти к построению теории уравнения (1) в общем случае, когда искомая функция содержит кратное дифференцирование по независимым переменным. Такие уравнения часто называют псевдопараболическими (первым такое название использовал Д. Колтон в 1972 г. [11]).

Отмеченная выше формальная близость обсуждаемых уравнений с классом линейных обыкновенных дифференциальных уравнений породила мысль о целесообразности попытки построить для частного случая (1)

$$L^n u + \sum_{k=1}^n a_k L^{n-k} u = 0, \quad Lu \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad a_k = \text{const}, \quad (4)$$

аналог теории уравнения

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^n a_k y^{(n-k)} = 0. \quad (5)$$

И действительно, если общий вид решения для (4) обозначить через  $U(x, A)$ , где  $A$  – совокупность  $a_1, \dots, a_n$ , то оказалась верной формула

$$U(x, A) = \sum_{r=1}^{\kappa} \sum_{j=0}^{k_r-1} D_j u_{rj}(x, \lambda_r), \quad (6)$$

где  $u_{rj}(x, \lambda_r)$  есть решения уравнений

$$Lu + \lambda_r u = 0, \quad r = 1, \dots, \kappa, \quad (7)$$

а  $\lambda_r$  — корень кратности  $k_r$  уравнения

$$\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n = 0.$$

При этом

$$D_j = \sum \frac{|j|! x_1^{j_1} \dots x_m^{j_m} \partial^{|j|}}{j_1! \dots j_m! \partial x_1^{j_1} \dots \partial x_m^{j_m}}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

а символ  $\sum$  понимается как в обобщенной формуле бинома Ньютона: нужно взять сумму всевозможных слагаемых указанного вида,  $|j| = j_1 + \dots + j_m$ . Следует полагать  $D_0$  равным оператору тождественного преобразования,  $D_{-j}u \equiv 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$ .

Нетрудно убедиться, что при  $n = 1$  (6) дает хорошо известную классическую формулу общего решения уравнения (5).

Позже был разработан аналог метода неопределенных коэффициентов для неоднородного уравнения (4) с правой частью специального вида.

Все вышеупомянутые результаты были отражены в монографии [12], вышедшей в 2001 г. В [12] рассматриваемые уравнения назывались “со старшими частными производными”. Здесь же мы используем представляющийся нам теперь более подходящим термин “с доминирующей частной производной”, предложенный А. И. Кожановым.

Главной целью работы являлось распространение метода Римана на самый общий случай уравнения (1). Наконец, в 2005 г. было спрогнозировано и доказано [13] тождество, необходимое для решения задачи Гурса в общем случае уравнения

(1). В 2003 г. аналогичный результат анонсирован для задачи Коши, полный текст опубликован в 2006 г. [14].

Полученная формула решения задачи Гурса позволила распространить теорию характеристических задач с нормальными производными в граничных условиях со случая уравнения Бианки на общее псевдопараболическое уравнение (1).

С другой стороны, и для уравнения Бианки, и, тем более, для общего уравнения (1) оставались неисследованными целый ряд вопросов. К ним относились, например, задачи типа Дирихле, когда носителем граничных значений искомой функции являлся весь контур, определяющий рассматриваемую характеристическую область. В последнее время некоторые такие задачи удалось решить [15] благодаря привлечению нового для обсуждаемого направления метода априорных оценок. Начато исследование подобных задач и для нехарактеристических областей.

Уже пятьдесят лет (начиная с работ [16] – [18]) в теории уравнений с частными производными интенсивно исследуются задачи со смещениями в граничных условиях, называемые еще нелокальными. Долгое время все публикации на эту тему ограничивались случаем уравнения (2). В последнее десятилетие подобные задачи были рассмотрены Е. А. Уткиной для обобщенных уравнений Аллера и Буссинеска–Лява, а также начались исследования пространственных вариантов указанных задач (пока для уравнений Бианки при числе переменных  $n = 3, 4$ ).

Все упомянутые выше задачи рассматривались при достаточно гладких коэффициентах уравнения (1). Однако, в математической физике встречаются уравнения вида (2) с сингулярными коэффициентами, наиболее известным из которых

является уравнение Эйлера-Пуассона

$$u_{xy} - \frac{\beta'}{x-y}u_x + \frac{\beta}{x-y}u_y = 0.$$

При этом имеется общее представление решений данного уравнения, получаемое каскадным методом Лапласа. В связи с этим обстоятельством возникла идея о целесообразности попытки выделить из уравнений вида (1) с сингулярными коэффициентами такие случаи, которые с точки зрения метода Лапласа можно было бы рассматривать как аналоги уравнения Эйлера-Пуассона. Подобные аналоги были получены Е. А. Уткиной.

Интенсивный характер приобрел поиск новых возможностей решения уравнений вида (1) и граничных задач для них в явном виде. Здесь разрабатывались три подхода: факторизация уравнений с целью понижения их порядка вплоть до решения в квадратурах; выделение случаев построения в явном виде функций Римана; дальнейшее развитие метода каскадного интегрирования. Выделено значительное число уравнений, допускающих эффективную разрешимость. Можно ожидать, что указанные результаты найдут применение к решению в явном виде интегральных уравнений Вольтерра, в том числе с несколькими независимыми переменными (принципиальная возможность такого применения установлена В.И. Жегаловым).

Параллельно с этим изучались системы уравнений с доминирующими частными производными. Здесь разработан векторно-матричный аналог метода Римана для системы с кратными доминирующими производными общего вида. Поставлен ряд новых характеристических задач для подобных систем в пространствах  $R^n$  и исследован характер их разрешимости, для системы первого порядка изучена задача с нор-



мальными производными в граничных условиях.

Задачи с нормальными производными в граничных условиях исследовались также для квазилинейного аналога уравнения Бианки и для уравнения Лиувилля.

В последние годы началось изучение обсуждаемых уравнений методами группового анализа. Здесь получены определенные результаты для уравнений третьего и четвертого порядка. Есть основания ожидать дальнейшего развития исследований в данном направлении.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Bianchi L. *Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore* // Atti R. Accad. Lincei. Rend. Cl. sc. fis., mat. e natur (5). – 1895. – V. IV. – P. 89–99, 133–142.
2. Niccoletti O. *Sull'estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine superiore* // Atti R. Accad. Lincei. Rend. Cl. sc. fis., mat. e natur (5). – 1895. – V. IV. – P. 330–337.
3. Фаге М. К. *Операторно-аналитические функции одной независимой переменной* // Тр. Моск. матем. об-ва. – 1958. – Т. 7. – С. 227–268.
4. Фаге М. К., Нагнибида Н. И. *Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов*. – Новосибирск: Наука, 1987. – 290 с.
5. Бондаренко Б. А. *Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных*. – Ташкент: Фан, 1987. – 146 с.
6. Векуа И. Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений*. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 296 с.

7. Сердюкова С. И. *Экзотическая асимптотика для линейного гиперболического уравнения* // Докл. РАН. – 2003. – Т. 389. – № 3. – С. 305–309.
8. Ахиев С. С. *Фундаментальные решения некоторых локальных и нелокальных начально-краевых задач математической физики*. – Баку: Азербайджанский гос. ун-т. – 1988. – 58 с.
9. Фаге М. К. *Дифференциальные уравнения с чистосмешанными производными и главным членом* // Докл. АН СССР. – 1956. – Т. 108. – № 5. – С. 780–783.
10. Фаге М. К. *Задача Коши для уравнения Бианки* // Матем. сборник. – 1958. – Т. 45. – № 3. – С. 281–322.
11. Colton D. *Pseudoparabolic equations in one space variable* // J. Different. equations. – 1972. – V. 12. – No 3. – P. 559–565.
12. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными*. – Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2001. – 226 с.
13. Уткина Е. А. *К общему случаю задачи Гурса* // Изв. вузов. Матем. – 2005. – № 8. – С. 57–62.
14. Миронов А. Н. *Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в  $R^n$*  // Сибирский матем. журнал. – 2006. – Т. 47. – № 3. – С. 584–594.
15. Уткина Е. А. *Характеристические граничные задачи для линейных уравнений высокого порядка со старшими частными производными*. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный ун-т, 2011. – 263 с.
16. Жегалов В. И. *Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1962. – Т. 122. – Кн. 3. – С. 3–16.

17. Бицадзе А. В., Самарский А. А. *О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач* // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 185. – № 3. – С. 739–740.

18. Нахушев А. М. *О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа* // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5. – № 1. – С. 44–59.

**Н. И. Жукова, К. И. Шеина**

*Национальный исследовательский  
университет “Высшая школа экономики”,  
Нижегородский государственный университет,  
n.i.zhukova@rambler.ru, kse51091@mail.ru*

### **ГРУППЫ БАЗОВЫХ АВТОМОРФИЗМОВ КАРТАНОВЫХ СЛОЕНИЙ, НАКРЫТЫХ РАССЛОЕНИЯМИ**

Рассматривается категория, в которой изоморфизмы сохраняют не только слоения, но и их трансверсальную геометрию. Решается проблема существования и единственности структуры конечномерной группы Ли в группе *базовых автоморфизмов*  $A_B(M, F) := A(M, F)/A_L(M, F)$ , где  $A(M, F)$  – группа автоморфизмов слоения  $(M, F)$ , а  $A_L(M, F)$  – группа автоморфизмов, отображающих каждый слой этого слоения на себя.

Мы исследуем группы базовых автоморфизмов картановых слоений, то есть слоений, допускающих трансверсальную картанову геометрию. Подчеркнем, что картановы слоения включают в себя такие широкие классы слоений как римановы, лоренцевы, псевдоримановы, трансверсально подобные, вейлевы, конформные, проективные слоения, а также слоения с трансверсальной линейной связностью.

Дж. Лесли первым решил подобную задачу для гладких слоений на компактных многообразиях. Для слоений с трансверсальной проектируемой связностью эта проблема рассматривалась И.В. Белько [1]. Достаточные условия для существования и единственности структуры группы Ли в группе базовых автоморфизмов слоений с трансверсальными жесткими геометриями найдены в работе первого автора [2].

Говорят, что слоение  $(M, F)$  накрыто расслоением, если слоение  $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ , индуцированное на пространстве универсального накрывающего отображения  $\kappa : \widetilde{M} \rightarrow M$ , образовано слоями локально тривиального расслоения  $r : \widetilde{M} \rightarrow B$ . Пусть  $(M, F)$  – полное картаново слоение, накрытое расслоением  $r : \widetilde{M} \rightarrow B$ . Тогда на односвязном многообразии  $B$  индуцируется картанова геометрия  $\eta$  и группа  $\Psi$  автоморфизмов картанова многообразия  $(B, \eta)$ . Указанная группа  $\Psi$  называется *глобальной группой голономии картанова слоения  $(M, F)$ , накрытого расслоением*.

Мы показываем, в частности, что полные картановы слоения  $(M, F)$ , трансверсальная кривизна которых равна нулю, накрыты расслоениями. Нами доказана

**Теорема.** Пусть  $(M, F)$  – полное картаново слоение, накрытое расслоением  $r : \widetilde{M} \rightarrow B$ , а  $(B, \eta)$  – индуцированная картанова геометрия. Предположим, что глобальная группа голономии  $\Psi$  – дискретная подгруппа группы Ли автоморфизмов картанова многообразия  $\text{Aut}(B, \eta)$ , а  $N(\Psi)$  – нормализатор группы  $\Psi$  в группе  $\text{Aut}(B, \eta)$ . Тогда в группе базовых автоморфизмов  $A_B(M, F)$  существует единственная структура группы Ли, причем группа  $A_B(M, F)$  изоморфна факторгруппе Ли  $N(\Psi)/\Psi$ , если группа  $\text{Aut}_B(M, F)$  несчетная, в противном случае  $\text{Aut}_B(M, F)$  – дискретная группа Ли.

Найдены некоторые точные оценки размерности группы Ли  $\text{Aut}_B(M, F)$ . Построены примеры.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Белько И. И. *Аффинные преобразования трансверсальной проектируемой связности на многообразии со слоением* // Матем. сб. – 1983. – Т. 117. – № 2. – С. 181–195.

2. Zhukova N. I. *Complete foliations with transverse rigid geometries and their basic automorphisms* // Вестник РУДН. Сер. Матем. Информатика. Физика. – 2009. – № 2. – С. 14–35.

**Д. Х. Зайнетдинов, И. Ш. Калимуллин**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
damir.zh@mail.ru, ikalimul@gmail.com*

#### О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПРЕДЕЛЬНО МОНОТОННОЙ СВОДИМОСТИ $\Sigma_2^0$ -МНОЖЕСТВ

Одно из направлений современной теории вычислимости сосредоточено на изучении свойств предельно монотонных функций и предельно монотонных множеств.

Функция  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  называется *предельно монотонной*, если существует такая вычислимая функция  $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , что для всех  $x$  и  $s$  выполнены следующие условия:

- 1)  $f(x) = \lim_s \varphi(x, s)$ ;
- 2)  $\varphi(x, s) \leq \varphi(x, s + 1) \quad \forall s \in \mathbb{N}$ .

Множество  $A \subseteq \mathbb{N}$  будем называть *предельно монотонным*, если  $A = \emptyset$  или  $A$  является областью значения некоторой предельно монотонной функции.

Калимуллин и Пузаренко [1] ввели понятие сводимости на семействах подмножеств натуральных чисел, согласованное с понятием  $\Sigma$ -определимости в допустимых множествах. Пусть  $\mathcal{F}_A$  означает семейство начальных сегментов  $\{\mathbb{N} \upharpoonright n : n \in A\}$ . В соответствии с работой [1], определим  $lm$ -сводимость множеств, как  $\Sigma$ -сводимость соответствующих начальных сегментов, а именно,  $A \leq_{lm} B \iff \mathcal{F}_A \leq_{\Sigma} \mathcal{F}_B$ .

Мы докажем существование пары несравнимых  $\Sigma_2^0$ -множеств относительно  $lm$ -сводимости, а также построим бесконечную равномерную последовательность несравнимых  $\Sigma_2^0$ -множеств относительно  $lm$ -сводимости.

**Теорема 1.** *Существуют бесконечные  $\Sigma_2^0$ -множества  $A$  и  $B$  такие, что  $A \not\leq_{lm} B$  и  $B \not\leq_{lm} A$ .*

**Теорема 2.** *Существует такая равномерная последовательность бесконечных  $\Sigma_2^0$ -множеств  $\{A_i\}_{i \in \omega}$ , что  $A_i \not\leq_{lm} \bigcap_{j \neq i} A_j$ , причём  $\bigcap_{j \in \omega} A_j$  бесконечно и  $x \in A_i$  при  $x < i$ .*

Определим  $A \equiv_{lm} B$ , если  $A \leq_{lm} B$  и  $B \leq_{lm} A$ . Предельно монотонной степенью (или, иначе,  $lm$ -степенью) множества  $A$  назовем класс эквивалентности  $\text{deg}(A) = \{B : B \equiv_{lm} A\}$ . Через  $\mathbf{S}_{lm}$  обозначим класс всех  $lm$ -степеней.

Мы покажем, что для любого счётного частично-упорядоченного множества  $\mathcal{P} = (P, \leq_P)$  существует сохраняющее порядок 1:1 – отображение из  $P$  в  $\mathbf{S}_{lm}$ . Таким образом, имеем следующий результат:

**Теорема 3.** *Каждый счётный частичный порядок вкладывается в  $\mathbf{S}_{lm}$ .*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-01-97008, № 14-01-31200) и гранта МД-4838.2013.1.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Калимуллин И. Ш., Пузаренко В. Г. *О сводимости на семействах* // Алгебра и логика. – 2009. – Т. 48. – № 1. – С. 31–53.
2. Kalimullin I. Sh., Khoussainov B., Melnikov A. *Limitwise monotonic sequences and degree spectra of structures* // Proc. Amer. Math. Soc. – 2013. – V. 141. – No 9. – P. 3275–3289.
3. Khoussainov B., Nies A., Shore R. *Computable models of theories with few models* // Notre Dame J. Formal Logic. – 1997. – V. 38. – No 2. – P. 165–178.

**Л. И. Зеленина, Н. А. Шилова**

*Северный (Арктический) федеральный университет,  
Институт математики, информационных и космических  
технологий, l.zelenina@narfu.ru, n.shilova@narfu.ru*

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ  
РОСТА И РАЗВИТИЯ ПОПУЛЯЦИИ МОРСКИХ  
МАКРОВОДОРОСЛЕЙ**

Развитие современной вычислительной техники выводит математическое моделирование и вычислительный эксперимент на качественно новый уровень. Возможность реализовывать сложные вычисления на отдельном компьютере, суперкомпьютере и множестве взаимодействующих компьютеров значительно расширяет область приложения математического моделирования. Компьютерное моделирование является одним из эффективных методов изучения сложных систем, позволяющим понять механизмы функционирования моделируемого объекта и получить приближённые оценки поведения системы, которые в большинстве своём являются слишком сложными для аналитических решений и их исследований.

Математическое и компьютерное моделирование в экологии сообществ – это достаточно обширная область исследования, в которой популяционное моделирование является наиболее актуальным направлением. Изучение динамики популяций без дополнительного воздействия на них с целью решения острых экологических проблем сохранения и восстановления водных ресурсов является актуальным вопросом.

В рамках проводимого исследования была построена дискретная математическая модель, описывающая процессы роста и развития ламинариевых водорослей Белого моря. Данные виды образуют в прибрежных районах Белого моря обширные заросли, которые имеют промысловое значение, и наряду с коммерческой ценностью являются важным компонентом биоты. В связи с этим вопрос разработки адекватного математического аппарата для изучения динамики популяции макрофитов Белого моря является актуальным.

Дискретная математическая модель, описывающая динамику популяций двух ламинариевых видов, задается следующей системой уравнений:



$$\left\{ \begin{array}{l}
x_1^{i+1} = x_1^i + \left[ \mu^i \varphi^i x_1^i \left( 1 - \sum_{k=2}^n \alpha_k^x \frac{x_k^i}{x_{\max}} - \sum_{k=1}^m \beta_{yx} \frac{y_k^i}{x_{\max}} \right) u^i - \right. \\
\quad \left. - \mu_1^{x_i} x_1^i - T_1^{x_i} x_1^i \right] \Delta t, \\
x_j^{i+1} = x_j^i + \left[ T_{j-1}^{x_i} x_{j-1}^i - \mu_j^{x_i} x_j^i - T_j^{x_i} x_j^i \right] \Delta t, \quad j = \overline{2, n-1}, \\
x_n^{i+1} = x_n^i + \left[ T_{n-1}^x(t) x_{n-1}^i - \mu_n^{x_i} x_n^i \right] \Delta t, \\
y_1^{i+1} = y_1^i + \left[ \mu^i \varphi^i y_1^i \left( 1 - \sum_{k=2}^m \alpha_k^y \frac{y_k^i}{y_{\max}} - \sum_{k=1}^m \beta_{xy} \frac{x_k^i}{y_{\max}} \right) u^i - \right. \\
\quad \left. - \mu_1^{y_i} y_1^i - T_1^{y_i} y_1^i \right] \Delta t, \\
y_j^{i+1} = y_j^i + \left[ T_{j-1}^{y_i} y_{j-1}^i - \mu_j^{y_i} y_j^i - T_j^{y_i} y_j^i \right] \Delta t, \quad j = \overline{2, m-1}, \\
y_m^{i+1} = y_m^i + \left[ T_{m-1}^{y_i} y_{m-1}^i - \mu_m^{y_i} y_m^i \right] \Delta t, \\
s^{i+1} = s^i + D(s_n - s^i) \Delta t - \mu^i \varphi \left( \sum_{j=1}^n \frac{x_j^i}{\eta_x} + \sum_{j=1}^m \frac{y_j^i}{\eta_y} \right) \Delta t; \\
i = \overline{1, q-1},
\end{array} \right.$$

где  $q$  – частота разбиения множества допустимых решений системы, которое имеет вид:

$$\left\{ (X^i, Y^i, S^i) : X^i = \{x_1^i, \dots, x_n^i\}, Y^i = \{y_1^i, \dots, y_m^i\}, S^i \right\}, \\
i = \overline{1, q-1},$$

причем на данном множестве справедливы следующие ограничения:

$$\left\{ \begin{array}{l}
0 \leq x_j^i \leq x_{\max}, \quad j = \overline{1, n}, \\
0 \leq y_k^i \leq y_{\max}, \quad k = \overline{1, m}, \\
s_n \leq s^i \leq s_{\max}, \quad i = \overline{1, q-1}.
\end{array} \right.$$

В представленной системе  $x_j^i$  и  $y_k^i$  – биомасса водорослей  $j$ -ой и  $k$ -ой возрастной группы ламинарии сахаристой (S.l.) и ламинарии пальчаторассеченной (L.d.) соответственно на  $i$ -ом шаге,  $s^i$  – концентрация биогенных веществ в среде на  $i$ -ом шаге,  $s_n$  – первоначальная концентрация биогенных веществ в среде, до начала в ней биологических процессов, связанных с жизнедеятельностью водорослей.

Функция  $\mu^i = \gamma_0 - \theta \cos(2\pi \cdot i\Delta t/365)$  характеризует изменение максимальной удельной скорости роста биомассы в момент времени  $t$  [1]. Параметры  $\gamma_0$ ,  $\theta$  – параметры среды, отвечающие за изменение максимальной удельной скорости роста в зависимости от температурных показателей. Коэффициенты  $\mu_j^{x_i}$  и  $\mu_k^{y_i}$  – коэффициенты естественной смертности водорослей,  $\varphi^i$  – трофическая функция.  $T_j^{x_i} x_j^i$  и  $T_k^{y_i} y_k^i$  – объем биомассы водорослей, которые перешли из одной возрастной группы в другую, в зависимости от биологической продуктивности рассматриваемой водной среды на  $i$ -ом шаге.  $\alpha_j^{x_i}$  и  $\alpha_k^{y_i}$  – коэффициенты, отражающие степень влияния водорослей старших возрастных групп на младшие, нормированные на единицу максимально возможной биомассы  $x_{\max}$  и  $y_{\max}$  соответственно, достигаемой водорослями в течение жизненного цикла. Функция  $u^i$  характеризует изменение интенсивности освещенности с течением времени. Коэффициент  $D$  отражает гидродинамический режим рассматриваемой водной системы, коэффициенты  $\eta_x$  и  $\eta_y$  отражают прирост биомассы водорослей на единицу потребленных биогенных веществ и являются важнейшей характеристикой ростовых процессов.

Для проведения численного эксперимента в инструментальной среде Borland Delphi был реализован проект, для которого входные данные были получены на основе статистической об-

работки гидрологических, гидрохимических, температурных и биологических данных [2]. Результаты работы проекта не противоречат многолетним данным, характеризующим динамику развития популяций данного вида [3], что позволяет сделать вывод об адекватности предложенного математического аппарата.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-98800).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Steffen E., Malchow H. and Medvinsky A. B. *Effect of seasonal perturbations on a model plankton community* // In Environ. Model. Assess. – 1997. – V. 2. – P. 43–48.
2. Шилова Н. А. *Использование вероятностно-статистических методов для обработки биологических данных морских гидробионтов* // Исследования Российской Арктики: прошлое, настоящее, будущее: Мат. Всерос. науч. конф., посв. Междун. Полярному году (16–17 дек., 2008г.) – Архангельск: Арханг. центр РГО, 2008. – С. 217–224.

**Т. В. Зыкова**

*Сибирский федеральный университет,  
zykovatv@mail.ru*

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА  
МОНОМИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ РЕШЕНИЯ  
ОБЩЕЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ**

Рассмотрим *каноническую приведенную* систему  $n$  полиномиальных уравнений:

$$y_i^{m_i} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(i)}} x_\lambda^{(i)} y^\lambda - 1 = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Обозначим через  $\Lambda$  дизъюнктное объединение множеств  $\Lambda^{(i)}$  и пусть  $N = \#\Lambda$  – число коэффициентов в системе (1). Множество коэффициентов системы (1) пробегает векторное пространство  $\mathbb{C}^\Lambda \cong \mathbb{C}_x^N$ , в котором координаты точек  $x = (x_\lambda)$  индексируются элементами  $\lambda \in \Lambda$ .

Составим матрицу

$$\Psi = \left( \Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(n)} \right) = (\lambda^1, \dots, \lambda^N),$$

столбцами которой являются векторы  $\lambda^k = (\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$  из показателей мономов системы (1). Имеется ввиду, что блоки  $\Lambda^{(i)}$  нумеруются в соответствии с нумерацией уравнений системы (1), а нумерация столбцов внутри каждого из блоков произвольная, но фиксированная. Строки этой матрицы обозначим  $\psi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Обозначим через  $\chi^{(i)}$  характеристические функции подмножеств  $\Lambda^{(i)} \subset \Lambda$ , отождествим  $\chi^{(i)}$  с векторами, имеющими координаты  $(\chi^{(i)}(\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Также будем рассматривать матрицу  $\tilde{\Psi}$ , строки которой есть векторы  $\tilde{\psi}_i = \psi_i - m_i \chi^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Рассмотрим мономиальную функцию

$$\frac{1}{y^\mu(-x)} := \frac{1}{y_1^{\mu_1}(-x) \cdots y_n^{\mu_n}(-x)}, \mu_i > 0,$$

составленную из координат  $y_j(-x)$  ветви решения системы уравнений (1), выделенной условиями  $y_i(0) = 1, i = 1, \dots, n$ , для которой прямое преобразование Меллина определено интегралом

$$M \left[ \frac{1}{y^\mu(-x)} \right] (z) = \int_{\mathbb{R}_+^N} \frac{1}{y^\mu(-x)} x^{z-I} dx, \quad (2)$$

где  $x^{z-I} = x_1^{z_1-1} \cdots x_N^{z_N-1}$ ,  $dx = dx_1 \cdots dx_N$ .

В [1] доказана

**Теорема.** Преобразование Меллина, определенное интегралом (2), равно

$$\prod_{i=1}^n \frac{\prod_{\lambda \in \Lambda^{(i)}} \Gamma(z_\lambda) \Gamma\left(\frac{\mu_i}{m_i} + \frac{1}{m_i} \langle \tilde{\psi}_i, z \rangle\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu_i}{m_i} + \frac{1}{m_i} \langle \psi_i, z \rangle + 1\right)} Q(z),$$

где  $Q(z)$  – полином вида

$$\sum_{q=0}^n \sum_{|I|=q} \sum_{\tau \in \Lambda^I} z_\tau \left| \begin{array}{ccc} \left(1 - \frac{\tau_{i_1}^{i_1}}{m_{i_1}}\right) & \cdots & -\frac{\tau_{i_q}^{i_1}}{m_{i_1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{\tau_{i_1}^{i_q}}{m_{i_q}} & \cdots & \left(1 - \frac{\tau_{i_q}^{i_q}}{m_{i_q}}\right) \end{array} \right| \prod_{i \notin I} \left( \frac{\mu_i}{m_i} + \frac{1}{m_i} \langle \tilde{\psi}_i, z \rangle \right),$$

здесь  $I$  – упорядоченный набор  $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$ ,  $\tau = (\tau^{i_1}, \dots, \tau^{i_q})$  – элемент произведения множеств  $\Lambda^I = \Lambda^{(i_1)} \times \dots \times \Lambda^{(i_q)}$ .

Интеграл (2) сходится для всех  $z$  из области  $U + i\mathbb{R}^N$ , где  $U$  – это открытое множество

$$U = \left\{ u \in \mathbb{R}_+^N : \mu_i + \langle \tilde{\psi}_i, u \rangle > 0, i = 1, \dots, n \right\}.$$

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Antipova I. A., Zykova T. V. *Mellin transform for monomial functions of the solution to the general polynomial system* // J. Siberian Federal Univ. Mathematics & Physics. – 2013. – V. 6. – № 2. – P. 475–486.

**Ю. Е. Иванова, В. Е. Рагозина**

*Институт автоматизации и процессов управления  
Дальневосточного отделения РАН,  
ivanova@iacp.dvo.ru, ragozina@vlc.ru*

**ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКИХ  
УДАРНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ  
СЛАБО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ**

Аналитические решения задач ударного деформирования в твердом теле имеют большое значение как чисто теоретическое, так и прикладное, поскольку именно они позволяют сделать заключения общего характера относительно механизмов движения и изменения волновых фронтов и формирования напряженно-деформационных полей за каждым волновым фронтом. За исключением краевых задач автомодельного типа нелинейность задач ударного деформирования не допускает точных аналитических решений и одновременно возрастает роль приближенных теоретических методов, таких, как методы малого параметра. На основе метода сращиваемых асимптотических разложений ранее было показано, что плоские продольные и поперечные (в несжимаемых средах) ударные волны в главном могут быть описаны на основе эволюционных волновых уравнений [1]. Данные уравнения определяют поведение

одного из сращиваемых в методе решений и возникают в областях пространственно-временных координат, где нелинейные эффекты оказываются доминирующими. Многообразие реальных свойств твердых тел определяет необходимость модельного учета таких эффектов, как вязкость, внутренняя структура, анизотропия и неоднородность среды. Неоднородность свойств среды особенно заметна для твердых тел большой протяженности хотя бы в одном направлении. Именно для полупространств часто решаются задачи о плоских ударных волнах. В настоящей работе были рассмотрены задачи о плоской продольной ударной волне и о плоской поперечной ударной волне с учетом неоднородности нелинейно-упругой сжимаемой или несжимаемой среды в направлении движения волны. Слабая неоднородность задавалась линейной зависимостью упругих модулей среды и плотности среды от пространственной переменной. Уже в этом случае показано, что учет факторов нелинейности связи напряжений и деформаций и неоднородности упругих свойств может приводить к различным вариантам эволюционного уравнения. Наиболее интересные ситуации возникают, когда переход к эволюционным уравнениям является результатом предельной цепочки рекуррентных внутренних задач в прифронтной области волнового процесса и возможен только при совместном изменении обеих независимых переменных. Решение иллюстрируется рядом наиболее простых модельных задач для различных функций нагружения на границе полупространства.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-01-31030 мол\_а, № 14-01-00292 А).

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. *Об эволюционных уравнениях задач ударного деформирования с плоскими поверхностями разрывов* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2. – № 3. – С. 82–95.

**Ю. Г. Игнатъев, А. Р. Самигуллина**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
ignatev\_yu@rambler.ru, alsu\_sam@mail.ru*

**ПРОГРАММНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ИТОГОВОЙ  
АТТЕСТАЦИИ ЗНАНИЙ  
ПО БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЕ  
НА ОСНОВЕ ПРИКЛАДНОГО  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MAPLE, ЕГО  
ПРИЛОЖЕНИЯ MAPLET И MICROSOFTEXCEL**

Программные процедуры являются приложением к математическому пакету Maple (версии 14 – 18), а также программы MicrosoftExcel (версии 2003 года и более поздние) и предназначен для автоматизации процесса итоговой аттестации и анализа ее результатов. Программные процедуры осуществляют обмен данными между листами MicrosoftExcel и Maple, в окна которого вводится текущая информация об ответах на вопросы и выводится информация об успеваемости студентов по модулям обучения, итоговая оценка по шкале балльно-рейтинговой системе и результаты итоговой аттестации группы студентов, как в цифровом, так и графическом форматах с дополнительной информацией об успеваемости и качестве. При этом соответствующая информация записывается в таблицы листа MicrosoftExcel, соответствующего номеру



группы студентов. Программные процедуры автоматизированной аттестации отличаются от известных, во-первых, простотой и удобством применения в образовательном процессе, сервисными свойствами, а также возможностью интеграции его с программами аналитического тестирования в пакете Maple.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Игнатъев Ю. Г. *Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – 298 с.

**Э. Э. Идиятова, К. Б. Шакирова**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
evelinotchka\_20@mail.ru*

#### **ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ В ШКОЛЬНОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ**

В школе математика служит опорным предметом для изучения смежных дисциплин. Реальная необходимость современной жизни – непрерывное образование, основой которого должны стать прочные знания, в том числе, и по математике. Следует всемерно способствовать удовлетворению потребностей и запросов школьников, проявляющих интерес и имеющих склонности и способности к математике. Учащиеся должны приобрести умения решать задачи, более сложные по сравнению с обязательным уровнем, точно и грамотно излагать собственные рассуждения при решении задач. Возникает необходимость в дифференциации обучения, потребность в некотором компромиссном варианте: ввести элективные курсы, которые включают в себя некоторые дополнительные материалы.

Понятие “элективный” (от лат. *Electus* – избранный) означает избирательный. Элективные курсы – это обязательные для посещения курсы по выбору учащихся. Элективные курсы реализуются за счет школьного компонента учебного плана.

Рассмотрим более подробно разработку элективного курса по теме “Обратные тригонометрические функции”.

Цель данного элективного курса: повышение математической культуры учащихся в рамках школьной программы по математике; не только углубление, но и расширение содержания базисного курса, изучение которого осуществляется на минимальном общеобразовательном уровне, что позволяет получить дополнительную подготовку для сдачи экзамена по математике.

Функции данного спецкурса: дополнение и углубление базового предметного образования; компенсация недостатков обучения; психолого-педагогическая поддержка учащихся при подготовке их к решению задач группы “С” ЕГЭ; возможность реализовать личностный и творческий потенциал учащихся через методы и приемы самостоятельного исследовательского поиска.

Программа курса предполагает дальнейшее развитие у школьников математической, исследовательской и коммуникативной компетентностей. Курс направлен на более глубокое понимание и осознание математических методов познания действительности, на развитие математического мышления учащихся, устной и письменной математической речи. На занятиях решаются нестандартные задачи, для которых в курсе математики не имеется общих правил, определяющих точный алгоритм их решения. Учащиеся учатся находить и применять различные методы для решения задач.

Требования к уровню усвоения курса.

По окончанию изучения курса учащиеся должны уметь: выполнять построения графиков обратных тригонометрических функций; применять теорию к преобразованию выражений с аркфункциями; решать уравнения и неравенства с аркфункциями; владеть: методами исследования свойств обратных тригонометрических функций; различными методами решения уравнений и неравенств с аркфункциями.

Занятия включают в себя теоретическую и практическую части, в зависимости от целесообразности – лекции, консультации, практикумы, самостоятельную и исследовательскую работу. Эффективность обучения отслеживается следующими формами контроля:

- математический диктант;
- срезы знаний и умений в процессе обучения;
- итоговый контроль.

Показателем эффективности обучения следует считать повышающийся интерес к математике, творческую активность и результативность учащихся.

Курс рассчитан на 16 часов, однако его программа может корректироваться. Учитывая особенности школы, класса, уровень подготовки учащихся, учитель может изменять последовательность изучения материала, уровень его сложности, самостоятельно распределять часы и выбирать конкретные формы занятий.

Содержание курса “Обратные тригонометрические функции”. Тема занятия (кол-во часов):

1. Функции  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y = \operatorname{arcctg} x$  (4);

2. Операции над обратными тригонометрическими функци-

ями (4);

3. Обратные тригонометрические операции над тригонометрическими функциями (2);

4. Уравнения с аркфункциями (2);

5. Неравенства с аркфункциями (2);

6. Контрольная работа (2).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбург С. И. *Алгебра и математический анализ. Учебное пособие, 10 класс.* – М.: Просвещение, 2010.

2. Крючкова В. В. *Обобщающий семинар по теме: обратные тригонометрические функции // Математика в Школе.* – 2004. – № 1.

3. Решетников Н. Н. *Тригонометрия в школе: Учебно-методическое пособие.* – М.: Педагогический университет “Первое сентября”, 2010.

4. Мирошин В. В. *Обратные тригонометрические функции.* – М.: Чистые пруды, 2007.

5. Рурукин А. Н. *Поурочные разработки по алгебре и началам анализа: 10 класс.* – М.: ВАКО, 2009.

**Т. А. Калмыкова**

*Дальневосточный федеральный университет,*

*Школа естественных наук,*

*kalmykova.ta@dvfu.ru*

## СВОЙСТВА ВЫПУКЛОСТИ И ВОГНУТОСТИ ОБОБЩЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В данной работе изучаются свойства монотонности, выпуклости и вогнутости обобщенных двухпараметрических тригонометрических и гиперболических функций. Исследование указанных свойств основывается на использовании основной леммы и доказательстве некоторых неравенств.

Определим двухпараметрическую обобщенную функцию  $\sin_{p,q}(y)$  как функцию, обратную к интегралу:

$$y = F_{p,q}(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1-t^q)^{1/p}},$$

$p, q > 1$ ,  $x \in (0, 1)$ ,  $y \in (0, \pi_{p,q}/2)$ , где

$$\pi_{p,q} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^q)^{1/p}}.$$

Эта функция распространяется по симметрии на  $(0, \pi_{p,q})$ , затем по нечетности на  $(-\pi_{p,q}, \pi_{p,q})$  и по периодичности – на все действительные значения  $y$ . В свою очередь, функцию  $\operatorname{sh}_{p,q}(y)$  определим как функцию, обратную к интегралу

$$y = F_{p,q}(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^q)^{1/p}},$$

для положительных  $x$  и  $y$ , затем распространяем ее по нечетности для отрицательных  $y$ .

**Утверждение.** Функция  $p \mapsto \sin_{p,q}(y)$  вогнута на интервале  $(1, \infty)$  для  $y \in [0, \pi_{p,q}/2]$  и  $q \in (1, \infty)$  тогда и только тогда, когда для любого  $p \in (0, \infty)$

$$\frac{qx^{q-1}}{p(1-x^q)} \left( \int_0^x \beta(p,t) dt \right)^2 - \frac{2 \log(1-x^q)}{(1-x^q)^{1/p}} \int_0^x \beta(p,t) dt + \frac{1}{(1-x^q)^{1/p}} \int_0^x \gamma(p,t) dt \geq 0.$$

Здесь

$$\beta(p,t) = \frac{\log(1-t^q)}{(1-t^q)^{1/p}}, \quad \gamma(p,t) = \frac{\log(1-t^q)(\log(1-t^q) - 2p)}{(1-t^q)^{1/p}}.$$

Знак неравенства будет строгим тогда и только тогда, когда соответствующее свойство выполняется строго.

Аналогичные утверждения можно получить и для обобщенных двухпараметрических гиперболических функций.

Стоит отметить, что обобщенные тригонометрические функции возникают как собственные функции одномерного  $p$ -лапласиана и находят применение во многих разделах математики, таких как, например, теория аппроксимации, функциональный анализ (в частности, теория операторов) и др.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-11-00022).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Baricz A., Bhayo B. A., Klen R. *Convexity properties of generalized trigonometric and hyperbolic functions.* – Aequat. Math., 2013. – DOI 10.1007/s00010-013-0222-x.
2. Bhayo B. A., Vuorinen M. *On generalized trigonometric functions with two parameters* // J. Approx. Theory. – 2012. – V. 164. – P. 1415–1426.

3. Karp D. B., Prilepkina E. G. *Parameter convexity and concavity of generalized trigonometric functions* // J. of Math. Analysis and Appl. – 2014 (to appear).

**Э. Н. Карабашева**

*Казанский государственный  
архитектурно-строительный университет,  
enkarabasheva@bk.ru*

**СЧЕТНОЕ МНОЖЕСТВО ТОЧЕК РАЗРЫВА  
И ДВУСТОРОННЕЕ ЗАВИХРЕНИЕ  
НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РАЗНОГО ПОРЯДКА  
В ЗАДАЧЕ ГИЛЬБЕРТА**

Рассматривается следующая краевая задача Гильберта: определить аналитическую и ограниченную в верхней полуплоскости  $D$  функцию  $\Phi(z)$  по заданному краевому условию:

$$a(t)\Re\Phi(t) - b(t)\Im\Phi(t) = c(t), \quad t \in \partial D,$$

где  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  – заданные на контуре  $L$  вещественнозначные функции точки  $t$  контура  $L$ , непрерывные всюду, кроме точек разрыва первого рода в двух монотонных последовательностях точек  $t_j$ ,  $t_{-j}$ ,  $j = \pm 1, \pm 2, \dots$ , которые сходятся к  $+\infty$ ,  $-\infty$ , соответственно. Условие  $a(t)^2 + b(t)^2 \neq 0$  выполнено во всех точках непрерывности коэффициентов краевого условия. Непрерывная составляющая функции  $\nu(t) = \arg[a(t) - ib(t)]$  может быть представлена в виде:

$$\tilde{\nu}(t) = \begin{cases} \nu^- t^{\rho^-} + \varphi(t), & t < 0, \quad 0 \leq \rho^- < 1, \\ \nu^+ |t|^{\rho^+} + \varphi(t), & t > 0, \quad 0 \leq \rho^+ < 1. \end{cases}$$

Функция  $\varphi(t)$  удовлетворяет условию Гельдера на вещественной оси, числа  $\rho^-$ ,  $\rho^+$ ,  $\nu^-$  и  $\nu^+$  являются известными, также выполняется равенство  $(\rho^-)^2 + (\rho^+)^2 \neq 0$ . В окрестности бесконечности условие Гельдера записывается в виде следующего неравенства

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq K \left| \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right|^\alpha,$$

где  $K > 0$ , а  $0 < \alpha < 1$ . Вводим функции скачков

$$n_+(t) = \sum_{j=1}^{k-1} \kappa_j, \quad t_{k-1} \leq x < t_k,$$

$$n_-(t) = \sum_{j=1}^{k-1} \kappa_{-j}, \quad -t_{k+1} \leq x < -t_{-k},$$

$n_+(t) = 0$ ,  $x < t_1$ ,  $n_-(t) = 0$ ,  $x < -t_{-1}$ , удовлетворяющие асимптотическим равенствам  $n_+(t) = \Delta_+ t^{\kappa_+} + O(1)$ ,  $n_-(t) = \Delta_- t^{\kappa_-} + O(1)$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Здесь  $\Delta_+$  и  $\Delta_-$  являются произвольными положительными величинами, а  $\kappa_+$  и  $\kappa_-$  лежат в промежутке от нуля до единицы  $0 < \kappa_+ < 1$ ,  $0 < \kappa_- < 1$ . Для неоднородной краевой задачи Гильберта с описанными выше условиями получена формула общего решения в классе ограниченных функций. Решение проведено на основе конструктивного построения целой функции заданного порядка по выбранной специальным образом последовательности ее нулей. Исследована однородная задача: найдены условия существования и единственности решения, в случае, когда решение не единственно, описано множество решений задачи.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Salimov R. B., Shabalin P. L. *The Riemann–Hilbert boundary value problem with a countable set of coefficient discontinuities and two-side curling at infinity of order less than 1/2* // Operator



Theory: Advances and Applications. – Springer Basel AG, 2012. – V. 221. – P. 571–585.

2. Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. *Однородная задача Гильберта с разрывными коэффициентами и двусторонним завихрением на бесконечности порядка  $1/2 \leq \rho < 1$*  // Изв. вузов. Матем. – 2012. – № 11. – С. 67–71.

3. Карабашева Э. Н. *О разрешимости однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним разного порядка завихрением на бесконечности* // Известия КГАСУ. – 2014. – № 1 (27). – С. 242–252.

**Ю. И. Кибец, А. Ю. Константинов, В. Л. Котов,  
А. А. Тарасова**

*Нижегородский государственный  
университет им. Н. И. Лобачевского,  
annatarasova1989@mail.ru*

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ  
КОНИЧЕСКИХ УДАРНИКОВ  
В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ**

Для описания плоскопараллельного движения твердого конического тела рассмотрим его сечение плоскостью, проходящей через оси неподвижной прямоугольной системы координат  $Oxz$  (рис. 1).

В соответствии с моделью локального взаимодействия [2, 3] предполагаем, что каждый элемент поверхности тела взаимодействует со средой независимо от других участков тела; также

примем, что нормальное напряжение может быть представлено в виде квадратичной зависимости  $\sigma_n/\rho_0 = -(A\nu_n^2 + B\nu_n + C)$ , где  $A$ ,  $B$  и  $C$  – постоянные коэффициенты, зависящие от физико-механических свойств среды, формы ударника и других составляющих,  $\rho_0$  – начальная плотность грунта,  $\nu_n$  – нормальная компонента вектора скорости внедрения.

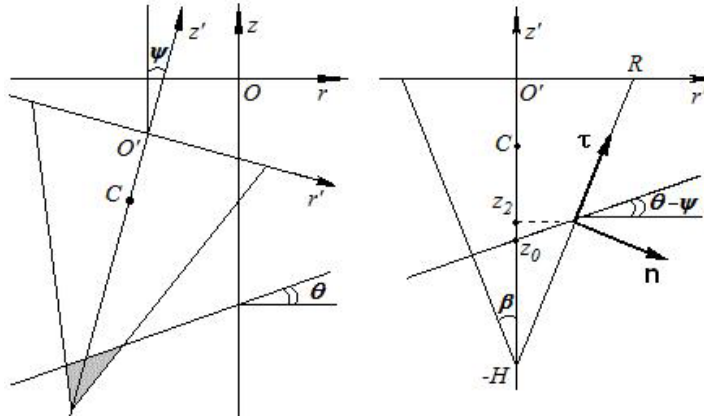


Рис. 1

Описание движения тела во времени дает решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений движения и вращения плоской фигуры вокруг центра масс в проекциях на оси подвижной системы координат  $O'r'z'$  относительно величин  $\nu_{r'}$ ,  $\nu_{z'}$ ,  $\omega$  и  $\psi$  при следующих начальных условиях:  $\nu_{r'} = 0$ ,  $\nu_{z'} = -V_0$ ,  $\omega = 0$ ,  $\psi = 0$ .

Для проверки работоспособности изложенной методики задача о проникании конического ударника в упругопластическую среду решалась в полной трехмерной постановке с использованием коммерческого программного продукта LS-DYNA.

В процессе счета анализировались скорости и ускорения

ударника как жесткого целого, а также компоненты интегральной силы взаимодействия ударника с грунтом в неподвижной системе координат  $Oxz$ .

На основании полученных результатов можно ожидать, что квадратичная по скорости модель локального взаимодействия, удовлетворительно описывающая процесс внедрения конического ударника по нормали к поверхности грунта, с несколько большей погрешностью будет применима и при наклонном внедрении.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашения № 14.В37.21.1137, № 14.В37.21.1902), Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-2843.2012.8) и РФФИ (проекты № 12-08-33106-мол\_а\_вед, № 13-08-00531\_а, № 13-08-00658\_а)

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Котов В. Л., Баландин В. В., Линник Е. Ю., Баландин В. В. *О применимости модели локального взаимодействия для определения сил сопротивления внедрению сферы в нелинейно-сжимаемый грунт* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5. – № 4. – С. 135–142.
2. Баженов В. Г., Котов В. Л., Линник Е. Ю. *О моделях расчета форм осесимметричных тел минимального сопротивления при движении в грунтовых средах* // ДАН. – 2013. – Т. 449. – № 2. – С. 156–159.
3. Колесников В. А. *Об изменении траектории метеорита при входе в грунт* // Изв. АН СССР. МТТ. – 1981. – № 4. – С. 99–104.

**М. М. Кокурин**

*Марийский государственный университет,*

*kokurin@nextmail.ru*

**ОБ АПОСТЕРИОРНОМ СПОСОБЕ ВЫБОРА  
ШАГА ДИСКРЕТИЗАЦИИ В РАЗНОСТНЫХ  
МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ  
ЗАДАЧИ КОШИ**

Изучается некорректная задача Коши

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = f \in D(A). \quad (1)$$

Здесь  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  – замкнутый неограниченный секториальный оператор с углом секториальности  $\varphi_0 < \pi/2$  в банаховом пространстве  $X$ ,  $\overline{D(A)} = X$ . Предполагается существование классического решения  $x(t)$ ,  $x : [0, T] \rightarrow X$  задачи (1). Пусть, кроме того, это решение допускает продолжение на некоторый больший отрезок  $[0, T_1]$ ,  $T_1 > T$ . Для аппроксимации решения задачи (1) будем использовать разностные схемы вида

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j x_{n+j}^N = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j A x_{n+j}^N, \quad 0 \leq n \leq N - k, \quad x_0^N = f. \quad (2)$$

Здесь  $\Delta t = T/N$  – шаг дискретизации,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq j \leq k$  – фиксированные параметры. При указании правила выбора элементов  $x_1^N, \dots, x_{k-1}^N$  схема (2) позволяет найти приближения  $x_n^N$ ,  $k \leq n \leq N$  к значениям  $x(n\Delta t)$  искомой функции  $x(t)$  в узлах дискретизации.

Класс  $R1$  разностных схем описывается параметрами  $k = 1$ ,  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_0 = 1 - \beta_1$ ,  $\beta_1 < 0$ . Класс  $R2$  определяется значением  $k = 2$ , условиями на коэффициенты

$\alpha_0 = -2\gamma_1 + 3$ ,  $\alpha_1 = 2\gamma_1 - 4$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_0 = \gamma_2 - 2$ ,  $\beta_1 = 3\gamma_1 - 2\gamma_2$ ,  $\beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1$ ,  $\gamma_1 \in (1, 2]$ ,  $\gamma_2 < \gamma_1$  и выбором  $x_1^N = (E + 2\Delta t A)(E + \Delta t A)^{-1} f$  (см. [1]).

Пусть вместо точного элемента  $f$  в схеме (2) используется приближённый элемент  $f_\delta$ ,  $\|f - f_\delta\| < \delta$ . Количество  $N$  отрезков дробления будем выбирать по апостериорному правилу

$$\|U_{-A}(T)x_N^N - f_\delta\| \leq b \ln^{-q+\varepsilon}(1/\delta) < \|U_{-A}(T)x_n^n - f_\delta\|, \\ 2 \leq n \leq N - 1, \quad (3)$$

с заранее выбранными константой  $b > 0$  и малым параметром  $\varepsilon > 0$ . Здесь  $q = 1$  для схем класса  $R1$  и  $q = 2$  для схем класса  $R2$ ;  $U_{-A}(t)$ ,  $t \geq 0$  есть порождённая оператором  $-A$  полугруппа;  $x_n^n$  есть приближение к значению  $x(T)$  искомой функции в последнем узле дискретизации  $t = T$  при дроблении отрезка  $[0, T]$  на  $n$  отрезков.

**Теорема.** *Разностные схемы классов  $R1$ ,  $R2$  с апостериорным выбором (3) дают регуляризующие алгоритмы для задачи (1), причём для них справедлива оценка погрешности*

$$\|x_N - x(T)\| \leq C \ln^{(-q+\varepsilon)(T_1-T)/T_1}(1/\delta), \quad C = \text{const.}$$

Теорема с некоторыми дополнительными условиями допускает распространение на схемы общего вида (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00239а).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кокурин М. М. *Об оптимизации оценок скорости сходимости некоторых классов разностных схем решения некорректной задачи Коши* // Вычислительные методы и программирование. – 2013. – Т. 14. – С. 58–76.

**И. В. Конюхов**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
ivankonuyukhov@yandex.ru*

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
НЕСТАЦИОНАРНЫХ  
ТЕРМОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ  
ПРИ ПУСКЕ НЕФТЯНОЙ ДОБЫВАЮЩЕЙ  
НАСОСНОЙ СКВАЖИНЫ, ВСКРЫВАЮЩЕЙ  
ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫЙ ПЛАСТ**

Данная работа обобщает исследования [1] на случай, когда пусковые термогидродинамические переходные процессы происходят в единой системе, образованной трещиновато-пористым нефтяным пластом слоисто-неоднородной структуры и добывающей скважиной, оборудованной погружной установкой электроцентробежного насоса (УЭЦН), работа двигателя которой контролируется наземной станцией управления (СУ). Такие процессы имеют место при выводе данной системы на эксплуатационный режим работы, например, после ремонта подземного оборудования.

Для расчета характеристик трехфазных потоков в трубах скважины и каналах ЭЦН используются те же самые численные модели, а в пласте учитывается дополнительно не только его слоистая неоднородность, но и наличие трещиновато-пористой структуры слоев, влияние силы тяжести, а также возможное присутствие подошвенной воды. Особенностью процесса фильтрации в таких пластах является формирование конуса подошвенной воды в окрестности добывающей скважины, приводящее к режиму её работы при высоких значениях обводненности продукции. Кроме того, во время проведения ремонтных

работ в пласте происходит гравитационное расслоение воды и нефти, так что после пуска скважины в её дебите может быть достаточно малое количество воды, которое быстро растёт при подходе конуса воды к забою скважины. Эти факторы, наряду с возникновением, перемещением и возможным исчезновением подвижных границ между областями движения двухфазных водонефтяных и трехфазных газоводонефтяных потоков в трубах скважины и насосном узле, существенно осложняют вывод насосной скважины на рабочий режим.

Численное решение поставленной задачи реализовано на основе методов [2] в новой версии программного комплекса OilRWP, позволяющего теперь проводить многовариантные расчеты в пластах, имеющих структуры двух принципиально различных типов, от которых зависят не только процессы во всей системе, но и, как следствие, количество отключений двигателя УЭЦН контроллером наземной СУ при выводе скважины на квазистационарный режим.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Конохов И. В. *Численное моделирование нестационарных процессов теплопереноса при пуске нефтяной добывающей скважины, оборудованной центробежным электронасосом* // XII Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения-2013». Сборник трудов (Казань, 24–29 октября 2013 г.). – Казань: Казан. ун-т, 2011. – С. 81–84.
2. Дияшев Р. Н., Хисамов Р. С., Конохов В. М., Чекалин А. Н. *Форсированный отбор жидкости из коллекторов с двойной пористостью, насыщенных неньютоновскими нефтями*. – Казань: ФЭН, 2012. – 247 с.

**Н. И. Корнилов, Э. Н. Сабуров, И. В. Тестова**

*Северный (Арктический) федеральный университет,*

*Институт математики, информационных*

*и космических технологий,*

*nikolaykornilov@live.ru, saburov@narfu.ru, i.testova@narfu.ru*

**ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО  
ТЕПЛООБМЕНА В РАБОЧЕМ ОБЪЕМЕ  
ЦИКЛОННОГО НАГРЕВАТЕЛЬНОГО  
УСТРОЙСТВА**

В последнее время повышенный интерес привлекают к себе задачи, связанные с повышением производительности промышленного оборудования и его энергоэффективности, в частности, уменьшение удельных затрат материалов и топлива и повышение эффективности его использования, что особенно актуально для энергетики.

Одним из наиболее перспективных решений данной проблемы является применение сильно закрученных, высокотурбулентных потоков теплоносителей, генерируемых в циклонных устройствах. Интерес к изучению циклонных нагревательных устройств появился уже в 30-х годах XX века, однако серьезные исследования конвективного теплообмена в рабочем объеме начались лишь в 1980-х годах. Отсутствие систематического изучения вопросов проектирования и расчета циклонных нагревательных устройств большой относительной длины и определяет актуальность проведенного исследования.

В последние годы в Северном (Арктическом) федеральном университете проводятся исследования конвективного теплообмена циклонных устройств большой относительной длины. Результаты исследований легли в основу нескольких статей и



диссертаций.

Целью является исследование конвективного теплообмена в рабочем объеме циклонных нагревательных устройств большой относительной длины.

Задача интенсификации конвективного теплообмена в циклонных устройствах решается путем оптимизации их параметров.

В ходе работы экспериментально исследован конвективный теплообмен на боковой поверхности рабочего объема циклонного нагревательного устройства при варьировании основных геометрических и режимных характеристик; получены обобщенные расчетные уравнения подобия; разработаны рекомендации по проектированию циклонных нагревательных устройств большой относительной длины.

Исследование проводилось на экспериментальном стенде, основным элементом которой являлась циклонная камера. В процессе эксперимента изменялись некоторые ее характеристики, а именно: относительная площадь входа, относительный диаметр выхода и расход воздуха на установку.

Выполнена обработка данных, полученных на экспериментальном стенде, в результате чего получена эмпирическая зависимость вида  $Nu = A Re_{\text{вх}}^n f_{\text{вх}}^m d_{\text{вых}}^k z^l$ , характеризующая влияние характеристик циклонного нагревательного устройства на интенсивность конвективного теплообмена в диапазоне чисел Рейнольдса  $Re = 4 \cdot 10^4 \dots 6 \cdot 10^5$ .

Исследование проблем теплообмена и тепло-массопереноса в предметных областях является трудоемкой вычислительной

задачей, для решения которой возникает потребность в использовании параллельных компьютерных систем, позволяющих вывести промышленное производство на новый современный уровень.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1 Осташев С. И., Сабуров Э. Н. *Конвективный теплообмен в циклонных секционных нагревательных устройствах*. – Архангельск: Изд-во Арханг. гос. техн. ун-та, 2004. – 192 с.

2 Карпов С. В., Сабуров Э. Н., Смолина Н. В., Зайцева М. Л. *Исследование теплоотдачи цилиндра в закрученном потоке* // Методические указания к курсовой работе по дисциплине “Тепломассообмен”. – 2-е издание. – Архангельск: изд. САФУ, 2013. – 57 с.

**К. В. Коршун**

*Сибирский федеральный университет,  
KKorshun@sfu-kras.ru*

#### **О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ**

Обратные задачи математической физики в настоящий момент играют большую роль в естественных науках и их приложениях [1, 2]. Коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений – это задачи, в которых вместе с решением дифференциального уравнения неизвестным является и один (или несколько) из его коэффициентов.

В настоящей работе рассматривается следующая задача с параметром  $y$ :

$$\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial t} = \lambda \Delta_x u(t, x, y) + \mu(t, y) f(t, x, y), \quad (1)$$

$$u(0, x, y) = u_0(x, y), \quad (2)$$

$$u(t, y, y) = \phi(t, y), \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in D \subset \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Здесь  $D$  – компактное подмножество  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  – оператор Лапласа. Неизвестными функциями являются  $u(t, x, y)$ ,  $\mu(t, y)$ , функции  $f(t, x, y)$ ,  $u_0(x, y)$ ,  $\phi(t, y)$  заданы.

В задаче (1) – (3) размерность параметра  $y$  та же, что и размерность пространства. Задача в такой постановке ранее не рассматривалась. Условие переопределения (3) физически представляет собой известную в области  $D$  зависимость искомой величины от параметров.

В работе получены достаточные условия на входные данные, обеспечивающие однозначную разрешимость задачи (1) – (3).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Романов В. Г. *Обратные задачи математической физики*. – М.: Наука, 1984. – 262 с.
2. Belov Yu. Ya., Cantor S. A. *Inverse problems for partial differential equations*. – Utrecht etc.: VSP, 2002. – 211 p.

**А. В. Кочетков, Е. Г. Глазова, И. А. Турыгина**

*НИИМ Нижегородского государственного университета*

*им. Н.И. Лобачевского,*

*hodykinainna@gmail.com*

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ПРОНИЦАЕМЫМИ  
ПРЕГРАДАМИ РАЗЛИЧНОЙ СТРУКТУРЫ**

Методами численного моделирования исследуется взаимодействие взрывной ударной волны с проницаемой преградой, представляющей собой пакет металлических плетеных сеток, состоящий из разного количества слоев. Такие пакеты сеток различной структуры проницаемы для газа и используются для уменьшения амплитуды проходящих ударных волн [1]. На основе сравнения численных решений задач с проницаемыми преградами различной структуры и без них оценивается влияние преграды на газодинамическое течение [2, 3]. Расчеты проведены с помощью вычислительного комплекса STAR-CCM+ [4]. Предполагается симметрия фрагментов пакетов сетки, используемых в расчетах. В качестве краевых условий на плоскостях симметрии и на поверхностях проволок нормальная скорость газа равна нулю. На поверхностях неподвижных проволок по температурному режиму задаются адиабатические условия. Верификация вычислительного комплекса при решении поставленной задачи произведена на задаче распространения ударной волны через пакет сеток. Ударная волна образовывалась от взрыва цилиндрического заряда конечных размеров, помещенного внутри цилиндрического пакета плетеной сетки [5]. Численное решение сравнивается с эксперименталь-

ными данными [2] по параметрам проходящей через проникающую преграду ударной волны. Получено удовлетворительное соответствие численных и экспериментальных данных по параметрам проходящей ударной волны [5].

Проведена серия численных расчетов взаимодействия ударной волны с пакетами сеток различной толщины (изменялось количество слоев). Численный эксперимент подтверждает, что при прохождении ударной волны через пакет металлических плетеных сеток происходит ослабление амплитуды и импульса. С увеличением количества слоев сетки усиливается отраженная волна и ослабляется проходящая. Таким образом, преграда, представляющая собой пакет металлической плетеной сетки, выполняет свои функции – снижает нагрузку: как по амплитуде, так и по величине импульса проходящей ударной волны. При численном моделировании взаимодействия взрывной ударной волны с газопроницаемой преградой процессы теплообмена между металлом и газом оказывают возрастающее влияние на процесс с ростом количества слоев.

Работа выполнена при частичном финансировании РФФИ (проекты № 13-08-00219, № 13-08-97091 р\_поволжье\_a).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мельцас В. Ю., Портнягина Г. Ф., Соловьев В. П. *Численное моделирование прохождения ударных волн через экранирующие решетки* // ВАНТ. – 1993. – Вып. 3. – С. 26–31.
2. Осавчук А. Н., Глазова Е. Г., Митрофанов С. С., Дикий А. А., Куликов В. Н. *Экспериментально-расчетные исследования процесса распространения ударной волны через цилиндрический пакет из металлической сетки* // X Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. – Нижний Новгород, 24–30 августа 2011 г.

3. Гельфанд Б. Е., Фролов С. М. *Приближенный расчет ослабления ударных волн проницаемыми преградами* // ПМГФ. – 1990. – № 4. – С. 42–46.

4. Документация, сопровождающая вычислительный комплекс STAR-CCM+ 9.04.008.

5. Кочетков А. В., Крылов С. В., Турыгина И. А. *Численное моделирование нестационарного взаимодействия ударной волны с проницаемыми преградами* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Материалы XII молодежной школы-конференции, Казань, 24–29 октября 2013 г. – Казань: Изд-во Казан. ун-та. – 2013. – Т. 47. – С. 87–89.

**Д. А. Краснова**

*Сибирский федеральный университет,*

*krasnova-d@mail.ru*

### **ОБ ИССЛЕДОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ЛАГРАНЖЕВЫХ КООРДИНАТАХ**

При описании движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей задача сводится к отысканию решения уравнений Эйлера с выполнением кинематического и динамического условий на свободной границе. Кинематическое условие позволяет преобразовать эту задачу к другой задаче, в которой область определения фиксирована. Это достигается переходом к лагранжевым координатам  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ , которые вводятся, как значения координат частиц жидкости в начальный момент времени  $t = 0$ :  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ . Закон движения частиц определяется в виде  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$  решением уравнения  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ .

Рассматривается система уравнений следующего вида [1]:

$$x_t = (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta)(\varphi_\xi - u_0) + (-y_\xi z_\zeta + z_\xi y_\zeta)(\varphi_\eta - v_0) + \\ + (y_\xi z_\eta - z_\xi y_\eta)(\varphi_\zeta - w_0), \quad (1)$$

$$y_t = (-x_\eta z_\zeta + z_\eta x_\zeta)(\varphi_\xi - u_0) + (x_\xi z_\zeta - z_\xi x_\zeta)(\varphi_\eta - v_0) + \\ + (-x_\xi z_\eta + z_\xi x_\eta)(\varphi_\zeta - w_0), \quad (2)$$

$$z_t = (x_\eta y_\zeta - y_\eta x_\zeta)(\varphi_\xi - u_0) + (-x_\xi y_\zeta + y_\xi x_\zeta)(\varphi_\eta - v_0) + \\ + (x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta)(\varphi_\zeta - w_0), \quad (3)$$

$$x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) + x_\eta(-y_\xi z_\zeta + y_\zeta z_\xi) + x_\zeta(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) = 1, \quad (4)$$

где  $(x, y, z) = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$  – координаты частиц жидкости,  $\varphi((\boldsymbol{\xi}, t))$  – искомая функция, возникающая при преобразованиях уравнений движения,  $u_0(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $v_0(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $w_0(\xi, \eta, \zeta)$  – компоненты вектора скорости частиц при  $t = 0$ . Преобразование уравнений движения к переменным  $\mathbf{x}$ ,  $\varphi$  впервые было найдено Г. Вебером [2]. Уравнение (4) представляет собой уравнение сохранения объема,  $\det M = 1$ , где  $M = \partial(\mathbf{x})/\partial(\boldsymbol{\xi})$  – матрица Якоби.

Для системы (1) – (4) проводится групповой анализ уравнений движения идеальной жидкости в переменных Лагранжа.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Андреев В. К. *Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей.* – Новосибирск: Наука, 1992. – 136 с.
2. Серрин Д. *Математические основы классической механики жидкости.* – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 256 с.
3. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.

Ю. С. Крусс

Саратовский государственный университет

им. Н.Г. Чернышевского,

KrussUS@gmail.com

## О РЕШЕНИИ МАСШТАБИРУЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ

Локальное поле  $F^{(s)}$  положительной характеристики  $p$  изоморфно пространству бесконечных в обе стороны последовательностей  $(\dots, \bar{0}_{i-1}, \bar{a}_i, \bar{a}_{i+1}, \dots)$ ,  $\bar{a}_j \in GF(p^s)$ , где  $GF(p^s)$  – конечное поле. Известно, что при  $s = 1$  группа  $F^{(1)+}$  (аддитивная группа поля  $F^{(1)}$ ) есть группа Виленкина с постоянной образующей последовательностью  $p_n = p$ , а при  $s > 1$  аддитивная группа  $F^{(s)+}$  изоморфна произведению групп Виленкина [1], т. е.

$$F^{(s)+} \cong F^{(1)+} \times F^{(1)+} \times \dots \times F^{(1)+} = \left(F^{(1)+}\right)^s.$$

Известно, что в локальном поле положительной характеристики существует простой элемент  $\mathfrak{p}$  с нормой  $|\mathfrak{p}| = 1/p^s$ . Каждый элемент  $x$  поля  $F^{(s)}$  можно однозначно представить в виде  $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{a}_n \mathfrak{p}^n$ , где  $\bar{a}_n \in GF(p^s)$ . Для удобства проведения аналогии с нульмерными группами обозначим  $g_n = \mathfrak{p}^n$ . Введем множество

$$H_0 = \{\bar{a}_{-1}g_{-1} + \bar{a}_{-2}g_{-2} + \dots + \bar{a}_{-l}g_{-l}, l \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда

$$H_0^\perp = \{\bar{r}_0^{\bar{\alpha}_0} \cdot \dots \cdot \bar{r}_n^{\bar{\alpha}_n}, n \in \mathbb{N}\},$$

где

$$\bar{r}_k^{\bar{\alpha}_k} = (\bar{r}_k^{(1,0,\dots,0)})^{\bar{\alpha}_k} = \bar{r}_k^{(\alpha_k^{(0)}, \dots, \alpha_k^{(s-1)})} = r_{ks+0}^{\alpha_k^{(0)}} r_{ks+1}^{\alpha_k^{(1)}} \dots r_{ks+s-1}^{\alpha_k^{(s-1)}},$$



$\alpha_k^{(j)} = \overline{0, p-1}$ . Отметим, что  $\bar{r}_k^{(1,0,\dots,0)} = r_k$  — функция Радемахера. КМА на группах Виленкина достаточно хорошо изучен, в частности, известны свойства решения масштабирующего уравнения [2]. Используя свойство функции Радемахера на локальных полях [1] и представление характеров через функции Радемахера, мы установили следующий результат, который аналогичен результату Ю. А. Фаркова [2] для групп Виленкина.

**Теорема.** *Если функция  $\phi \in L^2(F^{(s)})$  имеет компактный носитель, удовлетворяет уравнению*

$$\phi(x) = \sum_{h \in H_0^N} \beta_h \phi(Ax - h)$$

*и условию  $\hat{\phi}(\theta) = 1$ , то  $\sum_{h \in H_0^N} \beta_h = p^s$  и  $\text{supp } \phi \subset F_{-N+1}^{(s)}$ .*

*Это решение единственно, дается формулой*

$$\hat{\phi}(\chi) = \prod_{j=0}^{\infty} m_0(\chi A^{-j})$$

*и обладает следующим свойством:  $\hat{\phi}(h^*) = 0$  при всех  $h^* \in H_0^\perp \setminus \{\theta\}$ .*

Работа подготовлена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/К).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Lukomskii S. F., Vodolazov A. M. *Non-Haar MRA on local field of positive characteristic*. — <http://arxiv.org/abs/1407.4069>.
2. Фарков Ю. А. *Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп* // Матем. заметки. — 2007. — Т. 82. — Вып. 6. — С. 934–952.

**В. И. Кузоватов**

*Сибирский федеральный университет,  
kuzovатов@yandex.ru*

## О ДЗЕТА-ФУНКЦИИ КОРНЕЙ ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ

Данная работа посвящена получению интегрального представления для дзета-функции корней некоторого класса целых функций.

Пусть  $f(z)$  – целая функция нулевого порядка в  $\mathbb{C}$ . Рассмотрим уравнение

$$f(z) = 0. \quad (1)$$

Обозначим через  $N_f = f^{-1}(0)$  множество всех корней уравнения (1), каждый корень считается столько раз, какова его кратность.

Наша цель – получить интегральное представление для дзета-функции  $\zeta_f(s)$  уравнения (1), которая определяется следующим образом:

$$\zeta_f(s) = \sum_{a \in N_f} (-a)^{-s},$$

где  $s \in \mathbb{C}$ . Знак минус перед корнями в определении дзета-функции взят для удобства записи интегральных формул.

Пусть  $z = x + iy$ . Предположим, что функция  $f$  не равна нулю ни в одной точке множества  $\mathbb{R}_+ := \{z \in \mathbb{C} : x \geq 0, y = 0\}$ .

**Теорема 1.** *Предположим, что  $0 < \operatorname{Re} s < 1$ . Тогда*

$$\zeta_f(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{f'(x)}{f(x)} - \omega_0 \right\} x^{-s} dx,$$

где  $\omega_0$  есть предельное значение для выражения  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  на бесконечности.

В дальнейшем рассмотрим целую функцию  $f(z)$  порядка  $\rho$  и приведем еще одно интегральное представление для дзета-функции  $\zeta_f(s)$  нулей  $z_n$  функции  $f$ , которые имеют вид

$$z_n = -q_n + is_n, \quad q_n > 0.$$

Предположим, что  $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$  и выполнены следующие условия:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{n} > 0, \quad (2)$$

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q_n}\right)^{\sigma-1} \text{ сходитс} \text{я.} \quad (3)$$

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (2) и (3) и  $\operatorname{Re} s > 1$ . Тогда

$$\zeta_f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} F(f, x) dx,$$

где  $F(f, x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{z_n x}$ , а  $\Gamma(s)$  – это гамма-функция Эйлера.

**Следствие.** Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для  $0 < \operatorname{Re} s < 1$  справедливо равенство

$$\zeta_f(s) \Gamma(s) = \int_0^{\infty} \left( F(f, x) - \frac{1}{x} \right) x^{s-1} dx.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00007-а, № 14-01-00283-а).

**С. К. Кузьмина**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
kuzmina\_s@list.ru*

**ЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗНОСТИ  
НА ТРАНСВЕРСАЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ  
ВТОРОГО ПОРЯДКА**

Пусть  $M$  – многообразие размерности  $m + n$  со слоением коразмерности  $n$  [1]. Карта  $h$  из атласа слоения на  $M$  относит точке  $x \in M$  координаты  $\{x^i = h^i(x), y^\alpha = h^\alpha(x)\}$ , где  $x^i$  – трансверсальные координаты, а  $y^\alpha$  – слоевые [1]. Трансверсальное расслоение второго порядка  $T_{tr}^2 M$  многообразия  $M$  образовано классами эквивалентности кривых  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  по следующему отношению эквивалентности:

$$\frac{d(h^i \circ \gamma_1)}{dt}(0) = \frac{d(h^i \circ \gamma_2)}{dt}(0), \quad \frac{d^2(h^i \circ \gamma_1)}{dt^2}(0) = \frac{d^2(h^i \circ \gamma_2)}{dt^2}(0).$$

Координаты  $(x^i, y^\alpha)$  на  $M$  индуцируют координаты

$$\left( x^i, y^\alpha, \dot{x}^i = \frac{d(h^i \circ \gamma)}{dt}(0), \ddot{x}^i = \frac{d^2(h^i \circ \gamma)}{dt^2}(0) \right)$$

на  $T_{tr}^2 M$ , определяющие на  $T_{tr}^2 M$  структуру гладкого многообразия, расслоенного над  $M$ . Координаты

$$\{X^i = x^i + \varepsilon \dot{x}^i + \varepsilon^2 \ddot{x}^i \in \mathbb{D}^2, y^\alpha \in \mathbb{R}\},$$

где  $\mathbb{D}^2$  – алгебра триальных чисел, задают на  $T_{tr}^2 M$  структуру  $\mathbb{D}^2$ -гладкого многообразия, модулируемого  $\mathbb{D}^2$ -модулем  $(\mathbb{D}^2)^m \oplus \mathbb{R}^n$  [2].

Пусть  $\mathcal{T}r^2\text{-Bun}$  – категория, объектами которой являются трансверсальные расслоения второго порядка слоеных многообразий  $\pi_0^2 : T_{tr}^2 M \rightarrow M$ , а морфизмами  $\mathbb{D}^2$ -гладкие

отображения  $F^2 : T_{tr}^2 M \rightarrow T_{tr}^2 M'$ .  $\mathbb{D}^2$ -гладкое отображение  $F^2$  определяет  $\mathbb{D}$ -гладкое отображение  $F^1 : T_{tr} M \rightarrow T_{tr} M'$  и морфизм слоений  $f : M \rightarrow M'$ . В категории  $\mathcal{T}r^2\text{-}\mathcal{B}un$  можно выделить автоморфизмы специального типа  $F^2 : T_{tr}^2 M \rightarrow T_{tr}^2 M$ , которые характеризуются тем, что  $f$  и  $F^1$  являются тождественными отображениями. Такие  $\mathbb{D}^2$ -дiffeоморфизмы  $F^2$  в локальных координатах имеют вид

$$\{x^i = x^i, y^\alpha = y^\alpha, \dot{x}^i = \dot{x}^i, \dot{x}^i = \dot{x}^i + h^i(x^j, y^\alpha)\}.$$

Коэффициенты произвольной  $\mathbb{D}^2$ -гладкой  $\mathbb{D}^2$ -линейной связности на  $T_{tr}^2 M$  задаются уравнениями вида:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ip}^k &= \Gamma_{ip}^k X^j + \varepsilon(\dot{x}^l \partial_l \Gamma_{ip}^k + G_{ip}^k(x^j) + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{2} \dot{x}^l \dot{x}^s \partial_{ls} \Gamma_{ip}^k \right) + \\ &+ \varepsilon^2 \left( \dot{x}^l \partial_l \Gamma_{ip}^k + \dot{x}^l \partial_l G_{ip}^k + H_{ip}^k(x^j, y^n) \right), \quad \Gamma_{ip}^\sigma = \Gamma_{ip}^\sigma(x^j, y^n), \\ \Gamma_{i\gamma}^\sigma &= \Gamma_{i\gamma}^\sigma(x^j, y^n), \quad \Gamma_{\alpha p}^\sigma = \Gamma_{\alpha p}^\sigma(x^j, y^n), \quad \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma = \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma(x^j, y^n). \end{aligned}$$

Две связности  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  на  $T_{tr}^2 M$  назовем эквивалентными, если одна из них может быть переведена в другую автоморфизмом вышеуказанного специального типа.

**Теорема. 1.** *Две  $\mathbb{D}^2$ -гладкие связности  $\Gamma'$  и  $\Gamma$  на  $T_{tr}^2 M$  эквивалентны тогда и только тогда, когда тензор деформации является производной Ли  $\mathcal{L}_v \Gamma$  в направлении некоторого вертикального векторного поля  $v$ .*

2.  $\mathbb{D}^2$ -гладкая связность  $\Gamma$  на  $T_{tr}^2 M$  эквивалентна  $\mathbb{D}^2$ -продолжению некоторой проектируемой [1] связности, заданной на  $M$ , тогда и только тогда, когда

$$G_{ip}^k(x^j) = 0,$$

$$H_{ip}^k = \Gamma_{ip}^q \frac{\partial h^k}{\partial x^q} + h^l \partial_l \Gamma_{ip}^k - \Gamma_{iq}^k \frac{\partial h^q}{\partial x^p} - \Gamma_{qp}^k \frac{\partial h^q}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 h^k}{\partial x^i \partial x^p}.$$

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Molino P. *Riemannian foliations*. – Birkhäuser, 1988. – 339 p.
2. Шурыгин В. В. *Многообразия над алгебрами и расслоения Вейля*. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2002. – 80 с.

**В. В. Купцов**

*Самарский государственный аэрокосмический  
университет им. ак. С.П. Королева,  
slava.kuptcov94@mail.ru*

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ЛИНИЙ УРОВНЯ  
ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА**

**Цель:** Определение характеристики, описывающей гравитационное поле количественно (гравитационный потенциал), характеристику поля, определяющей направление поля (векторные линии).

**Задачи:** 1) Построить график гравитационного потенциала системы Земля-Луна 2) Получить формулы для векторных линий этого гравитационного поля 3) Произвести необходимые расчёты. Построить графики.

**Система Земля–Луна.** Система Земля–Луна, Двойная планета – термин в астрономии, который используется для обозначения бинарной системы, состоящей из двух астрономических объектов, каждый из которых удовлетворяет определению планеты и является достаточно массивным, чтобы оказывать гравитационный эффект, превосходящий гравитационный эффект звезды, вокруг которой они вращаются.

**Формулы, применимые к описанию системе Земля–Луна.** Расчёт гравитационного потенциала (количественная

характеристика)

$$U(x, y) = G * (Mz/|rz| + Ml/|rl|).$$

Расчёт векторных линий (характеристика, определяющая направление поля)

$$g = dU/dx * i + dU/dy * j.$$

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Холшевников К. В., Никифоров И. И. *Свойства гравитационного потенциала в примерах и задачах.* – СПб: СПбГУ, 2008. – 72 с.
2. Бутиков Е. И. *Движение космических тел в компьютерных моделях. II. Задача многих тел.* – СПб: СПбГУ, 2007. – 43 с.
3. Блох Ю. И. *Количественная интерпретация гравитационных и магнитных аномалий.* – М: МГГА, 2009. – 232 с.

**А. А. Малюгина**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
alexandra.malyugina@gmail.com*

#### КОМПЛЕКСЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ МНОГООБРАЗИЯ НАД АЛГЕБРОЙ ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Пусть  $L_n^{\mathbb{D}}$  –  $n$ -мерный модуль над алгеброй дуальных чисел  $\mathbb{D}$ . С модулем  $L_n^{\mathbb{D}}$  естественно ассоциируются следующие  $\mathbb{D}$ -модули:

$L_n^{\mathbb{D}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{D}$  – тензорное произведение  $L_n^{\mathbb{D}}$  на  $\mathbb{D}$  над  $\mathbb{R}$ ,

$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(L_n^{\mathbb{D}}, \mathbb{D})$  – модуль  $\mathbb{R}$ -линейных  $\mathbb{D}$ -значных форм на  $L_n^{\mathbb{D}}$ , естественно изоморфный модулю  $\text{Hom}_{\mathbb{D}}(L_n^{\mathbb{D}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{D}, \mathbb{D})$ ,

$\text{Hom}_{\mathbb{D}}(L_n^{\mathbb{D}}, \mathbb{D})$  – модуль  $\mathbb{D}$ -линейных форм на  $L_n^{\mathbb{D}}$ , который можно рассматривать как подмодуль в  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(L_n^{\mathbb{D}}, \mathbb{D})$  и в  $\text{Hom}_{\mathbb{D}}(L_n^{\mathbb{D}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{D}, \mathbb{D})$ ,

$L'$  – подмодуль в  $L_n^{\mathbb{D}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{D}$ , аннулирующий  $\text{Hom}_{\mathbb{D}}(L_n^{\mathbb{D}}, \mathbb{D})$ .

Выбирая в  $L_n^{\mathbb{D}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{D}$  подмодуль  $\bar{L}$ , дополнительный к  $L'$ , получаем разложения

$$L_n^{\mathbb{D}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{D} = L' \oplus \bar{L}, \quad (1)$$

$$\text{Hom}_{\mathbb{D}}(L_n^{\mathbb{D}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{D}, \mathbb{D}) = \text{Hom}_{\mathbb{D}}(L_n^{\mathbb{D}}, \mathbb{D}) \oplus \text{Ann}(\bar{L}).$$

Касательные пространства  $T_X M^{\mathbb{D}}$  к  $\mathbb{D}$ -гладкому многообразию  $M^{\mathbb{D}}$  над алгеброй дуальных чисел несут на себе структуры  $n$ -мерных  $\mathbb{D}$ -модулей, и вышеуказанную конструкцию (1) можем применить к касательному расслоению  $TM^{\mathbb{D}}$ , выбирая гладкое подрасслоение  $\bar{TM}^{\mathbb{D}}$  в  $TM^{\mathbb{D}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{D}$ , дополнительное к подрасслоению  $T'M^{\mathbb{D}}$ , аннулирующему  $\mathbb{D}$ -линейные формы на  $M^{\mathbb{D}}$ . Это позволяет с использованием конструкции Вайсмана–Молино [1] определить комплексы [2]

$$\hat{d} : \Omega^{(r,s)} \rightarrow \Omega^{(r+1,s)} \quad (2)$$

$\mathbb{D}$ -значных дифференциальных форм специального вида на  $M^{\mathbb{D}}$ .

Многообразию  $M^{\mathbb{D}}$  можно вложить в касательное расслоение как образ нулевого сечения  $o : M^{\mathbb{D}} \rightarrow TM^{\mathbb{D}}$ . При этом расслоение  $TM^{\mathbb{D}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{D}$  оказывается естественно изоморфным обратному образу  $o^{-1}TTM^{\mathbb{D}}$ . Это позволяет с использованием  $\mathbb{D}$ -продолжения  $\mathbb{D}$ -значных дифференциальных форм на  $M^{\mathbb{D}}$  до  $\mathbb{D}$ -гладких дифференциальных форм на  $TM^{\mathbb{D}}$  получить комплексы дифференциальных форм на  $TM^{\mathbb{D}}$ , изоморфные комплексам (1).



## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Molino P. *Riemannian foliations.* – Boston–Basel, Birkhäuser, 1988.
2. Malugina A. A., Shurygin V. V. *Obstructions to existence of holomorphic linear connections on manifolds over the algebra of dual numbers* // Высокопроизводительные вычисления – математические модели и алгоритмы: Материалы II Междунар. конф., посв. Карлу Якоби. – Калининград: Изд-во БФУ им. И.Канта, 2013. – С. 27–29.

**Р. В. Марков, В. В. Чермных**

*Вятский государственный гуманитарный университет,  
mathematic@vshu.kirov.ru*

**О ПИРСОВСКИХ СЛОЯХ ПОЛУКОЛЕЦ**

Р. С. Пирсом [1] для произвольного кольца с 1 был построен пучок колец на нульмерном компакте и получено изоморфное представление кольца сечениями своего пирсовского пучка. Полукольцевой аналог этой конструкции был рассмотрен В. В. Чермных [2]. В докладе рассказывается о методах изучения абстрактных полуколец с помощью пирсовского пучка. Перечислим полукольца, исследуемые авторами: заменяемые, абелевы, *arp*-полукольца, *pf*-полукольца, полукольца, близкие к регулярным (риккартовы, сильно риккартовы, бирегулярные), полукольца без нильпотентов и другие. Полученные результаты можно разделить на два типа: чисто алгебраические и результаты с использованием свойств сечений и/или свойств булева спектра полукольца. Приведем два предложения, относящиеся к двум указанным типам.

**Предложение 1.** *Полукольцо бирегулярно в точности тогда, когда все его пирсовские слои – простые полукольца.*

**Предложение 2.** *Равносильны утверждения:*

- (a)  *$S$  – риккартово полукольцо без нильпотентов;*
- (b) *пирсовский пучок полукольца  $S$  полухаусдорфов, а все его пирсовские слои являются кольцами без делителей нуля.*

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Pierce R. S. *Modules over commutative regular rings* // Mem. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 70. – P. 1–112.
2. Чермных В. В. *Пучковые представления полукольца* // Успехи мат. наук. – 1993. – Т. 48. – № 5. – С. 185–186.

**Е. А. Минеева, К. С. Ускова**

*Казанский национальный исследовательский  
технический университет (КАИ),  
ekaterina-mineeva@rambler.ru*

#### **СИСТЕМЫ ИТЕРИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ФРАКТАЛОВ В $E^3$**

В данной работе мы изучаем системы итерированных функций и применяем их при построении геометрических фракталов на плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве.

Мы будем рассматривать аффинные преобразования  $f_j(x, y, z)_{1 \leq j \leq k}$  евклидового пространства на себя. Образом  $T(A)$  множества  $A$  относительно системы функций  $T = \{f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), \dots, f_k(x, y, z)\}$  называется объединение

всех образов  $T(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_k(A)$ . Вторая итерация имеет вид:  $T_2(A) = T(T(A)) = f_1(T(A)) \cup f_2(T(A)) \cup \dots \cup f_k(T(A))$ . Аналогично можно определить  $n$ -ю итерацию системы функций:  $T_n(A) = T(T_{n-1}(A))$ .

Отображение  $f(x, y, z)$  называется сжимающим, если существует такое  $s$ :  $0 < s < 1$ , что

$$|f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_2, z_2)| \leq s|(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2)|.$$

Хорошо известна

**Теорема.** Пусть задана система  $T$  итерируемых функций  $\{f_i\}$ . Если все отображения  $f_i$  – сжимающие, то  $T_n(A)$  стремится в метрике Хаусдорфа к множеству  $A'$  при  $n \rightarrow \infty$ . Кроме того,  $T(A') = A'$ , т. е.  $A'$  – неподвижное множество для  $T$ .

Предельное множество итерационного процесса системы сжимающих отображений является фракталом. Наша задача – найти систему итерированных функций (СИФ) для фрактала, построенного геометрическим способом.

Пусть инициатором  $A$  нашего фрактала является единичный куб  $MNPKN_1N_1P_1K_1$ . Под действием четырех сжимающих отображений  $f_1(A)$ ,  $f_2(A)$ ,  $f_3(A)$ ,  $f_4(A)$  он перейдет в 4 куба, линейный размер которых в 2 раза меньше исходного. Таким образом, получаем первую итерацию фрактала – его генератор.

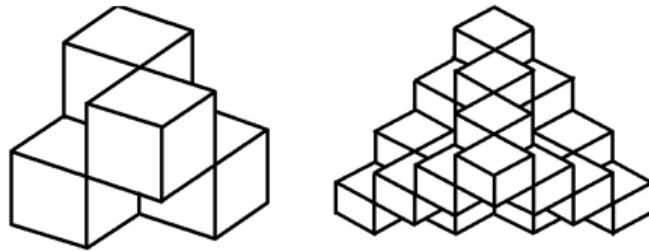


Рис. 1. Первая и вторая итерации фрактала

Для нахождения СИФ, задающей наш фрактал, найдем сжимающие аффинные преобразования  $f_1, f_2, f_3, f_4$ .

Аналитическое задание аффинного преобразования  $f : (x; y; z) \mapsto (x'; y'; z')$  имеет вид:

$$\begin{aligned} x' &= A_1x + B_1y + C_1z + D_1, \\ y' &= A_2x + B_2y + C_2z + D_2, \\ z' &= A_3x + B_3y + C_3z + D_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A_i, B_i, C_i, D_i \in \mathbb{R}$  и определитель системы (1)  $\Delta \neq 0$ .

Найдем преобразование  $f_1$ , переводящее куб  $A$  в куб  $f_1(A)$ . По теореме о задании аффинного преобразования в  $E^3$  достаточно рассмотреть 4 пары соответствующих вершин кубов:  $M(1; 0; 0) \mapsto M'(1; 0; 0)$ ,  $N(0; 0; 0) \mapsto N'(1/2; 0; 0)$ ,  $P(1; 0; 1) \mapsto P'(1; 0; 1/2)$ ,  $M_1(1; 1; 0) \mapsto M'_1(1; 1/2; 0)$ .

Подставляя координаты точек в систему (1), находим коэффициенты этой системы и получаем аналитическое задание

$$f_1(x, y, z) = ((1/2)x + 1/2; (1/2)y; (1/2)z).$$

Аналогично находим

$$f_2(x, y, z) = ((1/2)x + 1/2; (1/2)y + 1/2; (1/2)z + 1/2),$$

$$f_3(x, y, z) = ((1/2)x; (1/2)y; (1/2)z + 1/2),$$

$$f_4(x, y, z) = ((1/2)x; (1/2)y + 1/2; (1/2)z).$$

Итак, мы нашли СИФ, определяющую построенный нами фрактал.

Аналогично нами найдены СИФ для серии новых фракталов, построенных в  $E^2$ .

**С. Р. Миронова, Л. Ю. Низамиева,  
Е. Ю. Каликинская, А. Ю. Погодина**

*Казанский национальный исследовательский  
технический университет им. А. Н. Туполева (КАИ),*

*Саратовский государственный технический  
университет им. Ю. А. Гагарина,*

*srmiroнова@yandex.ru, NizamievaLU@yandex.ru,*

*kalikinskaya@sstu.ru, apogodina@yandex.ru*

## **ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОМПЬЮТЕРНОГО ТЕСТИРОВАНИЯ**

Вхождение Российской Федерации в Болонский процесс требует от высшего образования совершенствования качества обучения, педагогических методик и технологий, а также способов контроля эффективности обучения. К числу наиболее распространенных способов контроля результатов обучения относится тестирование.

Виды и формы контроля, применяемые в различных вузах, весьма разнообразны. В последнее время отмечается тенденция актуализации доминирующей позиции тестирования в системе проверки знаний обучающихся. В настоящее время одним из основных направлений усовершенствования процесса обучения стало применение АСТ-тестирования контроля знаний, умений и навыков, позволяющего объективно оценивать

полученные знания студентов, выявлять имеющиеся пробелы и способы ликвидировать их.

С целью повышения объективности контроля, а также эффективной организации обучения и осуществления контроля знаний обучаемых, с 2009/2010 года обучения в Саратовском государственном техническом университете им. Ю. А. Гагарина эффективно используют стандартизированные тесты, инструментальные средства, компьютеры и современные информационные технологии в обязательном порядке по предметам “математика”, “физика” и “информатика”.

Банки тестовых заданий (БТЗ) по дисциплинам основных образовательных программ создаются для проверки остаточных знаний, а также для организации текущего и итогового контроля учебных достижений студентов с целью повышения качества подготовки и эффективности самостоятельной работы будущих специалистов. За две недели до проведения экзамена на сайте университета появляется информация о тестах, что позволяет студентам, с одной стороны, просмотреть эти тесты и лучше к ним подготовиться, с другой стороны, – если база вопросов небольшая, то студенты автоматически запоминают ответы на вопросы, что не даёт преподавателям объективно оценить знания студента.

Тестовые задания, разработанные преподавателями кафедр, проходят внутреннюю проверку и утверждаются на заседании кафедры, что оформляется соответствующим протоколом. Ответственным за содержание тестов и их соответствие дидактическим единицам ГОС ВПО является заведующий кафедрой. Обязательным условием организации итогового контроля знаний студентов в форме компьютерного тестирования является утверждение на заседании кафедры системы оцени-

вания тестов.

Остановимся более подробно на проведении экзамена в форме теста по математике и отразим все положительные и отрицательные его стороны. Данный тест рассчитан на 40 минут, что характеризует свободу владения материалом, аналитические навыки и устойчивость знаний. Тест имеет структуру, соответствующую содержанию государственного образовательного стандарта и содержит различные формы тестовых заданий. Данное разделение вопросов производится на усмотрение преподавателя. Для того, чтобы тест мог отразить полученные знания студента и объективность оценки по изученному курсу, необходимо многообразие содержания тестов; каждому студенту предъявляется выборка, например, из 20 заданий из достаточно больших банков заданий, поэтому вероятность совпадения тестовых заданий достаточно низкая. Кроме того, тест отражает всю полноту содержания, так как в ходе тестирования студент должен показать все свои умения и знания, которые он получил при изучении соответствующих разделов высшей математики, определяемых рабочей программой, учебным планом и ФГОС для данной конкретной специальности в соответствующем семестре.

Процент сдачи экзамена на оценку “отлично” при сдаче экзамена в форме тестирования примерно на 14 % выше, а на оценку “удовлетворительно” – на 13% ниже, чем при традиционном способе приема экзамена.

На наш взгляд, компьютерное тестирование целесообразно применять в качестве: одного из методов текущего и рубежного контроля; первой ступени контроля при итоговом контроле знаний, обеспечивающей допуск к традиционному экзамену; элемента итогового экзамена в итоговом контроле знаний, со-

чета его с выполнением итоговых контрольных работ для проверки усвоенных навыков. Необходима интеграция традиционного способа сдачи экзамена и компьютерного тестирования в ВУЗе, позволяющая учесть достоинства и недостатки различных форм контроля и обеспечивающая возможности для проверки не только знаний обучающегося, но и его умения рассуждать и выделять главное, аргументировать и обосновывать свою точку зрения. Поэтому, если в результате тестирования студент получил удовлетворительную оценку и претендует на более высокие баллы, то он имеет возможность повысить их в ходе устного собеседования по теоретическому материалу с преподавателем-лектором, ведущим данный курс.

Таким образом, как показывает практика, тестовая система оценки знаний должна применяться для проверки подготовки студентов в комплексе с традиционными способами оценки этих знаний, такими как устный опрос и контрольные работы. Такой комплексный подход к проверке позволяет достичь наилучших результатов и достоверно установить уровень подготовки современных студентов.





Делая замену  $z_j = 1/w_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , получаем

$$F_i \left( \frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) = \left( \frac{1}{w_1} \right)^{m_{i1}} \cdot \dots \cdot \left( \frac{1}{w_n} \right)^{m_{in}} \cdot \left( \tilde{q}_i(w) + \tilde{Q}_i(w) \right),$$

где функции  $\tilde{q}_i(w) = (w_1 - a_{i1})^{m_{i1}} \cdot \dots \cdot (w_n - a_{in})^{m_{in}}$ , а многочлены  $\tilde{Q}_i(w) = w^{m_{i1}} \cdot \dots \cdot w^{m_{in}} \cdot Q_i \left( \frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right)$ , причем  $\deg_{w_j} \tilde{Q}_i < m_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

Обозначим через  $z_j = (z_{j1}, \dots, z_{jn})$ ,  $j = 1, \dots, p$ , корни системы (1) с функциями  $Q_i$  вида (3), не лежащими на координатных плоскостях. Этим корней конечное число.

**Теорема.** Для системы (1) с многочленами  $Q_j$  вида (2) справедливы равенства

$$\sum_{j=1}^p \frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1+1} \cdot z_{j2}^{\gamma_2+1} \cdot \dots \cdot z_{jn}^{\gamma_n+1}} = \sum_{K \in \mathfrak{R}} (-1)^{\|K\|} \sum_J (-1)^{s(J)} \frac{1}{\beta(K, J)!} \times \\ \times \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial w^\beta} \left[ \tilde{\Delta} \cdot w_1^{\gamma_1+1} \cdot \dots \cdot w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\tilde{Q}^K}{\tilde{q}^{K+I}(J)} \right]_{w=\tilde{a}_J},$$

где множество индексов  $\mathfrak{R} = \{K = (k_1, \dots, k_n) \mid \exists i : \gamma_i + 2 > \|K\|, i = \overline{1, n}\}$ ,  $\tilde{a}_J = (a_{1i_1}, \dots, a_{ni_n})$ ,  $(-1)^{s(J)} = 1$ , когда  $J$  — четная перестановка и  $(-1)^{s(J)} = -1$ , когда  $J$  — нечетная перестановка,  $\tilde{q}^{K+I}(J) = \tilde{q}_1^{k_1+1}[i_1] \cdot \dots \cdot \tilde{q}_n^{k_n+1}[i_n]$ , а  $\tilde{q}_j[i_j]$  — это произведение всех  $(w_1 - a_{j1})^{m_{j1}} \cdot \dots \cdot (w_n - a_{jn})^{m_{jn}}$  кроме  $(w_{i_j} - a_{ji_j})^{m_{ji_j}}$ ,  $\beta(K, J) = (m_{1i_1} \cdot (k_{i_1} + 1) - 1, \dots, m_{ni_n} \cdot (k_{i_n} + 1) - 1)$ ,  $\beta(K, J)! = \prod_j (m_{ji_j} \cdot (k_{i_j} + 1) - 1)!$ ,

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial w^\beta} = \frac{\partial^{m_{1i_1} \cdot (k_{i_1} + 1) - 1 + \dots + m_{ni_n} \cdot (k_{i_n} + 1) - 1}}{\partial w_1^{m_{1i_1} \cdot (k_{i_1} + 1) - 1} \cdot \dots \cdot \partial w_n^{m_{ni_n} \cdot (k_{i_n} + 1) - 1}}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00007-а).

**Е. А. Николаева**

*Самарский государственный аэрокосмический  
университет им. ак. С. П. Королева,  
nikolaevalizaveta@mail.ru*

## **ДВОЙНАЯ ЗВЕЗДА. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ДВУХ ТЕЛ**

**Цель:** Ознакомление с двойными звездами и нахождение траектории их движения вокруг общего центра масс.

**Задачи:**

1) Ознакомление с типами двойных звезд. 2) Расчет движения системы двух звезд. 3) Моделирование траектории движения двойной звезды.

**Двойные звезды.** Двойная звезда, или двойная система – система из двух гравитационно связанных звезд, обращающихся по замкнутым орбитам вокруг общего центра масс. Двойные звезды удерживаются вместе взаимным тяготением. Обе звезды двойной системы вращаются по эллиптическим орбитам вокруг барицентра – точки, лежащей между ними и называемой центром гравитации этих звезд.

**Законы, применимые к системе двух звезд.** К системам двойных звезд применимы закон всемирного тяготения и обобщенные Ньютоном законы Кеплера. Это позволяет оценить массу звезд в двойных системах.

$$\frac{[m_1 + m_2] * P^3}{[M + m] * T^2} = \frac{A^3}{a^3},$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – массы двух звезд, имеющих период обращения  $P$ ,  $A$  – большая полуось орбиты звезды, обращающейся вокруг другой звезды. Массы  $M$  и  $m$  – массы Солнца и Земли,  $T = 1$  год,  $a$  – расстояние от Земли до Солнца. Если из наблюдений

определить расстояния звезд до их общего центра тяжести, то можно определить массу каждой звезды.

**Моделирование траектории движения полета двойной звезды:**

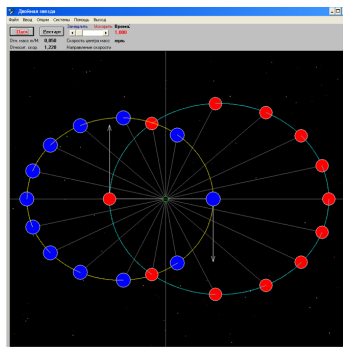


Рис. Траектория движения двух звезд

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Агемян Т. А. *Звезды, галактики, метагалактики*. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
2. Бутиков Г. Н. *Движения космических тел в компьютерных моделях*. – СПб.: СПбГУ, 2007. – 43 с.
3. Дубошин Г. Н. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике*. – М.: Наука, 1976. – 846 с.
4. Рой А. *Движение по орбитам*. – М.: Мир, 1981. – 544 с.

**А. А. Новиков**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
AnANovikov@kpfu.ru*

**$L_1$ -ПРОСТРАНСТВА, АССОЦИИРОВАННЫЕ  
С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ,  
ПРИСОЕДИНЕННЫМИ К АЛГЕБРЕ  
ФОН НЕЙМАНА**

Настоящая работа посвящена некоммутативному интегрированию в пространствах ультраслабо непрерывных функционалов, преддвойственных к алгебрам фон Неймана; это интегрирование является двойственным по отношению к некоммутативному интегрированию в алгебрах фон Неймана.

Пусть  $\mathcal{M}, \mathcal{M}^+, \mathcal{M}^{sa}$  – алгебра фон Неймана, ее положительная и самосопряженная части соответственно. Через  $\mathcal{M}_*, \mathcal{M}_*^h$  обозначим преддвойственное к  $\mathcal{M}$  пространство и его эрмитову часть. Для элемента  $a \in \mathcal{M}^+$  (присоединенного к  $\mathcal{M}^+$ ) корректно определены конус  $\mathfrak{D}_a^+ = \{\varphi \in \mathcal{M}_*^+ | \varphi(a) < +\infty\}$  и пространство  $\mathfrak{D}_a^h = \mathfrak{D}_a^+ - \mathfrak{D}_a^+$ . В случае, когда  $a$  ограничен,  $\mathfrak{D}_a^+$  и  $\mathfrak{D}_a^h$  совпадают с  $\mathcal{M}_*^+$  и  $\mathcal{M}_*^h$  соответственно. Также для указанного  $a$  корректно определена  $L_1$ -функция

$$\|\varphi\|_a := \inf\{\varphi_1(a) + \varphi_2(a) | \varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}_*^+\}.$$

Очевидно, она является полунормой. Кроме того, в случае если  $a$  ограничен, по теореме 2 работы [1]  $\|\varphi\|_a = \|\varphi(a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}})\|$ . Это равенство было обобщено нами на случай неограниченного  $a$ .

**Теорема 1.** *Для  $a \in \mathcal{M}^+$ ,  $\|\cdot\|_a$  является нормой на  $\mathfrak{D}_a^h$  тогда и только тогда, когда  $a$  инъективен ( $\ker a = \{0\}$ ).*

Для инъективного  $a$  пополнение  $\mathfrak{D}_a^h$  по норме  $\|\cdot\|_a$  будем обозначать  $L_1^h(a)$ . Из предложения 1 [1] следует, что сопряженным пространством к  $L_1^h(a)$  является  $I_a^h := \{x \in (\mathfrak{D}_a^h)^{al} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} - \lambda a \leq x \leq \lambda a\}$ ,  $\|x\|_a^* := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid -\lambda a \leq x \leq \lambda a\}$ .

**Определение.** Для  $a \eta \mathcal{M}^+$ ,  $x \in \mathcal{M}^{sa}$  определим  $\widetilde{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}}$  как билинейную форму на  $D(a^{\frac{1}{2}}) \times D(a^{\frac{1}{2}})$  формулой  $\widetilde{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}}(f, g) = \langle x a^{\frac{1}{2}} f, a^{\frac{1}{2}} g \rangle$ .

**Теорема 2.** Пространство  $I_a^h$  изометрически изоморфно множеству билинейных форм вида  $\widetilde{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}}$ , где  $x$  – элемент  $\mathcal{M}^{sa}$ .

**Теорема 3.** Для любого  $\varphi$ , принадлежащего  $\mathfrak{D}_a^h$ , выполняется равенство  $\|\varphi\|_a = \|\varphi(\widetilde{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}})\|$ .

**Теорема 4.** Пространство  $L_1^h(a)$  изометрически изоморфно  $\mathcal{M}_*^h$ .

Последнее утверждение является прямым аналогом результата работы [2] (см. также [3], п. 17.1).

В заключение следует отметить, что результаты, изложенные выше, мы можем рассматривать также в контексте  $C^*$ -алгебр, беря в качестве  $\mathcal{M}$  соответствующие обертывающие алгебры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-31358).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Скворцова Г. Ш., Тихонов О. Е. Выпуклые множества в некоммутативных  $L_1$ -пространствах, замкнутые в топологии локальной сходимости по мере // Изв. вузов. Матем. – 1998. – № 8. – С. 48–55.

2. Трунов Н. В., Шерстнев А. Н. *К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, I-II* // Изв. вузов. Матем. – 1978. – I: № 7. – С. 79–88; II: № 12. – С. 88–99.

3. Шерстнев А. Н. *Методы билинейных форм в некоммутативной теории интегрирования*. – М.: Физматлит, 2008. – 264 с.

**А. Н. Нуриев, А. И. Юнусова, Е. Е. Мощева**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
Казанский национальный исследовательский  
технологический университет,  
artem501@list.ru*

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВОКРУГ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ЦИЛИНДРА**

В данной работе проводится прямое численное моделирование обтекания осциллирующего круглого цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью. Течение характеризуется двумя безразмерными параметрами: числом Рейнольдса  $Re$  и числом Стокса  $\beta$ , которые определяются следующим образом:

$$Re = \frac{U_{max}D}{\nu}, \quad \beta = \frac{D^2}{\nu T}$$

Здесь  $U_{max}$  – амплитуда скорости колебаний,  $T$  – период колебаний,  $D$  – диаметр цилиндра,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости.

В зоне малых чисел  $Re$  течение вокруг осциллирующего цилиндра сохраняет преобладающую двухмерную структуру: реализуется плоский симметричный периодический режим обтекания. Потеря устойчивости этого режима, происходящая с

ростом числа  $Re$ , приводит к возникновению трехмерных течений. Граница перехода между этими режимами

$$Re_h = 5.778\beta^{3/4}(1 + 0.205\beta^{-1/4} + \dots), \quad (1)$$

находится в зоне, доступной для прямого численного моделирования. Это дает возможность изучить развитие трехмерной неустойчивости и ее влияния на силы сопротивления, действующие на осциллирующий цилиндр, в ходе численного эксперимента.



Рис. 1.  $\beta = 196$ ,  $Re = 451$ . Трехмерное течение.  $y$ -компонента завихренности.  $\omega_y^{min} = -2.7$ ,  $\omega_y^{max} = 2.7$

Исследование течения проводится на базе пакета OpenFOAM, для моделирования используются блочно-структурированные сетки, содержащие до  $9 \cdot 10^6$  вычислительных ячеек. Характерная структура трехмерного течения представлена на рис. 1. Все результаты трехмерного моделирования хорошо согласуются с данными лабораторных экспериментов [1, 2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-31230 (мол\_a)).



## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Honji H. *Streaked flow around an oscillating circular cylinder* // J. Fluid Mech. – 1981. – V. 107. – P. 509–520.
2. Tatsuno M., Bearman P. W. *A visual study of the flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan-Carpenter numbers and low Stokes numbers* // J. Fluid Mech. – 1990. – V. 211. – P. 157–182.

**К. Г. Овсепян**

*Казанский государственный энергетический университет,  
karen.hovsep@gmail.com*

**ИНВАРИАНТНЫЕ ИДЕАЛЫ  $C^*$ -АЛГЕБРЫ  $\mathcal{T}_m$** 

В данной работе приводится полное описание инвариантных идеалов  $C^*$ -подалгебр алгебры Теплица, неподвижных относительно конечной группы автоморфизмов. Доказывается, что такие идеалы порождаются разностями проекторов.

Рассмотрим гильбертово пространство  $l^2(\mathbb{Z}_+)$  с естественным ортонормированным базисом  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ . Пусть  $T$  – оператор сдвига на  $l^2(\mathbb{Z}_+)$ , то есть на базисе он действует следующим образом:  $Te_k = e_{k+1}$ . Очевидно, что  $T^*T = I$ , где  $T^*$  – оператор, сопряженный к  $T$ . Следовательно, полугруппа, порожденная операторами  $T$  и  $T^*$ , образует инверсную бициклическую полугруппу. Каждый элемент этой полугруппы имеет вид  $T^n T^{*m}$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}_+$ . Такие элементы в дальнейшем будем называть мономами [1], а число  $(n - m)$  – индексом монома  $T^n T^{*m}$  и обозначать  $\text{ind}(T^n T^{*m})$ . Конечные линейные комбинации мономов образуют инволютивную подалгебру алгебры  $B(l^2(\mathbb{Z}_+))$  всех линейных ограниченных операторов гильбертова пространства  $l^2(\mathbb{Z}_+)$ . Равномерное замыкание

этой подалгебры в  $B(l^2(\mathbb{Z}_+))$  называется *алгеброй Теплица* и обозначается через  $\mathcal{T}$ .

Пусть  $\mathcal{T}_m$  –  $C^*$ -подалгебра алгебры Теплица  $\mathcal{T}$ , порожденная мономами, индекс которых кратен числу  $m$ , и пусть  $\mathcal{T}(m)$  –  $C^*$ -подалгебра  $\mathcal{T}_m$ , порожденная операторами  $T^m$  и  $T^{*m}$ .

**Лемма 1.** *Алгебра  $\mathcal{T}_m$  является  $C^*$ -алгеброй, порожденной операторами  $T^m$ ,  $T^{*m}$  и проекторами  $P_l = T^l T^{*l}$ , где  $1 \leq l \leq m-1$ .*

Рассмотрим гильбертово пространство  $H = l^2(\mathbb{Z}_+)$  с базисом  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ . Представим его в виде прямой суммы

$$l^2(\mathbb{Z}_+) = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_m, \quad (1)$$

где базис подпространства  $H_i$  состоит из векторов  $\{e_{i-1+km}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

Пусть  $\mathcal{K}$  –  $C^*$ -подалгебра всех компактных операторов алгебры Теплица  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{K}_m$  –  $C^*$ -подалгебра всех компактных операторов алгебры  $\mathcal{T}_m$ . Обозначим через  $\bigoplus^m \mathcal{K}$  прямую сумму  $m$  экземпляров алгебры компактных операторов  $\mathcal{K}$ .

**Лемма 2.** *Справедливо тождество:*

$$\mathcal{K}_m = \bigoplus^m \mathcal{K}.$$

В работе [2] было доказано, что у  $C^*$ -алгебры  $\mathcal{T}_m$  есть  $m$  неприводимых унитарно неэквивалентных бесконечномерных представлений:  $\pi_i(P_1) = \pi_i(P_2) = \dots = \pi_i(P_{i-1}) = I$ ,  $\pi_i(P_i) = \dots = \pi_i(P_{m-1}) = \pi_i(T^m T^{*m})$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Рассмотрим ядра этих представлений  $\{\pi_i\}_{i=1}^m$ , которые, очевидно, являются идеалами алгебры  $\mathcal{T}_m$ . Пусть  $J_i = \ker(\pi_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

**Лемма 3.** *Любой идеал  $J_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , алгебры  $\mathcal{T}_m$  имеет вид  $J_i = \{A \in \mathcal{K}_m : A|_{H_i} = 0\}$ .*

**Определение 1.** Идеал  $I$  алгебры  $\mathcal{T}_m$  назовем инвариантным относительно представления  $\sigma_m: S^1 \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{T}_m)$ , если  $\sigma_m(e^{i\theta})(I) = I$  для любого  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

**Лемма 4.** Идеалы  $J_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , и  $\bigcap_{k=1}^n J_{i_k}$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m$ , являются инвариантными.

**Следствие.**  $\mathcal{K}_m$  – инвариантный идеал.

**Теорема.** Алгебра  $\mathcal{T}_m$  имеет в точности  $2^m$  инвариантных идеалов, каждый из которых порождается одной или несколькими разностями проекторов  $P_i - P_j$ ,  $0 \leq i < j \leq m$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Овсепян К. Г. *О  $C^*$ -алгебрах, порожденных инверсными подполугруппами бициклической полугруппы* // Известия НАН Армении. Математика. – 2014. – Т. 49. – № 5. – С. 71–80.
2. Липачева Е. В., Овсепян К. Г. *Структура подалгебр алгебры Тейлора, неподвижных относительно конечной группы автоморфизмов* // Изв. вузов. Матем. (в печати).

**А. Н. Орехов, Е. В. Панкратов, А. В. Рудалев**

*Северный (Арктический) федеральный университет,*

*Институт математики, информационных*

*и космических технологий,*

*a.orehov@narfu.ru, iarphen@gmail.com, a.rudalev@narfu.ru*

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИКЛОННОГО РЕКУПЕРАТОРА И РАЗРАБОТКА РЕКОМЕНДАЦИЙ ПО ЕГО ПРОЕКТИРОВАНИЮ**

В данной работе было проведено исследование на тему: “Численное моделирование циклонного рекуператора и разработка рекомендаций по его проектированию”.

В рамках работы были изучены основы численного моделирования процессов гидрогазодинамики, построена математическая модель элемента теплообменного циклонного рекуператора в программном пакете ANSYS, и был произведен численный расчет данной модели на суперкомпьютере (вычислительном кластере) САФУ им. М. В. Ломоносова.

Объект исследования в работе – теплообменный элемент циклонного рекуператора. Предмет – аэродинамика теплообменного элемента циклонного рекуператора.

Информационной базой исследования послужили данные учебных и методических пособий, а также современная техническая документация.

При проведении исследования для реализации задач были использованы средства современного программного пакета ANSYS Fluent 15.0, который позволил на высоком уровне осуществить численный расчет процессов гидрогазодинамики, а также результаты физического эксперимента.

Практическая значимость работы заключается в получении

оптимальной, с точки зрения аэродинамики, конструкции теплообменного элемента циклонного рекуператора при его различной относительной длине, которая позволит интенсифицировать теплообмен в данном устройстве. Это послужит дополнительным фактором в реализации энергосбережения и уменьшения выброса дымовых газов в атмосферу.

В ходе численных расчетов было установлено, что оптимальным вариантом с точки зрения аэродинамики циклонной камеры будет подвод потока через патрубки с углом между образующей и осью входного канала  $\beta_{вх} = 80 - 75^\circ$ . Следует отметить, что при увеличении длины теплообменного элемента циклонного рекуператора угол ввода потока должен уменьшаться.

Рекомендуемая длина элемента теплообменного циклонного рекуператора при данных значениях скорости должна составлять  $3,25 \leq \bar{L}_k \leq 6,25$ .

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сабуров Э. Н. *Циклонные нагревательные устройства с интенсифицированным конвективным теплообменом*. – Архангельск: Сев.-Зап. кн. изд-во, 1995. – 341 с.
2. Осташев С. И., Сабуров Э. Н. *Моделирование тепловых и аэродинамических процессов циклонных секционных нагревательных устройств* // Учеб. пособие под ред. д-ра техн. наук, проф. Э. Н. Сабурова. – Архангельск: Северный (Арктический) федеральный ун-т, 2011. – 195 с.
3. ANSYS FLUENT 15.0 Documentation. Ansys Inc., 2013.

**Е. В. Патрин**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
evgeniipatrin@mail.ru*

**ИДЕАЛЫ  $C^*$ -АЛГЕБРЫ, ПОРОЖДЁННОЙ  
СЕМЕЙСТВОМ ЧАСТИЧНЫХ ИЗОМЕТРИЙ  
И МУЛЬТИПЛИКАТОРАМИ**

Исследуются некоторые идеалы  $C^*$ -алгебры  $\mathfrak{M}_\varphi$ , предложенной в работе [2], порождённой алгеброй мультипликаторов на гильбертовом пространстве  $l_2(X)$ , где  $X$  – счётное множество, и не более чем счётным семейством операторов частичной изометрии  $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , определяемых заданным отображением  $\varphi : X \rightarrow X$ .

Предполагаем, что у  $\varphi$  отсутствуют *циклические* элементы, т. е. такие  $x \in X$ , что для некоторого  $k \in \mathbb{N}$   $\varphi^k(x) = x$ .

Для любого  $k \in \mathbb{N}$  обозначим через  $\varphi^{-k}[x] := \{y \in X : \varphi^k(y) = x\}$  полный прообраз элемента  $x \in X$  степени  $k$ . Очевидно, что если  $x_1 \neq x_2$ , то  $\varphi^{-k}[x_1] \cap \varphi^{-k}[x_2] = \emptyset$ .

Также предполагаем, что для любого  $x \in X$   $\text{card}(\varphi^{-1}[x]) < \infty$ .

Рассмотрим гильбертово пространство  $l_2(X)$  с естественным базисом  $\{\delta_x\}_{x \in X}$ , где  $\delta_x(y) = \delta_{x,y}$  – символ Кронекера. Отображение  $\varphi$  индуцирует замкнутый оператор

$$T_\varphi : l_2(X) \rightarrow l_2(X); \quad T_\varphi(f) = f \circ \varphi,$$

с которым связано семейство операторов частичной изометрии  $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,

$$T_\varphi = U_1 + \sqrt{2}U_2 + \dots + \sqrt{m}U_m + \dots$$

Заметим, что проекторы на начальные и конечные подпространства операторов  $U_k$  удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{cases} \sum_{k \in \mathbb{N}} U_k \circ U_k^* = \sum_{k \in \mathbb{N}} Q_k = Q_\varphi, \\ \sum_{k \in \mathbb{N}} U_k^* \circ U_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_k = P_\varphi, \end{cases}$$

где  $Q_\varphi$  и  $P_\varphi$  – проекторы, определенные заданным отображением  $\varphi$  (см. [1]).

Каждая функция  $f$  из  $l_\infty(X)$  порождает мультипликатор:

$$M_f : l_2(X) \longrightarrow l_2(X), \quad M_f(g) = fg,$$

с очевидным свойством:  $(M_f)^* = M_{\bar{f}}$ .

Обозначим через  $\mathfrak{M}_\varphi$   $C^*$ -подалгебру  $B(l_2(X))$ , порожденную всеми мультипликаторами и операторами частичной изометрии  $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Эта алгебра является ядерной  $\mathbb{Z}$ -градуированной  $C^*$ -алгеброй (см. [2]).

**Теорема.** *Если граф  $(X, \varphi(X))$  связный, то  $\mathfrak{M}_\varphi$  неприводима на  $l_2(X)$ .*

**Следствие.** *Если граф  $(X, \varphi(X))$  связный, то  $\mathfrak{M}_\varphi$  содержит идеал компактных операторов  $K(l_2(X))$ .*

Обозначим  $\mathcal{E}_x = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi^{-k}(x)$ . Пусть  $\mathcal{P}_x$  – проектор на подпространство  $\mathcal{H}_x$  пространства  $l_2(X)$  с базисом  $\{\delta_y : y \in \mathcal{E}_x\}$ . Очевидно, что  $\mathcal{P}_x \in \mathfrak{M}_\varphi$  для любого  $x$ , поскольку  $l_\infty(X)$  содержит индикатор множества  $\mathcal{E}_x$ .

Заданное на множестве  $X$  отображение индуцирует частичный порядок на этом множестве,  $x \prec y$  если найдется такое  $n \in \mathbb{N}$ , что  $\varphi^n(y) = x$ .

**Лемма.**  *$C^*$ -подалгебра  $\mathcal{I}_x$  алгебры  $\mathfrak{M}_\varphi$ , порожденная элементами вида  $\mathcal{P}_x \mathfrak{M}_\varphi \cup \mathfrak{M}_\varphi \mathcal{P}_x$ , является собственным идеалом в алгебре  $\mathfrak{M}_\varphi$ .*

**Теорема.** Если  $x_1$  и  $x_2$  не сравнимы, то соответствующие идеалы  $\mathcal{I}_{x_2}$  и  $\mathcal{I}_{x_1}$  различны. Если  $x_1 \prec x_2$ , то  $\mathcal{I}_{x_2} \subseteq \mathcal{I}_{x_1}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецова А. Ю. Об одном классе  $C^*$ -алгебр, порождённых счётным семейством частичных изометрий // Изв. НАН Армении. Матем. – 2010. – Т. 45 (6). – С. 51–62.
2. Кузнецова А. Ю., Патрин Е. В. Об одном классе  $C^*$ -алгебр, порождённых частичными изометриями и мультипликаторами // Изв. вузов. Матем. – 2012. – Т. 56 (6). – С. 44–55.

**К. А. Петухова**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
ksenypet@mail.ru*

#### ОБ АНАЛОГЕ ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ИДЕАЛОВ ДЕДЕКИНДОВЫХ КОЛЕЦ

В работе [1] был предложен аналог криптографического алгоритма RSA, в котором вместо натуральных чисел используются идеалы дедекиндовых колец. Одно из условий, которое необходимо наложить на дедекиндово кольцо  $R$ , – требование, чтобы для каждого максимального идеала  $\mathfrak{M}$  поле  $R/\mathfrak{M}$  было конечным (в дальнейшем это условие будет всюду подразумеваться). Тогда можно определить аналог функции Эйлера, который играет существенную роль в алгоритме RSA из [1], по формуле  $\varphi_R(\mathfrak{A}) = |U(R/\mathfrak{A})|$ , где  $\mathfrak{A}$  – произвольный идеал  $R$ ,  $U$  означает группу обратимых элементов кольца  $R$ .

В данной заметке приводится более подробная информация об этой функции. Из формулы (5) на с. 13 книги [2] следует



**Лемма 1.** *При условии, что поле  $R/\mathfrak{M}$  конечно для всех максимальных идеалов  $\mathfrak{M}$ , кольца  $R/\mathfrak{A}$  конечны для любых идеалов  $\mathfrak{A}$ . Это означает, что функция  $\varphi_R(\mathfrak{A})$  определена для любых идеалов.*

В [1] был использован следующий аналог теоремы Эйлера:

**Теорема 1.** *Пусть  $\mathfrak{M}$  – максимальный идеал,  $a \notin \mathfrak{M}$ , и  $Ra + \mathfrak{M} = R$ . Тогда  $a^{\varphi_R(\mathfrak{M})} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{M}}$ .*

Обозначим через  $\nu(\mathfrak{A})$  мощность конечного кольца  $R/\mathfrak{A}$ . Основным результатом заметки является следующая

**Теорема 2.** *Пусть  $\mathfrak{M}$  – максимальный идеал  $R$ ,  $k > 0$  – натуральное число. Тогда*

$$\varphi_R(\mathfrak{M}^k) = \nu(\mathfrak{M})^{k+1} - \nu(\mathfrak{M})^k. \quad (1)$$

Частный случай формулы (1) доказан в книге [3] (теорема 2 на с. 202), но лишь для главных идеалов в областях целостности, каждое факторкольцо которых по главному идеалу конечно. В работе [4], на которую нет ссылки в [3], явно вычислены функции  $\nu$  и  $\varphi_R$  для идеалов кольца целых гауссовых чисел  $R = \mathbb{Z}[i]$  (это область главных идеалов).

В нашем докладе будут приведены примеры вычислений функции  $\varphi_R$  для некоторых других колец целых алгебраических чисел.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому (Приволжскому) федеральному университету для выполнения проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 2045).

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тронин С. Н., Петухова К. А. *RSA cryptosystem for Dedekind rings* // Мат. конф. “Алгебра и математическая логика: теория и приложения” (г. Казань, 2–6 июня 2014 г.) и сопутствующей молодежной летней школы “Вычислимость и вычислимые структуры”. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – С. 148–149.
2. Swinnerton-Dyer Н. Р. F. *A brief guide to algebraic number theory*. – Cambridge University press, 2001. – 145 p.
3. Родосский К. А. *Алгоритм Евклида*. – М.: Наука, 1988. – 240 с.
4. Cross J. T. *The Euler  $\varphi$ -function in the Gaussian integers* // The American Mathematical Monthly. – 1983. – V. 90. – No 80. – P. 518–528.

**В. Н. Попов, Е. А. Смоленская, И. В. Тестова**

*Северный (Арктический) федеральный  
университет им. М. В. Ломоносова,  
v.popov@narfu.ru, e.smoltnskaya@narfu.ru, testovairina@mail.ru*

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПРОЦЕССА ОБТЕКАНИЯ РАЗРЕЖЕННЫМ  
ГАЗОМ НЕОДНОРОДНО НАГРЕТОЙ ПЛОСКОЙ  
ПОВЕРХНОСТИ**

Рассматривается задача об обтекании разреженным газом неоднородно нагретой плоской поверхности. Показано, что с использованием линеаризованной ЭС (эллипсоидально-статистической) модели кинетического уравнения Больцмана в качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, и модели зеркально-диффузного отражения Максвелла

в качестве граничного условия на стенке, отыскание макропараметров газа сводится к решению системы уравнений

$$\mu \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2)(1 - \mu\tau)Z(x, \tau) d\tau, \quad (1)$$

$$\mu \frac{\partial Z_1}{\partial x} + Z_1(x, \mu) = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями

$$Z(0, \mu) = (1-q)Z(0, -\mu) - 2qU_0 + qG_T \left( \mu^2 - \frac{1}{2} \right), \quad \mu > 0, \quad (3)$$

$$Z_1(0, \mu) = (1-q)Z_1(0, -\mu) + qG_T, \quad \mu > 0, \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Z(x, \mu) = \lim_{x \rightarrow +\infty} Z_1(x, \mu) = 0, \quad \mu < 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (2) с граничными условиями (4), (5) записывается в виде

$$Z_1(x, \mu) = qG_T \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) H_+(\mu),$$

где  $H_+(\mu)$  – ступенчатая функция Хэвисайда, а для решения уравнения (1) с граничными условиями (3), (5) используется обобщение метода Кейза на случай задач с ограниченной геометрией, представленное в [1]. Общее решение уравнения (1) найдено в пространстве обобщенных функций. Подстановка полученного решения в граничное условие (3) с учетом (5) приводит к сингулярному интегральному уравнению с ядром типа Коши, которое с использованием методов теории функций комплексного переменного сводится к краевой задаче Римана на действительной положительной полуоси. Скорость теплового скольжения находится из условия разрешимости построенной краевой задачи Римана, а для нахождения коэффициентов в разложении решения задачи по собственным векторам

непрерывного спектра с использованием формул Сохоцкого–Племеля приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, решение которого ищется в виде степенного ряда. С учетом построенной функции распределения для слоя Кнудсена найдены распределения массовой скорости газа и вектора потока тепла. Полученные результаты сравниваются с аналогичными результатами, представленными в [2].

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Попов В. Н., Тестова И. В., Юшканов А. А. *Математическое моделирование течений газа в каналах: Монография.* – Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic publishing, 2012. – 116 с.
2. Siewert C. E. *The linearized Boltzmann equation: concise and accurate solutions to basic flow problems* // ZAMP. – 2003. – V. 54. – P. 273–303.

**И. А. Резникова**

*Сибирский федеральный университет,*

*ilona\_reznikova@mail.ru*

#### **ОБ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОВОЙ СОПРЯЖЁННОЙ ЗАДАЧИ В ШАРОВЫХ ОБЛАСТЯХ**

Рассматривается задача об определении полей температур в шаре, внутренняя часть которого состоит из одного материала, а внешняя (шаровой слой) – из другого. Пусть  $u_1(r, \theta, \varphi, t)$  есть температура шара

$$\bar{\Omega}_1 = \{(r, \theta, \varphi) | 0 \leq r \leq R_1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

а  $u_2(r, \theta, \varphi, t)$  – температура шарового слоя

$$\bar{\Omega}_2 = \{(r, \theta, \varphi) | R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Функции  $u_j$ ,  $j = 1, 2$ , удовлетворяют уравнениям

$$u_{jt} = \chi_j \Delta u_j + f_j(r, \theta, \varphi, t), \quad t > 0, \quad (r, \theta, \varphi) \in \Omega_j, \quad (1)$$

где  $\chi_j$  – известные положительные постоянные – коэффициенты температуропроводностей;  $f_j$  – заданные внутренние источники тепла;  $\Omega_j$  – открытый шар радиуса  $R_1$  и открытый слой  $R_1 < r < R_2$ , соответственно.

Кроме того, имеются начальные и граничные условия

$$u_1|_{t=0} = u_2|_{t=0} = 0; \quad (2)$$

$$|u_1(0, \theta, \varphi, t)| < \infty, \quad (3)$$

$$u_1|_{r=R_1} = u_2|_{r=R_1}, \quad (4)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \quad (5)$$

$$u_2|_{r=R_2} = 0, \quad (6)$$

где  $k_j$  – коэффициенты теплопроводностей. Условие (3) представляет собой ограниченность температуры в центре шара, (4) – равенство температур, а (5) – равенство потоков тепла на границе раздела; условием (6) задаётся температура на внешней границе.

**Замечание.** Если на внешней границе задано неоднородное условие  $u_2|_{r=R_2} = v(\theta, \varphi, t)$ , то замена

$$u_2 = \bar{u}_2 + (r - R_1)^2 \times (R_2 - R_1)^{-2} v$$

делает задачу однородной для функций  $u_1, \bar{u}_2$ . Изменяется лишь начальное условие

$$\bar{u}_2|_{t=0} = -(r - R_1)^2 (R_2 - R_1)^{-2} v(\theta, \varphi, 0) \equiv \psi(r, \theta, \varphi)$$

и внутренний источник тепла

$$\bar{f}_2 = f_2 + \chi_2(R_2 - R_1)^{-2} \Delta [(r - R_1)^2 v] - (r - R_1)^2 (R_2 - R_1)^{-2} v_t.$$

Требуется найти функции

$$u_1 \in C^2(\Omega_1) \cap C^1(\Gamma_1), \quad u_2 \in C^2(\Omega_2) \cap C^1(\Gamma_1) \cap C(\Gamma_2),$$

$$\Gamma_j = \{(r, \theta, \varphi) | r = R_j\},$$

удовлетворяющие уравнениям (1) и условиям (2) – (6).

Найдены априорные оценки температур в зависимости от внутренних источников тепла. Из этих оценок выводится единственность решения рассматриваемой задачи и его асимптотическое поведение при больших временах. Решение нестационарной задачи получено методом преобразования Лапласа. Стационарное состояние найдено в виде рядов Фурье, и показано, что решение нестационарной задачи выходит на стационарный режим, причём справедливы оценки скорости сходимости

$$\begin{aligned} |u_1 - u_1^0| &\leq A_5 e^{-\nu t}, \\ |u_2 - u_2^0| &\leq A_6 e^{-\frac{\delta t}{2}}, \quad \delta < \gamma, \quad \nu = \min(\nu', \delta/2) \quad \forall \nu' < \nu. \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00067) и интеграционного проекта СО РАН № 44.

**З. З. Ризванов, Э. И. Фазлеева**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
rizvanov.zetfir@mail.ru, elmira.fazleeva@mail.ru*

**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ  
УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ**

Функциональный метод, основанный на использовании свойств функций, позволяет решать многие задачи математики, в том числе уравнения и неравенства. В отличие от графического метода, знание свойств функций позволяет находить точные корни уравнения (неравенства), при этом не требуется построения графиков функций. Использование свойств функций способствует рационализации решений уравнений и неравенств.

Можно выделить следующие способы использования функционального метода при решении уравнений и неравенств: использование понятия области определения функции; использование понятия области значений функции; использование свойства монотонности функции; использование свойств четности или нечетности функций; использование свойства периодичности функции.

Рассмотрим примеры.

**Пример 1.** Решить уравнение:  $\sin \frac{\pi}{x^2+6x+13} = (\sqrt{2})^{2x^2+12x+17}$ .

*Решение.* 1.  $x^2 + 6x + 13 = (x + 3)^2 + 4$ ,  $(x + 3)^2 + 4 \geq 4$ ,

$$0 < \frac{\pi}{(x+3)^2+4} \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 < \sin \frac{\pi}{(x+3)^2+4} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Графиком функции  $f(x) = 2x^2 + 12x + 17$  является парабола, ветви которой направлены вверх. Координаты вершины:

$x_0 = -3, f(x_0) = -1$ . Следовательно,  $f(x) \geq -1$ . Тогда, в силу возрастания показательной функции, имеем:

$$(\sqrt{2})^{2x^2+12x+17} \geq (\sqrt{2})^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Равенство достигается, если

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi}{x^2+6x+13} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ (\sqrt{2})^{2x^2+12x+17} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

4. Решением системы и, следовательно, нашего уравнения является  $x = -3$ .

*Ответ:*  $-3$ .

**Пример 2.** Решить неравенство:  $\log_2(8-x) \leq 3x-10$ .

*Решение.* 1. ОДЗ:  $x < 8$ .

2. При  $x = 4$  левая и правая части равны.

3. Так как левая часть – строго убывающая функция, а правая – строго возрастающая, то неравенству удовлетворяют  $x \geq 4$ .

4. С учетом ОДЗ имеем:  $4 \leq x < 8$ .

*Ответ:*  $x \in [4; 8)$ .

**Пример 3.** Решить неравенство:  $\cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x$ .

*Решение.* Эквивалентными преобразованиями придем к неравенству  $\cos 4x - \cos 12x < 0$ . Рассмотрим функцию

$$f(x) = \cos 4x - \cos 12x = 2 \sin 8x \sin 4x.$$

Ее период  $T = \pi/2$ . Следовательно, решение неравенства достаточно найти на промежутке  $[-\pi/4; \pi/4]$ . Так как функция четная, то решения достаточно найти лишь на отрезке  $[0; \pi/4]$ . Функция на данном промежутке имеет два корня:  $0, \pi/8$ , которые разбивают промежуток  $[0; \pi/4]$  на два интервала знакопостоянства:  $(0; \pi/8), (\pi/8; \pi/4)$ . Неравенство выполняется для всех  $x \in (\pi/8; \pi/4)$ . Но тогда оно будет выполняться и для  $x \in (-\pi/4; -\pi/8)$ .



Учитывая периодичность функции, запишем общее решение неравенства

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} < x < -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \quad \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ковалева Г. И., Конкина Е. В. *Функциональный метод решения уравнений и неравенств*. – М.: Чистые пруды, 2008. – 32 с.

2. Лысенко Ф. Ф., Калашников В. Ю., Неймарк А. Б., Давыдов Б. Е. *Математика. Подготовка к ЕГЭ, подготовка к вступительным экзаменам*. – Ростов-на-Дону: Сфинкс, 2004. – 400 с.

**М. С. Рогозина**

*Сибирский федеральный университет,  
rogozina.marina@mail.ru*

#### О КОРРЕКТНОСТИ НЕЯВНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Теория разностных схем – раздел вычислительной математики, изучающий методы приближенного решения дифференциальных уравнений путем их замены конечноразностными уравнениями (разностными схемами) (см., например, [1]). Одна из важных задач теории разностных схем – *исследование корректности разностных задач*.

Введем необходимые обозначения и определения. Пусть  $\delta_1$  – оператор сдвига по переменной  $x$ , т. е.  $\delta_1 f(x, y) = f(x + 1, y)$ , а  $\delta_2$  – оператор сдвига по переменной  $y$ , т. е.

$\delta_2 f(x, y) = f(x, y + 1)$ . Для разностного оператора  $P(\delta_1, \delta_2) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 \leq m} c_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_1^{\alpha_1} \delta_2^{\alpha_2}$  и фиксированного  $\beta = (l, k)$  такого, что  $l + k = m$  и  $c_{lk} \neq 0$  сформулируем задачу: *найти решение разностного уравнения*

$$P(\delta_1, \delta_2)f(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \geq (0, 0), \quad (1)$$

*удовлетворяющее условию*

$$f(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \not\geq (l, k). \quad (2)$$

Говорят, что задача (1) – (2) поставлена корректно, если выполнены условия: 1) задача однозначно разрешима при любых правых частях  $g(x, y)$ ; 2) при любых  $g(x, y)$  и  $\varphi(x, y)$  существуют постоянные  $M_1 > 0$ ,  $M_2 > 0$  такие, что справедлива оценка  $\|f(x, y)\| \leq M_1 \|g(x, y)\| + M_2 \|\varphi(x, y)\|$  (данная оценка обеспечивает устойчивость решения задачи (1) – (2)).

**Теорема.** *Если для коэффициентов полиномиального разностного оператора  $P(\delta_1, \delta_2)$  выполнено условие*

$$|c_{l,k}| > \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 = m \\ \alpha_1 \neq l, \alpha_2 = k}} |c_{\alpha_1, \alpha_2}|,$$

*то задача (1) – (2) корректна.*

Данная теорема является двумерным разностным аналогом теоремы Хермандера (см. [2]) для полиномиальных дифференциальных операторов.

Отметим, что устойчивость явных разностных схем исследовалась в работах [3], [4] с использованием методов теории амёб алгебраических гиперповерхностей.

Работа выполнена в Сибирском федеральном университете при поддержке гранта Правительства РФ (договор

№ 14.У26.31.0006) для научных исследований под руководством ведущих ученых.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. – М.: Наука, 1977.
2. Хермандер Л. *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*. – М.: Мир, 1965.
3. Рогозина М. С. *Устойчивость многослойных разностных схем и ячебы алгебраических гиперповерхностей* // Журнал СФУ. Математика и физика. – 2012. – Т. 5. – № 2. – С. 256–263.
4. Рогозина М. С. *Устойчивость многослойных неоднородных разностных схем и ячебы алгебраических гиперповерхностей* // Вестник СибГАУ. – 2013. – Т. 49. – Вып. 3. – С. 95–99.

**А. А. Саламатин, А. Г. Егоров**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
arthouse131@rambler.ru, egorov2@ksu.ru*

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СВЕРХКРИТИЧЕСКОЙ СУШКИ АЭРОГЕЛЯ

Аэрогели – уникальные по своей структуре и свойствам материалы, представляющие собой гель, в котором жидкая фаза полностью замещена газообразной. Такие материалы обладают рекордно низкой плотностью (пористость свыше 90%) и демонстрируют ряд уникальных свойств: твёрдость, прозрачность, жаропрочность, чрезвычайно низкую теплопроводность и т. д. Распространены аэрогели на основе аморфного диоксида кремния, глинозёмов, а также оксидов хрома и олова. По структуре

аэрогели представляют собой древовидную сеть из объединенных в кластеры наночастиц размером 2 – 5 нм и пор размерами до 100 нм.

Одним из способ замещения жидкой фазы на газообразную является сверхкритическая сушка, во время которой жидкий этанол в геле в силу взаимной диффузии замещается  $\text{CO}_2$ , омывающим гель и находящимся в сверхкритическом (жидком) состоянии. Завершается процесс постепенным понижением давления до атмосферного, сопровождающимся переводом  $\text{CO}_2$  в газообразное состояние.

Однако образовавшийся в результате аэрогель может иметь трещины на поверхности и существенно деформироваться (усадка по кратчайшему направлению). Для объяснения этих эффектов предлагается следующая математическая модель процессов массопереноса внутри геля во время его сушки, учитывающая зависимость плотности  $\rho$  смеси  $\text{CO}_2$ -этанол и коэффициента взаимной диффузии  $D$  от концентрации  $x$  этанола

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{u}\rho) = 0, \quad \rho \frac{\partial x}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla x = \text{div}(\rho D \nabla x).$$

Здесь  $t$  – время, а  $\mathbf{u}$  – скорость конвективного переноса компонент смеси, вызванная изменением  $\rho$ . Плотность смеси предлагается определять экспериментально, а для коэффициента диффузии – использовать корреляцию Вигнеса [1]. Пористость принята равной единице.

Вычислительные эксперименты показали хорошее согласие модели с известными экспериментальными данными [2]. В результате была выдвинута гипотеза о том, что возникновение трещин на поверхности аэрогеля происходит еще на начальном этапе сушки, когда образуются большие градиенты давлений, пропорциональные в силу закона Дарси скорости  $\mathbf{u}$ ; в

результате хрупкий скелет аэрогеля разрушается.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Vignes A. *Diffusion in binary solutions* // I&EC Fundamentals. – 1966. – V. 5. – No 2. – P. 189–199.
2. Garcia-Gonzalez C. A., Camino-Rey M. C., Alnaef M., Zetzl C., Smirnova I. *Supercritical drying of aerogels using CO<sub>2</sub>: Effect of extraction time on the end material textural properties* // J. Supercrit. Fluids. – 2012. – V. 66. – P. 297–306.

#### Л. А. Салахова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
SalakhovaLA@gmail.com

#### ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА ЕВКЛИДОВЫХ ГРАНИЧНЫХ МОМЕНТОВ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Пусть  $G$  – односвязная область на плоскости,  $\rho(z, G)$  – расстояние от точки  $z$  до границы области  $G$  и  $P(G)$  – жесткость кручения области  $G$ , т. е.

$$P(G) := 2 \iint_G u(x, y) \, dx dy,$$

где  $u = u(x, y)$  – решение уравнения Пуассона  $\Delta u = -2$  с граничным условием  $u|_{\partial G} = 0$ .

Рассмотрим геометрический функционал

$$I_q(G) = 2 \iint_G \rho(z, G)^q \, dx dy,$$

являющийся евклидовым моментом области  $G$  относительно ее границы порядка  $q$ .

Ф. Г. Авхадиевым [1] была доказана двусторонняя оценка для функционала жесткости кручения:

$$I_2(G) \leq P(G) \leq 64I_2(G).$$

Некоторое обобщение этого неравенства на  $n$ -мерный случай было доказано в [2] для областей, удовлетворяющих строгому условию Харди.

Е. Макаи [3] для выпуклых областей доказал неравенство:

$$P(G) < \frac{4}{3}A(G)\rho(G)^2,$$

где  $\rho(G) := \sup\{\rho(z, G) : z \in G\}$ ,  $A(G)$  – площадь области  $G$ .

Получение аналогичных неравенств для евклидовых граничных моментов в трехмерном случае является основным результатом данной работы.

**Теорема 1.** Пусть  $D$  – выпуклое тело конечного объема  $V(D)$  и  $q \geq 0$ , тогда

$$I_q(D) \leq \frac{\rho(D)^q V(D)}{q+1} - \frac{4}{3} \frac{q(q+5)\pi\rho(D)^{q+3}}{(q+1)(q+2)(q+3)},$$

$$I_q(D) \geq \frac{S(\rho(D))\rho(D)^{q+1}}{q+1} + \frac{8\pi\rho(D)^{q+3}}{(q+1)(q+2)(q+3)},$$

где  $S(\rho(D))$  – площадь поверхности уровня, которая находится на расстоянии  $\rho(D)$  от поверхности тела  $D$ .

**Теорема 2.** Пусть  $D$  – выпуклое тело и  $q \geq 1$ , тогда

$$I_q(D) \leq \frac{2I_1(D)\rho(D)^{q+1}}{q+1} - \frac{2}{3} \frac{(q-1)(q+6)\pi\rho(D)^{q+3}}{(q+1)(q+2)(q+3)}.$$

Экстремальной областью для полученных неравенств является шар, предполагается, что она не единственна.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Авхадиев Ф. Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана* // Матем. сборник. – 1998. – Т. 189. – № 12. – С. 3–12.
2. Banuelos R., van den Berg M., Carroll T. *Torsional rigidity and expected lifetime of Brownian motion* // J. London Math. Soc. – 2002. – V. 66. – P. 499–512.
3. Makai E. *On the principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam* // Studies in Math. Analysis and Related Topics. – Stanford Univ. Press, 1962. – P. 227–231.

**К. А. Самсонова**

*Саратовский государственный  
университет им. Н. Г. Чернышевского,  
kris\_ruzhik@mail.ru*

**АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ  
УРАВНЕНИЯ ЛЕВНЕРА**

Пусть функция  $w = f(z, t)$ ,  $z \in \mathbb{H}$ ,  $t \geq 0$ ,  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ , имеет в окрестности бесконечно удаленной точки представление

$$f(z, t) = z + \frac{2t}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

отображает  $\mathbb{H} \setminus K_t$ ,  $K_t \subset \mathbb{H}$ , на  $\mathbb{H}$  и является решением обыкновенного дифференциального уравнения Левнера для верхней полуплоскости

$$\frac{df(z, t)}{dt} = \frac{2}{f(z, t) - \lambda(t)}, \quad f(z, 0) = z, \quad z \in \mathbb{H}, \quad (1)$$

с непрерывной вещественной управляющей функцией  $\lambda(t)$ .

Конформные отображения  $f(z, t)$  допускают непрерывное продолжение на множество всех точек  $z \in \mathbb{R}$ , не принадлежащих замыканию множества  $K_t$ . Продолженные таким образом отображения  $f(z, t)$  удовлетворяют уравнению (1).

В настоящей работе исследуется качественное асимптотическое поведение решений дифференциального уравнения Левнера для верхней полуплоскости, генерируемых управлениями, обратными к степенной функции с натуральной степенью. Управляющая функция  $\lambda(t) = \sqrt[N]{t}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 3$ , выбрана как типичный представитель класса  $\text{Lip}(1/N)$ . Основной результат содержится в следующей теореме.

**Теорема 1.** Пусть  $f(z, t)$  является решением дифференциального уравнения

$$\frac{df(z, t)}{dt} = \frac{2}{f(z, t) - \sqrt[N]{t}}, \quad f(z, 0) = z, \quad \Im z \geq 0, \quad (2)$$

$N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 3$ . Тогда для достаточно малых  $t > 0$   $f(\cdot, t)$  отображает область  $D(t) = \mathbb{H} \setminus \gamma(t)$  на  $\mathbb{H}$ , где  $\gamma(t)$  является  $C^1$ -кривой, лежащей в  $\mathbb{H}$ , за исключением, быть может, точки  $\gamma(0) = 0$ .

Функция  $f(z, t)$ , являющаяся решением уравнения (2), отображает область  $\mathbb{H} \setminus \gamma(t)$  на  $\mathbb{H}$ . Точки двух сторон разреза  $\gamma(t)$  считаются различными граничными точками области.

Гармонические меры  $\omega(f^{-1}(i, t); \gamma_k, \mathbb{H} \setminus \gamma(t), t)$  дуг  $\gamma_k$  в точке  $f^{-1}(i, t)$  относительно области  $\mathbb{H} \setminus \gamma(t)$  определяются функциями  $\omega_k$ , которые являются гармоническими в области  $\mathbb{H} \setminus \gamma(t)$  и непрерывно продолжаются на ее замыкание, за исключением конечных точек кривой  $\gamma$ ,  $\omega_k|_{\gamma_k(t)} = 1$ ,  $\omega_k|_{\mathbb{R} \cup (\gamma(t) \setminus \gamma_k(t))} = 0$ ,  $k = 1, 2$ , см. [1]. Обозначим

$$m_k(t) := \omega(f^{-1}(i, t); \gamma_k, \mathbb{H} \setminus \gamma(t), t), \quad k = 1, 2.$$



**Теорема 2.** Пусть функция  $f(z, t)$  является решением уравнения Левнера (2). Тогда справедливо асимптотическое соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{m_1(t)}{m_2^{N-1}(t)} = 2N\pi^{N-2}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-91370).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hayman W., Kennedy P. *Subharmonic functions*. – London, Academic Press, 1976.

**В. В. Старостина**

*Северный (Арктический) федеральный  
университет им. М. В. Ломоносова,  
irrefragable@yandex.ru*

#### НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ГЕОМЕТРИИ G-ПРОСТРАНСТВ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С ВЫДЕЛЕННЫМ СЕМЕЙСТВОМ ОТРЕЗКОВ

Метрические пространства с выделенным семейством отрезков введены в работе Г. Буземана и Б. Фадке [1]. Пусть  $(X, d)$  – геодезическое пространство с выделенным семейством отрезков  $\Sigma$ , которое удовлетворяет следующим аксиомам.

1. Любые две точки  $x, y \in X$  соединяются единственным отрезком  $[xy] \in \Sigma$ . Далее запись  $[xy]$  обозначает именно отрезок семейства  $\Sigma$ , соединяющий точки  $x, y \in X$ .

2. Если  $u, v \in [xy]$ , то  $[uv] \subset [xy]$ .

3. Для любой точки  $x \in X$  определено такое число  $r_x > 0$ , что если  $d(x, y), d(x, z) < r_x$ , то существует такая отличная от  $z$  точка  $w \in X$ , что  $[yz] \subset [yw]$ .

4. Для произвольных различных точек  $x, y, u, v \in X$ , если  $[xy] \subset [xu]$  и  $[xy] \subset [xv]$ , то либо  $[xu] \subset [xv]$ , либо  $[xv] \subset [xu]$ .

5. Если  $m$  — середина отрезка  $[xy]$  и  $n$  — середина отрезка  $[xz]$ , то  $d(m, n) \leq d(y, z)/2$ .

В этом случае мы говорим, что  $X$  является  $G$ -пространством Буземана неположительной кривизны относительно выделенного семейства отрезков  $\Sigma$ .

В статье П.Д. Андреева [2] предложена конструкция касательного конуса к стандартному  $G$ -пространству Буземана неположительной кривизны. Такой конус строится как метрическое пространство  $(X, d^*)$  с новой метрикой  $d^*$  на множестве  $X$ . В случае  $G$ -пространств с выделенным семейством отрезков подобная конструкция также имеет место. При этом справедлива

**Теорема 1.** Пусть  $(X, d)$  —  $G$ -пространство неположительной кривизны относительно выделенного семейства отрезков  $\Sigma$ . Тогда  $(X, d^*)$  — конечно компактное геодезическое пространство, причём отображение  $Id : X \rightarrow X$  является гомеоморфизмом  $(X, d)$  на  $(X, d^*)$ . Кроме того, на  $X$  существует такое выделенное семейство отрезков  $\Sigma_*$ , что пространство  $(X, d^*)$  является  $G$ -пространством неположительной кривизны относительно семейства  $\Sigma_*$ .

Другой результат, полученный нами — следующая слабая версия леммы Ринова о нормированной полосе.

**Теорема 2.** Пусть  $(X, d)$  —  $G$ -пространство неположительной кривизны относительно выделенного семейства от-

резков  $\Sigma$ . Тогда любые две выделенные параллельные прямые в  $X$  ограничивают слабую нормированную полосу, то есть слабо выпуклое подмножество, образованное выделенными прямыми, параллельными данным, и изометричное полосе между параллельными аффинными прямыми на некоторой нормированной плоскости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00219А).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Busemann H., Phadke V. V. *Spaces with distinguished geodesics*. — New-York–Basel–Marcel: Dekker Inc., 1987 — 159 с.
2. Андреев П. Д. Доказательство гипотезы Буземана для  $G$ -пространств неположительной кривизны // Алг. Ан. — 2014. — Т. 26. — № 2. — С. 1–20.

**Е. Н. Терешонок**

*Сибирский федеральный университет,  
Институт математики и фундаментальной информатики,  
l.tereshonok@gmail.com*

#### О МНОГОМЕРНОЙ ВЕРСИИ ФОРМУЛЫ ПИКА

Формула Г. Пика для целочисленных многоугольников устанавливает связь между площадью многоугольника  $A(P)$  и числом целых точек внутри него  $I$  и на его границе  $B$ :

$$A(P) = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Непосредственное распространение данной формулы на случай высшей размерности оказывается некорректным [1].

Нами предложен многомерный аналог формулы Пика для целочисленных многогранников с центрально-симметричными гранями и призм. Формула получена с использованием многомерного аналога  $\zeta$ -функции Вейерштрасса [2].

Пусть  $\Gamma = (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})^n$  – решётка в  $\mathbb{C}^n$ . Обозначим через

$$\omega_{BM}(z) = \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \bar{z}_k dz [k]}{\left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right)^n}$$

$(0, n-1)$ -дифференциальную форму. Определим

$$\zeta_{\Gamma}(z) = \psi(z, 0) + \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left( \psi(z, \gamma) - \psi(0, \gamma) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \psi}{\partial z_i}(0, \gamma) z_i + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_i}(0, \gamma) \bar{z}_i \right) \right).$$

Ряд для  $\zeta$ -формы сходится абсолютно и равномерно на компактах  $\mathbb{C}^n \setminus \Gamma$ .

Обобщая [3], можем доказать теорему:

**Теорема 1.** Пусть  $D$  – область в  $\mathbb{C}^n$  с кусочно-гладкой границей,  $I$  – число целых точек внутри  $D$ ,  $\text{Vol}(D)$  – ее объём, а  $\Theta_j$  – нормированные телесные углы в целых точках на границе  $D$ . Тогда имеет место формула:

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} \tau(z) \wedge dz = I - \text{Vol}(D) + \sum_j \Theta_j.$$

Данную теорему можно применить для доказательства многомерных аналогов формулы Пика для важных случаев:

**Теорема 2.** Пусть  $D$  – многогранник с центрально-симметричными гранями или многомерная призма, тогда

$$\text{Vol}(D) = I + \sum_j \Theta_j.$$

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор № 14.У26.31.0006).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Reeve J. E. *On the volume of lattice polyhedra* // Proc. London Math. Soc. – 1957. – V. 7. – P. 378–395.

2. Zappa P. *Sulle classi di Dolbeault di tipo  $(0, n - 1)$  con singularita in un insieme discreto* // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. – 1981. – V. 8. – No 70. – P. 87–95.

3. Tereshonok E. N., Shchuplev A. V. *A Multidimensional analog of the Weierstrass  $\zeta$ -function in the problem of the number of integer points in a domain* // J. of Siberian Federal University. Math. Physics. – 2012. – V. 5. – No 4. – P. 480–484.

#### С. А. Токаревская

*Северный (Арктический) федеральный университет,  
Институт математики, информатики  
и космических технологий,  
s.tokarevskaya@narfu.ru,*

#### ТЕОРЕМА О ВЛОЖЕНИИ ЧЕТЫРЕХВАЛЕНТНЫХ ОСНАЩЕННЫХ ГРАФОВ В ТОР

Проблемы и некоторые решения задачи вложения оснащенных графов в двумерные поверхности освещались в разные годы различными математиками (см., напр., [1 – 3]). В статье [1] говорится о том, что можно определить род поверхности, куда может быть вложен граф (не только четырехвалентный)

за полиномиальное время. В. О. Мантуров в статье [3] доказал теорему о вложении (в общем случае) и вывел полиномиальные алгоритмы для определения вложимости графа в плоскость  $\mathbf{R}^2$  (или сферу  $\mathbf{S}^2$ ) проективную плоскость и бутылку Клейна. Мы рассматриваем задачу вложения четырехвалентного оснащенного графа в тор. Рассмотрим хордовую диаграмму  $\mathbf{D}_{\Gamma, L}$  оснащенного графа  $\Gamma$  с обходом  $L$ . Для вложения в тор необходимо, чтобы все хорды имели оснащение 0. Предположим, что это так.

**Теорема.** *Для того чтобы граф  $\mathbf{D}_{\Gamma, L}$  был вложим в тор, необходимо и достаточно, чтобы хорды диаграммы  $\mathbf{D}_{\Gamma, L}$  можно было разбить на четыре семейства  $A, B, C, D$  (одно или два могут быть пустыми) так, чтобы:*

- 1) хорды одного семейства были не зацеплены;
- 2) хорды трёх из этих семейств (например  $A, B, C$ , причем одно из них может быть пустым) были расположены таким образом, что множество хорд, принадлежащих одному из семейств и пересекаемых хордами других двух семейств, было одним и тем же.

#### **План доказательства.**

Мы имеем шахматное вложение графа  $\Gamma$  в тор  $\mathbf{S}$ , фиксируем некоторый обход  $L$  графа  $\Gamma$ . Он задает сквозное отображение  $l : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}$ , которое аппроксимируется вложением (с небольшой корректировкой его в окрестностях концов хорд), которое также обозначим через  $L$ . Это вложение является разбивающим: белые клетки лежат по одну сторону от образа окружности, а черные клетки – по другую. Заменяем вершины графа дугами с концами на  $L$ . Эти дуги будут являться границами белых (или черных) клеток и, естественно, не будут иметь общих точек.

Рассмотрим тор как декартово произведение  $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$  с координатами  $\phi, \psi \in [0, 2\pi]$ , где  $2\pi$  тождественно отождествлено с 0. Его можем изобразить в виде квадрата, где  $\phi$  – параллель,  $\psi$  – меридиан тора.

Применяя гладкую изотопию тора  $\mathbf{S}$  можно добиться положения линии  $\mathbf{L}$  вдоль границ квадрата. Без ограничения общности можно считать, что все черные клетки находятся внутри линии  $\mathbf{L}$ , а белые – снаружи.

Далее можно добиться такого положения вершин “белых” дуг, чтобы дуги либо пересекали только параллель  $\phi$  (множество  $A$ ), либо только меридиан  $\psi$  (множество  $B$ ), либо были “параллельны” одной диагонали квадрата (множество  $C$ ); либо не пересекали границу квадрата (их можно поместить в любое из множеств  $A, B, C$ ) (рис. 1).

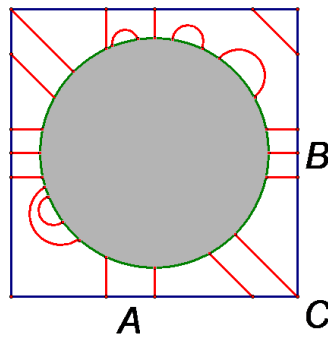


Рис. 1. Разбиение множества “белых” дуг на три семейства

Обратимся к хордовой диаграмме  $\mathbf{D}_{\Gamma, L}$ , соответствующей графу  $\Gamma$  с обходом  $\mathbf{L}$ , и её матрице пересечений  $\mathbf{M}_{\Gamma, L}$ . Согласно теореме 1 [3], при вложении графа в тор множество индексов матрицы  $\mathbf{M}_{\Gamma, L}$  может быть разбито таким образом, чтобы сумма рангов квадратных блочных матриц была равна  $2 + 0$ . В

данном изложении матрица  $\mathbf{M}_W$  с рангом 2 будет составлена из матрицы  $\mathbf{M}_{\Gamma,L}$ , с выбором индексов, соответствующих “белым” хордам; а матрица  $\mathbf{M}_B$  с рангом 0 – “чёрным”.

Заметим, что “чёрные” дуги на поверхности (если таковые существуют) не имеют общих точек, а значит и на диаграмме  $\mathbf{D}_{\Gamma,L}$  “чёрные” хорды не будут зацеплены. И, следовательно, матрица  $\mathbf{M}_B$  действительно будет иметь ранг 0.

Матрица  $\mathbf{M}_W$  – это симметричная матрица над  $\mathbb{Z}_2$  с нулями на главной диагонали и рангом равным 2. Легко показать, что множество индексов этой матрицы может быть разбито на три множества, два из которых обязательно не пустые.  $\square$

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Filotti I. S., Miller G. L., Reif J. *On determining the genus of a graph in  $O(v\theta(g))$  steps* // Proc. XI Annual Symp. on Theory of Computing. – N.Y.: ACM Press, 1979. – P. 27–37.
2. Lins S., Oliveira-Lima E., Silva V. *A homological solution for the Gauss code problem in arbitrary surface* // J. Comb. Theory. Ser. B. – 2007. – V. 98. – No 3. – P. 506–515.
3. Мантуров В. О. *Вложения четырехвалентных оснащенных графов в двумерные поверхности* // Докл. РАН. – 2009. – Т. 424. – № 3. – С. 308–310.

**С. В. Томашевский**

*Российский университет дружбы народов,  
vagabund@list.ru*

#### ОБОБЩЕННЫЕ ФРЕЙМЫ И СИСТЕМЫ РИССА

Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  – пространство с мерой ( $\Omega$  – множество,  $\Sigma$  –  $\sigma$ -алгебра его подмножеств,  $\mu$  – принимающая значения из



$[0, \infty]$  мера на  $\Sigma$ ),  $H$  – гильбертово пространство (над полем  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ).

**Определение 1 ([4]).** Пусть  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$  – система замкнутых вложенных ( $H_n \subset H_{n+1}$ ) расширяющихся подпространств в  $H$ , объединение которых всюду плотно в  $H$ . Пусть  $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$  – система, такая что любой ее элемент  $e^\omega$  является последовательностью  $\{e_{n+1}^\omega\}_{n=1}^\infty$  элементов  $H$ ,  $e_n^\omega \in H_n$  и  $e_n^\omega$  – ортогональная проекция  $e_{n+1}^\omega$  на  $H_n$ . Тогда  $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$  – обобщенная система в  $H$ .

**Определение 2.** Обобщенную систему функций  $\{\varphi^\omega\}_{\omega \in \Omega} \subset H$  называют обобщенным фреймом, если существуют константы  $A$  и  $B$ ,  $0 < A \leq B < \infty$ , такие что для любого  $y \in H_n$  все функции  $(y, \varphi_n^\omega)$  измеримы и для любого  $y \in H_n$  выполнено неравенство:

$$A\|y\|^2 \leq \int_{\Omega} |(y, \varphi_n^\omega)|^2 d\mu(\omega) \leq B\|y\|^2.$$

До 2004 г. фреймы рассматривались лишь в дискретном виде, и для многих целей точности разложения по ним было недостаточно. Более сложными являются интегральные фреймы, предложенные К. Блаттером [3]. Такой непрерывный аналог быстро нашел физическое применение и начал исследоваться теоретически. В работе [5] подробно изложены свойства интегральных фреймов, схожие со свойствами обычных фреймов. Дано определение интегральных систем Рисса. Но не все системы, обладающие свойствами ортоподобных систем, раскладываются по интегральным фреймам.

Т. П. Лукашенко ввел новый класс систем [4], названных им обобщенными ортоподобными системами. В данной работе проводится обобщение этого класса систем путем расширения его

до обобщенных фреймов. Доказывается, что ортоподобные системы, введенные Т. П. Лукашенко, являются жесткими обобщенными фреймами. Доказываются две теоремы:

**Теорема 1.** *Обобщенная система Рисса является обобщенным фреймом.*

**Теорема 2.** *Для того чтобы система  $\Phi = \{\varphi^\omega\}_{\omega \in \Omega}$  была обобщенным фреймом в  $H$  с константами  $A$  и  $B$ , необходимо и достаточно, чтобы нашлось гильбертово пространство  $H' \supset H$ , и в нем обобщенная система Рисса с константами  $A$  и  $B$ , которая в проекции на  $H$  будет давать систему  $\Phi$ .*

Дополнительно приводятся два примера разложения функций по обобщенным фреймовым системам и примеры возможного применения таких систем.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам.* – Ижевск: РХД, 2001.
2. Чуи Ч. *Введение в вейвлеты.* – М.: Прикл. математика, 2001.
3. Блаттер К. *Вэйвлет-анализ. Основы теории.* – Техносфера, 2004.
4. Лукашенко Т. П. *О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным* // Матем. сборник. – 1997. – Т. 32. – № 5. – С. 57–72.
5. Захарова А. А. *Интегральные системы Рисса и их свойства* // Вестн. Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. – 2004. – № 6. – С. 28–33.

**П. И. Трошин**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
Paul.Troshin@gmail.com*

## **ФРАКТАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ**

Построение фрактальных поверхностей имеет различные практические применения: моделирование поверхностей с заданными фрактальными свойствами (например, создание ландшафтов), приближение (аппроксимация) поверхностей фракталами с последующим анализом их свойств. Преимущество фракталов состоит в сложности получаемой структуры (самоподобие, наличие деталей на любом масштабе) и одновременно простоте ее порождения.

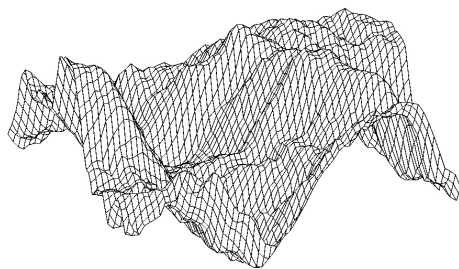


Рис. 1. Приближение поверхности броуновского движения.

В предлагаемом докладе мы рассматриваем такие методы построения фрактальных поверхностей как приближение поверхности броуновского движения и аппроксимация различными фрактальными поверхностями, построенными с помощью систем итерированных функций ([1]). Алгоритмы построения поверхностей реализованы в системах компьютерной алгебры и символьных вычислений Maxima ([2]) и Mathematica, проведено их сравнение.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Massopust P. *Interpolation and approximation with splines and fractals*. – New York: Oxford University Press, 2010. – 319 p.
2. Трошин П. И. *Моделирование фракталов в среде Maxima. Часть II. Хаотическая динамика и фракталы. Учебно-методическое пособие* [Электронный ресурс]. – Казань : КФУ, 2012. – 48 с. – <http://kpfu.ru/docs/F1526739216/main.pdf>.

**Е. С. Ульянова**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет*

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АНИМАЦИИ  
И ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ  
В 7 – 9 КЛАССАХ**

При изучении планиметрических понятий на уроке геометрии в средней школе обычно используют объяснительно-иллюстративный метод, чаще всего представленный объяснениями учителя в совокупности с иллюстрацией статичного чертежа или демонстрации макета.

На наш взгляд, методически обоснованное использование анимации при проведении небольших практических экспериментов на уроке для введения новых понятий или изучения их свойств является более продуктивным. Во-первых, это позволяет поднять мотивацию детей посредством использования в обучении таких методов научного познания как наблюдение и эксперимент, мало представленные в современной системе традиционного обучения геометрии. Во-вторых, это развивает такие формы научного познания как обобщение, выделение частного из общего, индукцию и, в целом, логику детей. В-третьих,

яркость и необычность подачи изучаемого материала непроизвольно привлекает внимание к обучению, повышает интерес к теме, и, конечно, показывает красоту форм и закономерностей геометрии, ее практическую значимость и актуальность.

Стандартная система подачи материала, применяемая на протяжении десятилетий, несколько приелась, теряется яркость подачи и восприятия, а потому любые новшества в преподавании воспринимаются с удивлением, может даже на первых порах недоверием, но неизменно неподдельным интересом.

Возьмем, например, изучение новой темы по геометрии в 7 классе по теме: “Медианы, биссектрисы и высоты треугольника”. В дальнейшем на протяжении всего периода обучения геометрии учащиеся путают свойства замечательных точек, а именно какие отрезки в пересечении дают центр вписанной или описанной окружностей.

Что может предложить традиционный подход при построении урока по данной теме? Проведение традиционной актуализации – это опрос учащихся или решение простых задач, направленных на повторение операций деления отрезка и угла пополам, определения треугольника. Предлагаем на этом этапе заинтересовать учащихся интересной анимацией – при делении отрезка на две части на слайде двигается, повторяя движения ученика в тетради, линейка с делениями, аналогично при построении биссектрисы угла на слайде повторяет движения ученика транспортир. На этапе изучения нового материала, вместо того, чтобы дать сухие сведения учащимся о том, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке, предлагаем провести следующий эксперимент. Раздав заранее приготовленные, вырезанные из плотной бумаги или картона различные треугольники (тупоугольные, остроугольные, равнобедренные,

прямоугольные) с отмеченной точкой (точкой пересечения медиан), предложить учащимся удерживать треугольник в равновесии на карандаше с опорой в отмеченной точке. Далее предложить учащимся найти другую точку в которой треугольник может находиться в равновесии, определить свойства отмеченной точки на треугольнике, выдвинуть гипотезу об алгоритме ее нахождения. После обсуждения гипотез, результатов наблюдения учащихся опыт демонстрируется на экране: появляется треугольник, который не держит равновесия в различных точках, но после построения медиан с помощью анимации показываем, как треугольник держится на ручке в найденной точке.

Аналогичные эксперименты предлагаем проводить с учащимися с точкой пересечения биссектрис и высот.

### **Ш. М. Хайдаров**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
15jkeee@gmail.com*

## **МЕТОДЫ ОТОБРАЖЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДОКУМЕНТОВ НА ПОРТАТИВНЫХ УСТРОЙСТВАХ**

В настоящее время портативные устройства поддерживают множество форматов (fb2, epub, doc, txt, rtf и др.). Для математических документов распространенными форматами в сети являются PDF и DjVu. Использование этих форматов на портативных устройствах при работе с математическими текстами часто не удобно, поскольку программы отображения не представляют возможности переформатирования страниц под размер экрана. Форматы fb2 и ePub значительно удобнее, так как позволяют динамически формировать страницу отображения

с помощью простых настроек. Однако эти форматы рассчитаны на использование только текстовых документов. Последняя версия формата ePub позволяют использовать математический текст на языке разметки MathML (см. [1]).

В настоящей работе предложен метод включения математических конструкций в формат fb2. В основе метода лежит разработанный ранее алгоритм (см. [2]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-07-97018-р\_поволжье).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *EPUB 3 Accessibility Guidelines*. URL: <http://www.idpf.org/accessibility/guidelines/content/mathml/desc.php>
2. Липачёв Е. К., Хайдаров Ш. М. *Система сервисов преобразования электронных математических документов на основе облачных технологий* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2013. – Т. 47 – С. 109–110.

**А. В. Хорьков**

*КНИТУ-КАИ им. А. Н. Туполева,*

*aLex22fcrk@yandex.ru*

#### ТРЕХКРАТНОЕ ПОКРЫТИЕ КВАДРАТА ВОСЕМЬЮ КРУГАМИ

Рассмотрено 3-кратное покрытие единичного квадрата 8-ю равными кругами наименьшего возможного радиуса  $r_{8,3}^*$ . Установлено значение радиуса  $r_{8,3}^*$  и расположения центров кругов, при которых их радиус достигает указанного значения.

Задачи многократного покрытия возникают, при проектировании спутниковых систем многократного обзора поверхности Земли, навигационных систем, при выборе расположения наземных систем различного назначения, в частности, противопожарных систем наблюдения и т. п.

Пусть  $r_{n,k}$  – наименьший радиус  $n$  ( $n \geq 1$ ) равных кругов обеспечивающих  $k$ -кратное ( $1 \leq k \leq n$ ) покрытие единичного квадрата  $S$  при некотором расположении кругов, а  $r_{n,k}^*$  наименьшее значение  $r_{n,k}$  по всевозможным положениям кругов. Однократное покрытие квадрата равными кругами наименьшего возможного радиуса исследовалось во многих работах, например, Дж. Б. М. Мелиссена, К. Дж. Нурмеллы. В работе Ш. И. Галиева и М. А. Карповой исследовалась задача  $k$ -кратного покрытия ограниченного множества, в частности, единичного квадрата  $n$  равными кругами наименьшего возможного радиуса. В указанных работах были представлены некоторые возможные математические модели задачи, алгоритмы её решения и оценки радиусов покрывающих кругов.

В данной работе мы доказываем, что значение,  $r_{8,3} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$  неулучшаемо и указываем расположения кругов обеспечивающих требуемое трехкратное покрытие круга.

Расположим 8 кругов радиуса  $r^* = r_{8,3}^* = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$  как на рис. 1 (центры кругов помечены жирными точками). В результате получим 3-х кратное покрытие квадрата.



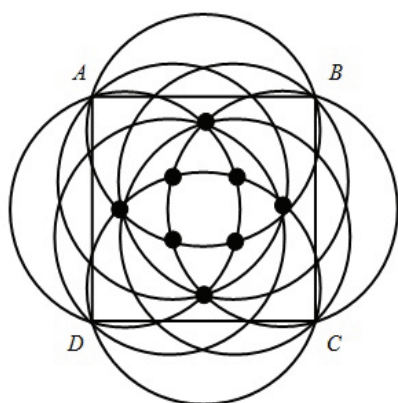


Рис. 1

Допуская, что радиус меньше  $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ , и последовательно рассматривая различные возможные варианты расположения покрывающих кругов, доказываем, что этого не может быть. Расположения центров кругов, обеспечивающее трехкратное покрытие квадрата представлено на рис. 1.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Fejes To'th G. *Multiple packing and covering of the plane with circles* // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1976. – No 27. – P. 135–140.
2. Melissen J. B. M., Schuur P. C. *Improved coverings of a square with six and eight equal circles* // Electron. J. Combin. – 1996. – V. 3. – R32. – P. 10.
3. Nurmella K. J., Ostergard P. R. J. *Covering a square with up to 30 equal circles* // Research report A62 Laboratory for Technology Helsinki University. – 2000.
4. Tarnai T., Ga'spa'r Zs. *Covering a square by equal circles* // Elem. Math. – 1995. – No 50. – P. 167–170.

5. Галиев Ш. И., Карпова М. А. *Оптимизация многократного покрытия ограниченного множества кругами* // Ж. вычисл. мат. и матем. физ. – 2010. – Т. 50. – № 7. – С. 757–769.

**Д. В. Чупраков**

*Вятский государственный гуманитарный университет,  
chupdiv@yandex.ru*

**О ПОЛУКОЛЬЦАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ  
СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ТРЁХЭЛЕМЕНТНОМ  
 $T_0$ -ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПОЛУКОЛЬЦЕ  $\{0, 1, \infty\}$**

В докладе ставится проблема исследования полуколец непрерывных функций над топологическим  $T_0$ -пространством со значениями в трёхэлементном полукольце  $\{0, 1, \infty\}$ .

Таким образом, предлагается переход от хорошо изученных полуколец непрерывных действительных функций  $C(X)$  (см. [1]) и полуколец  $C(X, I)$  со значениями в единичном отрезке (см. [2,3]), к полукольцам  $C(X, S)$  функций  $f: X \rightarrow S$  для конечных топологических пространств  $X$  и  $S$ .

Полукольцом называется алгебраическая структура с ассоциативной и коммутативной операцией сложения  $+$  и ассоциативной операцией умножения  $\cdot$ , дистрибутивной относительно сложения с обеих сторон. Топологическое пространство  $X$  называется  $T_0$ -пространством, если для любых двух различных точек пространства  $X$  найдется открытое множество в  $X$ , содержащее ровно одну из них. На  $T_0$ -пространствах определяется порядок:  $a \leq b \Leftrightarrow [a] \subseteq [b]$ , где  $[a]$  — замыкание множества  $\{a\}$ .

Если на полукольце  $S$  задана  $T_0$ -топология так, что полукольцевые операции в  $S$  непрерывны, то получим топологическое  $T_0$ -полукольцо.

Рассмотрим полукольцо  $S = \{0, 1, \infty\}$  с идемпотентными операциями  $(x + x = x, xx = x)$ , нулем  $0$ , единицей  $1$  и аддитивно поглощающим элементом  $\infty$ . Зададим на  $S$  топологию с системой замкнутых множеств:  $\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \infty\}$ . Очевидно,  $S$  является  $T_0$ -полукольцом.

Через  $C(X, S)$  обозначим полукольцо всех непрерывных функций, заданных на топологическом пространстве  $X$  и принимающих значения в указанном топологическом полукольце  $S$ , с поточечно определенными операциями сложения и умножения функций.

Далее будем полагать, что  $X$  является  $T_0$ -пространством.

Получены следующие факты:

**Теорема 1.** Пусть  $X$  — топологическое  $T_0$ -пространство. Функция  $f: X \rightarrow S$  принадлежит полукольцу  $C(X, S)$  тогда и только тогда, когда она монотонна.

Действительно, если  $f \in C(X, S)$  и  $x \leq y$ , то  $[x] \subseteq [y]$  и  $f(x) \in f([x]) \subseteq f([y]) \subseteq [f(y)]$ . Откуда  $f(x) \leq f(y)$  и, следовательно, функция  $f \in C(X, S)$  монотонна.

Обратно, монотонность функции  $f: X \rightarrow S$  влечёт  $f([x]) \subseteq [f(x)]$  для каждого  $x \in X$  что, в свою очередь, равносильно непрерывности функции  $f$ .

Имеет место теорема об определяемости топологического  $T_0$ -пространства  $X$  полукольцом функций  $C(X, S)$ :

**Теорема 2.** Пусть  $X, Y$  — конечные  $T_0$ -пространства. Полукольца функций  $C(X, S)$  и  $C(Y, S)$  изоморфны тогда и только тогда, когда пространства  $X$  и  $Y$  гомеоморфны.

Исследование полукольца  $C(X, S)$  планируется проводить в соответствии со структурой монографии [1]: 1) исследование алгебраических свойств идеалов, конгруэнций и подалгебр полукольца  $C(X, S)$ ; 2) определяемость топологических пространств в терминах решеток перечисленных объектов.

В настоящее время ведётся исследование решеток идеалов  $\text{Id}C(X, S)$  и конгруэнций  $\text{Con}C(X, S)$ . В частности, решается проблема определяемости топологического пространства  $X$  указанными решетками.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 1.1375.2014/К).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вечтомов Е. М., Сидоров В. В., Чупраков Д. В. *Полукольца непрерывных функций*. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2011. – 312 с.
2. Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. *Полукольца непрерывных  $[0, 1]$ -значных функций* // *Фундаментальная и прикладная математика*. – 2012. – Т. 17. – Вып. 1. – С. 53–82.
3. Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. *Замкнутые идеалы и замкнутые конгруэнции полукольца непрерывных  $[0, 1]$ -значных функций с топологией поточечной сходимости* // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. – 2013. – Т. 19. – № 3.

**Ю. Н. Штейников**

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,  
yuriisht@gmail.com*

## ОЦЕНКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ ПО ПОДГРУППАМ

Мы будем рассматривать следующую задачу. Пусть  $\Gamma$  – подгруппа  $\mathbb{Z}_p^*$ ,  $a \in \mathbb{Z}_p^*$ ,  $e_p(x) := e^{2\pi ix/p}$ ,  $p$  – достаточно большое простое число. Требуется нетривиально оценить модуль суммы:  $S(a, \Gamma) = \sum_{x \in \Gamma} e_p(ax)$ , где  $S(\Gamma) := \max_{a \in \mathbb{Z}_p^*} |S(a, \Gamma)|$ .

Важной задачей является установление нетривиальных по порядку верхних оценок для  $S(\Gamma)$ :  $S(\Gamma) = o(|\Gamma|)$ ,  $p \rightarrow \infty$ .

В монографии С. В. Конягина и И. Е. Шпарлинского [2] приведены задачи, где применяются такие суммы. Интерес к ним был вызван их применением к проблеме Варинга [6]. Оценки таких сумм полезны и для аддитивных задач по простому модулю.

Оценками  $S(a, \Gamma)$  занимались С. В. Конягин, Д. Р. Хиф-Браун [1], И. Д. Шкредов [4]. В частности были доказаны нетривиальные по порядку верхние оценки для  $S(\Gamma)$  для подгрупп  $|\Gamma| > p^{1/4+\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$  – произвольное малое число. Случай малых подгрупп  $|\Gamma| > p^\varepsilon$  был исследован в [3].

В этой работе получены новые верхние оценки тригонометрических сумм по подгруппам  $\Gamma \subset \mathbb{Z}_p^*$ , размер которых принадлежит  $[p^{\frac{28}{95}}, p^{\frac{182}{487}}]$ . Для мультипликативной группы  $\Gamma \subset \mathbb{Z}_p^*$  введем по определению величину

$$T_k(\Gamma) := \{x_1, \dots, x_{2k} \in \Gamma : x_1 + \dots + x_k = x_{k+1} + \dots + x_{2k}\}.$$

Такие оценки для  $S(\Gamma)$  могут быть получены с помощью оценок для величин  $T_k(\Gamma)$ .

Мы будем развивать идеи указанных работ и усилим оценку для величины  $T_3(\Gamma)$  и для  $S(\Gamma)$ . Также упомянем некоторые их следствия.

**Теорема 1.** При  $t < p^{1/2}$  справедлива следующая оценка:

$$T_3(G) \ll t^{4\frac{3}{14}} (\log t)^{12/7}.$$

**Теорема 2.** Справедливы неравенства:

$$\begin{cases} p^{\frac{182}{515}} < t < p^{\frac{182}{487}} \Rightarrow S(\Gamma) \ll p^{\frac{1}{12}} t^{\frac{1579}{2184}} (\log t)^{\frac{1067}{5460}}; \\ p^{\frac{56}{185}} < t < p^{\frac{182}{515}} \Rightarrow S(\Gamma) \ll p^{\frac{1}{18}} t^{\frac{101}{126}} (\log t)^{\frac{4}{21}}; \\ p^{\frac{28}{95}} < t < p^{\frac{56}{185}} \Rightarrow S(\Gamma) \ll p^{\frac{1}{24}} t^{\frac{1139}{1344}} (\log t)^{\frac{1}{14}}. \end{cases}$$

Суммы  $S(a, \Gamma)$  можно рассматривать по степени простого числа. Метод из работы [5] позволяет получать оценки для таких сумм. В качестве приложения мы получим нетривиальный результат о первом натуральном числе, частное Ферма которого не обладает свойством делимости на квадрат простого.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00332), Минобрнауки РФ (проект № 8215).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Колягин С. В. *Оценки тригонометрических сумм по подгруппам и сумм Гаусса* // Тр. Тульской междунар. конф. по теории чисел. – Тула, 2001.
2. Konyagin S. V., Shparlinskii I. E. *Character sums with exponential functions*. – Cambridge University Press, 1999.
3. Bourgain J., Konyagin S. V. *Estimates for the number of sums and products and for exponential sums over subgroups in fields of prime order* // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. – 2003. – V. 337. – P. 75–80.

- 
4. Shkredov I. D. *Some new inequalities in additive combinatorics* // Moscow J. of Combinatorics and Number Theory. – 2014.
  5. Малыгин Ю. В. *Оценки тригонометрических сумм по модулю  $p^r$*  // Матем. заметки. – 2006. – Т. 80. – № 5. – С. 793–796.
  6. Карацуба А. А. *Основы аналитической теории чисел*. – Москва: УРСС, 2004. – 182 с.

## АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Авербух Е. Л.	3, 4	Губайдуллина Р. К.	58
Аганин А. А.	6	Гундырев И. А.	60
Аксанова И. И.	8	Давлетшин А. И.	62
Амозова К. Ф.	11	Егоров А. Г.	155
Андреев П. Д.	13	Елгушова А. С.	64
Афоница А. И.	15	Жегалов В. И.	66
Ахмадуллин И. И.	17	Жукова Н. И.	75
Ахметов Д. Ю.	19	Зайнетдинов Д. Х.	77
Балафендиева И. С.	21	Зеленина Л. И.	79
Бегун А. С.	24	Зыкова Т. В.	84
Бекназарян А. Ф.	26	Иванова Ю. Е.	86
Бережной Д. В.	21	Игнатъев Ю. Г.	88
Бикмухаметов Р. И.	27	Идиятова Э. Э.	89
Болдырь С. В.	29	Каликинская Е. Ю.	125
Бутякова М. А.	32	Калимуллин И. Ш.	77
Валеев И. И.	34	Калмыкова Т. А.	93
Вахитова А. Р.	36	Карабашева Э. Н.	95
Веprinцев Р. А.	38	Каюмов И. Р.	15
Вихарев С. С.	40	Кибец Ю. И.	97
Волковая Т. А.	42	Кокурин М. М.	100
Гайнуллина А. Р.	44	Константинов А. Ю.	97
Галанин А. В.	46	Конюхов И. В.	102
Галимова Э. И.	48	Корнилов Н. И.	104
Галиулина Г. Р.	51	Коршун К. В.	106
Ганенкова Е. Г.	11	Котов В. Л.	97
Гафиятуллина Л. И.	53	Кочетков А. В.	108
Глазова Е. Г.	108	Краснова Д. А.	110
Горшков А. А.	55	Крусс Ю. С.	112



---

Кузоватов В. И.	114	Садыкова Е. Р.	51
Кузьмина С. К.	116	Саламатин А. А.	155
Купцов В. В.	118	Салахова Л. А.	157
Куркин А. А.	3, 4	Самигуллина А. Р.	88
Малюгина А. А.	119	Самсонова К. А.	159
Марков Р. В.	121	Секаева Л. Р.	21
Минеева Е. А.	122	Смоленская Е. А.	146
Миронов А. Н.	66	Старостина В. В.	161
Миронова С. Р.	125	Талипова Т. Г.	3, 4
Мощева Е. Е.	135	Тарасова А. А.	97
Мышкина Е. К.	129	Терешонок Е. Н.	163
Насырова Н. И.	29	Тестова И. В.	104, 146
Низамиева Л. Ю.	125	Тимербаетова Н. В.	48
Николаева Е. А.	131	Токаревская С. А.	165
Новиков А. А.	133	Томашевский С. В.	168
Нуриев А. Н.	135	Трошин П. И.	171
Овсепян К. Г.	137	Турыгина И. А.	108
Орехов А. Н.	140	Ульянова Е. С.	172
Панкратов Е. В.	140	Уразова Д. З.	8
Патрин Е. В.	142	Ускова К. С.	122
Петухова К. А.	144	Уткина Е. А.	66
Погодина А. Ю.	125	Фазлеева Э. И.	64, 151
Попов В. Н.	146	Фалилеева М. В.	34
Рагозина В. Е.	86	Хайдаров Ш. М.	174
Резникова И. А.	148	Халитова Т. Ф.	6
Ризванов З. З.	151	Хорьков А. В.	175
Рогозина М. С.	153	Хусаинова Е. О.	24
Рудалев А. В.	140	Чермных В. В.	121
Сабуров Э. Н.	104	Чупраков Д. В.	178
Сагдатуллин М. К.	21	Чупрунов А. Н.	15

Шакирова К. Б.	89	Штейников Ю. Н.	181
Шакирова Л. Р.	32	Юнусова А. И.	135
Шейна К. И.	75		
Шилова Н. А.	79		

**ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА  
ИМЕНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО**

**ТОМ 50**

**ЛОБАЧЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2014**

**Материалы Тринадцатой молодежной  
школы-конференции  
(Казань, 24 – 29 октября 2014 г.)**

Подписано в печать ?? .10.2014

Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Таймс».

Тираж 200 экз. П. л. ??. Печать ризографическая.

Заказ

**Казанский (Приволжский) федеральный университет**  
420008, Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37

---