МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВПО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

А.В. ОЖЕГОВА, Р.Г. НАСИБУЛЛИН

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ: задачи, алгоритмы, примеры

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОСОБИЕ

КАЗАНЬ — 2018

Печатается по решению методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Научный редактор

к.ф.-м.н., доцент **Сурай Л.А.**

Рецензенты

к.т.-н., доцент КГАСУ **Горская Т.Ю.**, к.ф.-м.н., доцент **Тазюков Б.Ф.**

Ожегова А.В., Насибуллин Р.Г.

Вариационное исчисление: задачи, алгоритмы, примеры: методическое пособие / А.В. Ожегова, Р.Г. Насибуллин – Казань: Казан. ун-т, 2018. – 60 с.

Данное методическое пособие посвящено задачам классического вариационного исчисления и является дополнением к курсу лекций "Вариационные исчисление и методы оптимизации", "Теория оптимизации" , "Экстремальные задачи" и "Введение в теорию оптимизации", читаемым в Институте математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского университета и предназначено для студентов 3, 4 курсов по направлениям "математика", "математика и компьютерные науки", "механика", "механика и математическое моделирование" и "прикладная механика".

Содержание

Введение

Задачи на отыскание наибольшего и наименьшего величин являются актуальными на продолжении всей истории человечества. Особенно значение они приобретают в настоящее время, когда необходимость в эффективном использовании природных, людских и материальных ресурсов и оптимальном управлении возрастает.

В пособии рассмотрен один из разделов теории оптимизации — вариационное исчисление (ВИ).

Задачей ВИ является нахождение экстремума (минимума, максимума) функционала $J = J(x(\cdot))$ на некотором множестве функций $\mathfrak{D} \subset X$, где X — линейное нормированное пространство. Множество $\mathfrak{D} \subset X$ называют *допустимым множеством.*

Говорят, что допустимая функция $\widehat{x}(t)$ доставляет *локальный минимум (максимум)* функционалу J, если существует некоторая окрестность

$$U_\delta(\widehat{x}) = \{x \in X : \|\widehat{x} - x\|_X < \delta\}$$

такая, что $\forall x \in U_\delta(\widehat{x}) \bigcap \mathfrak{D}$ выполнено неравенство

$$J(\widehat{x}) \leq J(x) \quad (J(\widehat{x}) \geq J(x)).$$

Говорят, что допустимая функция $\widehat{x}(t)$ доставляет *абсолютный минимум (максимум)* функционалу J, если

$$J(\widehat{x}) \leq J(x) \quad (J(\widehat{x}) \geq J(x)) \quad \forall x \in \mathfrak{D} \subset X.$$

Функционалы в общем случае рассматриваются вида

$$\mathfrak{B}(\xi) = \mathfrak{B}(x(\cdot, t_0, t_1)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

где $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$, $t_0, t_1 \in \Delta$, Δ — заданный отрезок числовой прямой, $t_0 < t_1$, f и ψ заданные функции, называемые соответственно *интегрантом* и *терминантом* задачи.

Если в качестве X выбирается пространство $C^1[t_0, t_1]$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[t_0, t_1]$ вектор-функций с нормой

$$\|x\|_1 = \max\{\|x\|_C, \|\dot{x}\|_C\},$$

где

$$\|x\|_C = \max_{1\le i\le n} \max_{t_0\le t\le t_1} |x_i(t)|,$$

то говорят о слабой постановке задачи и, соответственно, слабом экстремуме (локальном или глобальном).

Если же $X = KC^1[t_0, t_1]$ — пространство кусочно-непрерывно дифференцируемых на $[t_0, t_1]$ функций с нормой $\|x\|_0 = \|x\|_C$, то говорят о сильной постановке задачи и соответственно, сильном локальном или сильном абсолютном экстремуме.

В вариационном исчислении различают несколько типов задач: *простейшая задача ВИ, задача Больца, изопериметрическая задача, задача со старшими производными, задача с подвижными концами* и наиболее общую — *задачу Лагранжа.*

В каждом пункте настоящего пособия излагается постановка определенной задачи, приводятся основные определения и результаты, указывается алгоритм решения на основе имеющихся необходимых и достаточных условий экстремума с дальнейшей демонстрацией на конкретных примерах. В последнем пункте приводятся задания для индивидуальной работы студентов.

Приведем здесь методические указания к решению задач вариационного исчисления:

1. Определить тип задачи;

2. Выписать необходимое условие локального экстремума первого порядка для этой задачи. Найти допустимые экстремали $\widehat{x}(t)$;

3. На полученных в пункте 2 экстремалях проверить достаточные условия локального минимума (локального максимума). Если соответствующее достаточное условие в $\widehat{x}(t)$ выполнено, делаем вывод, что $\widehat{x}(t) \in locmin(locmax)$. Если достаточное условие не выполнено, то продолжаем исследование дальше.

4. Проверяем на допустимой экстремали $\widehat{x}(t)$ необходимое условие локального минимума (локального максимума) второго порядка. Если необходимое условие не выполнено, то исследуемая допустимая

экстремаль не является локальным минимумом (локальным максимумом) задачи. Если необходимое условие выполнено, то продолжаем исследования дальше.

5. Исследуем полученные точки локального экстремума на глобальный (абсолютный);

6. Если достаточное условие $locmin$ ($locmax$) для данного типа задачи отсутствуют или их сложно проверить, то пробуют проверить точки на $locmin$ ($locmax$) с помощью их определения.

Так как множество $KC^1[t_0, t_1]$ шире чем $C^1[t_0, t_1]$, то необходимое условие слабого экстремума является необходимым условие и сильного экстремума. Достаточное условие сильного экстремума является достаточным условием слабого.

Изложение материла ведется по методологии, основанной на общем принципе исследования экстремальных задач — принципе Лагранжа. За базу взяты учебники [1] – [3], написанные преподавателями, читавшими курс оптимизации на механико-математическом факультете МГУ.

1. Простейшая задача вариационного исчисления

Постановка задачи. *Простейшей задачей классического вариационного исчисления* (ПЗВИ) называется следующая экстремальная задача:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \mathrm{extr}, \tag{1.1}$$

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \tag{1.2}$$

где $f = f(t, x(t), \dot{x}(t))$ – данная функция трех переменных, называемая ***интегрантом***. Отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$. Задача рассматривается в слабой или сильной постановке. В слабой постановке допустимыми являются функции $x(t) \in C^1[t_0, t_1]$, удовлетворяющие краевым условиям (1.2), а в сильной постановке функции $x(t) \in KC^1[t_0, t_1]$, также удовлетворяющие условию (1.2).

Нормы в этих пространствах определяются соответственно

$$\|x\|_1 = \|x\|_{C^1([t_0,t_1])} := \max\left\{\|x\|_C, \|\dot{x}\|_C\right\},$$

$$\|x\|_0 = \|x\|_C, \quad \|x\|_C := \max_{t_0 \le t \le t_1} |x(t)|.$$

Определение. *Допустимая функция* $\widehat{x}$ *доставляет* ***локальный минимум*** *в задаче* (1.1) – (1.2), *если существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$J(x(\cdot)) \ge J(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x, *для которой*

$$\|x - \widehat{x}\|_1 < \delta.$$

Определение. *Допустимая функция* $\widehat{x}$ *доставляет* ***абсолютный минимум*** *в задаче* (1.1) – (1.2), *если для любой допустимой функции* x *выполнено*

$$J(x(\cdot)) \ge J(\widehat{x}(\cdot)).$$

В зависимости от слабой или сильной постановке задачи различают слабый (*wlocextr*, *wabsextr*) или сильный экстремум (*slocextr*, *sabsextr*).

Часто в вариационном исчислении функции $x(t)$, доставляющие минимум (максимум) функционалу, называют точками минимума (максимума) или точками экстремума.

Необходимое условие локального слабого экстремума первого порядка. Пусть функция $\widehat{x}$ доставляет слабый локальный экстремум в задаче (1.1) – (1.2), функции $f, f_x, f_{\dot{x}}$ – непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\widehat{x},\dot{\widehat{x}}} = \Big\{(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)) | t \in [t_0, t_1]\Big\}$ $\Big(f, f_x, f_{\dot{x}} \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\widehat{x},\dot{\widehat{x}}}))\Big)$. Тогда $\widehat{f}_{\dot{x}}$ – непрерывно дифференцируемая функция и выполнено уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\widehat{f}_{\dot{x}}(t) + \widehat{f}_x(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Здесь $\widehat{f}_{\dot{x}}(t) := \frac{d}{d\dot{x}} f(t, x, \dot{x})\Big|_{\substack{x=\widehat{x}(t)\\ \dot{x}=\dot{\widehat{x}}}}$, аналогично $\widehat{f}_x(t) := \frac{d}{dx} f(t, x, \dot{x})\Big|_{\substack{x=\widehat{x}(t)\\ \dot{x}=\dot{\widehat{x}}}}$.

Функции, являющиеся решениями уравнения Эйлера, называются ***экстремалями***. Экстремали, удовлетворяющие краевым условиям (1.2), называются ***допустимыми экстремалями*** в ПЗВИ (1.1)–(1.2).

В ПЗВИ (1.1) – (1.2) в качестве $x(t)$ может выступать вектор функция $x(t) = (x_1(t), \ \dots \ , x_n(t))$. Тогда необходимым условием локального экстремума является система уравнений Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{f}_{\dot{x}_i}(t) + \widehat{f}_{x_i}(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1], \ i = \overline{1, n}.$$

Условие Лежандра. Скажем, что на $\widehat{x}$ выполнено ***условие Лежандра***, если

$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0, \quad \forall \ t \in [t_0, t_1],$$

и ***усиленное условие Лежандра***, если

$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}} > 0, \quad \forall \ t \in [t_0, t_1].$$

В векторном случае $x(t) = (x_1(t), \ \dots \ , x_n(t))$,

$$f_{\dot{x}\dot{x}} = \begin{pmatrix} f_{\dot{x}_1\dot{x}_1} & \dots & f_{\dot{x}_1\dot{x}_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{\dot{x}_n\dot{x}_1} & \dots & f_{\dot{x}_n\dot{x}_n} \end{pmatrix}$$

– матрица $n \times n$. Условие $\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0$ означает неотрицательную определенность матрицы, а условие $\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}} > 0$ – ее положительную определенность.

Условие Якоби. Уравнение

$$-\frac{d}{dt}\left(\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t)+\widehat{f}_{\dot{x}x}(t)h(t)\right)+\widehat{f}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t)+\widehat{f}_{xx}(t)h(t)=0$$

называют ***уравнением Якоби*** для исходной задачи на экстремали $\widehat{x}$.

Точка τ называется ***сопряженной с точкой*** t_0, если для решения уравнения Якоби $h(t)$ с начальными условиями

$$h(t_0)=0,\ \dot{h}(t_0)=1,$$

имеет место равенство

$$h(\tau)=0.$$

Говорят, что на $\widehat{x}$ выполнено ***условие Якоби***, если в интервале (t_0,t_1) нет точек, сопряженных с t_0, и ***усиленное условие Якоби***, если в полуинтервале $(t_0,t_1]$ нет точек, сопряженных с t_0.

Условие Вейерштрасса. Функция

$$\mathcal{E}(t,x,\dot{x},u)=f(t,x,u)-f(t,x,\dot{x})-f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})(u-\dot{x})$$

называется ***функцией Вейерштрасса*** интегранта f.

Говорят, что на $\widehat{x}$ выполнено ***условие Вейерштрасса***, если

$$\mathcal{E}(t,\widehat{x},\dot{\widehat{x}},u)=f(t,\widehat{x},u)-f(t,\widehat{x},\dot{\widehat{x}})-\widehat{f}_{\dot{x}}(t)(u-\dot{x})\geq 0,\quad \forall u\in\mathbb{R},\forall t\in[t_0,t_1].$$

Необходимое условие слабого локального минимума второго порядка. Пусть функция $\widehat{x}\in C^2([t_0,t_1])$ доставляет слабый локальный минимум в задаче (1.1) – (1.2), интегрант $f\in C^3(\mathcal{O}(\Gamma_{\widehat{x},\dot{\widehat{x}}}))$. Тогда на $\widehat{x}$ выполняется уравнение Эйлера, условие Лежандра и, если на экстремали $\widehat{x}$ выполнено усиленное условие Лежандра, то выполняется и условие Якоби.

Необходимое условие сильного локального минимума второго порядка. Пусть функция $\widehat{x}\in C^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ доставляет сильный локальный минимум в задаче (1.1) – (1.2), интегрант $f\in C^1(\mathcal{O}(\Gamma_{\widehat{x},\dot{\widehat{x}}}))$. Тогда на $\widehat{x}$ выполняются уравнение Эйлера и условие Вейерштрасса.

Если при этом существует $\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t),\ \forall t\in[t_0,t_1]$, то на $\widehat{x}$ выполняется также условие Лежандра.

Достаточное условие слабого локального минимума второго порядка. Пусть функция $\widehat{x}\in C^2([t_0,t_1])$ – допустимая экстремаль в задаче

(1.1) – (1.2), интегрант $f \in C^3(V)$, где V – некоторая окрестность графика $\Gamma_{\widehat{x}} = \{(t, \widehat{x}(t)) | t \in [t_0, t_1]\}$, на $\widehat{x}$ выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби. Тогда $\widehat{x}$ доставляет слабый локальный минимум.

Достаточное условие сильного локального минимума второго порядка. Пусть функция $\widehat{x} \in C^2([t_0, t_1])$ – допустимая экстремаль в задаче (1.1) – (1.2), интегрант $f \in C^3(V)$, где V – некоторая окрестность графика $\Gamma_{\widehat{x}} = \{(t, \widehat{x}(t)) | t \in [t_0, t_1]\}$, на $\widehat{x}$ выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби, интегрант f является выпуклым по $\dot{x}$ на V. Тогда $\widehat{x}$ доставляет сильный локальный минимум.

Случай квадратичных функционалов. Рассмотрим задачу

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle A\dot{x}, \dot{x}\rangle + 2\langle C\dot{x}, x\rangle + \langle Bx, x\rangle)\, dt \to \inf, \qquad (1')$$

$$x(0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \qquad (2')$$

где $A(t), B(t), C(t)$ – матрицы порядка $n \times n$, на слабый и сильный минимум.

Пусть в задаче (1')-(2') матрицы A, C непрерывно дифференцируемы, B непрерывна и выполнено усиленное условие Лежандра. Тогда, если выполнено усиленное условие Якоби, то допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет абсолютный минимум. Если же не выполнено условие Якоби, то значение задачи равно $-\infty$.

Алгоритм решения:

Для определенности будем решать ПЗВИ на минимум.

1. Записать необходимое условие экстремума первого порядка — уравнение Эйлера:
$$-\frac{d}{dt}\widehat{f}_{\dot{x}}(t) + \widehat{f}_x(t) = 0.$$
Найти его решения, удовлетворяющие краевым условиям, т.е. допустимые экстремали.

2. Проверить на допустимых экстремалях условие Лежандра:

   а) Если условие Лежандра на $\widehat{x}(t)$ не выполнено, то не выполнено необходимое условие слабого и сильного $locmin$ второго порядка и $\widehat{x}$ не доставляет $locmin$ задаче.

б) Если выполнено условие Лежандра, то $\widehat{x}$ остается точкой подозрительной на $locmin$.

в) Если выполнено усиленное условие Лежандра, то переходим к проверке пункта 3.

3. Проверить на $\widehat{x}$ условие Якоби:

   Решаем уравнение Якоби

$$-\frac{d}{dt}\Big(\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{f}_{\dot{x}x}(t)h(t)\Big) + \widehat{f}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{f}_{xx}(t)h(t) = 0$$

   с начальными данными

$$h(t_0) = 0,\ \dot{h}(t_0) = 1.$$

   Затем находим сопряженные с t_0 точки τ из уравнения $h(\tau) = 0$.

   Если $\tau \notin (t_0, t_1]$, то выполнено усиленное условие Якоби, следовательно, выполнено достаточное условие слабого минимума, т.е. $\widehat{x} \in wlocmin$.

   Если $\tau \in (t_0, t_1)$, то не выполнено необходимое условие слабого локального минимума, следовательно, $\widehat{x}$ – не доставляет слабый локальный минимум.

4. Проверка на сильный минимум.

   а) Если кроме выполнения усиленных условий Лежандра и Якоби интегрант f является выпуклым по $\dot{x}$ при всех фиксированных t и x, то $\widehat{x}$ доставляет сильный минимум в задаче.

   б) Если интегрант f не является выпуклым по $\dot{x}$, то следует проверить условие Вейерштрасса.

   Если не выполнено условие Вейерштрасса, то не выполнено необходимое условие сильного минимума, следовательно, $\widehat{x}$ не доставляет сильный локальный минимум.

5. Исследовать задачу на глобальный экстремум.

Замечание. При исследовании ПЗВИ на максимум необходимо следовать этому же алгоритму, учитывая, что условие Лежандра выполнено, если

$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \leq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

и усиленное условие Лежандра, если

$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) < 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Условие Вейерштрасса означает, что

$$\mathcal{E}(t, \widehat{x}, \dot{\widehat{x}}, u) \leq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \ \forall t \in [t_0, t_1],$$

а для сильного максимума функция f должна быть вогнутой по $\dot{x}$.

Кроме того, следует отметить, что задачу

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \sup,$$

$$x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1,$$

можно заменить эквивалентной ей задачей

$$-J(x(\cdot)) = -\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \inf,$$

$$x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1.$$

Примеры

1.1 Найти решение следующей экстремальной задачи

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 \dot{x}^3 dt \to \inf,$$

$$x(0) = 0, \ x(1) = 1.$$

Решение

1. Запишем необходимое условие слабого, а значит, и сильного экстремума — уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\widehat{f}_{\dot{x}} + \widehat{f}_x = 0 \Longleftrightarrow \frac{d}{dt} 3\dot{x}^2 = 0 \Longleftrightarrow \dot{x} = \text{const}.$$

Общее решение уравнение Эйлера

$$x = x(t) = C_1 t + C_2.$$

Из условий на концах находим, что

$$C_1 = 1,\ C_2 = 0.$$

Таким образом, имеется единственная допустимая экстремаль

$$\widehat{x} = \widehat{x}(t) = t.$$

2. Проверим на $\widehat{x} = t$ условие Лежандра.

   Усиленное условие Лежандра выполнено:

   $$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = 6\dot{\widehat{x}}(t) = 6 > 0, \quad \forall\ t \in [0, 1].$$

   Следовательно, переходим к проверке условия Якоби.

3. Выпишем уравнение Якоби

   $$-\frac{d}{dt}6\dot{h} = 0 \Leftrightarrow \ddot{h} = 0.$$

   Общее решение уравнения Якоби

   $$h(t) = C_1 t + C_2.$$

   Начальным условиям

   $$h(0) = 0, \dot{h}(0) = 1,$$

   удовлетворяет функция

   $$h(t) = t.$$

   Функция $h(\tau) = \tau$ не имеет нулей в полуинтервале $(0, 1]$. Значит, сопряженных точек нет, и стало быть, выполнено усиленное условие Якоби. Таким образом, выполнено достаточное условие слабого локального минимума, т.е. $\widehat{x} \in wlocmin$.

4. Проверка на сильный экстремум.

   а) Поскольку функция $f = \dot{x}^3$ не выпукла по $\dot{x}$, то достаточное условие сильного минимума не выполняется.

б) Проверим необходимое условие сильного минимума — условие Вейерштрасса:

$$\mathcal{E}(t, \widehat{x}, \dot{\widehat{x}}, u) = f(t, \widehat{x}, u) - f(t, \widehat{x}, \dot{\widehat{x}}) - \widehat{L}_{\dot{x}}(t)(u - \dot{\widehat{x}}) =$$

$$= u^3 - \dot{\widehat{x}}^3 - 3\dot{\widehat{x}}^2(u - \dot{\widehat{x}}) = u^3 - 1 - 3(u-1) = u^3 - 3u + 2.$$

Очевидно, что $\forall u \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1]$ функция

$$\mathcal{E}(t, \widehat{x}, \dot{\widehat{x}}, u) = u^3 - 3u + 2$$

знакопеременна, следовательно, условие Вейерштрасса не выполняется. Так как не выполняется необходимое условие, то функция $\widehat{x}$ не доставляет сильного локального минимума.

Ответ: $\widehat{x} = t \in wlocmin, J(\widehat{x}) = 1.$

1.2 Решить следующую экстремальную задачу

$$J(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = \int_1^2 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + x_2^2)dt \to \inf,$$

$$x_1(1) = 1,\ x_1(2) = 2,\ x_2(1) = 0,\ x_2(2) = 1.$$

Решение

1. Найдем допустимые экстремали. Система уравнений Эйлера имеет вид

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}2\dot{x}_1 = 0, \\ -\frac{d}{dt}2\dot{x}_2 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Решив ее, получим

$$x_1(t) = C_1 t + C_2,\ x_2(t) = C_3 e^t + C_4 e^{-t}.$$

Из граничных условий находим, что

$$C_1 = 1,\ C_2 = 0,\ C_3 = \frac{1}{e^2 - 1},\ C_4 = -\frac{e^2}{e^2 - 1}.$$

Откуда

$$\begin{cases}\widehat{x}_1(t) = t,\\ \widehat{x}_2(t) = \frac{e^t - e^{-t+2}}{e^2-1}.\end{cases}$$

Проверим на полученных экстремалях необходимые и достаточные условия экстремума второго порядка.

2. Так как матрица

$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

положительно определена при любом $t \in [0,1]$, то выполнено усиленное условие Лежандра.

3. Для проверки условия Якоби запишем систему уравнений Якоби. Учитывая, что

$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \quad \widehat{f}_{\dot{x}x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\widehat{f}_{x\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \widehat{f}_{xx}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},$$

имеем

$$-\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{h}_1\\ \dot{h}_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1\\ h_2\end{pmatrix} = 0,$$

то есть

$$\begin{cases}-\frac{d}{dt}2\dot{h}_1 = 0,\\ -\frac{d}{dt}2\dot{h}_2 + 2h_2 = 0.\end{cases}$$

Общее решение этой системы

$$h_1(t) = A_1 t + A_2,\ h_2(t) = A_3 e^t + A_4 e^{-t}.$$

Константы A_1, A_2, A_3, A_4 найдем из условий

$$h_1(0) = 0,\ \dot{h}(0) = 1,\ h_2(1) = 0,\ \dot{h}_2(1) = 1,$$

которые приводят к системе

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0, \\ A_1 = 1, \\ A_3 e + A_4 e^{-1} = 0, \\ A_3 - A_4 e^{-1} = 1. \end{cases}$$

Откуда

$$A_1 = 1,\ A_2 = -1,\ A_3 = \frac{1}{2e},\ A_4 = \frac{e}{2}.$$

Следовательно, решение системы уравнений Якоби имеет вид

$$h_1(t) = t,\ h_2(t) = \frac{e^{t-1} + e^{1-t}}{2}.$$

Очевидно, что на $(1, 2]$ нет точек, сопряженных с точкой 1. Следовательно, выполнено усиленное условие Якоби. Так как усиленные условия Лежандра и Якоби являются достаточным условием слабого локального минимума, то $\widehat{x} \in wlocmin$.

4. Поскольку интегрант является выпуклым по $\dot{x}$, то $\widehat{x}(t) = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$ является и сильным локальным минимумом.

5. Так как интегрант $f(t) = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + x_2^2$ является к тому же квадратичным, то $\widehat{x}(t) = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$ доставляет абсолютный минимум.

Ответ: $\widehat{x} = t \in wabsmin, J(\widehat{x}) = \frac{2e^2}{e^2-1}$.

1.3 Найти решение следующей экстремальной задачи

$$J(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = \int\limits_0^{\pi} (2x_1x_2 - 2x_1^2 + \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2)dt \to \inf,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_1(\pi) = 1,\ x_2(0) = 0,\ x_2(\pi) = 1.$$

Решение

1. Запишем необходимое условие локального эктремума 1-го порядка — систему уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2x_1 - x_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 + x_1 = 0. \end{cases}$$

Преобразуя, получим

$$\begin{cases} x_2 = \ddot{x}_1 + 2x_1, \\ x_1^{(4)} + 2\ddot{x}_1 + x_1 = 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = \ddot{x}_1 + 2x_1, \\ x_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t(C_3 \cos t + C_4 \sin t). \end{cases}$$

В силу граничных условий $x_1(0) = 0,\ x_1(\pi) = 1$, имеем

$$C_1 = 0, C_3 = -\frac{1}{\pi},$$

т.е.

$$x_1 = C_2 \sin t + t\left(-\frac{1}{\pi}\cos t + C_4 \sin t\right)$$

и

$$x_2 = (C_2 \sin t + t(-\frac{1}{\pi}\cos t + C_4 \sin t))'' + 2(C_2 \sin t + t(-\frac{1}{\pi}\cos t + C_4 \sin t)) =$$

$$= C_2 \sin t + C_4(2\cos t + t\sin t) + \frac{1}{\pi}(2\sin t - t\cos t).$$

Неизвестные C_2 и C_4 найдем условий на концах $x_2(0) = 0,\ x_2(\pi) = 1$. Легко получить, что $C_4 = 0$, а C_2 — произвольная константа.

Тогда

$$x_2(t) = C_2 \sin t + \frac{1}{\pi}(2\sin t - t\cos t).$$

В итоге имеем семейство допустимых экстремалей

$$\begin{cases} \widehat{x}_1 = C_2 \sin t - \frac{t}{\pi}\cos t, \\ \widehat{x}_2(t) = C_2 \sin t + \frac{1}{\pi}(2\sin t - t\cos t), \end{cases}$$

где C_2 — любая константа.

2. Перейдем к проверке условия Лежандра. Матрица

$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

— знаконеопределена, т.е. не выполнено необходимое условие экстремума 2-го порядка, следовательно экстремума нет.

Ответ: экстремума нет.

2. Задача Больца

Постановка задачи ***Задачей Больца (ЗБ)*** называется следующая экстремальная задача:

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi(x(t_0), x(t_1)) \to \text{extr}, \tag{2.1}$$

где $f = f(t, x(t), \dot{x}(t))$ — данная функция трех переменных, а $\psi = \psi(x_0, x_1)$ — данная функция двух переменных. Функцию f называют ***интегрантом***, функцию ψ — ***терминантом***, функционал $\mathcal{B}$ — ***функционалом Больца***. Отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$. Задачу Больца рассматриваем в слабой постановке, т.е. экстремум функционала (2.1) ищем среди непрерывно дифференцируемых функций, которые в данной задаче будут ***допустимыми***.

Определение. *Функция $\widehat{x} \in C^1[t_0, t_1]$ доставляет* ***слабый локальный минимум*** *в задаче* (2.1) ($\widehat{x} \in$ *wlocmin* (2.1))*, если существует $\delta > 0$ такое, что*

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) \geq \mathcal{B}(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой функции $x \in C^1[t_0, t_1]$, для которой

$$\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_1 < \delta.$$

Определение. *Функция $\widehat{x} \in C^1[t_0, t_1]$ доставляет* ***слабый абсолютный минимум*** *в задаче* (2.1) ($\widehat{x} \in$ *wlocmin* (2.1))*, если существует $\delta > 0$ такое, что*

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) \geq \mathcal{B}(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой функции $x \in C^1[t_0, t_1]$.

Необходимое условие экстремума. Пусть функция $\widehat{x}$ доставляет локальный экстремум в задаче (2.1), функции f, f_x и $f_{\dot{x}}$ — непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\widehat{x}\dot{\widehat{x}}} := \{(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}) | t \in [t_0, t_1]\}$, функция ψ — непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1))$. Тогда $\widehat{f}_{\dot{x}}$ непрерывно дифференцируемая функция и выполнены

а) Уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\widehat{f}_{\dot{x}}(t) + \widehat{f}_x(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

б) условие трансверсальности

$$\widehat{f}_{\dot{x}}(t_0) = \widehat{\psi}_{x(t_0)}, \quad \widehat{f}_{\dot{x}}(t_1) = -\widehat{\psi}_{x(t_1)}.$$

Алгоритм решения:

1. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:

   а) уравнение Эйлера
   $$-\frac{d}{dt}\widehat{f}_{\dot{x}} + \widehat{f}_x = 0;$$

   б) условия трансверсальности
   $$\widehat{f}_{\dot{x}}(t_0) = \widehat{\psi}_{x(t_0)},$$
   $$\widehat{f}_{\dot{x}}(t_1) = -\widehat{\psi}_{x(t_1)}.$$

   Найти допустимые экстремали, т.е. решения уравнения Эйлера, удовлетворяющие условиям трансверсальности.

2. Показать, используя определение, что решением является одна из допустимых экстремалей или, что решения нет.

Замечание. В векторном случае $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, необходимым условием являются:

а) система уравнений Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\widehat{f}_{\dot{x}_i} + \widehat{f}_{x_i} = 0,\ i = \overline{1, n};$$

б) условия трансверсальности

$$\widehat{f}_{\dot{x}_i}(t_0) = \widehat{\psi}_{x_i(t_0)},\ i = \overline{1, n},$$

$$\widehat{f}_{\dot{x}}(t_1) = -\widehat{\psi}_{x_i(t_1)},\ i = \overline{1, n}.$$

Примеры.

2.1 Решить следующую экстремальную задачу

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 - x)dt + x^2(1) \to \inf.$$

Отметим, что в нашем случае

$$f(t,x,\dot{x}) = \dot{x}^2 - x,\ \ \psi(x(0),x(1)) = x^2(1).$$

Решение

1. Запишем необходимые условия:

   а) уравнение Эйлера

   $$-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}} + f_x = 0 \Longleftrightarrow 2\ddot{x}^2 + 1 = 0;$$

   б) условия трансверсальности

   $$f_{\dot{x}}(0) = \psi_{x(0)} \Longleftrightarrow \dot{x}(0) = 0,$$

   $$f_{\dot{x}}(1) = -\psi_{x(1)} \Longleftrightarrow 2\dot{x}(1) = -2x(1) \Longleftrightarrow \dot{x}(1) + x(1) = 0.$$

   Общее решение уравнение Эйлера

   $$x(t) = -t^2/4 + C_1 t + C_2.$$

   Из условий трансверсальности находим, что $C_1 = 0, C_2 = 3/4$. Таким образом имеется единственная допустимая экстремаль $\widehat{x} = (3 - t^2)/4$.

2. Покажем с помощью определения, что она доставляет абсолютный минимум в задаче. Действительно, если $h(t) \in C^1[t_0, t_1]$, то $\widehat{x}(t) + h(t)$ — произвольная допустимая точка в ЗБ и

   $$\mathcal{B}(\widehat{x}(t)+h(t)) - \mathcal{B}(\widehat{x}(t)) = \int\limits_0^1 2\dot{\widehat{x}}\dot{h}dt + \int\limits_0^1 \dot{h}^2 dt - \int\limits_0^1 h dt + 2\widehat{x}(1)h(1) + h^2(1).$$

   Интегрируя по частям и учитывая, что $\widehat{x} = (3 - t^2)/4$ получим

   $$\mathcal{B}(\widehat{x}(t)+h(t)) - \mathcal{B}(\widehat{x}(t)) = 2\dot{\widehat{x}}h\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (2\ddot{\widehat{x}} + 1)h dt +$$

   $$+ \int\limits_0^1 \dot{h}^2 dt + 2\widehat{x}(1)h(1) + h^2(1) = \int\limits_0^1 h^2 dt + h^2(1) \geq 0.$$

Выше мы воспользовались тем, что $2\dot{\widehat{x}}(1)h(1) + \widehat{x}(1)h(1) = 0$.

В итоге имеем

$$\mathcal{B}(\widehat{x}(t) + h(t)) - \mathcal{B}(\widehat{x}(t)) \geq 0$$

при любом выборе функции h, т.е. $\widehat{x}(t)$ доставляет абсолютный минимум.

Ответ: $\widehat{x} = (3 - t^2)/4 \in absmin.$

2.2 Найти решения следующей экстремальной задачи

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) = \int\limits_0^\pi (\dot{x}^2 + x^2 - 4x\sin t)dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi) \to \inf .$$

В нашем случае

$$f(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2 + x^2 - 4x\sin t,$$

$$\psi(x(0), x(1)) = 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi).$$

Решение

1. Необходимые условия:

   а) уравнение Эйлера

   $$-\frac{d}{dt}2\dot{x} + 2x - 4\sin t = 0 \Longleftrightarrow \ddot{x}^2 - x = -2\sin t;$$

   б) условия трансверсальности

   $$\begin{cases} 2\dot{x}(0) = 4x(0), \\ 2\dot{x}(\pi) = -2 + 2x(\pi), \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(0) = 2x(0), \\ \dot{x}(\pi) = x(\pi) - 1. \end{cases}$$

   Получим допустимую экстремаль

   $$\widehat{x}(t) = e^t + \sin t.$$

2. Пусть $h(t) \in C^1[t_0, t_1]$. Тогда

   $$B(\widehat{x}(t) + h(t)) - B(\widehat{x}(t)) =$$

$$= \int_0^\pi (\dot{\widehat{x}} + \dot{h})^2 + (\widehat{x} + h)^2 - 4(\widehat{x} + h)\sin t dt - \int_0^\pi \dot{\widehat{x}}^2 + \widehat{x}^2 - 4\widehat{x}\sin t dt +$$

$$+2(\widehat{x}(0)+h(0))^2+2(\widehat{x}(\pi)+h(\pi))-(\widehat{x}(\pi)+h(\pi))^2-2\widehat{x}(0)^2-2\widehat{x}(\pi)+\widehat{x}(\pi)^2 =$$

$$= \int_0^\pi 2\dot{\widehat{x}}\dot{h}dt + \int_0^\pi \dot{h}^2 dt + 2\int_0^\pi \widehat{x}hdt + \int_0^\pi h^2 dt - 4\int_0^\pi h\sin t dt +$$

$$+4\widehat{x}(0)h(0) + 2h^2(0) + 2h(\pi) - 2\widehat{x}(\pi)h(\pi) - h^2(\pi) =$$

$$= 2\dot{\widehat{x}}h\Big|_0^\pi - 2\int_0^\pi \ddot{\widehat{x}}hdt + \int_0^\pi \dot{h}^2 dt + 2\int_0^\pi \widehat{x}hdt + \int_0^\pi h^2 dt -$$

$$-4\int_0^\pi h\sin t dt + 4\widehat{x}(0)h(0) + 2h^2(0) + 2h(\pi) - 2\widehat{x}(\pi)h(\pi) - h^2(\pi).$$

Учитывая, что

$$\dot{\widehat{x}} = e^t + \cos t,\ \ddot{\widehat{x}} = e^t - \sin t,$$

имеем

$$-2\int_0^\pi \ddot{\widehat{x}}hdt + 2\int_0^\pi \widehat{x}hdt - 4\int_0^\pi h\sin t dt = 0$$

и

$$2\dot{\widehat{x}}(\pi)h(\pi) - \dot{\widehat{x}}(0)h(0) = -4\widehat{x}(0)h(0) - 2h(\pi) + 2\widehat{x}(\pi)h(\pi).$$

Отметим, что

$$-\int_0^\pi 2h\dot{h}dt = -\int_0^\pi dh^2 = -h^2(\pi) + h^2(0).$$

Следовательно,

$$\mathcal{B}(\widehat{x}(t) + h(t)) - \mathcal{B}(\widehat{x}(t)) = \int_0^\pi (h - \dot{h})^2 dt + h^2(0) \geq 0$$

для любых допустимых функций $\widehat{x} + h \in C^1[0,\pi]$. Следовательно,

$$\widehat{x}(t) = e^t + \sin t$$

доставляет слабый абсолютный минимум в задаче.

Ответ: $\widehat{x}(t) = e^t + \sin t \in absmin.$

3. Изопериметрическая задача

Постановка задачи ***Изопериметрической задачей*** (ИЗ) называется следующая экстремальная задача:

$$J_0(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \mathrm{extr}, \tag{3.1}$$

при условиях

$$J_i(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))dt = \gamma_i,\ i = \overline{1, m}, \tag{3.2}$$

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \tag{3.3}$$

где $f_i = f_i(t, x(t), \dot{x}(t))$ — данные функции трех переменных, $i = \overline{0, m}$. Отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$, γ_i, $i = \overline{0, m}$ — заданные числа. Экстремум функционала (3.1) ищется среди непрерывно дифференцируемых функций $x \in C^1([t_0, t_1])$, удовлетворяющих ***изопериметрическим*** условиям (3.2) и ***условиям на концах*** (3.3). Такие функции называются ***допустимыми*** в ИЗ.

Определение. *Допустимая функция* $\widehat{x}$ *доставляет* ***слабый локальный минимум*** *в задаче* (3.1) – (3.3) ($\widehat{x} \in$ *wlocmin* (3.1)), *если существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$J_0(x(\cdot)) \geq J_0(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x, *для которой*

$$\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_1 < \delta.$$

Определение. *Допустимая функция* $\widehat{x}$ *доставляет* ***слабый абсолютный минимум*** *в задаче* (3.1) – (3.3) ($\widehat{x} \in$ *wabsmin* (3.1)), *если*

$$J_0(x(\cdot)) \geq J_0(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x.

Лагранжианом задачи называется функция

$$L = L(t) = L(t, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x}).$$

Скажем, что на $\widehat{x}$ выполнено ***условие Лежандра***, если

$$\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0,\ \forall t\ \in [t_0, t_1]$$

и ***усиленное условие Лежандра***, если

$$\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}} > 0,\ \forall\ t \in [t_0, t_1].$$

Уравнение

$$-\frac{d}{dt}\left(\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{L}_{\dot{x}x}(t)h(t)\right) + \widehat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{L}_{xx}(t)h(t) + \sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i = 0,$$

где $g_i(t) = -\frac{d}{dt}\widehat{f}_{i\dot{x}}(t) + \widehat{f}_{ix}(t)$ называют ***уравнением Якоби*** для исходной задачи (3.1) на экстремали $\widehat{x}$.

Пусть на экстремали $\widehat{x}$ выполнено усиленное условие Лежандра. Точка τ называется ***сопряженной с точкой*** t_0, если существует нетривиальное решение h решение неоднородного уравнения Якоби, для которого

$$\int\limits_{t_0}^{\tau} g_i(t)h(t)dt = 0, \quad i = 1, \ldots, m,\ h(t_0) = h(\tau) = 0.$$

Говорят, что на $\widehat{x}$ выполнено ***условие Якоби***, если в интервале (t_0, t_1) нет точек, сопряженных с t_0, и ***усиленное условие Якоби***, если в полуинтервале $(t_0, t_1]$ нет точек, сопряженных с t_0.

Дадим аналитическое средство нахождения сопряженных точек для случая, когда функции $g_i,\ i = 1, \ldots, m$, линейно независимы на отрезках $[\tau_0, \tau_1]$, $t_0 \leq \tau_0 < \tau_1 \leq t_1$. Пусть h_0 — решение однородного уравнения Якоби $(\mu_i = 0,\ i = 1, \ldots, m)$ с краевыми условиями

$$h_0(t_0) = 0, \dot{h}_0(t_0) = 1;$$

h_j — решение неоднородного уравнения Якоби $(\mu_j = 1, \mu_i = 0,\ i \neq j)$, и краевыми условиями

$$h_j(t_0) = 0, \dot{h}_j(t_0) = 0,\ j = 1, \ldots, m.$$

Точка τ является сопряженной тогда и только тогда, когда матрица

$$H(\tau) = \begin{pmatrix} h_0(\tau) & \dots & h_m(\tau) \\ \int\limits_{t_0}^{\tau} h_0 g_1 dt & \dots & \int\limits_{t_0}^{\tau} h_m g_1 dt \\ \dots & \dots & \dots \\ \int\limits_{t_0}^{\tau} h_0 g_m dt & \dots & \int\limits_{t_0}^{\tau} h_m g_m dt \end{pmatrix}$$

является вырожденной.

Если функции

$$g_i(t) = -\frac{d}{dt}\widehat{f}_{i\dot{x}}(t) + \widehat{f}_{ix}(t),\ i = \overline{1,m}$$

линейно независимы, то говорят, что выполнено условие ***регулярности***.

Необходимое условие экстремума первого порядка. Пусть функция $\widehat{x}$ доставляет локальный экстремум в задаче 3.1, функции f_i, f_{ix} и $f_{i\dot{x}}, i = \overline{0,m}$ — непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\widehat{x}\dot{\widehat{x}}} := \{(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}) | t \in [t_0, t_1]\}$. Тогда существует вектор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}, \lambda \neq 0$, такой, что лагранжиан задачи $\widehat{L}_{\dot{x}}$ непрерывно дифференцируемая функция и выполнено уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Алгоритм решения:

1. Выписать необходимое условие экстремума первого порядка — уравнение Эйлера
$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \tag{3.4}$$
для лагранжиана задачи
$$L = L(t) = L(t, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x}),$$
где $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m)$ — вектор множителей Лагранжа, $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i^2 \neq 0$.

   Найти решение $\widehat{x}(t)$ уравнения (3.4), удовлетворяющие условиям (3.2) и (3.3), т.е. допустимые экстремали в данной задаче. При этом необходимо рассмотреть случаи
$$\lambda_0 = 0 \text{ и } \lambda_0 \neq 0.$$

Во втором случае λ_0 выбирается произвольно.

2. Для каждой допустимой экстремали проверить необходимое и достаточное условие экстремума второго порядка.

   2.1 Проверить выполнение условия Лежандра:

      а) если условие Лежандра не выполнено, не выполнено необходимое условие слабого экстремума, т.е. $\widehat{x}$ не доставляет локального экстремума задачи;

      б) если выполнено усиленное условие Лежандра, то переходим к проверке условия Якоби.

   2.2 Проверка условия Якоби.

      а) Если при выполнение усиленного условия Лежандра условие Якоби не выполнено, то не выполняется необходимое условие экстремума, следовательно, $\widehat{x}$ — не доставляет локального экстремума.

      б) Если при выполнение усиленного условия Лежандра выполнено усиленное условие Якоби, то проверяем условие регулярности.

   2.3 Проверка условия регулярности.

      Если условие регулярности выполнено, то на $\widehat{x}$ выполнены достаточное условие слабого минимума.

3. Если проверка достаточных и необходимых условий второго порядка затруднена, то допустимую экстремаль можно исследовать на экстремум с помощью его определения.

4. Если в задаче (3.1) функционал J_0 квадратичен

$$J_0(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left(A_0\dot{x}^2 + B_0x^2\right) dt,$$

функционалы J_i линейны

$$J_i(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (a_i\dot{x} + b_i x) dt = \gamma_i,\ i = \overline{1,m},$$

причем функции $A_0, a_1, \ldots, a_m$ непрерывно дифференцируемы, функции $B_0, b_1, \ldots, b_m$ непрерывны и выполнено условие Лежандра и условие регулярности. Тогда, если не выполнено условие Якоби, то нижняя грань в задаче равна $-\infty$. Если выполнено усиленное условие Якоби, то допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет абсолютный минимум.

Пример.

Найти решение следующей экстремальной задачи

$$J_0(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2)dt \to \inf,$$

$$J_1(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 xe^{-t}dt = \frac{1-3e^{-2}}{4}, \tag{3.2$'$}$$

$$x(0) = 0, x(1) = \frac{1}{e}. \tag{3.3$'$}$$

Решение

1. Для лагранжиана задачи

$$L = \lambda_0(\dot{x}^2 + x^2) + \lambda_1 xe^{-t}$$

выпишем необходимое условие — уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Longleftrightarrow -2\lambda_0\ddot{x} + 2\lambda_0 x + \lambda_1 e^{-t} = 0. \tag{3.5}$$

Найдем решение дифференциального уравнение (3.5), удовлетворяющего условиям $(3.2'), (3.3')$.

Пусть $\lambda_0 = 0$. Тогда из (3.5) мы получим, что $\lambda_1 = 0$, т.е. все множители Лагранжа одновременно обращаются в ноль. Значит необходимое условие экстремума не выполнено.

Пусть $\lambda_0 = 1/2$. Имеем

$$\ddot{x} - x = \lambda_1 e^{-t}.$$

Общее решение этого уравнения

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - \frac{1}{2}\lambda_1 te^{-t}.$$

Константы C_1, C_2, λ_1 найдем из имеющих условий.

Получим, что имеется допустимая экстремаль

$$\widehat{x}(t) = te^{-t}.$$

2. Проверим необходимые и достаточные условия второго порядка.

   2.1 Проверим выполнение условия Лежандра

   $$L_{\dot{x}\dot{x}}(\widehat{x}) = 2 > 0.$$

   Выполнено усиленное условие Лежандра и значит, переходим к проверке условий Якоби.

   2.2 Уравнение Якоби

   $$-\frac{d}{dt}\left(\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{L}_{\dot{x}x}(t)h(t)\right) + \widehat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{L}_{xx}(t)h(t) + \sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i = 0,$$

   где $g_i(t) = -\frac{d}{dt}\widehat{f}_{i\dot{x}}(t) + \widehat{f}_{ix}(t)$ в нашем случае примет вид

   $$\ddot{h} + h + \mu_1 e^{-t} = 0.$$

   Найдем решение h_0 однородного уравнения Якоби

   $$\ddot{h} + h = 0$$

   с условиями $h_0(0) = 0, \dot{h}_0(0) = 1$. Имеем

   $$h_0 = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

   Найдем решение h_1 неоднородного уравнения Якоби

   $$\ddot{h} + h + e^{-t} = 0$$

   с условиями $h_1(0) = 0, \dot{h}_1(0) = 0$. Получим

   $$h_1(t) = \frac{1}{8}e^{t} - \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t}.$$

   Матрица H имеет вид

   $$H(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{\tau} - \frac{1}{2}e^{-\tau} & \frac{1}{8}e^{\tau} - \frac{1}{8}e^{-\tau} - \frac{1}{4}te^{-\tau} \\ \int\limits_0^{\tau}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right)dt & \int\limits_0^{\tau}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-2\tau} - \frac{1}{4}te^{-2\tau}\right)dt \end{pmatrix}.$$

Решения уравнения

$$\det H(\tau) = 0$$

будут сопряженными точками для $t_0 = 0$. Легко получить, что $\tau = 0$. Следовательно, точек сопряженных к 0 в полуинтервале $(0, 1]$ нет, а значит усиленное Якоби выполнено.

2.3 Очевидно, что условие регулярности выполнено, т.к. в нашем случае $m = 1$ и $g_1 = e^{-t}$.

Таким образом, $\widehat{x}(t) = te^{-t} \in wlocmin$

4. Поскольку функционал J_0 квадратичен, а J_1 — линеен, то $\widehat{x}(t)$ доставляет абсолютный минимум.

Ответ: $\widehat{x}(t) = te^{-t} \in absmin$.

4. Задача со старшими производными

Постановка задачи. ***Задачей со старшими производными*** (ЗССП) называется следующая экстремальная задача:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt \to \text{extr}, \tag{4.1}$$

$$x^{(k)}(t_j) = x_j^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad j = 0, 1. \tag{4.2}$$

где $f = f(t, x(t), \dot{x}(t))$ — данная функция $n+2$ переменных, называемая ***интегрантом***. Отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$. Экстремум функционала (4.1) ищется среди непрерывно дифференцируемых функций $x \in C^1([t_0, t_1])$, удовлетворяющих условиям (4.2) на концах отрезка $[t_0, t_1]$. Такие функции называют ***допустимыми***.

Введем норму в пространстве $C^n([t_0, t_1])$:

$$\|x\|_n = \|x\|_{C^n([t_0,t_1])} := \max\left\{\|x\|_C, \|\dot{x}\|_C, \ldots, \|x^{(n)}\|_C\right\},$$

Определение *Допустимая функция $\widehat{x}$ доставляет* ***слабый локальный минимум*** *в задаче* (4.1) – (4.2) ($\widehat{x} \in wlocmin$ (4.1)), *если существует $\delta > 0$ такое, что*

$$J(x(\cdot)) \geq J(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x, для которой

$$\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_n < \delta.$$

Определение. *Допустимая функция $\widehat{x}$ доставляет* ***слабый абсолютный минимум*** *в задаче* (4.1) – (4.2) ($\widehat{x} \in abscmin$ (4.1)), *если*

$$J(x(\cdot)) \geq J(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x.

Уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \widehat{f}_{x^{(k)}}(t) = 0$$

называют ***уравнением Эйлера-Пуассона***.

Необходимое условие экстремума. Пусть функция $\widehat{x}$ доставляет локальный экстремум в задаче (4.1), функции $f, f_x, f_{\dot{x}}, \ldots, f_{x^{(n)}}$ — непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\widehat{x}\dot{\widehat{x}}} := \{(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}, \ldots, \widehat{x}^{(n)}(t)) | t \in [t_0, t_1]\}$. Тогда $\widehat{f}_{x^k} \in C^k[t_0, t_1], k = \overline{1, n}$ и выполнено уравнение Эйлера-Пуассона.

Функции, являющиеся решениями уравнения Эйлера-Пуассона называются ***экстремалями***. Экстремали, удовлетворяющие краевым условиям (4.1), называются ***допустимыми экстремалями*** в ЗССП (4.1) – (4.2).

Скажем, что на $\widehat{x}$ выполнено ***условие Лежандра***, если

$$\widehat{f}_{x^{(n)}x^{(n)}} \geq 0,\ \forall t\ \in [t_0, t_1]$$

и ***усиленное условие Лежандра***, если

$$\widehat{f}_{x^{(n)}x^{(n)}} > 0,\ \forall\ t \in [t_0, t_1].$$

Уравнение Эйлера-Пуассона для функционала

$$K(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i,j=0}^{n} A_{ij} x^{(i)} x^{(j)} dt,\ A_{ij}(t) = \widehat{f}_{x^{(i)}x^{(j)}}(t)$$

называют ***уравнением Якоби*** для задачи (4.1) на экстремали $x(\cdot)$.

Для квадратичного функционала, имеющую "диагональную" форму

$$K(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{k=0}^{n} A_k (x^{(k)})^2 dt,$$

уравнение Якоби примет вид

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \left(A_k x^{(k)}\right) = 0.$$

Пусть на $\widehat{x}(\cdot)$ выполнено усиленное условие Лежандра. Точка τ называется ***сопряженной с точкой*** t_0, если существует нетривиальное решение h уравнения Якоби, для которого

$$h^{(i)}(t_0) = h^{(i)}(\tau) = 0,\ i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Говорят, что на $\widehat{x}(\cdot)$ выполнено ***условие Якоби***, если в интервале (t_0, t_1) нет точек, сопряженных с t_0, и ***усиленное условие Якоби***, если в полуинтервале $(t_0, t_1]$ нет точек, сопряженных с t_0.

Уравнение Якоби — это линейное уравнение $2n$-го порядка, которое (из-за усиленного условия Лежандра) можно разрешить относительно старшее производной. Пусть $h_1(\cdot), \dots, h_n(\cdot)$ — решение уравнения Якоби, для которых $H(t_0) = \mathbf{O}$, а $H^{(n)}(t_0)$ — невырожденная матрица, где

$$H(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) & \dots & h_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_1^{(n-1)}(t) & \dots & h_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

$$H^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} h_1^{(n)}(t) & \dots & h_n^{(n)}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_1^{(2n-1)}(t) & \dots & h_n^{(2n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Точка τ является сопряженной к t_0 тогда и только тогда, когда матрица $H(\tau)$ является вырожденной.

Алгоритм решения:

1. Записать необходимое условие экстремума первого порядка — уравнение Эйлера-Пуассона:

   $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k f_{x^{(k)}} = 0.$$

   Найти допустимые экстремали, т.е. решения уравнения Эйлера-Пуассона, удовлетворяющие краевым условиям на концах.

2. Проверить на допустимых экстремалях необходимые и достаточные условия высших порядков.

   а) Проверить выполнение условия Лежандра.

   Если не выполнено условия Лежандра, то не выполнено необходимое условие экстремума, т.е. найденная допустимая экстремаль не доставляет экстремума.

   Если выполнено усиленное условие Лежандра, то перейти к проверке условия Якоби.

б) Проверка условия Якоби.

Если не выполнено условия Якоби, то не выполнено необходимое условие экстремума, т.е. найденная допустимая экстремаль не доставляет экстремума.

Если выполнено усиленное условие Якоби и при этом интегрант f квазирегулярен, то найденная допустимая экстремаль доставляет сильный минимум в задаче (4.1)–(4.2).

Если не выполнено условия Якоби и функционал (4.1) имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=0}^{n} A_k (x^{(k)})^2 dt,$$

то нижняя грань равна $-\infty$.

Если выполнено условия Якоби и функционал (4.1) имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=0}^{n} A_k (x^{(k)})^2 dt,$$

то допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет абсолютный минимум.

3. Если проверка необходимых и достаточных условий 2-го порядка затруднена, то можно провести исследование при помощи определения экстремума.

Примеры.

Решить следующую экстремальную задачу

$$J(x(\cdot)) = \int_{0}^{T_0} \left(\ddot{x}^2 - \dot{x}^2\right) dt \to \min,$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = x(T_0) = \dot{x}(T_0) = 0.$$

Решение

1. Запишем необходимое условие — уравнение Эйлера-Пуассона:

$$\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{x} + \ddot{x} = 0.$$

2. Общее решение уравнение Эйлера-Пуассона:

$$x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3 t + C_4.$$

Среди допустимых экстремалей всегда имеется допустимая экстремаль $\widehat{x} = 0$.

3. Проверяем достаточное условие:

   а) Усиленное условие Лежандра выполнено:

   $$\widehat{f}_{\ddot{x}\ddot{x}} = 2 > 0, \ \forall t \in [0, T_0].$$

   б) Проверим выполнимость условия Якоби. Уравнение Якоби имеет вид

   $$h^{(4)} + h^{(2)} = 0.$$

   Положим, что

   $$h_1(t) = 1 - \cos t, h_2 = \sin t - t,$$

   $$H(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ \dot{h}_1(t) & \dot{h}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \cos t & \sin t - t \\ \sin t & \cos t - 1 \end{pmatrix}.$$

   Тогда $H(0) = 0$,

   $$\det \ddot{H}(0) = \det \begin{pmatrix} \ddot{h}_1(0) & \ddot{h}_2(0) \\ \dddot{h}_1(0) & \dddot{h}_2(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

   Найдем сопряженные точки, решая уравнение $\det H(\tau) = 0$. Имеем

   $$2(\cos \tau - 1) + \tau \sin \tau = 0 \iff \sin \frac{\tau}{2} = 0, \frac{\tau}{2} = \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}.$$

   Ближайшая к нулю точка: $\tau = 2\pi$.

Ответ: Если $T_0 < 2\pi$, то $\widehat{x}(t) = 0$ — единственная допустимая экстремаль, доставляющая абсолютный минимум, $J_{\min} = J(0) = 0$. Если $T_0 > 2\pi$, точная нижняя грань функционала равна $-\infty$. Можно показать, что при $T_0 = 2\pi$ допустимые экстремали имеют вид $\widehat{x}(t) = C(1 - \cos t)$ и все они доставляют абсолютный минимум.

5. Задача с подвижными концами

Постановка задачи. ***Задачей с подвижными концами*** называется следующая экстремальная задача:

$$J(\xi) = J(x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to extr \tag{5.1}$$

$$\psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, \ i = \overline{1, m}, \tag{5.2}$$

где $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$, $\triangle$ — заданный отрезок, $t_0, t_1 \in \triangle, t_0 < t_1$.

Элемент $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$ называется ***допустимым***, если $x \in C^1(\triangle)$, $t_0, t_1 \in \triangle, t_0 < t_1$, и выполняется условие (5.2) на концах.

Определение. *Допустимый элемент $\widehat{\xi} = (\widehat{x}(\cdot), \widehat{t_0}, \widehat{t_1})$ доставляет **слабый локальный минимум**, если существует $\delta > 0$ такой, что для любого допустимого элемента $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$, для которого*

$$\|x - \widehat{x}\|_1 < \delta, \ |t_0 - \widehat{t_0}| < \delta, \ |t_1 - \widehat{t_1}| < \delta$$

выполняется

$$J(\xi) \geq J(\widehat{\xi}).$$

Необходимое условие экстремума. Пусть $\widehat{\xi} = (\widehat{x}(\cdot), \widehat{t_0}, \widehat{t_1})$ доставляет локальный экстремум в задаче (5.1) – (5.2), функции f_i, f_x и $f_{\dot{x}}$ — непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\widehat{x}\dot{\widehat{x}}} := \{(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}) | t \in \triangle\}$, функции ψ_i — непрерывно дифференцируемы в окрестности $\left(\widehat{t_0}, \widehat{x}(\widehat{t_0}), \widehat{t_1}, \widehat{x}(\widehat{t_1})\right), i = \overline{0, m}$. Тогда существует ненулевой вектор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}, \lambda \neq 0$, такой, что для лагранжиана задачи выполняется условие гладкости $\widehat{L}_{\dot{x}}$ такой, что для ***функции Лагранжа***

$$\mathcal{L} = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t)dt + l(t).$$

где $L = L(t) = L(t, \lambda) = \lambda_0 f(t, x, \dot{x})$ — ***интегрант задачи***, $l = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$ — ***терминант* задачи**, выполнены условия:

а) условие стационарности по x — уравнение Эйлера для интегранта L

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}_i}(t) + \widehat{L}_{x_i}(t) = 0, \ \forall t \in \triangle;$$

б) условия трансверсальности для l

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \widehat{l}_{x(t_0)},$$

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\widehat{l}_{x(t_1)};$$

в) условие стационарности по подвижным концам

$$\widehat{\mathcal{L}}_{t_0} = \widehat{\mathcal{L}}_{t_0}(\widehat{t_0}) = 0 \Leftrightarrow -\lambda_0 \widehat{f}(\widehat{t_0}) + \widehat{l}_{t_0} + \widehat{l}_{x(t_0)}\dot{x}(\widehat{t_0}) = 0,$$

$$\widehat{\mathcal{L}}_{t_1} = \widehat{\mathcal{L}}_{t_1}(t_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 \widehat{f}(\widehat{t_1}) + \widehat{l}_{t_1} + \widehat{l}_{x(t_1)}\dot{x}(\widehat{t_1}) = 0.$$

Отметим, что это условие выписывается только для подвижных концов отрезка интегрирования.

Алгоритм решения:

Выписать: интегрант задачи

$$L = L(t) = L(t, \lambda) = \lambda_0 f(t, x, \dot{x}),$$

терминант задачи

$$l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} L(t)dt + l(t).$$

1. Записать необходимые условия экстремума:

   Найти допустимые экстремали. Рассмотреть два случая $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$ (за λ_0 можем брать любую константу, при исследовании задачи на минимум берем $\lambda_0 > 0$). И учитывать, что множители Лагранжа одновременно не могут обращаться в ноль.

2. Показать, используя определение, что найденные в пункте 1 допустимые экстремали доставляют экстремум или нет.

Пример.

Найти решение следующей экстремальной задачи

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_0^T \dot{x}^2 - x + 1dt \to extr,$$

$$x(0) = 0.$$

Решение

Имеем: интегрант задачи $L(t) = \lambda_0(\dot{x}^2 - x + 1)$, терминант задачи $l(t) = \lambda_1 x(0)$, функция Лагранжа $\mathcal{L} = \int\limits_0^1 \lambda_0(\dot{x}^2 - x + 1)dt + \lambda_1 x(0)$.

1. Запишем необходимые условия:

   а) уравнение Эйлера для лагранжиана

   $$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Longleftrightarrow -2\lambda_0\ddot{x} - \lambda_0 = 0;$$

   б) трансверсальности по x для терминанта

   $$L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)} \Longleftrightarrow 2\lambda_0\dot{x}(0) = \lambda_1,$$

   $$L_{\dot{x}}(T) = -l_{x(T)} \Longleftrightarrow 2\lambda_0\dot{x}(T) = 0;$$

   в) условие стационарности по подвижному концу T

   $$\mathcal{L}_T(T) = 0 \Longleftrightarrow 2\lambda_0(\dot{x}^2(T) - x(T) + 1) = 0.$$

   Если $\lambda_0 = 0$, то из б) следует, что $\lambda_1 = 0$ — все множители Лагранжа равны нулю. Значит в этом случае решения нет. Положим $\lambda_0 = 1$. Тогда условия а)-в) записываются следующим образом

   $$-2\ddot{x} - 1 = 0,\ \dot{x}(T) = 0, x(T) = 1.$$

   Общее решение уравнение Эйлера

   $$x = -\frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2.$$

Поскольку $x(0)=0$, то $C_2=0$. Неизвестные C_1, T находим из условий трансверсальности
$$\begin{cases} -\frac{T}{2}+C_1=0, \\ -\frac{T^2}{4}+C_1T=1. \end{cases}$$

2. Отсюда $C_1=1$, $T=2$. Таким образом, в задаче имеется единственный допустимый экстремальный элемент $\widehat{\xi}=(\widehat{x}(\cdot),\widehat{T})=(-\frac{t^2}{4}+t,2)$.

3. Возьмем элемент $\widehat{\xi}=(-\frac{t^2}{4}+t,T)$. Тогда
$$J(\xi)=\int\limits_0^T\left(\left(-\frac{t}{2}+1\right)^2-\left(-\frac{t^2}{4}+t\right)+1\right)dt=\int\limits_0^T\left(\frac{t}{2}-1\right)^2dt,$$
$$J(\widehat{\xi})=\int\limits_0^2\left(\frac{t}{2}-1\right)^2dt.$$
Очевидно, что $J(\xi)>J(\widehat{\xi})$ при $T>\widehat{T}$ и $J(\widehat{\xi})<J(\xi)$ при $T<\widehat{T}$, поскольку под знаком интеграла стоит неотрицательная величина. Это означает, что в любой окрестности $\widehat{\xi}$ существует другой допустимый элемент, на котором значение функционала J как больше, так и меньше значения функционала J в точке $\widehat{\xi}$, т.е. $\widehat{\xi}$ не доставляет локального экстремума.

6. Задача Лагранжа

Постановка задачи. Пусть n — фиксированное натуральное число, k, $m \geq \; 0$ — целые, причем $k \leq n$, f_i, $i = \overline{0,m}$, ψ_i, $i = \overline{0,m}$, φ_i, $i = \overline{0,k}$ — известные функции своих аргументов, $\triangle$ — заданный отрезок числовой прямой,

$$t_0, t_1 \in \triangle^{\circ}, t_0 < t_1, x(\cdot) \equiv (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)) \in C^1_n(\triangle),$$

$$\xi = (x(\cdot), t_0, t_1), ||\xi|| = \max\{||x||_1, |t_0|, |t_1|\}.$$

Зададим функционалы

$$\mathfrak{B}_i(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),\ i = \overline{0,m}.$$

Задачей Лагранжа в Понтрягинской форме называется следующая экстремальная задача:

$$\mathfrak{B}_0(\xi) \to \inf \tag{6.1}$$

$$\mathfrak{B}_i(\xi) \leq 0, i = \overline{1,m'}, \tag{6.2}$$

$$\mathfrak{B}_i(\xi) = 0,\ i = \overline{m'+1,m}, \tag{6.3}$$

$$\dot{x}_j(t) = \varphi_j(t, x(t)),\ j = \overline{1,k}, \tag{6.4}$$

(6.4) — называется дифференциальной связью.

Определение. *Допустимая точка* $\widehat{\xi} = (\widehat{x}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)$ *в задаче* (6.1) – (6.4) *доставляет* ***слабый локальный минимум (максимум)****, если существует* $\delta > 0$*, что для любой допустимой функции* $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$ *для которой*

$$\|\xi - \widehat{\xi}\| < \delta$$

выполняется

$$\mathfrak{B}_0(\xi) \geq \mathfrak{B}_0(\widehat{\xi}) \quad \left(\mathfrak{B}_0(\xi) \leq \mathfrak{B}_0(\widehat{\xi})\right).$$

Необходимое условие экстремума. Пусть $\widehat{\xi} = (\widehat{x}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)$ доставляет локальный экстремум в задаче (6.1) – (6.4), функции f_i, f_{ix} и $f_{i\dot{x}}$ — непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\widehat{x}\hat{\dot{x}}} := \{(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}})|t \in \triangle\}$, $i = \overline{0,m}$, функции $\varphi_i, \varphi_{jx}, j = \overline{1,k}$ — непрерывно дифференцируемы в окрестности графика $\Gamma_{\widehat{x}} = \{t, \widehat{x}(t)|t \in \triangle\}$, функции

$\psi_i, i=\overline{0,m}$ — непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(\widehat{t}_0, \widehat{x}(\widehat{t}_0), \widehat{t}_1, \widehat{x}(\widehat{t}_1))$.

Тогда существует множители Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}, p \in C(\triangle, \mathbb{R}^k)$, такие, что для ***функции Лагранжа***

$$\mathcal{L} = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t)dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)).$$

где ***лагранжиан задачи***

$$L = L(t) = L(t,\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x}_\beta) + \sum_{j=1}^{k} p_j(t)(\dot{x}_j - \varphi_j(t,x))$$

***терминант* задачи**

$$l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

выполнены условия:

а) условие стационарности для лагранжиана задачи по x

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}_i}(t) + \widehat{L}_{x_i}(t) = 0, i = \overline{1,m}; \tag{6.5}$$

б) условия трансверсальности

$$\widehat{L}_{\dot{x}_i}(t_0) = \widehat{l}_{x_i(t_0)}, i = \overline{1,m},$$

$$\widehat{L}_{\dot{x}_i}(t_1) = -\widehat{l}_{x_i(t_1)}, i = \overline{1,m};$$

в) условие стационарности по подвижным концам

$$\widehat{\mathcal{L}}_{t_0} = \mathcal{L}_{t_0}(\widehat{\xi}) = 0 \Longleftrightarrow -f(t_0) + l_{t_0} + l_{x(t_0)}\dot{x}(t_0) = 0,$$

$$\widehat{\mathcal{L}}_{t_1} = \mathcal{L}_{t_1}(\widehat{\xi}) = 0 \Longleftrightarrow f(t_1) + l_{t_1} + l_{x(t_1)}\dot{x}(t_1) = 0;$$

Отметим, что условия выписывается только для подвижных концов.

г) условие дополняющей нежесткости

$$\lambda_i \mathfrak{B}_i(\widehat{\xi}) = 0, i = \overline{1,m'};$$

д) условие неотрицательности

$$\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m'}, \ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^2 \neq 0.$$

Условия а)-д) дают множество допустимых экстремалей задачи (6.1) – (6.4) в слабой постановке.

Алгоритм решения:

Записать лагранжиан задачи:

$$L = L(t) = L(t, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x}) + \sum_{j=0}^{k} p_j(\cdot)(x_j - \varphi),$$

где $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \neq 0$ — вектор множителей; терминант задачи

$$l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t, x, \dot{x});$$

функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} L(t)dt + l(t).$$

1. Выписать необходимые условия и найти допустимые экстремали.
2. Показать, используя определение, что допустимые экстремали доставляют экстремум функционалу $\mathfrak{B}_0$ или решений нет.

Примеры.

6.1 Найти решение следующей экстремальной задачи

$$\mathfrak{B}_0(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr,$$

$$\mathfrak{B}_1(x(\cdot)) = \int_0^1 x dt = 0, \ x(1) = 1.$$

Решение

Записываем лагранжиан задачи

$$L(t) = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x;$$

терминант задачи

$$l(t) = \lambda_2 (x(1) - 1);$$

функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^1 \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x dt + \lambda_2 (x(1) - 1).$$

1. Выпишем необходимые условия:

   а) для лагранжиана уравнение Эйлера

   $$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Longleftrightarrow -2\lambda_0 \ddot{x} + \lambda_1 = 0; \tag{6.6}$$

   б) трансверсальности для терминанта

   $$L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)} \Longleftrightarrow 2\lambda_0 \dot{x}(0) = 0$$

   $$L_{\dot{x}}(1) = -l_{x(1)} \Longleftrightarrow 2\lambda_0 \dot{x}(1) = -\lambda_2.$$

   Так как концы фиксированы и нет ограничений типа неравенств, то отсутствуют условия в), г) и д).

2. Если $\lambda_0 = 0$, то из а) $\lambda_1 = 0$, а из б) $\lambda_2 = 0$ — все множители Лагранжа равны нулю. Следовательно, решения нет. Положим $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Тогда

   $$\ddot{x} = \lambda_1.$$

   Общее решение: $x = C_1 t^2 + C_2 + C_3$. Неизвестные константы C_1, C_2, C_3 находим из условия трансверсальности и условий, входящих в постановку задачи. Имеем

   $$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 + C_3 = 1, \\ \frac{C_1}{3} + C_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = \frac{3}{2}, C_2 = 0,\ C_3 = -1/2$. Таким образом, в задаче имеется единственная допустимая экстремаль

$$\widehat{x} = \frac{3t^2 - 1}{2}.$$

3. Покажем с помощью непосредственной проверки, что функция $\widehat{x}$ доставляет абсолютный минимум в задаче. Возьмем функцию $h \in C^1([0,1])$ такую, чтобы $\widehat{x} + h$ была допустимой функцией. Для этого надо взять функцию h, для которой $h(1) = 0$ и $\int\limits_0^1 h dt = 0$. Тогда

$$\mathfrak{B}_0(\widehat{x} + h) - \mathfrak{B}_0(\widehat{x}) = \int\limits_0^1 (\dot{\widehat{x}} + \dot{h})^2 dt - \int\limits_0^1 \dot{\widehat{x}}^2 dt = 2\int\limits_0^1 \dot{\widehat{x}}\dot{h} dt + \int\limits_0^1 \dot{\widehat{h}}^2 dt.$$

Интегрируя первый интеграл по частям с учетом условия на h и условия трансверсальности $\dot{\widehat{x}}(0) = 0$, получим

$$2\int\limits_0^1 \dot{\widehat{x}}\dot{h} dt = 2\dot{\widehat{x}}h\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \ddot{\widehat{x}} h dt = -6\int\limits_0^1 h dt = 0.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{B}_0(\widehat{x} + h) - \mathfrak{B}_0(\widehat{x}) = \int\limits_0^1 \dot{\widehat{h}}^2 dt \geq 0$$

или

$$\mathfrak{B}_0(\widehat{x} + h) \geq \mathfrak{B}_0(\widehat{x})$$

для любой допустимой точки $\widehat{x}+h$, т.е. $\widehat{x} = \frac{3t^2-1}{2}$ доставляет абсолютный минимум в данной задаче.

Ответ: $\widehat{x}(t) = \frac{3t^2-1}{2} \in absmin.$

6.2 Решить следующую экстремальную задачу

$$\int\limits_0^1 \ddot{x}^2 dt \to extr; \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0, x(1) = 1.$$

Решение

Эту задачу можно свести к задаче Лагранжа, вводя вместо функции x вектор -функцию (x_1, x_2), и обозначения: $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$. Тогда исходная задача сведется к задаче Лагранжа:

$$\int\limits_0^1 \dot{x}_2^2 dt \to extr; \qquad \dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = 1.$$

функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^1 \big(\lambda_0 \dot{x}_2^2 + p(t)(\dot{x}_1 - x_2)\big)\, dt + \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3(x_1(1) - 1).$$

Необходимые условия:

а) система уравнений Эйлера для Лагранжиана $L = \lambda_0 \dot{x}_2^2 + p(\dot{x}_1 - x_2)$

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_1} + L_{\dot{x}_1} = 0 \\ -\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_2} + L_{\dot{x}_2} = 0 \end{cases}$$

примет вид

$$\begin{cases} -\dot{p} = 0 \\ -2\lambda_0 \ddot{x}_2 - p = 0. \end{cases}$$

б) трансверсальность для терминанта $l = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_1(x_1(1) - 1$

$$L_{\dot{x}_1}(0) = l_{x_1(0)}, L_{\dot{x}_1}(1) = -l_{x_1(1)} \Leftrightarrow p(0) = \lambda_1, p(1) = -\lambda_3$$

$$L_{\dot{x}_2}(0) = l_{x_2(0)}, L_{\dot{x}_2}(1) = -l_{x_2(1)} \Leftrightarrow 2\lambda_0 \dot{x}_2(0) = \lambda_2, 2\lambda_0 \dot{x}_2(1) = 0$$

с) неотрицательность

$$\lambda_0 \geq 0$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из а) следует, что $p = 0$, а из б) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ — все множители Лагранжа — нули. Этого не может быть. Положим $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Тогда из а) $x_2^{(3)} = 0 \Leftrightarrow x^{(4)} = 0$. Общее решение: $x = C_1 t^3 + C_2 t + C_3 t + C_4$. Неизвестные константы C_1, C_2, C_3 и C_4 находим из условия трансверсальности $\dot{x}_2(1) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}(1) = 0$ и из условий на концах

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0, \dot{x}(0) = 0 \to C_3 = 0,$$

$$\begin{cases} x(1) = 1, \\ \ddot{x}(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 6C_1 + 2C_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} C_1 = -1/2, \\ C_2 = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, в задаче имеется единственная допустимая экстремаль $\widehat{x} = -\frac{t^3}{2} + \frac{3}{2}t^2$.

Покажем с помощью непосредственной проверки, что функция $\widehat{x}$ доставляет абсолютный минимум в задаче. Возьмем функцию $h \in C^2[0,1]$ такую, чтобы $\widehat{x} + h$ была допустимой функцией. Для этого надо взять функцию h, для которой $h(0) = h(1) = h(0) = 0$. Тогда для функционала

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 \ddot{x}^2 dt$$

имеем

$$J(\widehat{x} + h) - J(\widehat{x}) = \int_0^1 (\ddot{\widehat{x}}^2 + \ddot{h})dt - \int_0^1 \ddot{\widehat{x}}^2 dt = 2\int_0^1 \ddot{\widehat{x}}\ddot{h}dt + \int_0^1 \ddot{h}^2 dt \geq 2\int_0^1 \ddot{\widehat{x}}\ddot{h}dt.$$

Интегрируя дважды по частям с учетом условий на функцию h условия трансверсальности $\ddot{x}(1) = 0$, получим

$$J(\widehat{x} + h) - J(\widehat{x}) = 2\int_0^1 \ddot{\widehat{x}}d\dot{h} = 2\ddot{\widehat{x}}\dot{h}\Big|_0^1 - \int_0^1 \widehat{x}^{(3)}\dot{h}dt = 2\widehat{h}^{(3)}h + 2\int_0^1 \widehat{x}^{(4)}hdt = 0.$$

Таким образом разность всегда неотрицательна, то есть имеем абсолютный минимум.

$$S_{\min} = \int_0^1 \ddot{\widehat{x}}^2 dt = \int_0^1 (-3t+3)^2 dt = 9\int_0^1 (t^2 - 2t + 1)dt = 3t^3 - 9t^2 + 9t\Big|_0^1 = 3.$$

Найдем абсолютный минимум в задаче. Возьмем последовательность допустимых функций $x_n(t) = \widehat{x}(t) + nt^2(t-1)$; тогда

$$J(x_n(\cdot)) = \int_0^1 (\ddot{\widehat{x}} + n(6t-2))^2 dt \to +\infty \text{ при } n \to +\infty.$$

7. Задания для самостоятельной работы

Решить следующие простейшие задачи вариационного исчисления.

1. $$\int\limits_0^{T_0} \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0) = 0, x\left(T_0\right) = \xi.$$

2. $$\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x) dt \to extr; \quad x(0) = 0, x\left(T_0\right) = \xi.$$

3. $$\int\limits_0^{1} (t^2 x - \dot{x}^2) dt \to extr; \quad x(0) = x\left(1\right) = 0.$$

4. $$\int\limits_0^{T_0} \dot{x}^3 dt \to extr; \quad x(0) = 0, x\left(T_0\right) = \xi.$$

5. $$\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^3 - \dot{x}^2) dt \to extr; \quad x(0) = 0, x\left(T_0\right) = \xi.$$

6. $$\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^3 + \dot{x}^2) dt \to extr; \quad x(0) = 0, x\left(T_0\right) = \xi.$$

7. $$\int\limits_1^{e} (t\dot{x}^2 + 2x) dt \to extr; \quad x(1) = 1, x(e) = 0.$$

8. $$\int\limits_1^{e} (x - t\dot{x}^2) dt \to extr; \quad x(1) = 1, x(e) = 2.$$

9.
$$\int_1^2 t^2\dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(1)=3, x(2)=1.$$

10.
$$\int_2^3 (t^2-1)\dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(2)=0, x(3)=1.$$

11.
$$\int_1^e (2x-t^2\dot{x}^2) dt \to extr; \quad x(1)=e, x(e)=0.$$

12.
$$\int_0^1 x^2\dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0)=1, x(1)=\sqrt{2}.$$

13.
$$\int_0^1 e^x\dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0)=1, x(1)=\ln 4.$$

14.
$$\int_1^e (t\dot{x}^2+x\dot{x}) dt \to extr; \quad x(1)=0, x(e)=1.$$

15.
$$\int_{-1}^1 (\dot{x}^2+4x^2) dt \to extr; \quad x(-1)=-1, x(1)=1.$$

16.
$$\int_0^1 (\dot{x}^2+x^2+2x) dt \to extr; \quad x(0)=x(1)=0.$$

17.
$$\int_0^1 (4x\sin t-x^2-\dot{x}^2) dt \to extr; \quad x(0)=x(1)=0.$$

18.

$$\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 4x \sinh t)dt \to extr; \quad x(0) = -1, x(1) = 0.$$

19.

$$\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 4x \cosh t)dt \to extr; \quad x(0) = x(1) = 0.$$

20.

$$\int_0^{\pi/4} (4x^2 - \dot{x}^2)dt \to extr; \quad x(0) = 1, x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

21.

$$\int_0^{\pi/4} (\dot{x}^2 - 4x^2)dt \to extr; \quad x(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

22.

$$\int_0^{3\pi/4} (\dot{x}^2 - 4x^2)dt \to extr; \quad x(0) = 0, x\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1.$$

23.

$$\int_0^{\pi/2} (2x + x^2 - \dot{x}^2)dt \to extr; \quad x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

24.

$$\int_0^{3\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 - 2x)dt \to extr; \quad x(0) = x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

25.

$$\int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 - tx)dt \to extr; \quad x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

26.

$$\int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 + 4x \sinh t)dt \to extr; \quad x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

27.
$$\int_0^{\pi/2}(6x\sin 2t + x^2 - \dot{x}^2)dt \to extr; \quad x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

28.
$$\int_0^{\pi/2}(4x\sin t + x^2 - \dot{x}^2)dt \to extr; \quad x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

29.
$$\int_0^{3\pi/2}(\dot{x}^2 - x^2 - 4x\sin t)dt \to extr; \quad x(0) = x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

30.
$$\int_0^{\pi/2}(\dot{x}^2 - x^2 + 4x\cos t)dt \to extr; \quad x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

31.
$$\int_0^{\pi/2}(\dot{x}^2 - x^2 + 4x\cos t)dt \to extr; \quad x(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

32.
$$\int_0^{3\pi/2}(x^2 - 4x\cos t - \dot{x}^2)dt \to extr; \quad x(0) = 0, x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2}.$$

33.
$$\int_0^{1}(\dot{x}^2 + 3x^2)e^{2t}dt \to extr; \quad x(0) = 1, x\,(1) = e.$$

34.
$$\int_0^{1}(x^2 - \dot{x}^2)e^{2t}dt \to extr; \quad x(0) = 0, x\,(1) = e.$$

35.
$$\int_0^{1}\sin\dot{x}dt \to extr; \quad x(0) = 0, x\,(1) = \frac{\pi}{2}.$$

36.

$$\int\limits_0^1 \cos \dot{x} dt \to extr; \quad x(0) = 0, x\,(1) = \pi.$$

37.

$$\int\limits_0^{T_0} \dot{x} e^{\dot{x}} dt \to extr; \quad x(0) = 0, x\,(T_0) = \xi.$$

38.

$$\int\limits_0^1 (\dot{x}_1 \dot{x}_2 + x_1 x_2) dt \to extr;$$

$$x_1(0) = x_2\,(0) = 1, x_1(1) = e, x_2(1) = \frac{1}{e}.$$

39.

$$\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}_1 \dot{x}_2 - x_1 x_2) dt \to extr;$$

$$x_1(0) = x_2\,(0) = 0, x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

40.

$$\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1 x_2) dt \to extr;$$

$$x_1(0) = x_2\,(0) = 0, x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

41.

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{x} dt \to extr; \quad x(0) = 1, x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

42.

$$\int\limits_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{x} dt \to extr; \quad x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, x\,(1) = 1.$$

Ответы

1. $\dfrac{\xi t}{T_0} \in \text{absmin}, S_{\max} = \infty.$

2. $-\dfrac{t^2}{4} + \left(\dfrac{\xi}{T_0} + \dfrac{T_0}{4}\right) t \in \text{absmin},$
$S_{\min} = -\infty.$

3. $\dfrac{t - t^4}{24} \in \text{absmax}, S_{\min} = -\infty.$

4. $\dfrac{\xi t}{T_0} \in \begin{cases} \text{locmin}, \text{ при } \xi > 0, \\ \text{locmax}, \text{ при } \xi < 0; \end{cases}$
$\dfrac{\xi t}{T_0} \notin \text{locextr при } \xi = 0,$
$S_{\min} = -\infty, S_{\max} = \infty.$

5. $\dfrac{\xi t}{T_0} \in \begin{cases} \text{locmin}, \text{ при } \xi > T_0/3, \\ \text{locmax}, \text{ при } \xi < T_0/3; \end{cases}$
$\dfrac{\xi t}{T_0} \notin \text{locextr при } \xi = T_0/3,$
$S_{\min} = -\infty, S_{\max} = \infty.$

6. $\dfrac{\xi t}{T_0} \in \begin{cases} \text{locmin}, \text{ при } \xi > -T_0/3, \\ \text{locmax}, \text{ при } \xi < -T_0/3; \end{cases}$
$\dfrac{\xi t}{T_0} \notin \text{locextr при } \xi = -T_0/3,$
$S_{\min} = -\infty, S_{\max} = \infty.$

7. $t - e \ln t \in \text{absmin}, S_{\max} = \infty.$

8. $\dfrac{1+e}{2} \ln t + \dfrac{3-t}{2} \in \text{absmax},$
$S_{\min} = -\infty.$

9. $\dfrac{4}{t} - 1 \in \text{absmin}, S_{\max} = \infty.$

10. $\ln\left(\dfrac{3(t-1)}{t+1}\right) \Big/ \ln\dfrac{3}{2} \in \text{absmin},$
$S_{\max} = +\infty.$

11. $\dfrac{e}{t} - \ln t \in \text{absmax}, S_{\min} = -\infty.$

12. $\sqrt{1+t} \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty.$

13. $2\ln(t+1) \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty.$

14. $\ln t \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty.$

15. $\dfrac{\sinh 2t}{\sinh 2} \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty.$

16. $\dfrac{e^t + e^{1-t}}{1+e} - 1 \in \text{absmin},$
$S_{max} = \infty.$

17. $\sin t - \dfrac{\sin 1 \sinh t}{\sinh 1} \in \text{absmax},$
$S_{\min} = -\infty.$

18. $(t-1)\cosh t \in \text{absmax}, S_{\max} = +\infty.$

19. $(t-1)\sinh t \in \text{absmax}, S_{\max} = +\infty.$

20. $\cos 2t \in \text{absmax}, S_{\min} = -\infty.$

21. $\sin 2t \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty.$

22. $\sin 2t \notin \text{locextr},$
$S_{\min} = -\infty, S_{\max} = +\infty.$

23. $\cos t + \sin t - 1 \in \text{absmax},$
$S_{\min} = -\infty.$

24. $\cos t - \sin t - 1 \notin \text{locextr},$
$S_{\min} = -\infty, S_{\max} = +\infty.$

25. $\dfrac{\pi \sin t - 2t}{4} \in \text{absmin},$
$S_{\max} = +\infty.$

26. $\sinh t - \sinh\dfrac{\pi}{2} \sin t \in \text{absmin},$
$S_{\max} = +\infty.$

27. $\sin 2t \in \text{absmax}, S_{\min} = -\infty.$

28. $t\cos t \in \text{absmax}, S_{\min} = -\infty.$

29. $t\cos t \notin \text{locextr},$
$S_{\min} = -\infty, S_{\max} = +\infty.$

30. $t\sin t - \dfrac{\pi}{2}\sin t \in \text{absmin},$
$S_{\max} = +\infty.$

31. $t\sin t \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty.$

32. $t\sin t \notin \text{locextr},$
$S_{\min} = -\infty, S_{\max} = +\infty.$

33. $e^t \in \text{absmax}.$

34. $te^{-2t} \in \text{absmax}, S_{\min} = -\infty.$

35. $\dfrac{\pi t}{2} \in \text{absmax},$
$S_{\min} = -1, S_{\max} = 1.$

36. $\pi t \in \text{absmin},$
$S_{\min} = -1, S_{\max} = 1.$

37. Если $T_0 > -\frac{\xi}{2}$, то $\dfrac{\xi t}{T_0} \in \text{locmin}.$
Если $T_0 < -\frac{\xi}{2}$, то $\dfrac{\xi t}{T_0} \in \text{locmax}.$
Если $T_0 = -\frac{\xi}{2}$, то необходимо дополнительное исследование.

38. (e^t, e^{-t}) – допустимая экстремаль,
$S_{\min} = -\infty, S_{\max} = +\infty.$

39. $(\sin t, -\sin t)$ – допустимая экстремаль,
$S_{\min} = -\infty, S_{\max} = +\infty.$

40. $(\sin t, -\sin t) \in \text{absmin}.$

41. $\sqrt{1-t^2} \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty.$

42. $\sqrt{2t-t^2} \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty.$

Решить следующие задачи вариационного исчисления.

1.
$$\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad \int\limits_0^1 x e^t dt = 1, x(0) = 0;$$

2.
$$\int\limits_1^2 t^2 \dot{x}^2 dt - 2x(1) + x^2(2) \to \text{extr}.$$

3.
$$\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad \int\limits_0^1 x dt = \int\limits_0^1 t x dt = 0, x(1) = 1.$$

4.
$$\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 - 2x) dt - 2x^2(0) - x^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \text{extr}.$$

5.
$$\int\limits_1^e 2\dot{x}(t\dot{x} + x) dt + 3x^2(1) - x^2(e) - 4x(e) \to \text{extr}.$$

6.
$$\int\limits_0^\pi \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad \int\limits_0^\pi x \cos t dt = \frac{\pi}{2}, x(0) = 1, x(\pi) = -1.$$

7.
$$\int\limits_0^\pi x \sin t dt \to \text{extr}; \qquad \int\limits_0^\pi \dot{x}^2 dt = \frac{3\pi}{2}, x(0) = 0, x(\pi) = \pi.$$

8.
$$\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad \int\limits_0^1 x e^{-t} dt = e, x(1) = 2, x(0) = 2e + 1.$$

9.
$$\int\limits_0^\pi \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad \int\limits_0^\pi x \sin t dt = 0, x(0) = 0, x(\pi) = 1.$$

10.
$$\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x)dt \to \text{extr}; \qquad x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = 0.$$

11.
$$\int\limits_0^\pi \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad \int\limits_0^\pi x \cos dt = \frac{\pi}{2},$$
$$\int\limits_0^\pi x \sin t dt = \pi + 2, x(0) = 2, x(\pi) = 0.$$

12.
$$\int\limits_1^2 t^3 \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad \int\limits_1^2 x dt = 2, x(1) = 4, x(2) = 1.$$

13.
$$\int\limits_0^1 \dot{x}_1 \dot{x}_2 dt \to \text{extr}; \qquad \int\limits_0^1 x_1 dt = 1,$$
$$\int\limits_0^1 x_2 dt = 0, x_1(0) = x_1(1) = x_2(0) = 0, x_2(1) = 1.$$

14.
$$\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad \int\limits_0^1 t x dt = 0, x(0) = -4, x(1) = 4.$$

15.
$$\int\limits_0^e t \ddot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad x(1) = 0, \dot{x}(1) = 1, x(e) = e, \dot{x}(e) = 2.$$

16.
$$\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \int\limits_0^1 x \; dt = -\frac{3}{2},$$
$$\int\limits_0^1 t x dt = -2, x(0) = 2, x(1) = -14.$$

17.

$$\int_0^T \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad x(0) = 0, (T-1)x^2(T) + 2 = 0.$$

18.

$$\int_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - \dot{x}^2) dt \to \text{extr}; \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 1, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

19.

$$\int_0^1 e^{-t}\ddot{x}^2 dt \to \text{extr}; x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1, x(1) = e, \dot{x}(1) = 2e.$$

20.

$$\int_0^{\pi} \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad \int_0^{\pi} x \sin t dt = 1, x(0) = 0.$$

21.

$$\int_0^1 (t+1)\ddot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0, x(1) = 1, \dot{x}(1) = 2.$$

22.

$$\int_0^{e-1} (t+1)\dot{x}^2 dt + 2x(0)\left(x(e-1)+1\right) \to \text{extr};$$

23.

$$\int_0^1 (t+1)^2\ddot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad x(0) = 0, x(1) = \ln 2, \dot{x}(0) = 1, \dot{x}(1) = \frac{1}{2}.$$

24.

$$\int_1^e t(t+1)\ddot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad x(1) = 0, \dot{x}(1) = 1, x(e) = e, \dot{x}(e) = 2.$$

25.

$$\int_0^1 (t+1)^3\ddot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad x(0) = 1, x(1) = \frac{1}{2}, \dot{x}(0) = -1, \dot{x}(1) = -\frac{1}{4}.$$

26.

$$\int\limits_0^1 \dot{x}_1\dot{x}_2 dt \to \text{extr}; \qquad \int\limits_0^1 x_1 dt = \int\limits_0^1 x_2 dt = 0,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1(1) = 1, x_2(1) = 2.$$

27.

$$\int\limits_0^1 \dddot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0,$$

$$x(1) = 1, \dot{x}(1) = 3, \ddot{x}(1) = 6.$$

28.

$$\int\limits_0^1 \dddot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0,$$

$$x(1) = 1, \dot{x}(1) = 4, \ddot{x}(1) = 12.$$

29.

$$\int\limits_0^{T_0} \dot{x} e^{\dot{x}} dt \to \text{extr}; \qquad x(0) = 0, x(T_0) = \xi.$$

30.

$$\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt \to \text{extr}; \qquad \int_0^1 x e^{-t} dt = \frac{1 - 3e^{-2}}{4},$$

$$x(0) = 0, x(1) = \frac{1}{e}.$$

31.

$$\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad \int\limits_0^1 x dt = \int\limits_0^1 t x dt = 0, x(1) = 1.$$

32.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\dot{x}^2 - x^2 + 4x\cos t) dt \to \text{extr}; \qquad x(0) = 0.$$

33.

$$\int\limits_0^\pi (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)dt \to \text{extr}; \qquad \int\limits_0^\pi x_1 \cos t dt = \int\limits_0^\pi x_2 dt = 1;$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1(\pi) = x_2(\pi) = 0.$$

34.

$$\int\limits_0^\pi (\dot{x}_1\dot{x}_2 + t(x_1 + x_2))dt \to \text{extr}; \qquad \int\limits_0^\pi x_1 dt = \int\limits_0^\pi x_2 dt = \pi;$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1(\pi) = x_2(\pi) = 1.$$

35.

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} (x^2 - \dot{x}^2 + 4x \sin t)dt \to \text{extr}; \qquad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

36. (*)

$$\int\limits_0^T \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x} dt \to \text{extr}; \qquad x(0) = 1, 2T + x(T) = 2 \ (x > 0).$$

37. (*)

$$\int\limits_0^\pi \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \qquad \int\limits_0^\pi x \cos t dt = \frac{\pi}{2}, \int\limits_0^\pi x \sin t dt = -2, x(0) = 0.$$

38. (*)

$$\int\limits_0^1 x dt \to \text{extr}; \qquad \int\limits_0^1 \sqrt{1+\dot{x}^2} dt = \frac{\pi}{2}, x(1) = 0.$$

39. (*)

$$\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x)dt \to \text{extr}; \qquad x(0) = 0, x(T) = T.$$

Ответы

1. $\dfrac{2(e^t - et - 1)}{(e^2 - 4e - 1)} \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

2. $\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{2} \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty$.

3. $\dfrac{20t^3}{3} - 6t^2 + \dfrac{1}{3} \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 8, S_{\max} = +\infty$.

4. $\cos t - 1 \notin \text{locextr}, S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty (x_n(t) = n)$.

5. $\ln t + 1 \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty$.

6. $\cos t \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty$.

7. $t + \sin t \in \text{absmax}$, $t - \sin t \in$ absmin.

8. $2e^{1-t} - t + 1 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

9. $\dfrac{t - 2\sin t}{\pi} \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

10. $t^4 - 5t^3/2 + 3t^2/2 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -\dfrac{9}{5}, S_{\max} = +\infty$.

11. $2\sin t + \cos t + 1 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

12. $\dfrac{4}{t^2} \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty$.

13. $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = (-6t^2 + 6t, 3t^2 - 2t)$ — допустимые экстремали, $S_{\max} = +\infty, S_{\min} = -\infty$.

14. $5t^3 + 3t - 4 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

15. $t \ln t \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty$.

16. $-10t^3 - 12t^2 + 6t + 2 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

17. $\hat{T} = \dfrac{1}{2}, \hat{x} = \pm 4t \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

18. $t + \cos t \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty$.

19. $\hat{x} = te^t \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty$.

20. $\dfrac{2(t + \sin t)}{3\pi} \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

21. $t^2 \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty$.

22. $\ln(t + 1) - 1 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

23. $\ln t + 1 \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty$.

24. $t \ln t \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty$.

25. $\dfrac{1}{1 + t} \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty$.

26. $\hat{x} = (3t^2 - 2t, 6t^2 - 4t)$, $S_{\max} = \infty, S_{\min} = -\infty$.

27. $t^3 \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty$.

28. $\hat{x} = t^4 \in \text{absmin}$.

29. $T_0 > \xi/2 \Rightarrow \hat{x} = \xi t/T_0 \in \text{locmin}$, $T_0 < \xi/2 \Rightarrow \hat{x} = \xi t/T_0 \in \text{locmax}$.

В обоих случаях не выполнено необходимое условие Вейерштрасса $\Rightarrow \hat{x}$ – не сильный экстремум. Если $T_0 = -\xi/2$ – требуются дополнительные исследования. $S_{\min} = -\infty, S_{\max} = \infty$.

30. $te^{-t} \in \text{absmin}, S_{\max} = +\infty$.

31. $20t^3/3 - 6t^2 + 1/3 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty, S_{\min} = 8$.

32. $(t - \pi/4 - 1)\sin t \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

33. допустимая экстремаль: $\left(\dfrac{2(\pi\cos t + 2t - \pi)}{\pi^2 - 8}, \dfrac{6(\pi - t)t}{\pi^3}\right)$.

34. допустимая экстремаль вектор с 1-ой координатой: $\dfrac{t\left(\pi\left(48 + \pi(2-2t)(\pi - t)\right) - 36t\right)}{12\pi^2}$, со второй — $\dfrac{t\left(\pi\left(48 + \pi(2-2t)(\pi - t)\right) - 36t\right)}{12\pi^2}$.

35. $\left(t - \dfrac{\pi}{4} + 1\right)\cos t \in \text{absmin}$, $S_{\min} = \infty$.

36. (*) $\sqrt{2 - (t-1)^2} \in \text{absmin}$, $(\hat{T} = \sqrt{2/5}), S_{\max} = +\infty$.

37. (*)$\cos t - 1 \in$ absmin, $S_{\max} = +\infty$.

38. (*)$\sqrt{1 - t^2} \in \text{absmax}$, $-\sqrt{1-t^2} \in \text{absmin}$.

39. (*) Допустимая экстремаль: $\widehat{x} = t^2/4 - (1 + \sqrt{5})t$ $(\widehat{T} = 8 + 4\sqrt{5}) \notin \text{locextr}$. $S_{\min} = -\infty, S_{\max} = +\infty$ $\left(x_n(t) = \dfrac{t^2 - nt}{4} + t, T_n = n\right)$.

Литература

[1] Галеев Э. М., Тихомиров В.М. **Оптимизация: теория, примеры, задачи.** – М.: Элиториал УРСС, 2000. – 320 с.

[2] Алексеев В.М., Галеев Э.М. Тихомиров В.М. **Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи:** Учеб. пособие – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 256 с. ISBN 5-9221-0590-6.

[3] Алексеев В.М., Галеев Э.М. Тихомиров В.М. **Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи:** Учеб. пособие – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 256 с.