ГЛАВА 15. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§1. Приведение к простейшему виду уравнения кривой второго порядка

Как мы знаем, уравнение

$$ax_1 + bx_2 + c = 0$$

описывает прямую на плоскости. Это *уравнение первого порядка* или *линейное уравнение* (оно содержит неизвестные в первой степени).

Уравнение второго порядка имеет вид

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_0 = 0.$$

Здесь a_{ij}, $i, j = 1, 2$, a_i, $i = 0, 1, 2$ — вещественные числа, называемые ***коэффициентами уравнения***.

.

Множество всех точек $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющих уравнению

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_0 = 0,$$

называют ***кривой второго порядка***.

.

Будем исследовать уравнение кривой второго порядка

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_0 = 0.$$

Для сокращения записей введем в рассмотрение симметричную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

и вектор

$$a = (a_1, a_2).$$

.

Тогда уравнение

$$\underline{\underline{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2}} + \underline{2a_1x_1 + 2a_2x_2} + a_0 = 0$$

запишется в виде

$$\underline{\underline{(Ax, x)}} + \underline{2(a, x)} + a_0 = 0.$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix},$$

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{12}x_1 + a_{22}x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2}}.$$

Упрощение уравнения

$$(Ax, x) + 2(a, x) + a_0 = 0$$

мы будем выполнять при помощи замены переменных

$$x = Ty,$$

где

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

.

Геометрически замена переменных

$$x = Ty,$$

где

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

может быть интерпретирована как поворот координатных осей против часовой стрелки на угол φ.

.

Выполним замену переменных

$$x = Ty$$

в

$$(Ax, x) + 2(a, x) + a_0 = 0.$$

.

Для $x = Ty$ **имеем**

$$(Ax, x) + 2(a, x) + a_0 =$$

$$= (ATy, Ty) + 2(a, Ty) + a_0 = (T^T ATy, y) + 2(T^T a, y) + a_0,$$

следовательно,

$$(T^T ATy, y) + 2(\widehat{a}, y) + a_0 = 0, \quad \widehat{a} = T^T a.$$

Построим теперь ортогональное преобразование T так, чтобы привести матрицу $T^T AT$ к диагональному виду. С этой целью решим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda I| = 0.$$

Корни его легко выписываются в явном виде.

Имеем

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}^2 =$$

$$= \lambda^2 - \lambda\underline{(a_{11}+a_{22})} + \underline{\underline{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}} = 0.$$

Тогда

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11}+a_{22} \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}.$$

Действительно,

$$D^2 = (a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = a_{11}^2 + \underline{2a_{11}a_{22}} + a_{22}^2 - \underline{4a_{11}a_{22}} + 4a_{12}^2 =$$

$$= (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2.$$

Если $\underline{a_{12} = 0}$, то из

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}$$

получаем

$$\lambda_1 = a_{11}, \quad \lambda_2 = a_{22}.$$

Положим в этом случае

$$T = I.$$

Уравнение

$$(T^T A T y, y) + 2(\widehat{a}, y) + a_0 = 0, \quad \widehat{a} = T^T a,$$

принимает вид

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2\widehat{a}_1 y_1 + 2\widehat{a}_2 y_2 + a_0 = 0, \quad \widehat{a}_1 = a_1, \quad \widehat{a}_2 = a_2.$$

Если $\underline{a_{12} \neq 0}$, то из

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2} \quad \text{получаем} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Найдя λ_1, λ_2, определим соответствующие им единичные собственные векторы e^1, e^2:

$$e^k = (\cos\varphi_k, \sin\varphi_k), \quad k = 1, 2,$$

как решения уравнений

$$Ae^k = \lambda_k e^k, \quad k = 1, 2,$$

или, более подробно,

$$(a_{11} - \lambda_k)\cos\varphi_k + a_{12}\sin\varphi_k = 0,$$

$$a_{12}\cos\varphi_k + (a_{22} - \lambda_k)\sin\varphi_k = 0.$$

.

Из

$$(a_{11} - \lambda_k)\cos\varphi_k + a_{12}\sin\varphi_k = 0, \qquad k = 1, 2,$$

получаем уравнения для определения углов φ_1, φ_2**:**

$$\operatorname{tg}\varphi_k = -\frac{a_{11} - \lambda_k}{a_{12}}, \qquad k = 1, 2.$$

.

Будем считать, что в

$$\operatorname{tg}\varphi_k = -\frac{a_{11} - \lambda_k}{a_{12}}, \qquad k = 1, 2,$$

углы

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Причем, поскольку собственные векторы

$$(\cos\varphi_1,\ \sin\varphi_1), \qquad (\cos\varphi_2,\ \sin\varphi_2)$$

симметричной матрицы, отвечающие различным собственным числам ортогональны, то обязательно

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi/2.$$

.

Имеем

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{a_{11}-\lambda_1}{a_{12}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{a_{11}-\lambda_2}{a_{12}},$$

тогда

$$\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{a_{11}-\lambda_1}{a_{12}} + \frac{a_{11}-\lambda_2}{a_{12}} = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{a_{12}},$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11}+a_{22} \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}}{2}.$$

Значит,

$$\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}}{a_{12}}.$$

.

В соответствии со знаком a_{12} в

$$\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}}{a_{12}}$$

занумеруем собственные числа (и соответствующие им углы) так, чтобы

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \leqslant \operatorname{tg}\varphi_2,$$

т. е.

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2.$$

Матрицу T составим из собственных векторов e^1 и e^2. Учитывая

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$$

имеем

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$T^T A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

и уравнение

$$(T^T A T y, y) + 2(\widehat{a}, y) + a_0 = 0, \quad \widehat{a} = T^T a.$$

вновь принимает вид

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2\widehat{a}_1 y_1 + 2\widehat{a}_2 y_2 + a_0 = 0.$$

.

Далее будем различать два случая:

$$\det(A) \neq 0 \quad \textbf{и} \quad \det(A) = 0.$$

.

Предположим сначала, что

$$\det(A) \neq 0.$$

В силу

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$$

это условие эквивалентно

$$\lambda_1,\ \lambda_2 \neq 0.$$

При

.

$$\lambda_1,\ \lambda_2 \neq 0$$

уравнение

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2\widehat{a}_1 y_1 + 2\widehat{a}_2 y_2 + a_0 = 0$$

можно записать в виде

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \widehat{a}_0 = 0,$$

где

$$z_1 = y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1}, \quad z_2 = y_2 + \frac{\widehat{a}_2}{\lambda_2}, \quad \widehat{a}_0 = a_0 - \frac{\widehat{a}_1^2}{\lambda_1} - \frac{\widehat{a}_2^2}{\lambda_2}.$$

Действительно,

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \widehat{a}_0 = \lambda_1 \left(y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y_2 + \frac{\widehat{a}_2}{\lambda_2}\right)^2 - \frac{\widehat{a}_1^2}{\lambda_1} - \frac{\widehat{a}_2^2}{\lambda_2} + a_0 =$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2\widehat{a}_1 y_1 + 2\widehat{a}_2 y_2 + a_0.$$

Геометрически замена переменных

$$z_1 = y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1}, \quad z_2 = y_2 + \frac{\widehat{a}_2}{\lambda_2}$$

означает перенос начала координат в точку с координатами

$$b_1 = -\frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1}, \quad b_2 = -\frac{\widehat{a}_2}{\lambda_2}.$$

Тогда

$$z = y - b,$$

т. е.

$$y = z + b.$$

Предположим теперь, что

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 = 0.$$

Естественно считать, что

$$A \neq 0,$$

иначе уравнение

$$(Ax, x) + 2(a, x) + a_0 = 0$$

есть уравнение прямой:

$$2(a, x) + a_0 = 0.$$

.

В случае

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 = 0,$$

заключаем, что либо

$$\lambda_1 = 0, \quad \textbf{либо} \quad \lambda_2 = 0.$$

Одновременно λ_1, λ_2 **не могут равняться нулю, т. к.**

$$T^T A T = \Lambda, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad A \neq 0.$$

Предположим для определенности, что

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 0.$$

Тогда уравнение

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2\widehat{a}_1 y_1 + 2\widehat{a}_2 y_2 + a_0 = 0$$

можно представить в виде

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1} \right)^2 + 2\widehat{a}_2 y_2 + \widehat{a}_0 = 0.$$

где

$$\widehat{a}_0 = a_0 - \frac{\widehat{a}_1^2}{\lambda_1}.$$

Действительно,

$$\underline{\lambda_1 y_1^2 + 2\widehat{a}_1 y_1} + 2\widehat{a}_2 y_2 + a_0 = \underline{\lambda_1 \left(y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1} \right)^2 - \frac{\widehat{a}_1^2}{\lambda_1}} + 2\widehat{a}_2 y_2 + a_0.$$

Преобразуя уравнение

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1} \right)^2 + 2\widehat{a}_2 y_2 + \widehat{a}_0 = 0,$$

опять надо различать два случая:

$$\widehat{a}_2 = 0 \quad \text{и} \quad \widehat{a}_2 \neq 0.$$

.

Если

$$\widehat{a}_2 = 0,$$

положим

$$z_1 = y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1}, \qquad z_2 = y_2.$$

Такая замена переменных приведет уравнение

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1} \right)^2 + 2\widehat{a}_2 y_2 + \widehat{a}_0 = 0$$

к виду

$$\lambda_1 z_1^2 + \widehat{a}_0 = 0.$$

.

Если

$$\widehat{a}_2 \neq 0,$$

представим уравнение

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1} \right)^2 + 2\widehat{a}_2 y_2 + \widehat{a}_0 = 0$$

в форме

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1} \right)^2 + 2\widehat{a}_2 \left(y_2 + \frac{\widehat{a}_0}{2\widehat{a}_2} \right) = 0.$$

.

В уравнении

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1} \right)^2 + 2\widehat{a}_2 \left(y_2 + \frac{\widehat{a}_0}{2\widehat{a}_2} \right) = 0$$

положим

$$z_1 = y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1}, \quad z_2 = y_2 + \frac{\widehat{a}_0}{2\widehat{a}_2}.$$

Тогда оно примет вид

$$\lambda_1 z_1^2 + 2\widehat{a}_2 z_2 = 0.$$

Предполагая, что

$$\lambda_1 = 0, \quad \textbf{а} \quad \lambda_2 \neq 0,$$

можно точно так же преобразовать уравнение

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2\widehat{a}_1 y_1 + 2\widehat{a}_2 y_2 + a_0 = 0$$

либо к уравнению

$$\lambda_2 z_2^2 + \widehat{a}_0 = 0,$$

либо к уравнению

$$\lambda_2 z_2^2 + 2\widehat{a}_1 z_1 = 0.$$

Итак, мы последовательно заменяли переменные:

$$x = Ty,$$

$$y = z + b,$$

т. е.

$$x = T(z + b) = Tb + Tz = x^0 + Tz,$$

где

$$x^0 = Tb.$$

При помощи такой замены переменных каждое уравнение

$$(Ax, x) + 2(a, x) + a_0 = 0$$

можно преобразовать к одной из следующих форм:

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \widehat{a}_0 = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$$

$$\lambda_2 z_2^2 + 2\widehat{a}_1 z_1 = 0, \qquad \lambda_2 \neq 0,$$

$$\lambda_2 z_2^2 + \widehat{a}_{01} = 0, \qquad \lambda_2 \neq 0,$$

$$\lambda_1 z_1^2 + 2\widehat{a}_2 z_2 = 0, \qquad \lambda_1 \neq 0,$$

$$\lambda_1 z_1^2 + \widehat{a}_{01} = 0, \qquad \lambda_1 \neq 0.$$

Это следует также из общей теории квадратичных функций.

.

Наряду с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

введем в рассмотрение матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix},$$

соответствующую квадратичной функции, определяемой левой частью уравнения

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_0 = 0.$$

.

Тогда в уравнении

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \widehat{a}_0 = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$$

коэффициент $\widehat{a}_0$ **определяется по формуле**

$$\widehat{a}_0 = \frac{\mathcal{I}_3(B)}{\mathcal{I}_2(A)},$$

где

$$\mathcal{I}_3(B) = \det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}, \qquad \mathcal{I}_2(A) = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

В уравнениях

$$\lambda_2 z_2^2 + \widehat{a}_{01} = 0, \qquad \lambda_2 \neq 0,$$

$$\lambda_1 z_1^2 + \widehat{a}_{01} = 0, \qquad \lambda_1 \neq 0,$$

коэффициент $\widehat{a}_{01}$ вычисляется по формуле

$$\widehat{a}_{01} = \frac{\mathcal{I}_2(B)}{\mathcal{I}_1(A)}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{I}_1(A) = \operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22},$$

$$\mathcal{I}_2(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix},$$

т. к. либо $\lambda_1 = 0$, либо $\lambda_2 = 0$, и

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 = 0.$$

.

В уравнениях

$$\lambda_2 z_2^2 + 2\widehat{a}_1 z_1 = 0, \qquad \lambda_2 \neq 0,$$

$$\lambda_1 z_1^2 + 2\widehat{a}_2 z_2 = 0, \qquad \lambda_1 \neq 0,$$

имеем

$$\widehat{a}_1 = \widehat{a}_2 = \sqrt{-\mathcal{I}_3(B)/\mathcal{I}_1(A)},$$

$$\mathcal{I}_3(B) = \det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}, \qquad \mathcal{I}_1(A) = \mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}.$$

§2. Исследование геометрических свойств кривых второго порядка.

Опираясь на уравнения

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$$

$$y^2 = 2px,$$

$$y^2 + d = 0,$$

исследуем геометрические свойства кривых второго порядка.

Начнем с уравнения

$$y^2 + d = 0.$$

Возможны три случая:

1) $\underline{d = 0}$, кривая совпадает с осью x;

2) $\underline{\ d < 0}$, кривая распадается на две параллельные прямые $y = \sqrt{-d}$, **и** $y = -\sqrt{-d}$;

3) $\underline{d > 0}$, множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению, пусто: кривая распадается на две ***мнимые параллельные прямые***.

Исследуем уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$$

возникшее при упрощении уравнения центральных кривых. Здесь нужно различать такие случаи:

1) знаки собственных чисел λ_1, λ_2 матрицы A совпадают, при этом, не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda_1, \lambda_2 > 0$;

2) знаки собственных чисел λ_1, λ_2 различны.

Кривые, соответствующие первому случаю,

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0, \qquad \lambda_1,\ \lambda_2 > 0,$$

называют ***эллипсами***. Здесь опять нужно различать три случая:

1) $\underline{d = 0}$, кривая вырождается в точку ноль;

2) $\underline{d > 0}$, уравнение определят так называемый ***мнимый эллипс***;

3) $\underline{d < 0}$, в этом случае уравнение запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где

$$a = \sqrt{\frac{-d}{\lambda_1}}, \qquad b = \sqrt{\frac{-d}{\lambda_2}}.$$

Кривую, описываемую этим уравнением, называют ***эллипсом***.

Кривые, соответствующие случаю, когда λ_1, λ_2 имеют различные знаки, называют ***гиперболами.*** Будем для определенности считать, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ и рассмотрим три случая: $d = 0$, в этом случае, очевидно, уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0$$

можно записать в виде

$$\sqrt{\lambda_1} x = \pm\sqrt{-\lambda_2} y,$$

т. е. в данном случае кривая распадается на две прямые, пересекающиеся в начале координат; случаи $d < 0$, $d > 0$ фактически можно не различать, так как они сводятся один к другому за счет переименования осей координат.

Будем для определенности считать, что $d < 0$. Тогда уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0, \quad \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0,$$

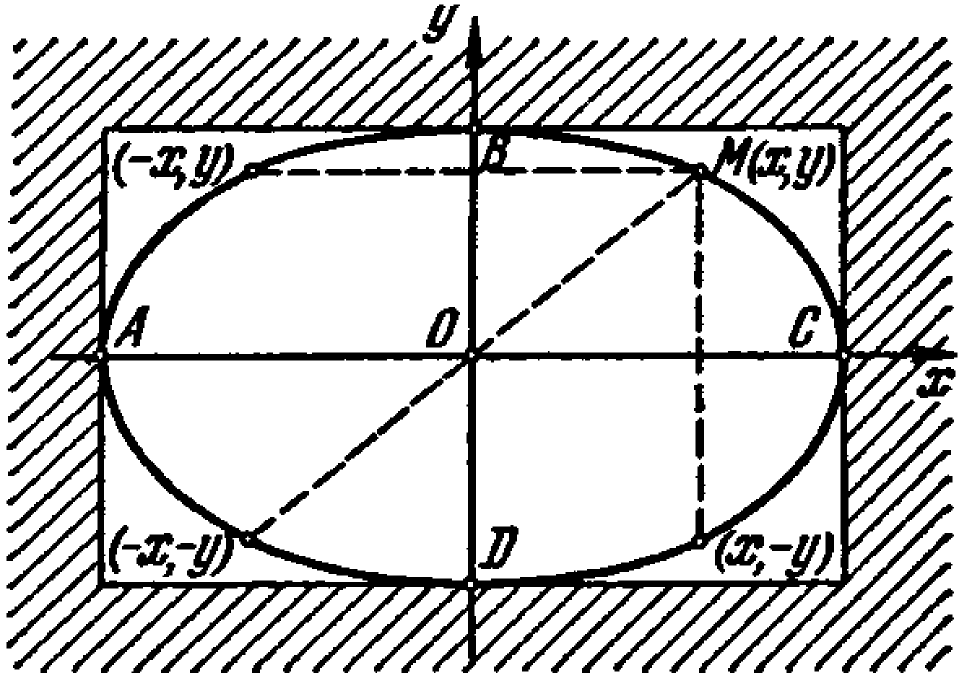
можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где

$$a = \sqrt{\frac{-d}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{-d}{-\lambda_2}}.$$

Кривую, описываемую этим уравнением, называют ***гиперболой***.



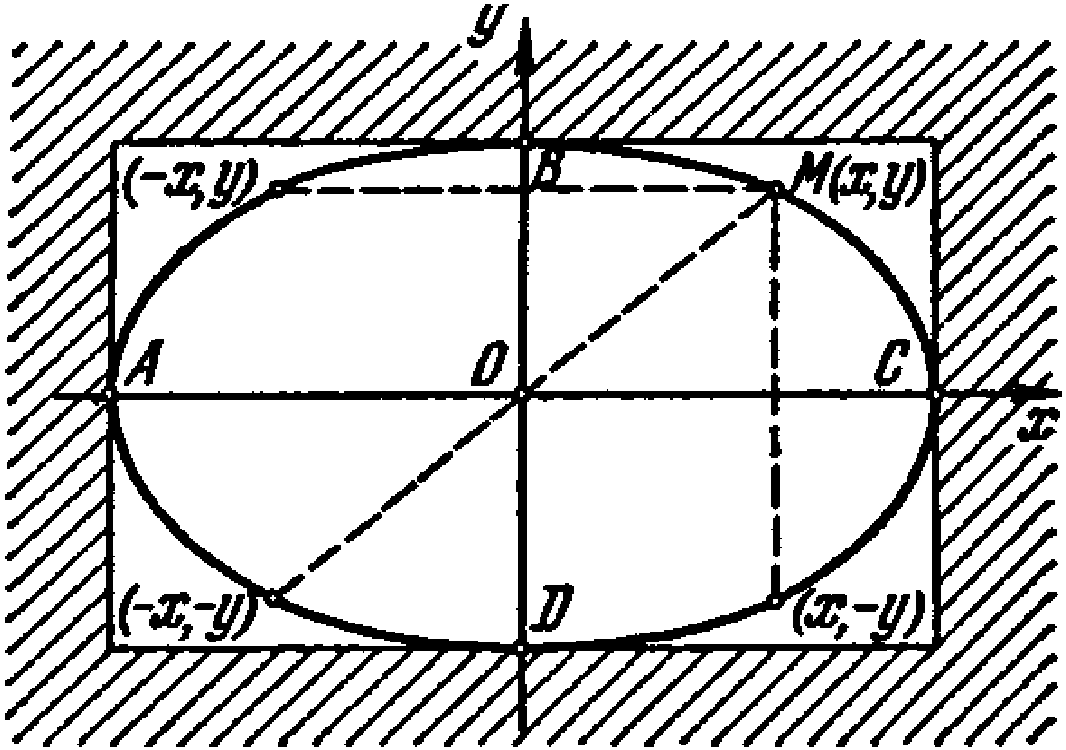
Опишем геометрические свойства эллипса. Из уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

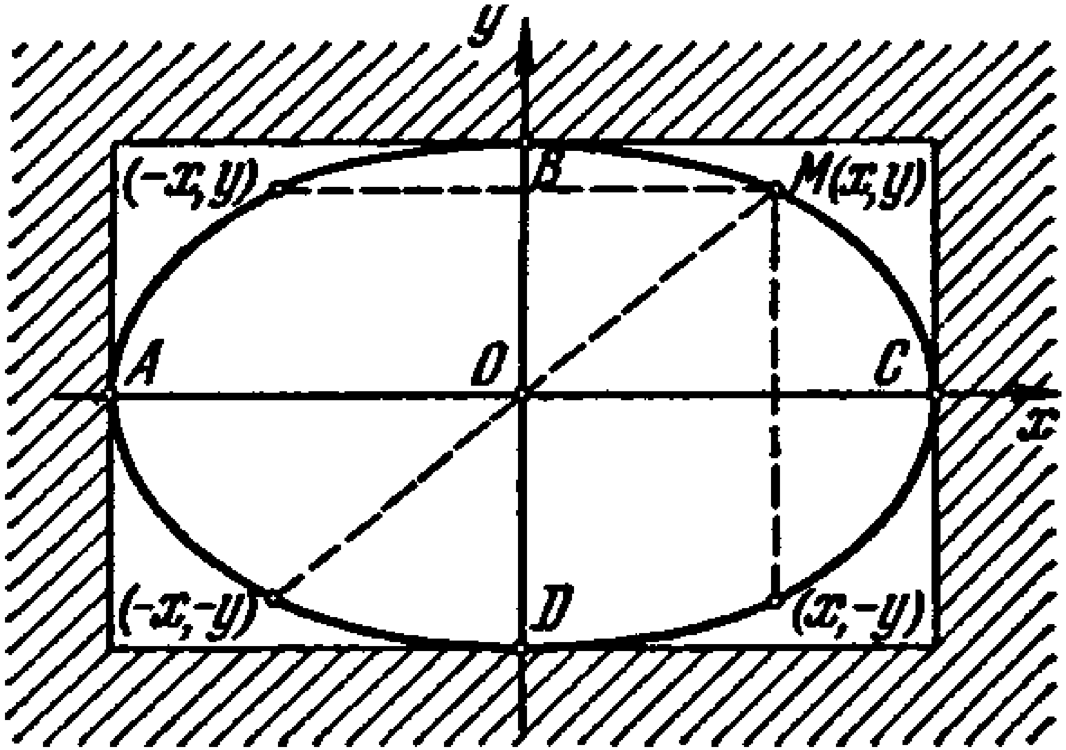
вытекает, что для всех точек эллипса справедливы неравенства:

$$|x|\leqslant a,\quad |y|\leqslant b,$$

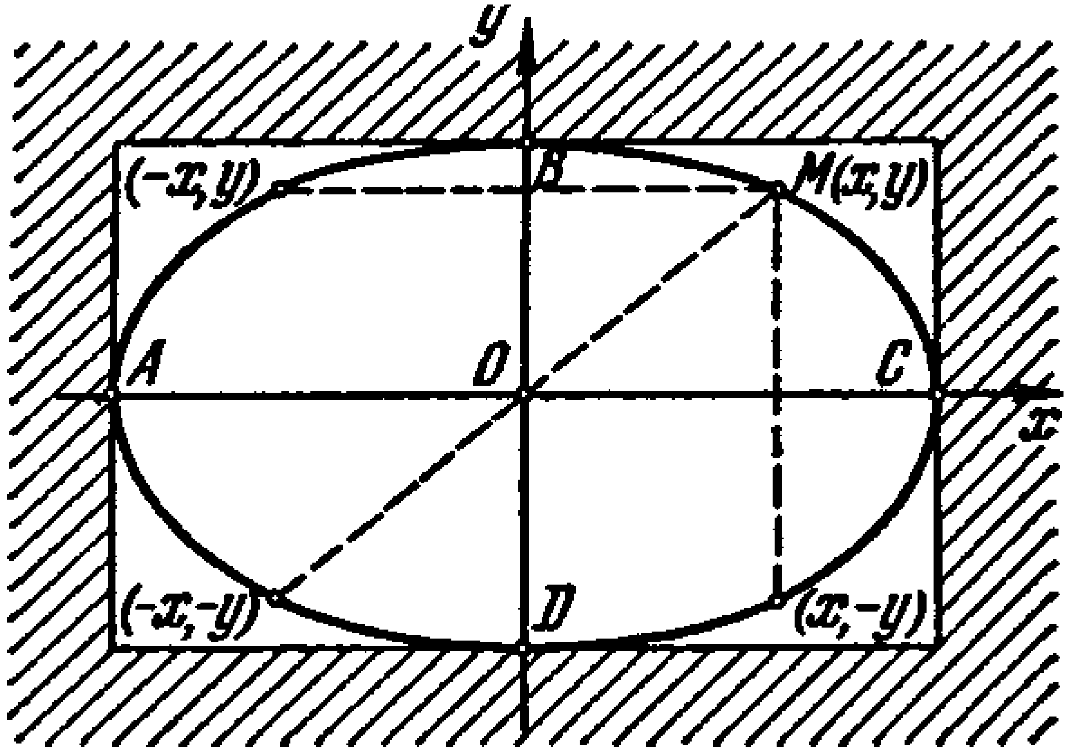
т. е. эллипс — ограниченная кривая, расположенная в соответствующем прямоугольнике.



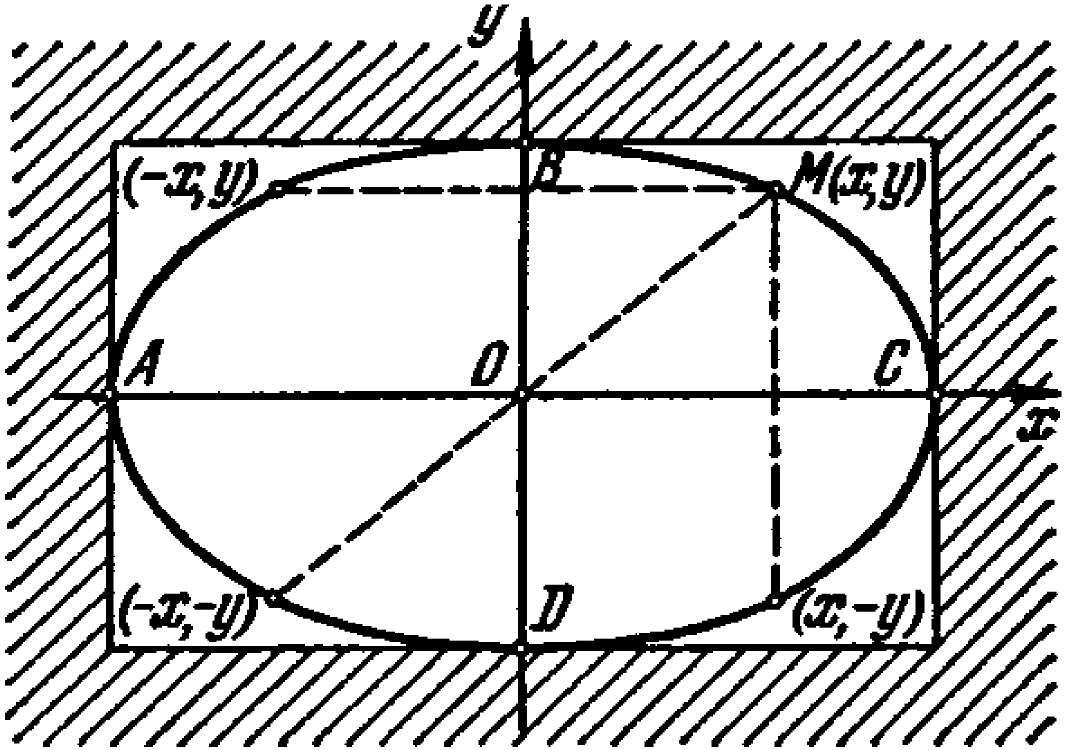
Точками пересечения этой кривой с осями координат являются точки $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$. Они называются ***вершинами эллипса***.



Оси координат — оси симметрии эллипса, так как если точка (x, y) принадлежит эллипсу, то точки $(-x, y)$, $(x, -y)$ также лежат на эллипсе.



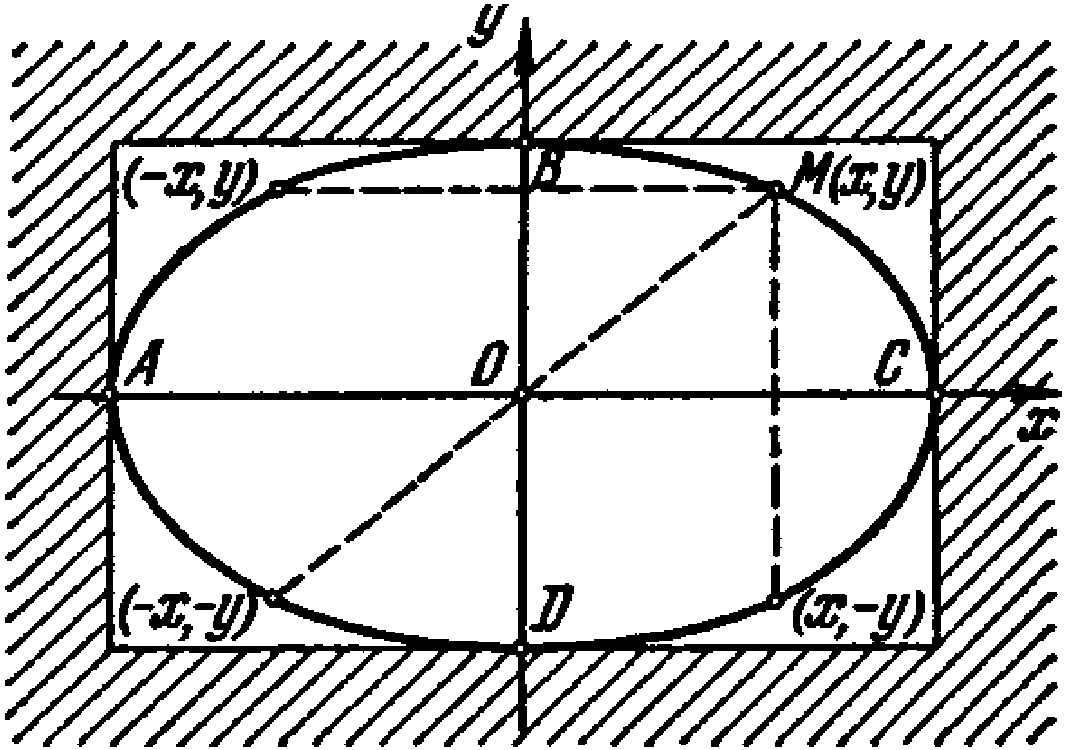
Начало координат — центр симметрии эллипса, так как, если точка (x, y) принадлежит эллипсу, то и точка $(-x, -y)$ лежит на эллипсе.



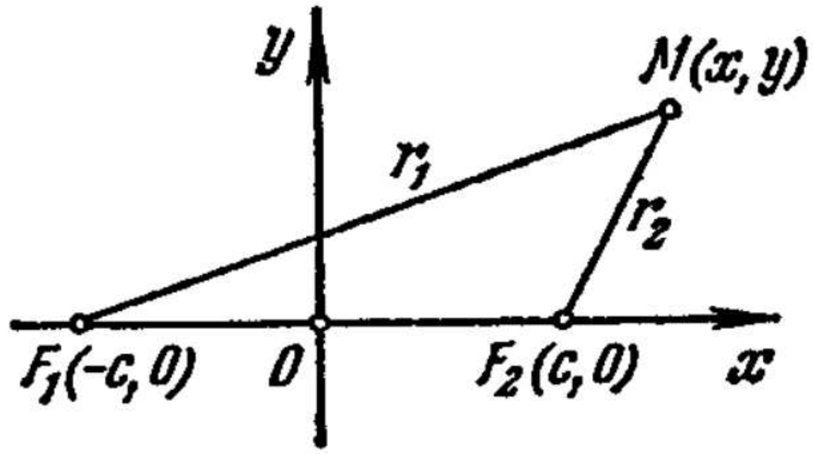
Числа a, b в уравнении

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

называют *длинами полуосей эллипса*. Будем для определенности считать, что $a \geqslant b$. Понятно, что при $a = b$ эллипс превращается в окружность (радиуса a).



Положим $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Величина $e = c/a = \sqrt{1 - b^2/a^2} \in [0, 1)$ характеризует степень вытянутости эллипса вдоль большой полуоси и называется <u>*эксцентриситетом эллипса*</u>.



Точки $(-c, 0)$, $(c, 0)$ называются ***фокусами эллипса***. Пусть (x, y) — произвольная точка эллипса. Тогда, как ниже будет показано,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Это равенство означает, что сумма расстояний от точки эллипса до фокусов одна и та же для всех точек эллипса. Это свойство эллипса можно принять за его определение, т. к., исходя из него, очевидно, можно получить уравнение эллипса.

Докажем справедливость равенства

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

для точек, принадлежащих эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Используя равенства

$$c^2=a^2-b^2, \quad y^2=b^2-b^2x^2/a^2,$$

можем написать

$$(x+c)^2+y^2=x^2+2cx+a^2-b^2+b^2-b^2x^2/a^2=$$
$$=x^2(1-b^2/a^2)+2cx+a^2=x^2c^2/a^2+2cx+a^2=$$
$$=(xc/a+a)^2.$$

Точно так же $(x-c)^2+y^2=(-xc/a+a)^2.$

Заметим, что

$$c < a$$

(т. к. $c^2 = a^2 - b^2$). Учтем также, что

$$|x| \leqslant a$$

для любой точки эллипса. Поэтому справедливы неравенства

$$xc/a + a > 0, \quad -xc/a + a > 0,$$

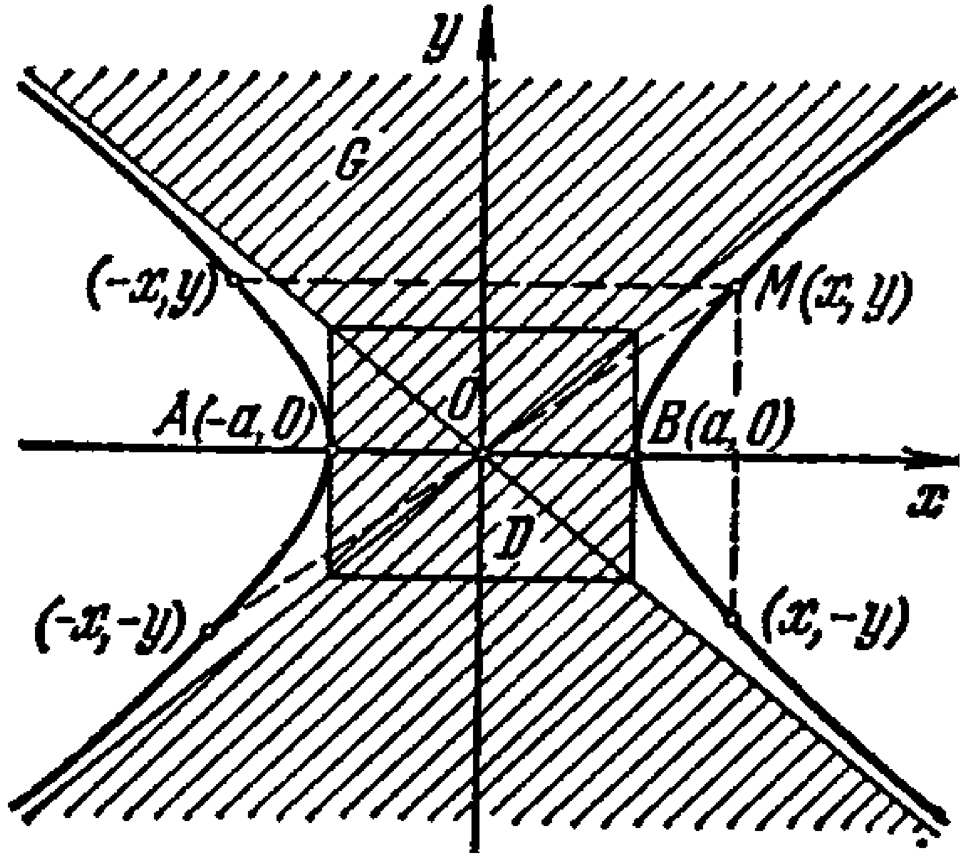
следовательно, из

$$(x+c)^2 + y^2 = (xc/a + a)^2, \quad (x-c)^2 + y^2 = (-xc/a + a)^2$$

имеем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = xc/a + a, \quad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -xc/a + a,$$

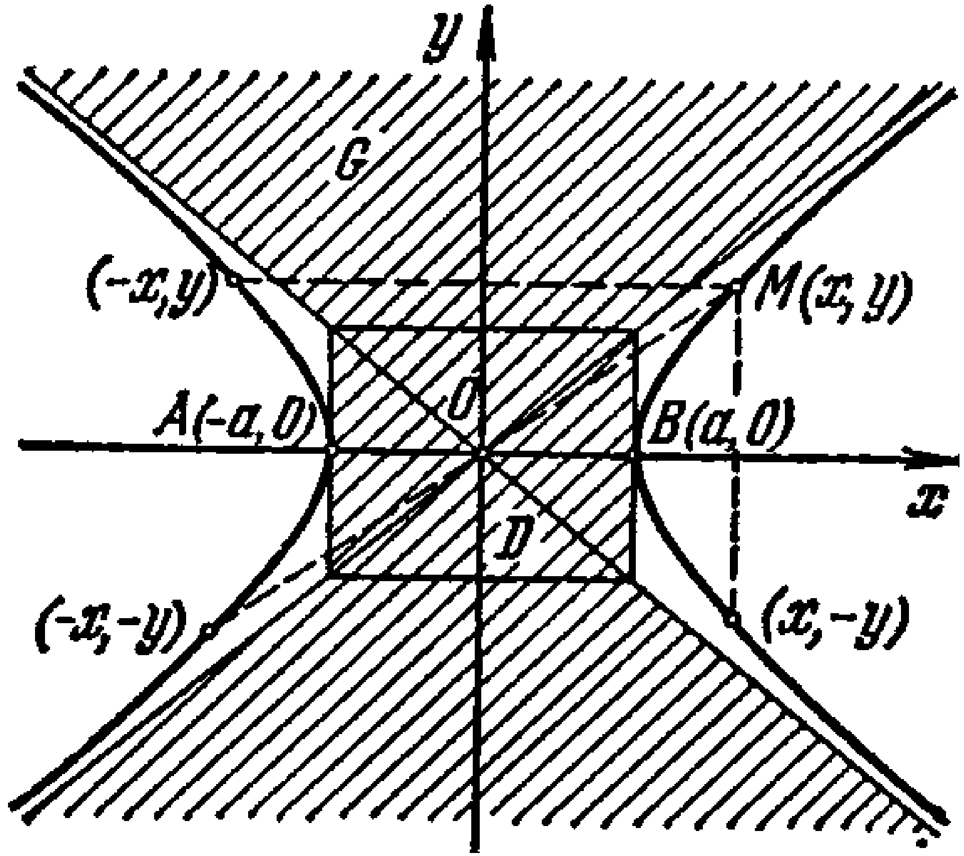
откуда вытекает $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$.



Опишем геометрические свойства гиперболы. Из уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

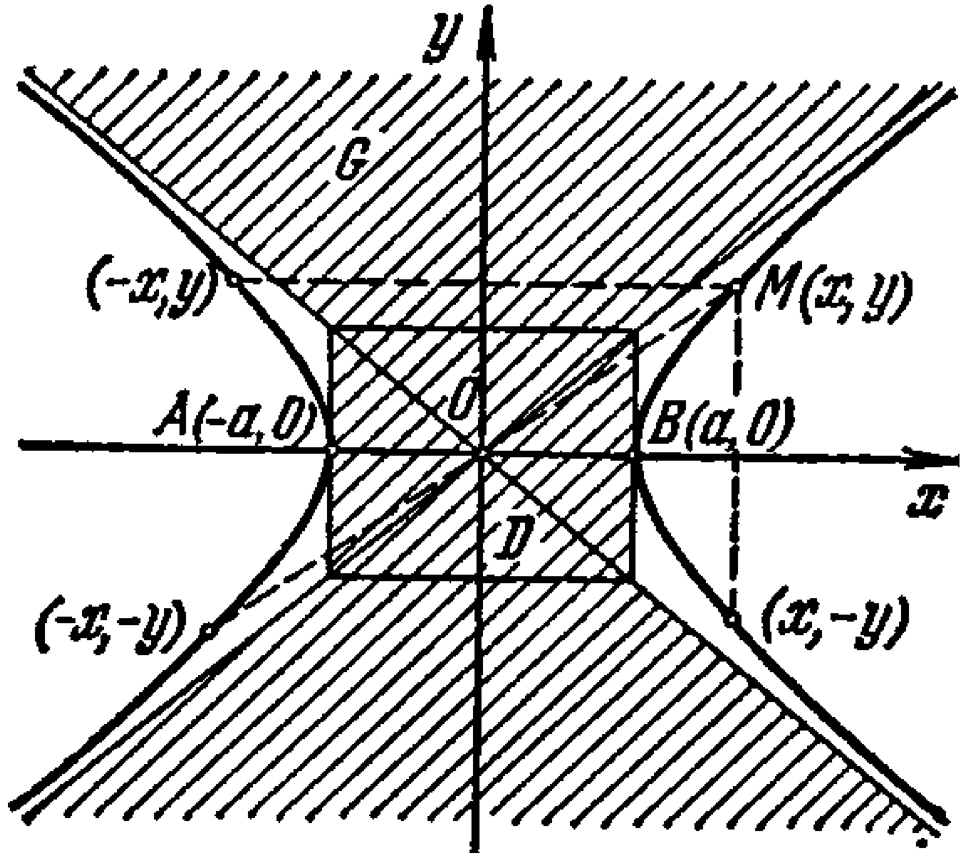
непосредственно вытекает, что если точка (x, y) лежит на гиперболе, то $x^2 \geqslant a^2$, т. е. гипербола лежит вне полосы $|x| \geqslant a$.



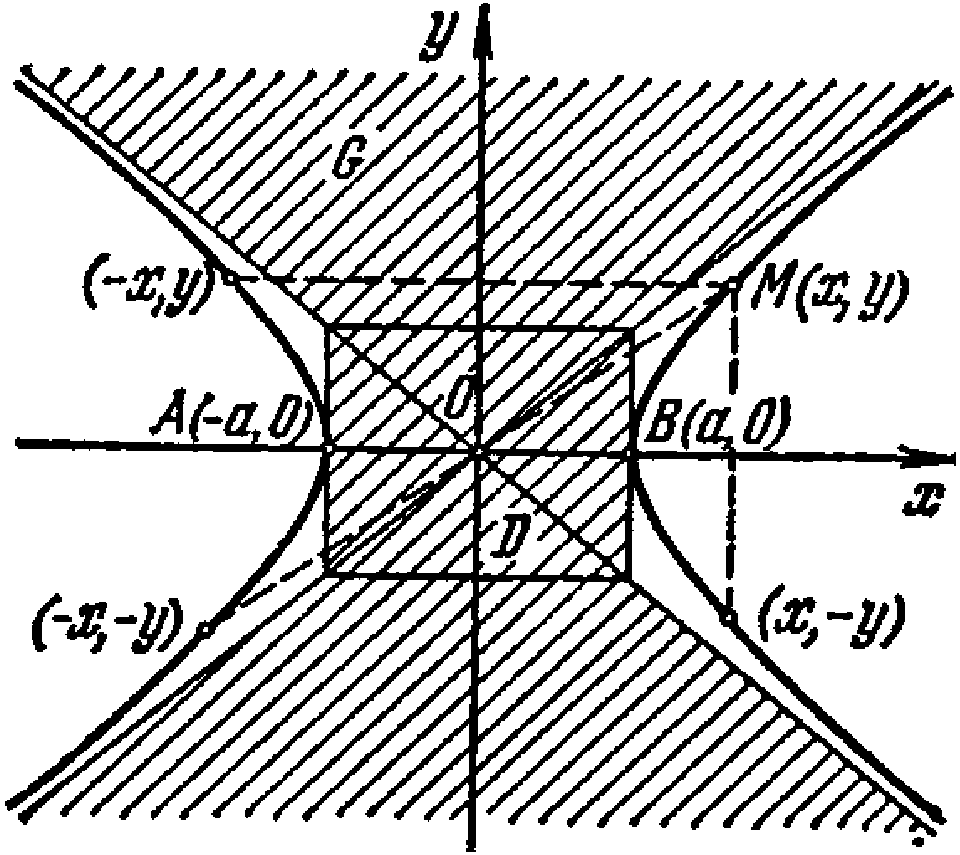
Из уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вытекает также, что $y^2 \leqslant b^2x^2/a^2$ т. е. гипербола лежит внутри углов, образованных прямыми $y = \pm(b/a)x$.



Гипербола симметрична относительно осей координат. Начало координат — центр симметрии кривой. Точки $(-a,0)$, $(a,0)$ пересечения с осью x называются <u>***вершинами гиперболы***</u>.



Прямые $y = \pm(b/a)x$ — асимптоты соответствующих ветвей гиперболы.

Покажем это применительно к ветви, определяемой уравнением

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geqslant a,$$

и прямой

$$y = (b/a)x.$$

Для остальных ветвей выкладки полностью аналогичны.

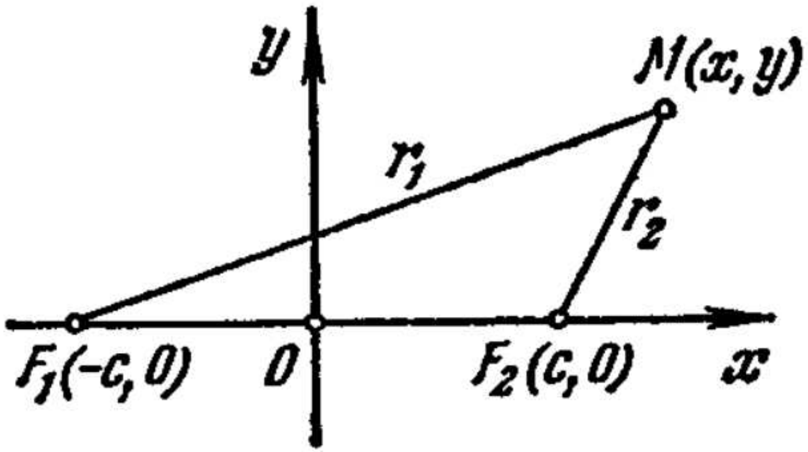
В соответствии с определением асимптоты достаточно проверить справедливость следующих равенств

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x} = \frac{b}{a}, \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{b}{a}x\right) = 0.$$

Проверка первого из этих равенств элементарна. При проверке второго полезно заметить, что

$$\sqrt{x^2-a^2} - x = \frac{(\sqrt{x^2-a^2}-x)(\sqrt{x^2-a^2}+x)}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = -\frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x} \to 0$$

при $x \to \infty$.



Положим $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Точки $(-c, 0)$, $(c, 0)$ называются *фокусами гиперболы*. Для любой точки (x, y), лежащей на гиперболе,

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a,$$

т. е. модуль разности расстояний от точки гиперболы до фокусов постоянен. Это свойство гиперболы можно было бы принять за ее определение.

Проверим справедливость равенства

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a,$$

считая, что выполнены соотношения

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},\quad x\geqslant a.$$

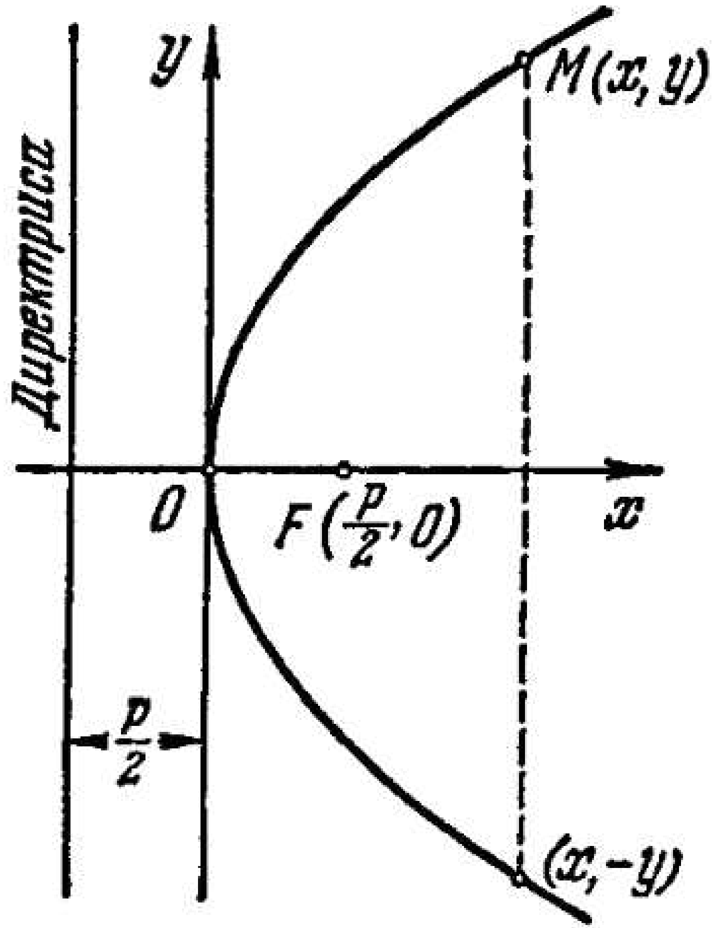
Для остальных ветвей гиперболы все рассуждения полностью аналогичны. Получаем

$$(x+c)^2+y^2=(cx/a+a)^2,\quad (x-c)^2+y^2=(cx/a-a)^2.$$

Для рассматриваемой ветви гиперболы, как нетрудно убедиться, справедливы неравенства

$$cx/a+a>0,\quad cx/a-a>0.$$

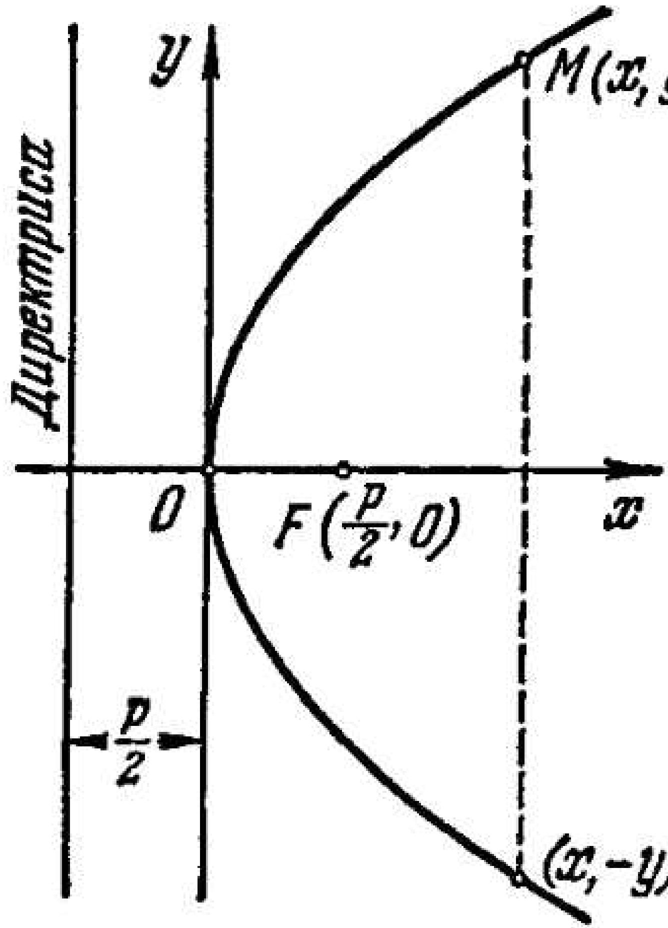
Поэтому $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx/a+a-(cx/a-a)=2a.$



Опишем геометрические свойства параболы

$$y^2 = 2px.$$

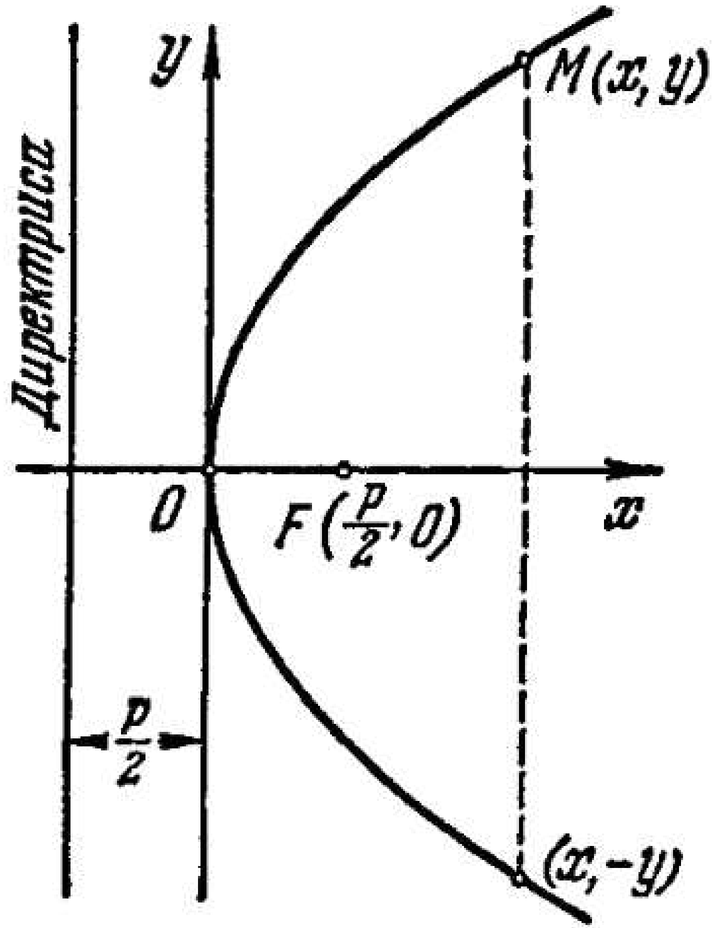
Будем считать, что $p > 0$. Рассмотрение случая $p < 0$ требует очевидных изменений.



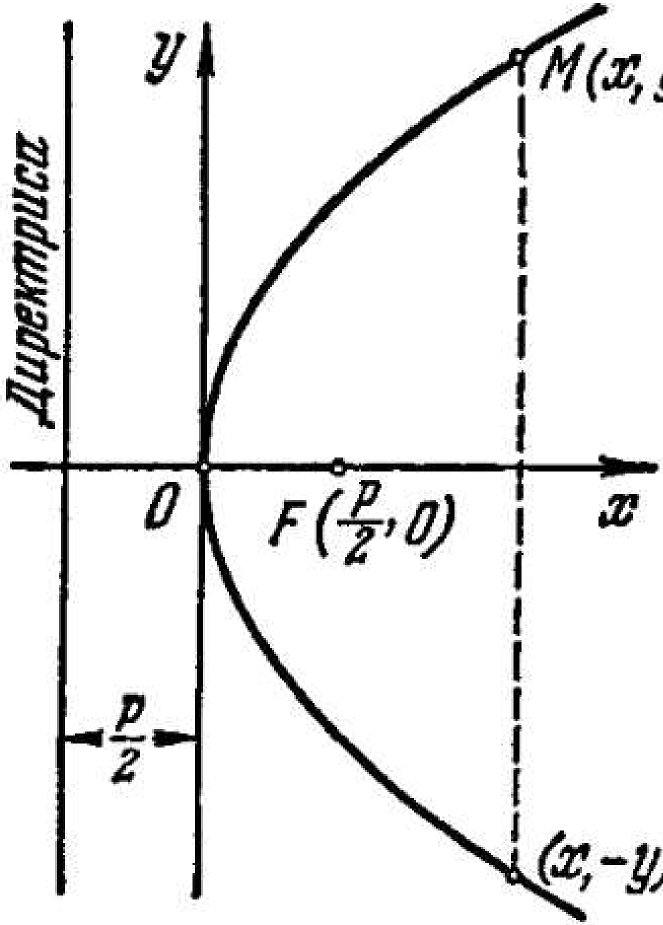
Непосредственно из уравнения

$$y^2 = 2px$$

вытекает, что парабола расположена в правой полуплоскости, симметрична относительно оси x.

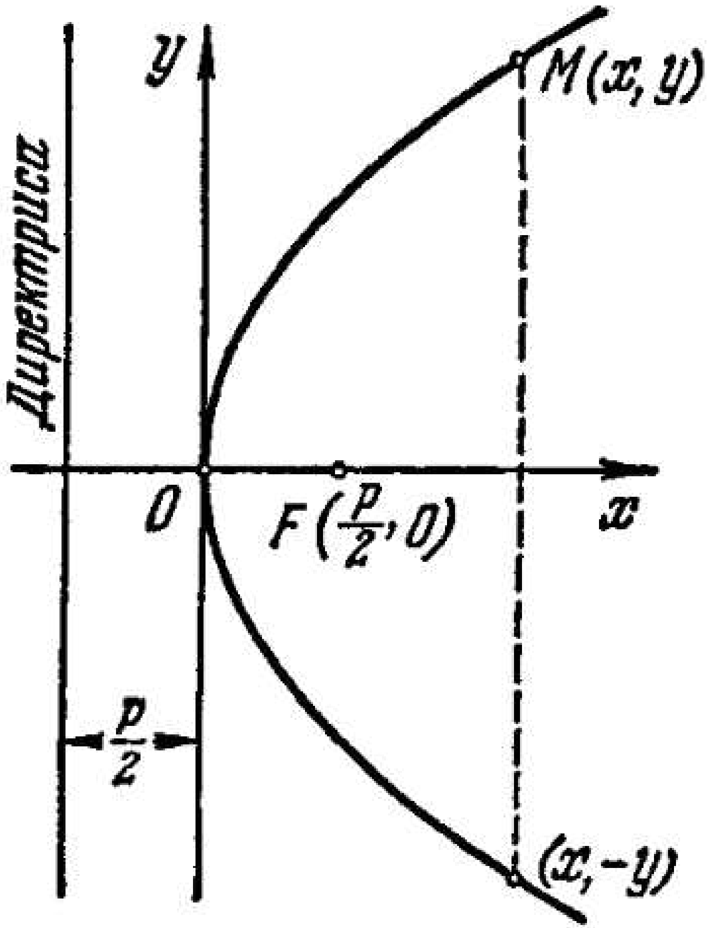


Единственной точкой пересечения с осями координат является начало координат. Эта точка называется *вершиной параболы*.

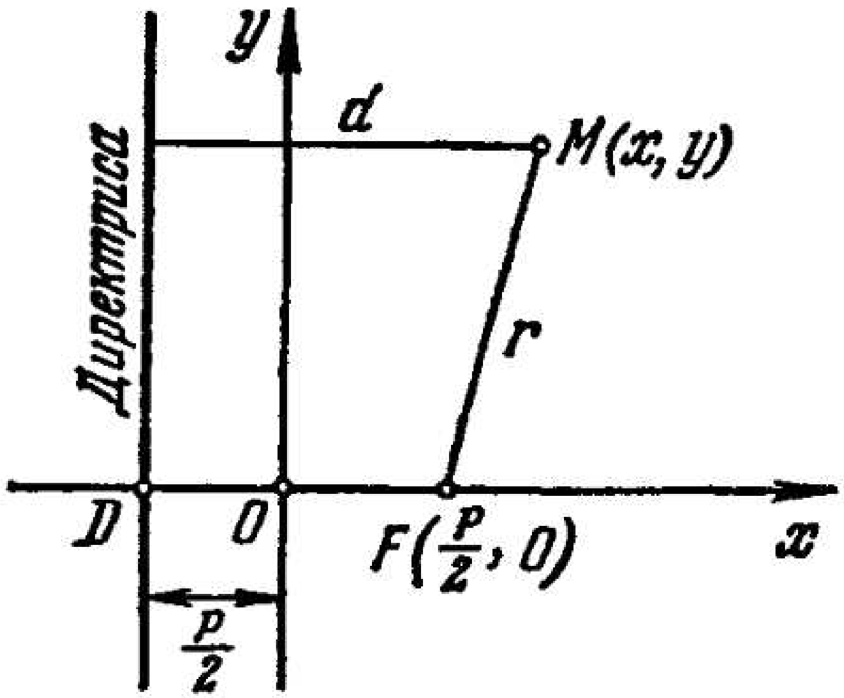


Парабола не имеет асимптот. Действительно, если $y = \sqrt{2p}\,x^{1/2}$**, то**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2p}\,x^{1/2}}{x} = \sqrt{2p}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1/2}} = 0.$$



Точка $(p/2, 0)$ называется *фокусом параболы*. Прямая $x = -p/2$ называется *директрисой параболы*



Для любой точки (x, y), принадлежащей параболе

$$\sqrt{(x-p/2)^2+y^2} = x + p/2,$$

т. е. расстояние от любой точки параболы до фокуса равно расстоянию этой точки до директрисы. Это свойство параболы можно было бы принять за ее определение.

.

Докажем равенство

$$\sqrt{(x-p/2)^2+y^2}=x+p/2$$

Имеем

$$(x-p/2)^2+y^2=x^2-px+p^2/4+2px=(x+p/2)^2,$$

причем, очевидно, $x+p/2>0$ для любой точки параболы

$$y^2=2px,$$

следовательно требуемое равенство выполнено.

.

<u>Пример.</u> **Привести к простейшему виду уравнение**

$$3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 - 14x_2 - 13 = 0$$

и построить кривую в исходной декартовой системе координат x_1x_2**.**

<u>Решение.</u> Дано

$$3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 - 14x_2 - 13 = 0.$$

В этом случае $a_{11} = a_{22} = 3$, $a_{12} = 5$, $a_1 = -1$, $a_2 = -7$, $a_0 = -13$.

По формуле

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}$$

имеем

$$\lambda_1 = \frac{6 + \sqrt{4 \cdot 5^2}}{2} = 8, \qquad \lambda_2 = \frac{6 - \sqrt{4 \cdot 5^2}}{2} = -2.$$

По формуле

$$\operatorname{tg} \varphi_k = -\frac{a_{11} - \lambda_k}{a_{12}}, \qquad k = 1, 2,$$

получаем

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{3 - 8}{5} = 1, \qquad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{3 + 2}{5} = -1.$$

.

Итак,

$$\lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = -2,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 1, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = -1.$$

Теперь перенумеруем углы и соответствующие им собственные числа так, чтобы выполнялись условия

$$-\pi/2 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 \leqslant \pi/2.$$

Таким образом получаем

$$\lambda_1 = -2, \quad \varphi_1 = -\pi/4,$$

$$\lambda_2 = 8, \quad \varphi_2 = \pi/4.$$

.

По формуле

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}$$

для

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}, \qquad \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$$

получаем

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Итак, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 8$, $a_0 = -13$, $a_1 = -1$, $a_2 = -7$.

Выполнив замену переменных

$$x = Ty, \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

в соответствии с

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2(\widehat{a}, y) + a_0 = 0, \quad \widehat{a} = T^T a,$$

получаем

$$-2y_1^2 + 8y_2^2 + \frac{12}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{16}{\sqrt{2}} y_2 - 13 = 0.$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix} \widehat{a}_1 \\ \widehat{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{2}} \\ -\frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

.

Итак,

$$a_0 = -13, \quad \widehat{a}_1 = \frac{6}{\sqrt{2}}, \quad \widehat{a}_2 = -\frac{8}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 8.$$

Используя теперь формулу

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \widehat{a}_0 = 0,$$

где

$$\widehat{a}_0 = a_0 - \frac{\widehat{a}_1^2}{\lambda_1} - \frac{\widehat{a}_2^2}{\lambda_2} = -13 - \left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{-2} - \left(-\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{8} =$$

$$= -13 + \frac{36}{2 \cdot 2} - \frac{64}{2 \cdot 8} = -13 + 9 - 4 = -8,$$

приходим к уравнению

$$-2z_1^2 + 8z_2^2 - 8 = 0.$$

.

Уравнение

$$-2z_1^2 + 8z_2^2 - 8 = 0$$

запишем в виде

$$-\frac{z_1^2}{4} + \frac{z_2^2}{1} = 1.$$

Здесь

$$z_1 = y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1} = y_1 - \frac{6}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{2} = y_1 - \frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$z_2 = y_2 + \frac{\widehat{a}_2}{\lambda_2} = y_2 - \frac{8}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{8} = y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

т. к.

$$\widehat{a}_1 = \frac{6}{\sqrt{2}}, \quad \widehat{a}_2 = -\frac{8}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 8.$$

.

Перепишем соотношения

$$x = Ty,$$

$$z_1 = y_1 - \frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$z_2 = y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

в виде

$$z = y + \widetilde{x}^0 = T^T x + \widetilde{x}^0,$$

где

$$\widetilde{x}_0 = -\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

.

Из

$$z = T^T x + \widetilde{x}^0,$$

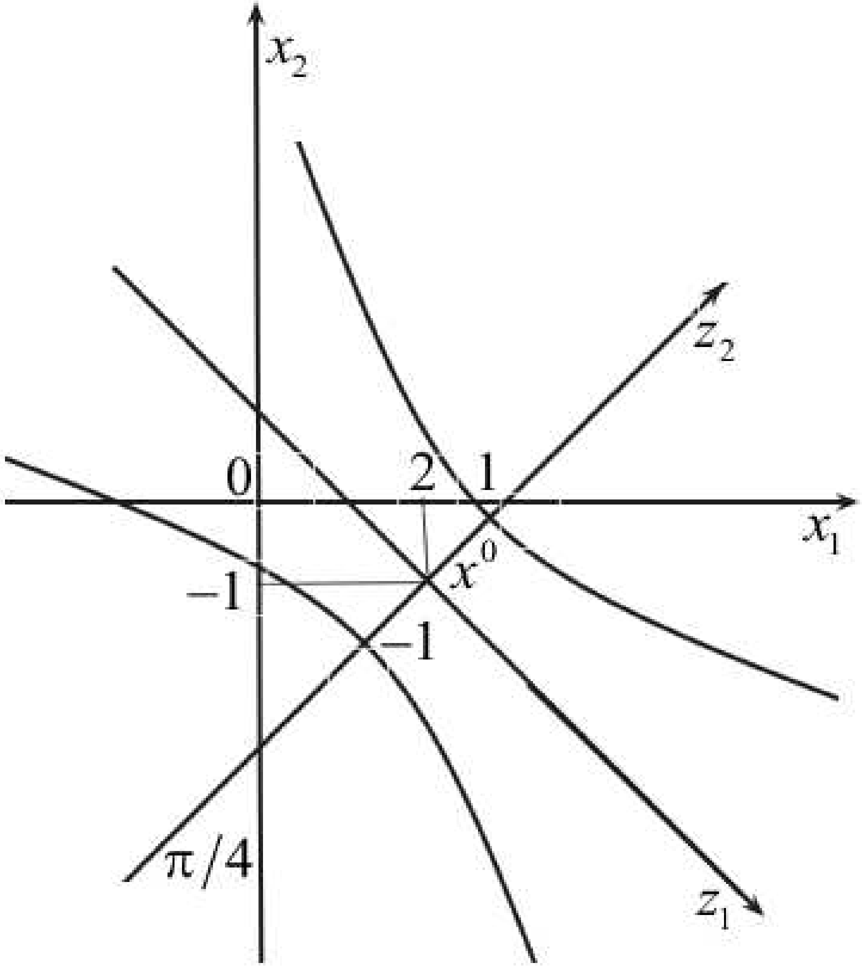
$$\widetilde{x}_0 = -\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

получаем, что

$$x = -T\widetilde{x}_0 + Tz = x^0 + Tz,$$

где

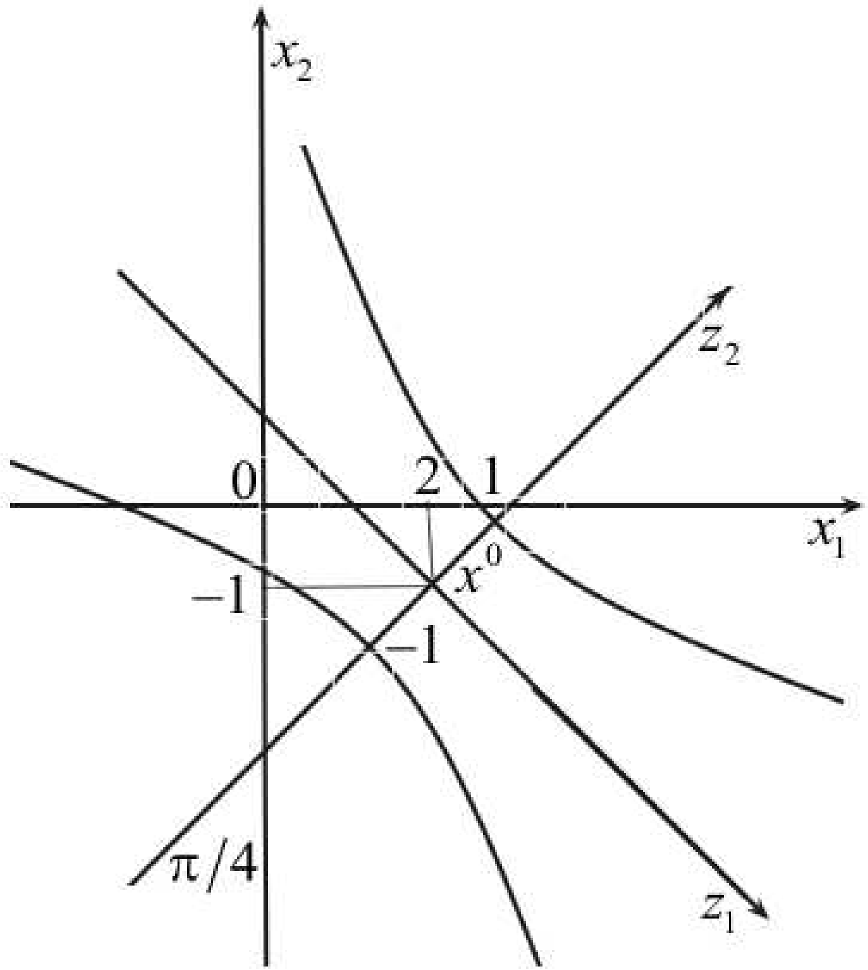
$$x^0 = -T\widetilde{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



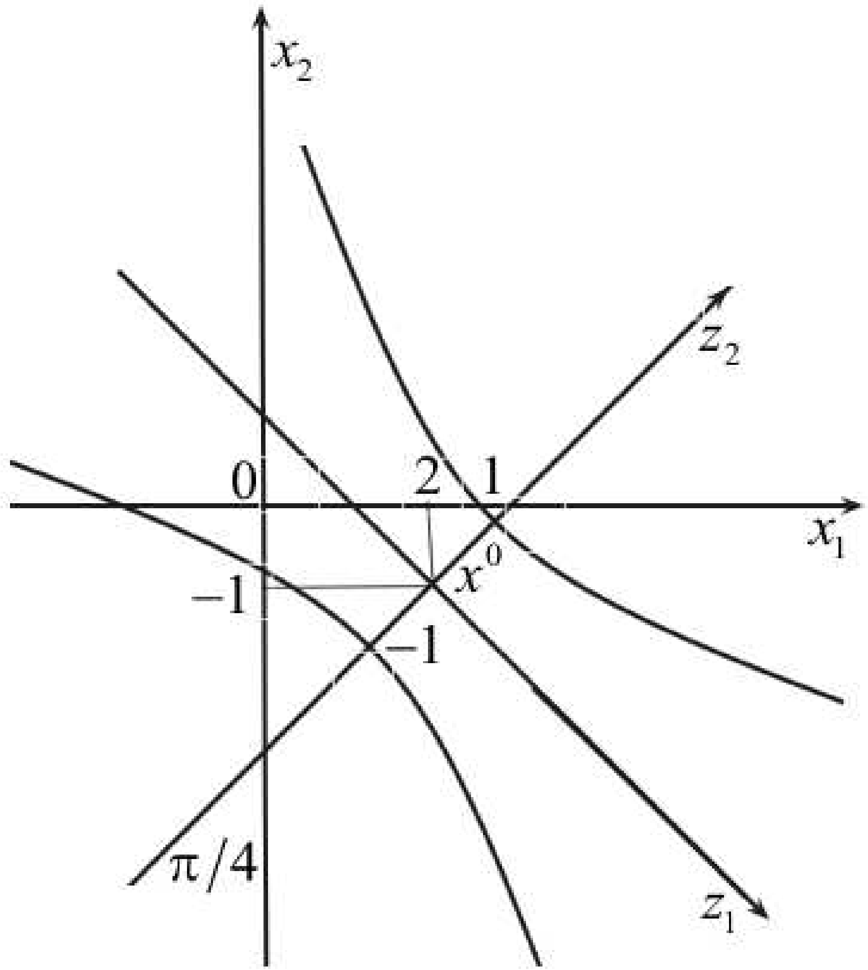
Таким образом, заданная кривая есть гипербола

$$-\frac{z_1^2}{4} + \frac{z_2^2}{1} = 1$$

в декартовой системе координат $z_1 z_2$.



Оси системы координат $z_1 z_2$ повернуты на угол $-\pi/4$ против часовой стрелки ($\pi/4$ — по часовой стрелке) по отношению к осям декартовой системы координат $x_1 x_2$.



Начало системы координат $z_1 z_2$ расположено в точке $(2, -1)$ относительно системы координат $x_1 x_2$.

Если оставить в стороне вопрос о расположении кривой по отношению к исходной системе координат, то уравнение

$$-2z_1^2 + 8z_2^2 - 8 = 0$$

может быть выписано непосредственно по формулам

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \widehat{a}_0 = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$$

$$\widehat{a}_0 = \frac{\mathcal{I}_3(B)}{\mathcal{I}_2(A)},$$

где

$$\mathcal{I}_3(B) = \det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{I}_2(A) = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

.

Для этого учтем, что уравнению

$$3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 - 14x_2 - 13 = 0$$

соответствуют матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -1 & -7 & -13 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det(A) = -16$, $\det(B) = 128$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 8$, **то приведенной формой**

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \widehat{a}_0 = 0, \quad \widehat{a}_0 = \frac{\det(B)}{\det(A)},$$

этого уравнения будет уравнение

$$-2z_1^2 + 8z_2^2 - 8 = 0.$$