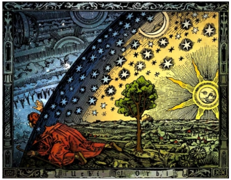
Математические модели теоретической физики

(математика и компьютерные науки)

Математические основы физики

(математика и информатика)

профессор Игнатьев Юрий Геннадиевич



Казанский федеральный университет
Институт математики и механики
им. Н.И. Лобачевского
Кафедра высшей математики и математического моделирования

Казань, VI семестр, 2015 г.

Содержание лекции

- Общие принципы получения тензора энергии-импульса
- Тензор энергии-импульса электромагнитного поля
- Тензор энергии-импульса заряженных частиц
- Законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Дирак П. А. М. Основы квантовой механики / Пер. с англ. — М., 1932 (или Принципы квантовой механики) – любое издание.
4. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Содержание лекции

- Общие принципы получения тензора энергии-импульса
- Тензор энергии-импульса электромагнитного поля
- Тензор энергии-импульса заряженных частиц
- Законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Дирак П. А. М. Основы квантовой механики / Пер. с англ. — М., 1932 (или Принципы квантовой механики) – любое издание.
4. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Содержание лекции

- Общие принципы получения тензора энергии-импульса
- Тензор энергии-импульса электромагнитного поля
- Тензор энергии-импульса заряженных частиц
- Законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Дирак П. А. М. Основы квантовой механики / Пер. с англ. — М., 1932 (или Принципы квантовой механики) – любое издание.
4. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Лекция XIII: Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Содержание лекции

- Общие принципы получения тензора энергии-импульса
- Тензор энергии-импульса электромагнитного поля
- Тензор энергии-импульса заряженных частиц
- Законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Дирак П. А. М. Основы квантовой механики / Пер. с англ. — М., 1932 (или Принципы квантовой механики) – любое издание.
4. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Содержание лекции

- Общие принципы получения тензора энергии-импульса
- Тензор энергии-импульса электромагнитного поля
- Тензор энергии-импульса заряженных частиц
- Законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Дирак П. А. М. Основы квантовой механики / Пер. с англ. — М., 1932 (или Принципы квантовой механики) – любое издание.
4. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Лекция XIII: Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Содержание лекции

- Общие принципы получения тензора энергии-импульса
- Тензор энергии-импульса электромагнитного поля
- Тензор энергии-импульса заряженных частиц
- Законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Дирак П. А. М. Основы квантовой механики / Пер. с англ. — М., 1932 (или Принципы квантовой механики) – любое издание.
4. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf*>

Лекция XIII: Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Содержание лекции

- Общие принципы получения тензора энергии-импульса
- Тензор энергии-импульса электромагнитного поля
- Тензор энергии-импульса заряженных частиц
- Законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Дирак П. А. М. Основы квантовой механики / Пер. с англ. — М., 1932 (или Принципы квантовой механики) – любое издание.
4. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Содержание лекции

- Общие принципы получения тензора энергии-импульса
- Тензор энергии-импульса электромагнитного поля
- Тензор энергии-импульса заряженных частиц
- Законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Дирак П. А. М. Основы квантовой механики / Пер. с англ. — М., 1932 (или Принципы квантовой механики) – любое издание.
4. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Лекция XIII: Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Содержание лекции

- Общие принципы получения тензора энергии-импульса
- Тензор энергии-импульса электромагнитного поля
- Тензор энергии-импульса заряженных частиц
- Законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Дирак П. А. М. Основы квантовой механики / Пер. с англ. — М., 1932 (или Принципы квантовой механики) – любое издание.
4. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Общие принципы получения тензора энергии-импульса

- Пусть по аналогии с электромагнитным полем совокупность функций $q^{(a)}(x^i)$ $a = \overline{1, N}$ и их первых частных производных $q^{(a)}_{,i} \equiv \partial_i q^{(a)}$ – является полным набором динамических переменных, полностью характеризующих состояние некоторой полевой системы. Это означает, что функционал действия для такой замкнутой полевой системы имеет вид:

$$S = \frac{1}{c} \int\limits_{V_4} L(q^{(a)}, q^{(a)}_{,i}) dV_4. \qquad (1)$$

  где $L(q, q_{,i})$ – инвариантная функция в пространстве Минковского, нормирующий множитель c^{-1} мы выбрали для сохранения правильной размерности функции Лагранжа.

- Вычислим вариацию действия (1), не конкретизируя функции Лагранжа, предполагая лишь ее не зависящей явно от мирового времени (вычисления проводятся аналогично предыдущим):

$$\delta S = \frac{1}{c} \int\limits_{V_4} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} \delta q^{(a)} + \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} \delta q^{(a)}_{,i} \right) dV_4. \qquad (2)$$

- Произведем тождественные преобразования подинтегрального выражения в (1):

$$\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} \delta q^{(a)}_{,i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} \delta \frac{\partial q^{(a)}}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} \frac{\partial \delta q^{(a)}}{\partial x^i} \Rightarrow$$

Общие принципы получения тензора энергии-импульса

- Пусть по аналогии с электромагнитным полем совокупность функций $q^{(a)}(x^i)$ $a=\overline{1,N}$ и их первых частных производных $q^{(a)}_{,i} \equiv \partial_i q^{(a)}$ – является полным набором динамических переменных, полностью характеризующих состояние некоторой полевой системы. Это означает, что функционал действия для такой замкнутой полевой системы имеет вид:

$$S = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4} L(q^{(a)}, q^{(a)}_{,i})dV_4, \qquad (1)$$

  где $L(q, q_{,i})$ – инвариантная функция в пространстве Минковского, нормирующий множитель c^{-1} мы выбрали для сохранения правильной размерности функции Лагранжа.

- Вычислим вариацию действия (1), не конкретизируя функции Лагранжа, предполагая лишь ее не зависящей явно от мирового времени (вычисления проводятся аналогично предыдущим):

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}}\delta q^{(a)} + \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}_{,i}\right)dV_4. \qquad (2)$$

- Произведем тождественные преобразования подинтегрального выражения в (1):

$$\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}_{,i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta\frac{\partial q^{(a)}}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\frac{\partial \delta q^{(a)}}{\partial x^i} \Rightarrow$$

Общие принципы получения тензора энергии-импульса

- Пусть по аналогии с электромагнитным полем совокупность функций $q^{(a)}(x^i)\ a = \overline{1, N}$ и их первых частных производных $q^{(a)}_{,i} \equiv \partial_i q^{(a)}$ – является полным набором динамических переменных, полностью характеризующих состояние некоторой полевой системы. Это означает, что функционал действия для такой замкнутой полевой системы имеет вид:

$$S = \frac{1}{c} \int\limits_{V_4} L(q^{(a)}, q^{(a)}_{,i}) dV_4, \qquad (1)$$

  где $L(q, q_{,i})$ – инвариантная функция в пространстве Минковского, нормирующий множитель c^{-1} мы выбрали для сохранения правильной размерности функции Лагранжа.

- Вычислим вариацию действия (1), не конкретизируя функции Лагранжа, предполагая лишь ее не зависящей явно от мирового времени (вычисления проводятся аналогично предыдущим):

$$\delta S = \frac{1}{c} \int\limits_{V_4} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} \delta q^{(a)} + \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} \delta q^{(a)}_{,i} \right) dV_4. \qquad (2)$$

- Произведем тождественные преобразования подинтегрального выражения в (1):

$$\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} \delta q^{(a)}_{,i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} \delta \frac{\partial q^{(a)}}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} \frac{\partial \delta q^{(a)}}{\partial x^i} \Rightarrow$$

Общие принципы получения тензора энергии-импульса

- Пусть по аналогии с электромагнитным полем совокупность функций $q^{(a)}(x^i)$ $a = \overline{1, N}$ и их первых частных производных $q^{(a)}_{,i} \equiv \partial_i q^{(a)}$ – является полным набором динамических переменных, полностью характеризующих состояние некоторой полевой системы. Это означает, что функционал действия для такой замкнутой полевой системы имеет вид:

$$S = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4} L(q^{(a)}, q^{(a)}_{,i})dV_4, \qquad (1)$$

где $L(q, q_{,i})$ – инвариантная функция в пространстве Минковского, нормирующий множитель c^{-1} мы выбрали для сохранения правильной размерности функции Лагранжа.

- Вычислим вариацию действия (1), не конкретизируя функции Лагранжа, предполагая лишь ее не зависящей явно от мирового времени (вычисления проводятся аналогично предыдущим):

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}}\delta q^{(a)} + \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}_{,i}\right)dV_4. \qquad (2)$$

- Произведем тождественные преобразования подинтегрального выражения в (1):

$$\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}_{,i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta\frac{\partial q^{(a)}}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\frac{\partial \delta q^{(a)}}{\partial x^i} \Rightarrow$$

- Пусть по аналогии с электромагнитным полем совокупность функций $q^{(a)}(x^i)$ $a=\overline{1,N}$ и их первых частных производных $q^{(a)}_{,i}\equiv\partial_i q^{(a)}$ – является полным набором динамических переменных, полностью характеризующих состояние некоторой полевой системы. Это означает, что функционал действия для такой замкнутой полевой системы имеет вид:
$$S=\frac{1}{c}\int\limits_{V_4} L(q^{(a)},q^{(a)}_{,i})dV_4, \qquad (1)$$
где $L(q,q_{,i})$ – инвариантная функция в пространстве Минковского, нормирующий множитель c^{-1} мы выбрали для сохранения правильной размерности функции Лагранжа.
- Вычислим вариацию действия (1), не конкретизируя функции Лагранжа, предполагая лишь ее не зависящей явно от мирового времени (вычисления проводятся аналогично предыдущим):
$$\delta S=\frac{1}{c}\int\limits_{V_4}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}}\delta q^{(a)}+\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}_{,i}\right)dV_4. \qquad (2)$$
- Произведем тождественные преобразования подинтегрального выражения в (1):
$$\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}_{,i}\equiv\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta\frac{\partial q^{(a)}}{\partial x^i}\equiv\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\frac{\partial\delta q^{(a)}}{\partial x^i}\Rightarrow$$

- $$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}_{,i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}\right) - \delta q^{(a)}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} \qquad (3)$$
- Первый член (3) имеет явно дивергентную форму, поэтому при подстановке (3) в интеграл (2) он, будучи преобразован по формуле Остроградского-Гаусса, даст нуль.
- В результате получим для вариации действия (2) выражение:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\right)\delta q^{(a)} dV_4. \qquad (4)$$

- Приравнивая вариацию (4) нулю и применяя основную лемму вариационного исчисления, получаем вследствие функциональной независимости динамических переменных систему уравнений Эйлера-Лагранжа для полей $q^{(a)}$:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} = 0, \quad (a = \overline{1,N}). \qquad (5)}$$

- С учетом того, что L зависит от координат лишь посредством динамических полевых функций $\{q^{(a)}, q^{(a)}_{,i}\}$, запишем:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}}q^{(a)}_{,i} + \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}q^{(a)}_{,ik}. \qquad (6)$$

Общие принципы получения тензора энергии-импульса

- $$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}_{,i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}\right) - \delta q^{(a)}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} \qquad (3)$$
- Первый член (3) имеет явно дивергентную форму, поэтому при подстановке (3) в интеграл (2) он, будучи преобразован по формуле Остроградского-Гаусса, даст нуль.
- В результате получим для вариации действия (2) выражение:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\right)\delta q^{(a)} dV_4. \qquad (4)$$

- Приравнивая вариацию (4) нулю и применяя основную лемму вариационного исчисления, получаем вследствие функциональной независимости динамических переменных систему уравнений Эйлера-Лагранжа для полей $q^{(a)}$:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} = 0, \quad (a = \overline{1,N}).} \qquad (5)$$

- С учетом того, что L зависит от координат лишь посредством динамических полевых функций $\{q^{(a)}, q^{(a)}_{,i}\}$, запишем:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} q^{(a)}_{,i} + \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} q^{(a)}_{,ik}. \qquad (6)$$

- $$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}_{,i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}\right) - \delta q^{(a)}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} \qquad (3)$$

- Первый член (3) имеет явно дивергентную форму, поэтому при подстановке (3) в интеграл (2) он, будучи преобразован по формуле Остроградского-Гаусса, даст нуль.

- В результате получим для вариации действия (2) выражение:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\right)\delta q^{(a)} dV_4. \qquad (4)$$

- Приравнивая вариацию (4) нулю и применяя основную лемму вариационного исчисления, получаем вследствие функциональной независимости динамических переменных систему уравнений Эйлера-Лагранжа для полей $q^{(a)}$:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} = 0, \quad (a = \overline{1,N}). \qquad (5)}$$

- С учетом того, что L зависит от координат лишь посредством динамических полевых функций $\{q^{(a)}, q^{(a)}_{,i}\}$, запишем:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}}q^{(a)}_{,i} + \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}q^{(a)}_{,ik}. \qquad (6)$$

- $$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}_{,i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}\right) - \delta q^{(a)}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} \qquad (3)$$
- Первый член (3) имеет явно дивергентную форму, поэтому при подстановке (3) в интеграл (2) он, будучи преобразован по формуле Остроградского-Гаусса, даст нуль.
- В результате получим для вариации действия (2) выражение:
$$\delta S = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\right)\delta q^{(a)} dV_4. \qquad (4)$$
- Приравнивая вариацию (4) нулю и применяя основную лемму вариационного исчисления, получаем вследствие функциональной независимости динамических переменных систему уравнений Эйлера-Лагранжа для полей $q^{(a)}$:
$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} = 0, \quad (a = \overline{1,N}).} \qquad (5)$$
- С учетом того, что L зависит от координат лишь посредством динамических полевых функций $\{q^{(a)}, q^{(a)}_{,i}\}$, запишем:
$$\frac{\partial L}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}}q^{(a)}_{,i} + \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}q^{(a)}_{,ik}. \qquad (6)$$

Общие принципы получения тензора энергии-импульса

- $$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}_{,i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}\right) - \delta q^{(a)}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} \qquad (3)$$
- Первый член (3) имеет явно дивергентную форму, поэтому при подстановке (3) в интеграл (2) он, будучи преобразован по формуле Остроградского-Гаусса, даст нуль.
- В результате получим для вариации действия (2) выражение:
$$\delta S = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\right)\delta q^{(a)} dV_4. \qquad (4)$$
- Приравнивая вариацию (4) нулю и применяя основную лемму вариационного исчисления, получаем вследствие функциональной независимости динамических переменных систему уравнений Эйлера-Лагранжа для полей $q^{(a)}$:
$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} = 0, \quad (a = \overline{1,N}).} \qquad (5)$$
- С учетом того, что L зависит от координат лишь посредством динамических полевых функций $\{q^{(a)}, q^{(a)}_{,i}\}$, запишем:
$$\frac{\partial L}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} q^{(a)}_{,i} + \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} q^{(a)}_{,ik}. \qquad (6)$$

- $$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}_{,i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}\right) - \delta q^{(a)}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} \qquad (3)$$
- Первый член (3) имеет явно дивергентную форму, поэтому при подстановке (3) в интеграл (2) он, будучи преобразован по формуле Остроградского-Гаусса, даст нуль.
- В результате получим для вариации действия (2) выражение:
  $$\delta S = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\right)\delta q^{(a)} dV_4. \qquad (4)$$
- Приравнивая вариацию (4) нулю и применяя основную лемму вариационного исчисления, получаем вследствие функциональной независимости динамических переменных систему уравнений Эйлера-Лагранжа для полей $q^{(a)}$:
  $$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} = 0, \quad (a = \overline{1,N}).} \qquad (5)$$
- С учетом того, что L зависит от координат лишь посредством динамических полевых функций $\{q^{(a)}, q^{(a)}_{,i}\}$, запишем:
  $$\frac{\partial L}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} q^{(a)}_{,i} + \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} q^{(a)}_{,ik}. \qquad (6)$$

- $$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}_{,i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\delta q^{(a)}\right) - \delta q^{(a)}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} \tag{3}$$
- Первый член (3) имеет явно дивергентную форму, поэтому при подстановке (3) в интеграл (2) он, будучи преобразован по формуле Остроградского-Гаусса, даст нуль.
- В результате получим для вариации действия (2) выражение:
$$\delta S = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}}\right)\delta q^{(a)} dV_4. \tag{4}$$
- Приравнивая вариацию (4) нулю и применяя основную лемму вариационного исчисления, получаем вследствие функциональной независимости динамических переменных систему уравнений Эйлера-Лагранжа для полей $q^{(a)}$:
$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,i}} = 0, \quad (a = \overline{1, N}). \tag{5}}$$
- С учетом того, что L зависит от координат лишь посредством динамических полевых функций $\{q^{(a)}, q^{(a)}_{,i}\}$, запишем:
$$\frac{\partial L}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}} q^{(a)}_{,i} + \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} q^{(a)}_{,ik}. \tag{6}$$

Общие принципы получения тензора энергии-импульса

- Подставляя в (6) выражение для $\partial L/\partial q^{(a)}$ из уравнений Эйлера (5) и учитывая равенство вторых смешанных производных $q^{(a)}_{,ik} = q^{(a)}_{,ki}$, получим:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\right) q^{(a)}_{,i} + \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} q^{(a)}_{,ik} \quad \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}\left(q^{(a)}_{,i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\delta^k_i L - q^{(a)}_{,i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\right) = 0, \qquad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^k} T^i_k = 0, \tag{7}$$

где введен

$$T^k_i = \delta^k_i L - \sum_a q^{(a)}_{,i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} \tag{8}$$

– несимметричный тензор энергии-импульса.

- Поскольку четырехмерная дивергенция этого тензора равна нулю, к нему можно добавить любой тензор, удовлетворяющий этому же условию. В частности, к нему можно добавить произвольный тензор вида:

$$\partial_l \Psi^{ikl}; \quad \text{где } \Psi^{ikl} = -\Psi^{ilk} \Rightarrow \partial_{kl}\Psi^{ikl} \equiv 0, \tag{9}$$

где Ψ^{ikl} – антисимметричный по двум последним индексам тензор.

- Выбором Ψ^{ikl} всегда можно симметризировать величины (8) и определить симметричный тензор энергии - импульса:

$$\boxed{T^{ik} = T^{ki}, \qquad \partial_k T^{ik} = 0. \qquad (10)}$$

Законы сохранения!

- Подставляя в (6) выражение для $\partial L/\partial q^{(a)}$ из уравнений Эйлера (5) и учитывая равенство вторых смешанных производных $q^{(a)}_{,ik}=q^{(a)}_{,ki}$, получим:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\right)q^{(a)}_{,i}+\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}q^{(a)}_{,ik}\equiv\frac{\partial}{\partial x^k}\left(q^{(a)}_{,i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\delta^k_i L-q^{(a)}_{,i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\right)=0,\qquad\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x^k}T^i_k=0,\tag{7}$$

где введен

$$\tilde{T}^k_i=\delta^k_i L-\sum_a q^{(a)}_{,i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\tag{8}$$

– несимметричный тензор энергии-импульса.

- Поскольку четырехмерная дивергенция этого тензора равна нулю, к нему можно добавить любой тензор, удовлетворяющий этому же условию. В частности, к нему можно добавить произвольный тензор вида:

$$\partial_l\Psi^{ikl};\quad \text{где } \Psi^{ikl}=-\Psi^{ilk}\Rightarrow\partial_{kl}\Psi^{ikl}\equiv 0,\tag{9}$$

где Ψ^{ikl} – антисимметричный по двум последним индексам тензор.

- Выбором Ψ^{ikl} всегда можно симметризировать величины (8) и определить симметричный тензор энергии - импульса:

$$\boxed{T^{ik}=T^{ki};\quad \partial_k T^{ik}=0.}\tag{10}$$

Законы сохранения!

- Подставляя в (6) выражение для $\partial L/\partial q^{(a)}$ из уравнений Эйлера (5) и учитывая равенство вторых смешанных производных $q^{(a)}_{,ik} = q^{(a)}_{,ki}$, получим:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\right) q^{(a)}_{,i} + \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} q^{(a)}_{,ik} \quad \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}\left(q^{(a)}_{,i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\delta^k_i L - q^{(a)}_{,i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\right) = 0, \qquad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^k} T^i_k = 0, \tag{7}$$

где введен

$$\tilde{T}^k_i = \delta^k_i L - \sum_a q^{(a)}_{,i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} \tag{8}$$

– несимметричный тензор энергии-импульса.

- Поскольку четырехмерная дивергенция этого тензора равна нулю, к нему можно добавить любой тензор, удовлетворяющий этому же условию. В частности, к нему можно добавить произвольный тензор вида:

$$\partial_l \Psi^{ikl}; \quad \text{где } \Psi^{ikl} = -\Psi^{ilk} \Rightarrow \partial_{kl}\Psi^{ikl} \equiv 0, \tag{9}$$

где Ψ^{ikl} – антисимметричный по двум последним индексам тензор.

- Выбором Ψ^{ikl} всегда можно симметризировать величины (8) и определить симметричный тензор энергии - импульса:

Законы сохранения!

- Подставляя в (6) выражение для $\partial L/\partial q^{(a)}$ из уравнений Эйлера (5) и учитывая равенство вторых смешанных производных $q^{(a)}_{,ik} = q^{(a)}_{,ki}$, получим:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\right) q^{(a)}_{,i} + \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} q^{(a)}_{,ik} \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}\left(q^{(a)}_{,i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\delta^k_i L - q^{(a)}_{,i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\right) = 0, \qquad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^k} T^i_k = 0, \tag{7}$$

где введен

$$\tilde{T}^k_i = \delta^k_i L - \sum_a q^{(a)}_{,i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} \tag{8}$$

– несимметричный тензор энергии-импульса.

- Поскольку четырехмерная дивергенция этого тензора равна нулю, к нему можно добавить любой тензор, удовлетворяющий этому же условию. В частности, к нему можно добавить произвольный тензор вида:

$$\partial_l \Psi^{ikl}; \quad \text{где } \Psi^{ikl} = -\Psi^{ilk} \Rightarrow \partial_{kl}\Psi^{ikl} \equiv 0, \tag{9}$$

где Ψ^{ikl} – антисимметричный по двум последним индексам тензор.

- Выбором Ψ^{ikl} всегда можно симметризировать величины (8) и определить симметричный тензор энергии - импульса:

$$T^{ik} = T^{ki}, \quad \partial_k T^{ik} = 0. \tag{10}$$

Законы сохранения!

Общие принципы получения тензора энергии-импульса

- Подставляя в (6) выражение для $\partial L/\partial q^{(a)}$ из уравнений Эйлера (5) и учитывая равенство вторых смешанных производных $q^{(a)}_{,ik} = q^{(a)}_{,ki}$, получим:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\right) q^{(a)}_{,i} + \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} q^{(a)}_{,ik} \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}\left(q^{(a)}_{,i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\delta^k_i L - q^{(a)}_{,i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\right) = 0, \qquad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^k} T^i_k = 0, \tag{7}$$

где введен

$$\tilde{T}^k_i = \delta^k_i L - \sum_a q^{(a)}_{,i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} \tag{8}$$

– несимметричный тензор энергии-импульса.

- Поскольку четырехмерная дивергенция этого тензора равна нулю, к нему можно добавить любой тензор, удовлетворяющий этому же условию. В частности, к нему можно добавить произвольный тензор вида:

$$\partial_l \Psi^{ikl}; \quad \text{где } \Psi^{ikl} = -\Psi^{ilk} \Rightarrow \partial_{kl}\Psi^{ikl} \equiv 0, \tag{9}$$

где Ψ^{ikl} – антисимметричный по двум последним индексам тензор.

- Выбором Ψ^{ikl} всегда можно симметризировать величины (8) и определить симметричный тензор энергии - импульса:

$$T^{ik} = T^{ki} \qquad \partial_k T^{ik} = 0. \tag{10}$$

Законы сохранения!

- Подставляя в (6) выражение для $\partial L/\partial q^{(a)}$ из уравнений Эйлера (5) и учитывая равенство вторых смешанных производных $q^{(a)}_{,ik} = q^{(a)}_{,ki}$, получим:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\right) q^{(a)}_{,i} + \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} q^{(a)}_{,ik} \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}\left(q^{(a)}_{,i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\delta^k_i L - q^{(a)}_{,i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}}\right) = 0, \qquad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^k} T^i_k = 0, \tag{7}$$

где введен

$$\tilde{T}^k_i = \delta^k_i L - \sum_a q^{(a)}_{,i}\frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} \tag{8}$$

– несимметричный тензор энергии-импульса.

- Поскольку четырехмерная дивергенция этого тензора равна нулю, к нему можно добавить любой тензор, удовлетворяющий этому же условию. В частности, к нему можно добавить произвольный тензор вида:

$$\partial_l \Psi^{ikl}; \quad \text{где } \Psi^{ikl} = -\Psi^{ilk} \Rightarrow \partial_{kl}\Psi^{ikl} \equiv 0, \tag{9}$$

где Ψ^{ikl} – антисимметричный по двум последним индексам тензор.

- Выбором Ψ^{ikl} всегда можно симметризировать величины (8) и определить симметричный тензор энергии - импульса:

$$\boxed{T^{ik} = T^{ki} \qquad \partial_k T^{ik} = 0. \tag{10}}$$

Законы сохранения!

- Для электромагнитного поля функция Лагранжа равна:

$$L = \frac{1}{16\pi} F^{lm} F_{lm}, \tag{11}$$

а динамическими переменными $q^{(a)}$ – компоненты векторного потенциала A_i. Так как функция Лагранжа явно не зависит от этих компонент, а только от их производных, $q^{(a)}_{,i} \to A_{k,i}$ и

$$\frac{\partial F_{lm}}{\partial A_{i,k}} \equiv \frac{\partial}{\partial A_{i,k}} (A_{m,l} - A_{l,m}) = \delta^i_m \delta^k_l - \delta^i_l \delta^k_m, \tag{12}$$

- получим, удваивая результат:

$$\frac{\partial L}{\partial A_{i,k}} = \frac{1}{8\pi} (F^{ki} - F^{ik}) = \frac{1}{4\pi} F^{ki} \Rightarrow$$

$$q^{(a)}_{,i} \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} \Rightarrow A_{l,i} \frac{\partial L}{\partial A_{l,k}} = \frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}. \tag{13}$$

- Таким образом, получим согласно (8) выражение для несимметричного тензора энергии-импульса:

$$T^k_i = \frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl} - \frac{1}{16\pi} \delta^k_i F_{lm} F^{lm}. \tag{14}$$

- Для электромагнитного поля функция Лагранжа равна:

$$L = \frac{1}{16\pi} F^{lm} F_{lm}, \qquad (11)$$

а динамическими переменными $q^{(a)}$ – компоненты векторного потенциала A_i. Так как функция Лагранжа явно не зависит от этих компонент, а только от их производных, $q^{(a)}_{,i} \to A_{k,i}$ и

$$\frac{\partial F_{lm}}{\partial A_{i,k}} \equiv \frac{\partial}{\partial A_{i,k}} \left(A_{m,l} - A_{l,m} \right) = \delta^i_m \delta^k_l - \delta^i_l \delta^k_m, \qquad (12)$$

- получим, удваивая результат:

$$\frac{\partial L}{\partial A_{i,k}} = \frac{1}{8\pi} (F^{ki} - F^{ik}) = \frac{1}{4\pi} F^{ki} \Rightarrow$$

$$q^{(a)}_{,i} \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} \Rightarrow A_{l,i} \frac{\partial L}{\partial A_{l,k}} = \frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}. \qquad (13)$$

- Таким образом, получим согласно (8) выражение для несимметричного тензора энергии-импульса:

$$T^k_i = -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl} + \frac{1}{16\pi} \delta^k_i F_{lm} F^{lm}. \qquad (14)$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

- Для электромагнитного поля функция Лагранжа равна:

$$L = \frac{1}{16\pi} F^{lm} F_{lm}, \tag{11}$$

а динамическими переменными $q^{(a)}$ – компоненты векторного потенциала A_i. Так как функция Лагранжа явно не зависит от этих компонент, а только от их производных, $q^{(a)}_{,i} \to A_{k,i}$ и

$$\frac{\partial F_{lm}}{\partial A_{i,k}} \equiv \frac{\partial}{\partial A_{i,k}} \left(A_{m,l} - A_{l,m}\right) = \delta^i_m \delta^k_l - \delta^i_l \delta^k_m, \tag{12}$$

- получим, удваивая результат:

$$\frac{\partial L}{\partial A_{i,k}} = \frac{1}{8\pi}(F^{ki} - F^{ik}) = \frac{1}{4\pi} F^{ki} \Rightarrow$$

$$q^{(a)}_{,i} \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} \Rightarrow A_{l,i} \frac{\partial L}{\partial A_{l,k}} = \frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}. \tag{13}$$

- Таким образом, получим согласно (8) выражение для несимметричного тензора энергии-импульса:

- Для электромагнитного поля функция Лагранжа равна:

$$L = \frac{1}{16\pi} F^{lm} F_{lm}, \qquad (11)$$

а динамическими переменными $q^{(a)}$ – компоненты векторного потенциала A_i. Так как функция Лагранжа явно не зависит от этих компонент, а только от их производных, $q^{(a)}_{,i} \to A_{k,i}$ и

$$\frac{\partial F_{lm}}{\partial A_{i,k}} \equiv \frac{\partial}{\partial A_{i,k}} (A_{m,l} - A_{l,m}) = \delta^i_m \delta^k_l - \delta^i_l \delta^k_m, \qquad (12)$$

- получим, удваивая результат:

$$\frac{\partial L}{\partial A_{i,k}} = \frac{1}{8\pi}(F^{ki} - F^{ik}) = \frac{1}{4\pi} F^{ki} \Rightarrow$$

$$q^{(a)}_{,i} \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} \Rightarrow A_{l,i} \frac{\partial L}{\partial A_{l,k}} = \frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}. \qquad (13)$$

- Таким образом, получим согласно (8) выражение для несимметричного тензора энергии-импульса:

$$T^k_i = -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl} + \frac{1}{16\pi} \delta^k_i F_{lm} F^{lm}. \qquad (14)$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

- Для электромагнитного поля функция Лагранжа равна:

$$L = \frac{1}{16\pi} F^{lm} F_{lm}, \tag{11}$$

а динамическими переменными $q^{(a)}$ – компоненты векторного потенциала A_i. Так как функция Лагранжа явно не зависит от этих компонент, а только от их производных, $q^{(a)}_{,i} \to A_{k,i}$ и

$$\frac{\partial F_{lm}}{\partial A_{i,k}} \equiv \frac{\partial}{\partial A_{i,k}} \left(A_{m,l} - A_{l,m}\right) = \delta^i_m \delta^k_l - \delta^i_l \delta^k_m, \tag{12}$$

- получим, удваивая результат:

$$\frac{\partial L}{\partial A_{i,k}} = \frac{1}{8\pi}(F^{ki} - F^{ik}) = \frac{1}{4\pi} F^{ki} \Rightarrow$$

$$q^{(a)}_{,i} \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} \Rightarrow A_{l,i} \frac{\partial L}{\partial A_{l,k}} = \frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}. \tag{13}$$

- Таким образом, получим согласно (8) выражение для несимметричного тензора энергии-импульса:

$$\tilde{T}^k_i = -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl} + \frac{1}{16\pi} \delta^k_i F_{lm} F^{lm}. \tag{14}$$

- Для электромагнитного поля функция Лагранжа равна:

$$L = \frac{1}{16\pi} F^{lm} F_{lm}, \tag{11}$$

а динамическими переменными $q^{(a)}$ – компоненты векторного потенциала A_i. Так как функция Лагранжа явно не зависит от этих компонент, а только от их производных, $q^{(a)}_{,i} \to A_{k,i}$ и

$$\frac{\partial F_{lm}}{\partial A_{i,k}} \equiv \frac{\partial}{\partial A_{i,k}} (A_{m,l} - A_{l,m}) = \delta^i_m \delta^k_l - \delta^i_l \delta^k_m, \tag{12}$$

- получим, удваивая результат:

$$\frac{\partial L}{\partial A_{i,k}} = \frac{1}{8\pi}(F^{ki} - F^{ik}) = \frac{1}{4\pi} F^{ki} \Rightarrow$$

$$q^{(a)}_{,i} \frac{\partial L}{\partial q^{(a)}_{,k}} \Rightarrow A_{l,i} \frac{\partial L}{\partial A_{l,k}} = \frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}. \tag{13}$$

- Таким образом, получим согласно (8) выражение для несимметричного тензора энергии-импульса:

$$\tilde{T}^k_i = -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl} + \frac{1}{16\pi} \delta^k_i F_{lm} F^{lm}. \tag{14}$$

- Вычислим дивергенцию от тензора $\tilde{T}_i^k$ (14):

$$\partial_k \tilde{T}_i^k = -\frac{1}{4\pi} A_{l,ik} F^{kl} - \frac{1}{4\pi} A_{l,ik} F^{kl}_{,k} + \frac{1}{8\pi} F_{lm,i} F^{lm} \Rightarrow$$

$$\Big| A_{l,ik} F^{kl} = \partial_i A_{l,k} F^{kl} \equiv \frac{1}{2} (\partial_i (A_{l,k}) F^{kl} + \partial_i (A_{k,l}) F^{lk}) \equiv$$

$$\frac{1}{2} (\partial_i A_{l,k} - \partial_i A_{k,l}) F^{kl} \equiv \frac{1}{2} F_{kl,i} F^{kl} \Big| \Rightarrow$$

$$\partial_k \tilde{T}_i^k = -\frac{1}{8\pi} F_{kl,i} F^{kl} - \frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}_{,k} + \frac{1}{8\pi} F_{lm,i} F^{lm} \equiv -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}_{,k}. \quad (15)$$

- Таким образом, с учетом второй группы уравнений Максвелла (22), Лекция 13, получим окончательно в отсутствие электрических зарядов ($J^i = 0$):

$$\partial_k \tilde{T}_i^k = -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}_{,k} = \frac{4\pi}{c} A_{l,i} J^l \Rightarrow \partial_k \tilde{T}_i^k = 0. \quad (16)$$

- Симметризация тензора (14) согласно (9) может быть произведена добавлением к нему

$$\frac{1}{4\pi} A_{i,l} F^{kl} \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^l} A_i F^{kl} - \frac{1}{4\pi} A_i F^{kl}_{,l} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^l} A_i F^{kl} + \frac{1}{c} A_i J^k. \quad (17)$$

- Действительно, в отсутствие электрических зарядов последний член в правой части (17) равен нулю и, полагая $\psi^{ikl} = \frac{1}{4\pi} A^i F^{kl}$, мы удовлетворяем условию (9).

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

- Вычислим дивергенцию от тензора $\tilde{T}_i^k$ (14):

$$\partial_k \tilde{T}_i^k = -\frac{1}{4\pi} A_{l,ik} F^{kl} - \frac{1}{4\pi} A_{l,ik} F^{kl}_{\ ,k} + \frac{1}{8\pi} F_{lm,i} F^{lm} \Rightarrow$$

$$\Big| A_{l,ik} F^{kl} = \partial_i A_{l,k} F^{kl} \equiv \frac{1}{2}(\partial_i (A_{l,k}) F^{kl} + \partial_i (A_{k,l}) F^{lk}) \equiv$$

$$\frac{1}{2}(\partial_i A_{l,k} - \partial_i A_{k,l}) F^{kl} \equiv \frac{1}{2} F_{kl,i} F^{kl} \Big| \Rightarrow$$

$$\partial_k \tilde{T}_i^k = -\frac{1}{8\pi} F_{kl,i} F^{kl} - \frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}_{\ ,k} + \frac{1}{8\pi} F_{lm,i} F^{lm} \equiv -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}_{\ ,k}. \quad (15)$$

- Таким образом, с учетом второй группы уравнений Максвелла (22), Лекция 13, получим окончательно в отсутствие электрических зарядов ($J^i = 0$):

$$\partial_k \tilde{T}_i^k = -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}_{\ ,k} = \frac{4\pi}{c} A_{l,i} J^l \Rightarrow \partial_k \tilde{T}_i^k = 0. \quad (16)$$

- Симметризация тензора (14) согласно (9) может быть произведена добавлением к нему

$$\frac{1}{4\pi} A_{i,l} F^{kl} \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^l} A_i F^{kl} - \frac{1}{4\pi} A_i F^{kl}_{\ ,l} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^l} A_i F^{kl} + \frac{1}{c} A_i J^k. \quad (17)$$

- Действительно, в отсутствие электрических зарядов последний член в правой части (17) равен нулю и, полагая $\psi^{ikl} = \frac{1}{4\pi} A^i F^{kl}$, мы удовлетворяем условию (9).

- Вычислим дивергенцию от тензора $\tilde{T}_i^k$ (14):

$$\partial_k \tilde{T}_i^k = -\frac{1}{4\pi} A_{l,ik} F^{kl} - \frac{1}{4\pi} A_{l,ik} F^{kl}_{\ ,k} + \frac{1}{8\pi} F_{lm,i} F^{lm} \Rightarrow$$

$$\Big| A_{l,ik} F^{kl} = \partial_i A_{l,k} F^{kl} \equiv \frac{1}{2}(\partial_i (A_{l,k}) F^{kl} + \partial_i (A_{k,l}) F^{lk}) \equiv$$

$$\frac{1}{2}(\partial_i A_{l,k} - \partial_i A_{k,l}) F^{kl} \equiv \frac{1}{2} F_{kl,i} F^{kl} \Big| \Rightarrow$$

$$\partial_k \tilde{T}_i^k = -\frac{1}{8\pi} F_{kl,i} F^{kl} - \frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}_{\ ,k} + \frac{1}{8\pi} F_{lm,i} F^{lm} \equiv -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}_{\ ,k}. \quad (15)$$

- Таким образом, с учетом второй группы уравнений Максвелла (22), Лекция 13, получим окончательно в отсутствие электрических зарядов ($J^i = 0$):

$$\partial_k \tilde{T}_i^k = -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}_{\ ,k} = \frac{4\pi}{c} A_{l,i} J^l \Rightarrow \partial_k \tilde{T}_i^k = 0. \quad (16)$$

- Симметризация тензора (14) согласно (9) может быть произведена добавлением к нему

$$\frac{1}{4\pi} A_{i,l} F^{kl} \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^l} A_i F^{kl} - \frac{1}{4\pi} A_i F^{kl}_{\ ,l} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^l} A_i F^{kl} + \frac{1}{c} A_i J^k. \quad (17)$$

- Действительно, в отсутствие электрических зарядов последний член в правой части (17) равен нулю и, полагая $\psi^{ikl} = \frac{1}{4\pi} A^i F^{kl}$, мы удовлетворяем условию (9).

- Вычислим дивергенцию от тензора $\tilde{T}_i^k$ (14):

$$\partial_k \tilde{T}_i^k = -\frac{1}{4\pi} A_{l,ik} F^{kl} - \frac{1}{4\pi} A_{l,ik} F^{kl}_{\ ,k} + \frac{1}{8\pi} F_{lm,i} F^{lm} \Rightarrow$$

$$\Big| A_{l,ik} F^{kl} = \partial_i A_{l,k} F^{kl} \equiv \frac{1}{2}(\partial_i (A_{l,k}) F^{kl} + \partial_i (A_{k,l}) F^{lk}) \equiv$$

$$\frac{1}{2}(\partial_i A_{l,k} - \partial_i A_{k,l}) F^{kl} \equiv \frac{1}{2} F_{kl,i} F^{kl} \Big| \Rightarrow$$

$$\partial_k \tilde{T}_i^k = -\frac{1}{8\pi} F_{kl,i} F^{kl} - \frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}_{\ ,k} + \frac{1}{8\pi} F_{lm,i} F^{lm} \equiv -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}_{\ ,k}. \quad (15)$$

- Таким образом, с учетом второй группы уравнений Максвелла (22), Лекция 13, получим окончательно в отсутствие электрических зарядов ($J^i = 0$):

$$\partial_k \tilde{T}_i^k = -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}_{\ ,k} = \frac{4\pi}{c} A_{l,i} J^l \Rightarrow \partial_k \tilde{T}_i^k = 0. \quad (16)$$

- Симметризация тензора (14) согласно (9) может быть произведена добавлением к нему

$$\frac{1}{4\pi} A_{i,l} F^{kl} \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^l} A_i F^{kl} - \frac{1}{4\pi} A_i F^{kl}_{\ ,l} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^l} A_i F^{kl} + \frac{1}{c} A_i J^k. \quad (17)$$

- Действительно, в отсутствие электрических зарядов последний член в правой части (17) равен нулю и, полагая $\psi^{ikl} = \frac{1}{4\pi} A^i F^{kl}$, мы удовлетворяем условию (9).

- Вычислим дивергенцию от тензора $\tilde{T}_i^k$ (14):

$$\partial_k \tilde{T}_i^k = -\frac{1}{4\pi} A_{l,ik} F^{kl} - \frac{1}{4\pi} A_{l,ik} F^{kl}_{\ ,k} + \frac{1}{8\pi} F_{lm,i} F^{lm} \Rightarrow$$

$$\Big| A_{l,ik} F^{kl} = \partial_i A_{l,k} F^{kl} \equiv \frac{1}{2}(\partial_i (A_{l,k}) F^{kl} + \partial_i (A_{k,l}) F^{lk}) \equiv$$

$$\frac{1}{2}(\partial_i A_{l,k} - \partial_i A_{k,l}) F^{kl} \equiv \frac{1}{2} F_{kl,i} F^{kl} \Big| \Rightarrow$$

$$\partial_k \tilde{T}_i^k = -\frac{1}{8\pi} F_{kl,i} F^{kl} - \frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}_{\ ,k} + \frac{1}{8\pi} F_{lm,i} F^{lm} \equiv -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}_{\ ,k}. \quad (15)$$

- Таким образом, с учетом второй группы уравнений Максвелла (22), Лекция 13, получим окончательно в отсутствие электрических зарядов $(J^i = 0)$:

$$\partial_k \tilde{T}_i^k = -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl}_{\ ,k} = \frac{4\pi}{c} A_{l,i} J^l \Rightarrow \partial_k \tilde{T}_i^k = 0. \quad (16)$$

- Симметризация тензора (14) согласно (9) может быть произведена добавлением к нему

$$\frac{1}{4\pi} A_{i,l} F^{kl} \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^l} A_i F^{kl} - \frac{1}{4\pi} A_i F^{kl}_{\ ,l} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^l} A_i F^{kl} + \frac{1}{c} A_i J^k. \quad (17)$$

- Действительно, в отсутствие электрических зарядов последний член в правой части (17) равен нулю и, полагая $\psi^{ikl} = \frac{1}{4\pi} A^i F^{kl}$, мы удовлетворяем условию (9).

- Добавляя член (17) к несимметричному тензору $\tilde{T}_i^k$ (14)

$$T_i^k = \tilde{T}_i^k + \frac{1}{4\pi}A_{i,l}F^{kl} = -\frac{1}{4\pi}A_{l,i}F^{kl} + \frac{1}{4\pi}A_{i,l}F^{kl} + \frac{1}{16\pi}\delta_i^k F_{lm}F^{lm},$$

- получим симметричный тензор энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T_i^{(f)\ k} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F^{kl} + \frac{1}{4}\delta_k^i F_{lm}F^{lm}\right) \Rightarrow \tag{18}$$

$$T_{ik}^{(f)} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F_{k.}^{l} + \frac{1}{4}g_{ik}F_{lm}F^{lm}\right). \tag{19}$$

- Поскольку:

$$g_{ik}g^{ik} = \delta_k^k = n(=4),$$

то след тензора энергии-импульса электромагнитного поля равен нулю

$$T^{(f)} = T_{ik}^{(f)}g^{ik} = 0.$$

- В Лекции 12 (XIII) мы ввели инвариантную функцию источника, формула (12):

$$\Delta(x, x_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^4(x - x_a(s))ds,$$

- с помощью которой определили микроскопический вектор плотности тока, формула (14):

$$J^i = \sum_a e_a c \int_{-\infty}^{+\infty} u_a^i(s_a)\delta^4(x - x_a(s))ds_a.$$

- Добавляя член (17) к несимметричному тензору $\tilde{T}_i^k$ (14)

$$T_i^k = \tilde{T}_i^k + \frac{1}{4\pi}A_{i,l}F^{kl} = -\frac{1}{4\pi}A_{l,i}F^{kl} + \frac{1}{4\pi}A_{i,l}F^{kl} + \frac{1}{16\pi}\delta_i^k F_{lm}F^{lm},$$

- получим симметричный тензор энергии-импульса электромагнитного поля:

$$\boxed{T_i^{(f)\ k} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F^{kl} + \frac{1}{4}\delta_k^i F_{lm}F^{lm}\right) \Rightarrow \quad (18)$$
$$T_{ik}^{(f)} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F_{k.}^{l} + \frac{1}{4}g_{ik}F_{lm}F^{lm}\right). \quad (19)}$$

- Поскольку:

$$g_{ik}g^{ik} = \delta_k^k = n(=4), \quad (20)$$

то след тензора энергии-импульса электромагнитного поля равен нулю

$$\boxed{T^{(f)} = T_{ik}^{(f)}g^{ik} = 0. \quad (21)}$$

- В Лекции 12 (XIII) мы ввели инвариантную функцию источника, формула (12):

- с помощью которой определили микроскопический вектор плотности тока, формула (14):

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

- Добавляя член (17) к несимметричному тензору $\tilde{T}_i^k$ (14)

$$T_i^k = \tilde{T}_i^k + \frac{1}{4\pi}A_{i,l}F^{kl} = -\frac{1}{4\pi}A_{l,i}F^{kl} + \frac{1}{4\pi}A_{i,l}F^{kl} + \frac{1}{16\pi}\delta_i^k F_{lm}F^{lm},$$

- получим симметричный тензор энергии-импульса электромагнитного поля:

$$\boxed{\begin{aligned} T_i^{(f)\ k} &= \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F^{kl} + \frac{1}{4}\delta_k^i F_{lm}F^{lm}\right) \Rightarrow & (18)\\ T_{ik}^{(f)} &= \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F_{k.}^{l} + \frac{1}{4}g_{ik}F_{lm}F^{lm}\right). & (19)\end{aligned}}$$

- Поскольку:

$$g_{ik}g^{ik} = \delta_k^k = n(=4), \qquad (20)$$

то след тензора энергии-импульса электромагнитного поля равен нулю

- В Лекции 12 (XIII) мы ввели инвариантную функцию источника, формула (12):

- с помощью которой определили микроскопический вектор плотности тока, формула (14):

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

- Добавляя член (17) к несимметричному тензору $\tilde{T}_i^k$ (14)

$$T_i^k = \tilde{T}_i^k + \frac{1}{4\pi} A_{i,l} F^{kl} = -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl} + \frac{1}{4\pi} A_{i,l} F^{kl} + \frac{1}{16\pi} \delta_i^k F_{lm} F^{lm},$$

- получим симметричный тензор энергии-импульса электромагнитного поля:

$$\boxed{\begin{aligned} T_i^{(f)\ k} &= \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F^{kl} + \frac{1}{4}\delta_k^i F_{lm}F^{lm}\right) \Rightarrow & (18)\\ T_{ik}^{(f)} &= \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F_{k.}^{l} + \frac{1}{4} g_{ik} F_{lm}F^{lm}\right). & (19)\end{aligned}}$$

- Поскольку:

$$g_{ik} g^{ik} \equiv \delta_k^k = n(=4), \qquad (20)$$

то след тензора энергии-импульса электромагнитного поля равен нулю

$$\boxed{T^{(f)} \equiv T_{ik}^{(f)} g^{ik} = 0. \qquad (21)}$$

- В Лекции 12 (XIII) мы ввели инвариантную функцию источника, формула (12):

$$\Delta(x, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^4(x - x_0(s)) ds, \qquad (22)$$

- с помощью которой определили микроскопический вектор плотности тока, формула (14):

$$J^i = \sum_a e_a c \int_{-\infty}^{+\infty} u_a^i(s_a) \delta^4(x - x_a(s_a)) ds_a. \qquad (23)$$

- Добавляя член (17) к несимметричному тензору $\tilde{T}_i^k$ (14)

$$T_i^k = \tilde{T}_i^k + \frac{1}{4\pi} A_{i,l} F^{kl} = -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl} + \frac{1}{4\pi} A_{i,l} F^{kl} + \frac{1}{16\pi} \delta_i^k F_{lm} F^{lm},$$

- получим симметричный тензор энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T_i^{(f)\ k} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F^{kl} + \frac{1}{4}\delta_k^i F_{lm}F^{lm}\right) \Rightarrow \tag{18}$$

$$T_{ik}^{(f)} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F_{k.}^{l} + \frac{1}{4} g_{ik} F_{lm}F^{lm}\right). \tag{19}$$

- Поскольку:

$$g_{ik}g^{ik} \equiv \delta_k^k = n(=4), \tag{20}$$

то след тензора энергии-импульса электромагнитного поля равен нулю

$$T^{(f)} \equiv T_{ik}^{(f)} g^{ik} = 0. \tag{21}$$

- В Лекции 12 (XIII) мы ввели инвариантную функцию источника, формула (12):

- с помощью которой определили микроскопический вектор плотности тока, формула (14):

- Добавляя член (17) к несимметричному тензору $\tilde{T}_i^k$ (14)

$$T_i^k = \tilde{T}_i^k + \frac{1}{4\pi} A_{i,l} F^{kl} = -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl} + \frac{1}{4\pi} A_{i,l} F^{kl} + \frac{1}{16\pi} \delta_i^k F_{lm} F^{lm},$$

- получим симметричный тензор энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T_i^{(f)\ k} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il} F^{kl} + \frac{1}{4}\delta_k^i F_{lm} F^{lm}\right) \Rightarrow \tag{18}$$

$$T_{ik}^{(f)} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il} F_{k.}^{l} + \frac{1}{4} g_{ik} F_{lm} F^{lm}\right). \tag{19}$$

- Поскольку:

$$g_{ik} g^{ik} \equiv \delta_k^k = n(=4), \tag{20}$$

то след тензора энергии-импульса электромагнитного поля равен нулю

$$T^{(f)} \equiv T_{ik}^{(f)} g^{ik} = 0. \tag{21}$$

- В Лекции 12 (XIII) мы ввели инвариантную функцию источника, формула (12):

$$\Delta(\tilde{x}, \tilde{x}_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^n(x, x_a(s)) ds, \tag{22}$$

- с помощью которой определили микроскопический вектор плотности тока, формула (14):

$$J^i = \sum_a e_a c \int_{-\infty}^{+\infty} u_a^i(s_a) \delta^4(x, x_a(s)) ds_a. \tag{23}$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

- Добавляя член (17) к несимметричному тензору $\tilde{T}_i^k$ (14)

$$T_i^k = \tilde{T}_i^k + \frac{1}{4\pi} A_{i,l} F^{kl} = -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl} + \frac{1}{4\pi} A_{i,l} F^{kl} + \frac{1}{16\pi} \delta_i^k F_{lm} F^{lm},$$

- получим симметричный тензор энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T_i^{(f)\ k} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F^{kl} + \frac{1}{4}\delta_k^i F_{lm}F^{lm}\right) \Rightarrow \tag{18}$$

$$T_{ik}^{(f)} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F^{l}_{k.} + \frac{1}{4} g_{ik} F_{lm} F^{lm}\right). \tag{19}$$

- Поскольку:

$$g_{ik} g^{ik} \equiv \delta_k^k = n (= 4), \tag{20}$$

то след тензора энергии-импульса электромагнитного поля равен нулю

$$T^{(f)} \equiv T_{ik}^{(f)} g^{ik} = 0. \tag{21}$$

- В Лекции 12 (XIII) мы ввели инвариантную функцию источника, формула (12):

$$\Delta(\tilde{x}, \tilde{x}_a) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta^n(x, x_a(s)) ds, \tag{22}$$

- с помощью которой определили микроскопический вектор плотности тока, формула (14):

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

- Добавляя член (17) к несимметричному тензору $\tilde{T}_i^k$ (14)

$$T_i^k = \tilde{T}_i^k + \frac{1}{4\pi}A_{i,l}F^{kl} = -\frac{1}{4\pi}A_{l,i}F^{kl} + \frac{1}{4\pi}A_{i,l}F^{kl} + \frac{1}{16\pi}\delta_i^k F_{lm}F^{lm},$$

- получим симметричный тензор энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T_i^{(f)\ k} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F^{kl} + \frac{1}{4}\delta_k^i F_{lm}F^{lm}\right) \Rightarrow \tag{18}$$

$$T_{ik}^{(f)} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F_{k.}^{l} + \frac{1}{4}g_{ik}F_{lm}F^{lm}\right). \tag{19}$$

- Поскольку:

$$g_{ik}g^{ik} \equiv \delta_k^k = n(=4), \tag{20}$$

то след тензора энергии-импульса электромагнитного поля равен нулю

$$T^{(f)} \equiv T_{ik}^{(f)}g^{ik} = 0. \tag{21}$$

- В Лекции 12 (XIII) мы ввели инвариантную функцию источника, формула (12):

$$\Delta(\tilde{x}, \tilde{x}_a) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta^n(x, x_a(s))ds, \tag{22}$$

- с помощью которой определили микроскопический вектор плотности тока, формула (14):

$$J^i = \sum_a e_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_a^i(s_a)\delta^4(x, x_a(s))ds_a. \tag{23}$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

- Добавляя член (17) к несимметричному тензору $\tilde{T}_i^k$ (14)

$$T_i^k = \tilde{T}_i^k + \frac{1}{4\pi}A_{i,l}F^{kl} = -\frac{1}{4\pi}A_{l,i}F^{kl} + \frac{1}{4\pi}A_{i,l}F^{kl} + \frac{1}{16\pi}\delta_i^k F_{lm}F^{lm},$$

- получим симметричный тензор энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T_i^{(f)\ k} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F^{kl} + \frac{1}{4}\delta^i_k F_{lm}F^{lm}\right) \Rightarrow \tag{18}$$

$$T^{(f)}_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F^{l}_{k.} + \frac{1}{4}g_{ik}F_{lm}F^{lm}\right). \tag{19}$$

- Поскольку:

$$g_{ik}g^{ik} \equiv \delta_k^k = n(=4), \tag{20}$$

то след тензора энергии-импульса электромагнитного поля равен нулю

$$T^{(f)} \equiv T^{(f)}_{ik}g^{ik} = 0. \tag{21}$$

- В Лекции 12 (XIII) мы ввели инвариантную функцию источника, формула (12):

$$\Delta(\tilde{x}, \tilde{x}_a) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta^n(x, x_a(s))ds, \tag{22}$$

- с помощью которой определили микроскопический вектор плотности тока, формула (14):

$$J^i = \sum_a e_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^i_a(s_a)\delta^4(x, x_a(s))ds_a. \tag{23}$$

- Добавляя член (17) к несимметричному тензору $\tilde{T}_i^k$ (14)

$$T_i^k = \tilde{T}_i^k + \frac{1}{4\pi} A_{i,l} F^{kl} = -\frac{1}{4\pi} A_{l,i} F^{kl} + \frac{1}{4\pi} A_{i,l} F^{kl} + \frac{1}{16\pi} \delta_i^k F_{lm} F^{lm},$$

- получим симметричный тензор энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T_i^{(f)\ k} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il} F^{kl} + \frac{1}{4}\delta_k^i F_{lm} F^{lm}\right) \Rightarrow \quad (18)$$

$$T_{ik}^{(f)} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il} F_{k.}^{l} + \frac{1}{4} g_{ik} F_{lm} F^{lm}\right). \quad (19)$$

- Поскольку:

$$g_{ik} g^{ik} \equiv \delta_k^k = n (= 4), \quad (20)$$

то след тензора энергии-импульса электромагнитного поля равен нулю

$$T^{(f)} \equiv T_{ik}^{(f)} g^{ik} = 0. \quad (21)$$

- В Лекции 12 (XIII) мы ввели инвариантную функцию источника, формула (12):

$$\Delta(\tilde{x}, \tilde{x}_a) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta^n(x, x_a(s)) ds, \quad (22)$$

- с помощью которой определили микроскопический вектор плотности тока, формула (14):

$$J^i = \sum_a e_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_a^i(s_a) \delta^4(x, x_a(s)) ds_a. \quad (23)$$

Тензор энергии-импульса частиц

- Аналогично (23) определим симметричный микроскопический тензор частиц (particles)

$$\boxed{T^{(p)\ ik} = \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_a^i(s_a) u_a^k(s_a) \delta^4(x, x_a(s)) ds_a. \qquad (24)}$$

- Вычислим дивергенцию этого тензора с учетом дифференциального тождества (15) Лекции 12:

$$u^i \frac{\partial}{\partial x^i} f(x(s)) = \frac{df}{ds}. \qquad (25)$$

- Таким образом, получим:

$$\begin{aligned} \partial_k T^{(p)\ ik} &= \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_a^i(s_a) u_a^k(s_a) \frac{\partial}{\partial x^k} \delta^4(x, x_a(s)) ds_a \\ &= \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{ds} \delta^4(x, x_a(s)) u_a^i(s_a) ds_a \\ &= \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta^4(x, x_a(s)) \frac{du_a^i}{ds_a} ds_a. \qquad (26) \end{aligned}$$

- Аналогично (23) определим симметричный микроскопический тензор частиц (particles)

$$T^{(p)\ ik} = \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_a^i(s_a) u_a^k(s_a) \delta^4(x, x_a(s)) ds_a. \qquad (24)$$

- Вычислим дивергенцию этого тензора с учетом дифференциального тождества (15) Лекции 12:

$$u^k \frac{\partial}{\partial x^k} \delta^4(x, x(s)) = -\frac{d}{ds} \delta^4(x, x(s)) \qquad (25)$$

- Таким образом, получим:

$$\begin{aligned} \partial_k T^{(p)\ ik} &= \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_a^i(s_a) u_a^k(s_a) \frac{\partial}{\partial x^k} \delta^4(x, x_a(s)) ds_a \\ &= \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{ds} \delta^4(x, x_a(s)) u_a^i(s_a) ds_a \\ &= \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta^4(x, x_a(s)) \frac{du_a^i}{ds_a} ds_a. \qquad (26) \end{aligned}$$

Тензор энергии-импульса частиц

- Аналогично (23) определим симметричный микроскопический тензор частиц (particles)

$$T^{(p)\ ik} = \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^i_a(s_a) u^k_a(s_a) \delta^4(x, x_a(s)) ds_a. \qquad (24)$$

- Вычислим дивергенцию этого тензора с учетом дифференциального тождества (15) Лекции 12:

$$u^k \frac{\partial}{\partial x^k} f(x(s)) = \frac{df}{ds}. \qquad (25)$$

- Таким образом, получим:

$$\begin{aligned} \partial_k T^{(p)\ ik} &= \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^i_a(s_a) u^k_a(s_a) \frac{\partial}{\partial x^k} \delta^4(x, x_a(s)) ds_a \\ &= \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{ds} \delta^4(x, x_a(s)) u^i_a(s_a) ds_a \\ &= \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta^4(x, x_a(s)) \frac{du^i_a}{ds_a} ds_a. \end{aligned} \qquad (26)$$

- Аналогично (23) определим симметричный микроскопический тензор частиц (particles)

$$T^{(p)\ ik} = \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^i_a(s_a) u^k_a(s_a) \delta^4(x, x_a(s)) ds_a. \tag{24}$$

- Вычислим дивергенцию этого тензора с учетом дифференциального тождества (15) Лекции 12:

$$u^i \frac{\partial}{\partial x^i} f(x(s)) \equiv \frac{df}{ds}. \tag{25}$$

- Таким образом, получим:

$$\begin{aligned} \partial_k T^{(p)\ ik} &= \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^i_a(s_a) u^k_a(s_a) \frac{\partial}{\partial x^k} \delta^4(x, x_a(s)) ds_a \\ &= \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{ds} \delta^4(x, x_a(s)) u^i_a(s_a) ds_a \\ &= \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta^4(x, x_a(s)) \frac{du^i_a}{ds_a} ds_a. \end{aligned} \tag{26}$$

Тензор энергии-импульса частиц

- Аналогично (23) определим симметричный микроскопический тензор частиц (particles)

$$\boxed{T^{(p)\ ik} = \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^i_a(s_a) u^k_a(s_a) \delta^4(x, x_a(s)) ds_a.} \qquad (24)$$

- Вычислим дивергенцию этого тензора с учетом дифференциального тождества (15) Лекции 12:

$$u^i \frac{\partial}{\partial x^i} f(x(s)) \equiv \frac{df}{ds}. \qquad (25)$$

- Таким образом, получим:

$$\begin{aligned} \partial_k T^{(p)\ ik} &= \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^i_a(s_a) u^k_a(s_a) \frac{\partial}{\partial x^k} \delta^4(x, x_a(s)) ds_a \\ &= \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{ds} \delta^4(x, x_a(s)) u^i_a(s_a) ds_a \\ &= \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta^4(x, x_a(s)) \frac{du^i_a}{ds_a} ds_a. \end{aligned} \qquad (26)$$

Тензор энергии-импульса частиц

- Аналогично (23) определим симметричный микроскопический тензор частиц (particles)

$$T^{(p)\ ik} = \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_a^i(s_a) u_a^k(s_a) \delta^4(x, x_a(s)) ds_a. \tag{24}$$

- Вычислим дивергенцию этого тензора с учетом дифференциального тождества (15) Лекции 12:

$$u^i \frac{\partial}{\partial x^i} f(x(s)) \equiv \frac{df}{ds}. \tag{25}$$

- Таким образом, получим:

$$\begin{aligned}
\partial_k T^{(p)\ ik} &= \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_a^i(s_a) u_a^k(s_a) \frac{\partial}{\partial x^k} \delta^4(x, x_a(s)) ds_a \\
&= \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{ds} \delta^4(x, x_a(s)) u_a^i(s_a) ds_a \\
&= \sum_a m_a c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta^4(x, x_a(s)) \frac{du_a^i}{ds_a} ds_a.
\end{aligned} \tag{26}$$

Полный тензор энергии-импульса системы заряженных частиц

- Подставим в (26) выражение для полной производной вектора скорости частицы du^i_a/ds_a из уравнений движения заряженной частицы в электромагнитном поле, Лекция 9 (X), формула (15):

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{mc^2} F^i_{.k} u^k \qquad (27)$$

- в формулу (26) с учетом свойств δ - функции и определения вектора плотности тока (23):

$$\partial_k T^{(p)\ ik} = \frac{1}{c} J^k F^i_{.k}(x). \qquad (28)$$

- Выше мы вычисляли дивергенцию тензора энергии-импульса электромагнитного поля, отбрасывая члены с произведением плотности тока на тензор Максвелла, предполагая отсутствие зарядов. Теперь мы снимем это ограничение, заново вычислив ковариантную дивергенцию симметричного тензора электромагнитного поля (19) с учетом уравнений Максвелла 1-ой и 2-ой группы и делая замену индексов $k, l \to l, m$ в в первом члене:

$$\nabla_k T^{(f)\ ik} = \frac{1}{4\pi} \nabla_k \left(-F^i_{.l} F^{kl} + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm}\right) \equiv$$

$$\frac{1}{4\pi}\left(-F^{im,l} F_{lm} - F^i_{.m} F^{lm}_{,l} + \frac{1}{2} F_{lm} F^{lm,i}\right) \equiv$$

$$-\frac{1}{8\pi}\left(F^{im,l} + F^{il,m} + F^{ml,i}\right) F_{lm} - \frac{1}{4\pi} F^i_{.m} F^{lm}_{,l} \Rightarrow$$

$$\nabla_k T^{(f)\ ik} = -\frac{1}{c} F^i_{.m} J^m. \qquad (29)$$

Полный тензор энергии-импульса системы заряженных частиц

- Подставим в (26) выражение для полной производной вектора скорости частицы du_a^i/ds_a из уравнений движения заряженной частицы в электромагнитном поле, Лекция 9 (X), формула (15):

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{mc^2} F^i_{\cdot\ k} u^k \qquad (27)$$

- в формулу (26) с учетом свойств δ - функции и определения вектора плотности тока (23):

$$\partial_k T^{(p)\ ik} = \frac{1}{c} J^k F^i_{.k}(x). \qquad (28)$$

- Выше мы вычисляли дивергенцию тензора энергии-импульса электромагнитного поля, отбрасывая члены с произведением плотности тока на тензор Максвелла, предполагая отсутствие зарядов. Теперь мы снимем это ограничение, заново вычислив ковариантную дивергенцию симметричного тензора электромагнитного поля (19) с учетом уравнений Максвелла 1-ой и 2-ой группы и делая замену индексов $k, l \to l, m$ в в первом члене:

$$\nabla_k T^{(f)\ ik} = \frac{1}{4\pi} \nabla_k \left(-F^i_{.l} F^{kl} + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm}\right) \equiv$$

$$\frac{1}{4\pi}\left(-F^{im,l} F_{lm} - F^i_{.m} F^{lm}_{,l} + \frac{1}{2} F_{lm} F^{lm,i}\right) \equiv$$

$$-\frac{1}{8\pi}\left(F^{im,l} + F^{il,m} + F^{ml,i}\right) F_{lm} - \frac{1}{4\pi} F^i_{.m} F^{lm}_{,l} \Rightarrow$$

$$\nabla_k T^{(f)\ ik} = -\frac{1}{c} F^i_{.m} J^m. \qquad (29)$$

Полный тензор энергии-импульса системы заряженных частиц

- Подставим в (26) выражение для полной производной вектора скорости частицы du^i_a/ds_a из уравнений движения заряженной частицы в электромагнитном поле, Лекция 9 (X), формула (15):

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{mc^2}F^i_{\cdot\ k}u^k \qquad (27)$$

- в формулу (26) с учетом свойств δ - функции и определения вектора плотности тока (23):

$$\partial_k T^{(p)\ ik} = \frac{1}{c}J^k F^i_{.k}(x). \qquad (28)$$

- Выше мы вычисляли дивергенцию тензора энергии-импульса электромагнитного поля, отбрасывая члены с произведением плотности тока на тензор Максвелла, предполагая отсутствие зарядов. Теперь мы снимем это ограничение, заново вычислив ковариантную дивергенцию симметричного тензора электромагнитного поля (19) с учетом уравнений Максвелла 1-ой и 2-ой группы и делая замену индексов $k, l \to l, m$ в в первом члене:

$$\nabla_k T^{(f)\ ik} = \frac{1}{4\pi}\nabla_k\left(-F^i_{.l}F^{kl} + \frac{1}{4}g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right) \equiv$$

$$\frac{1}{4\pi}\left(-F^{im,l}F_{lm} - F^i_{.m}F^{lm}_{,l} + \frac{1}{2}F_{lm}F^{lm,i}\right) \equiv$$

$$-\frac{1}{8\pi}\left(F^{im,l} + F^{il,m} + F^{ml,i}\right)F_{lm} - \frac{1}{4\pi}F^i_{.m}F^{lm}_{,l} \Rightarrow$$

$$\nabla_k T^{(f)\ ik} = -\frac{1}{c}F^i_{.m}J^m. \qquad (29)$$

Полный тензор энергии-импульса системы заряженных частиц

- Подставим в (26) выражение для полной производной вектора скорости частицы du^i_a/ds_a из уравнений движения заряженной частицы в электромагнитном поле, Лекция 9 (X), формула (15):

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{mc^2} F^i_{\cdot\ k} u^k \tag{27}$$

- в формулу (26) с учетом свойств δ - функции и определения вектора плотности тока (23):

$$\partial_k T^{(p)\ ik} = \frac{1}{c} J^k F^i_{.k}(x). \tag{28}$$

- Выше мы вычисляли дивергенцию тензора энергии-импульса электромагнитного поля, отбрасывая члены с произведением плотности тока на тензор Максвелла, предполагая отсутствие зарядов. Теперь мы снимем это ограничение, заново вычислив ковариантную дивергенцию симметричного тензора электромагнитного поля (19) с учетом уравнений Максвелла 1-ой и 2-ой группы и делая замену индексов $k, l \to l, m$ в в первом члене:

$$\nabla_k T^{(f)\ ik} = \frac{1}{4\pi}\nabla_k\left(-F^i_{.l}F^{kl} + \frac{1}{4}g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right) \equiv$$

$$\frac{1}{4\pi}\left(-F^{im,l}F_{lm} - F^i_{.m}F^{lm}_{,l} + \frac{1}{2}F_{lm}F^{lm,i}\right) \equiv$$

$$-\frac{1}{8\pi}\left(F^{im,l} + F^{il,m} + F^{ml,i}\right)F_{lm} - \frac{1}{4\pi}F^i_{.m}F^{lm}_{,l} \Rightarrow$$

$$\nabla_k T^{(f)\ ik} = -\frac{1}{c}F^i_{.m}J^m. \tag{29}$$

Полный тензор энергии-импульса системы заряженных частиц

- Подставим в (26) выражение для полной производной вектора скорости частицы du_a^i/ds_a из уравнений движения заряженной частицы в электромагнитном поле, Лекция 9 (X), формула (15):

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{mc^2} F^i_{\cdot\ k} u^k \tag{27}$$

- в формулу (26) с учетом свойств δ - функции и определения вектора плотности тока (23):

$$\partial_k T^{(p)\ ik} = \frac{1}{c} J^k F^i_{.k}(x). \tag{28}$$

- Выше мы вычисляли дивергенцию тензора энергии-импульса электромагнитного поля, отбрасывая члены с произведением плотности тока на тензор Максвелла, предполагая отсутствие зарядов. Теперь мы снимем это ограничение, заново вычислив ковариантную дивергенцию симметричного тензора электромагнитного поля (19) с учетом уравнений Максвелла 1-ой и 2-ой группы и делая замену индексов $k, l \to l, m$ в в первом члене:

$$\nabla_k T^{(f)\ ik} = \frac{1}{4\pi} \nabla_k \left(-F^i_{.l} F^{kl} + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} \right) \equiv$$

$$\frac{1}{4\pi} \left(-F^{im,l} F_{lm} - F^i_{.m} F^{lm}_{\ \ ,l} + \frac{1}{2} F_{lm} F^{lm,i} \right) \equiv$$

$$-\frac{1}{8\pi} \left(F^{im,l} + F^{il,m} + F^{ml,i} \right) F_{lm} - \frac{1}{4\pi} F^i_{.m} F^{lm}_{\ \ ,l} \Rightarrow$$

$$\nabla_k T^{(f)\ ik} = -\frac{1}{c} F^i_{.m} J^m. \tag{29}$$

Полный тензор энергии-импульса системы заряженных частиц

- Таким образом, складывая этот результат с (28), получим закон сохранения полной энергии:

$$\boxed{\nabla_k T^{ik} = 0, \ \text{где } T^{ik} = T^{(f)\ ik} + T^{(p)\ ik} \qquad (30)}$$

  – суммарный тензор энергии-импульса системы «электромагнитное поле + частицы».

- Введем теперь интегральные величины – полную энергию-импульс системы заряженных частиц:

$$P^i = \frac{1}{c} \int T^{ik} dS_k, \qquad (31)$$

  где интегрирование проводится по трехмерной гиперповерхности с нормальным вектором $n_k : n_k dS = dS_k$.

- Вследствие равенства нулю ковариантной дивергенции тензора энергии-импульса эти величины сохраняются для замкнутой системы:

$$P^i = \mathrm{Const}. \qquad (32)$$

- Таким образом, складывая этот результат с (28), получим закон сохранения полной энергии:

$$\nabla_k T^{ik} = 0, \text{ где } T^{ik} = T^{(f)\ ik} + T^{(p)\ ik} \tag{30}$$

– суммарный тензор энергии-импульса системы «электромагнитное поле + частицы».

- Введем теперь интегральные величины – полную энергию-импульс системы заряженных частиц:

$$P^i = \frac{1}{c}\int T^{ik} dS_k, \tag{31}$$

где интегрирование проводится по трехмерной гиперповерхности с нормальным вектором $n_k : n_k dS = dS_k$.

- Вследствие равенства нулю ковариантной дивергенции тензора энергии-импульса эти величины сохраняются для замкнутой системы:

$$P^i = \mathrm{Const}, \tag{32}$$

Полный тензор энергии-импульса системы заряженных частиц

- Таким образом, складывая этот результат с (28), получим закон сохранения полной энергии:

$$\boxed{\nabla_k T^{ik} = 0, \text{ где } T^{ik} = T^{(f)\ ik} + T^{(p)\ ik}} \qquad (30)$$

– суммарный тензор энергии-импульса системы «электромагнитное поле + частицы».

- Введем теперь интегральные величины – полную энергию-импульс системы заряженных частиц:

$$P^i = \frac{1}{c}\int T^{ik} dS_k, \qquad (31)$$

где интегрирование проводится по трехмерной гиперповерхности с нормальным вектором $n_k : n_k dS = dS_k$.

- Вследствие равенства нулю ковариантной дивергенции тензора энергии-импульса эти величины сохраняются для замкнутой системы:

$$P^i = \mathrm{Const.} \qquad (32)$$

Полный тензор энергии-импульса системы заряженных частиц

- Таким образом, складывая этот результат с (28), получим закон сохранения полной энергии:

$$\boxed{\nabla_k T^{ik} = 0, \text{ где } T^{ik} = T^{(f)\ ik} + T^{(p)\ ik} \qquad (30)}$$

– суммарный тензор энергии-импульса системы «электромагнитное поле + частицы».

- Введем теперь интегральные величины – полную энергию-импульс системы заряженных частиц:

$$P^i = \frac{1}{c}\int T^{ik} dS_k, \qquad (31)$$

где интегрирование проводится по трехмерной гиперповерхности с нормальным вектором $n_k : n_k dS = dS_k$.

- Вследствие равенства нулю ковариантной дивергенции тензора энергии-импульса эти величины сохраняются для замкнутой системы:

$$P^i = \mathrm{Const}. \qquad (32)$$

Полный тензор энергии-импульса системы заряженных частиц

- Таким образом, складывая этот результат с (28), получим закон сохранения полной энергии:

$$\boxed{\nabla_k T^{ik} = 0, \text{ где } T^{ik} = T^{(f)\ ik} + T^{(p)\ ik}} \qquad (30)$$

– суммарный тензор энергии-импульса системы «электромагнитное поле + частицы».

- Введем теперь интегральные величины – полную энергию-импульс системы заряженных частиц:

$$P^i = \frac{1}{c}\int T^{ik} dS_k, \qquad (31)$$

где интегрирование проводится по трехмерной гиперповерхности с нормальным вектором $n_k : n_k dS = dS_k$.

- Вследствие равенства нулю ковариантной дивергенции тензора энергии-импульса эти величины сохраняются для замкнутой системы:

$$P^i = \mathrm{Const}. \qquad (32)$$

Полный тензор энергии-импульса системы заряженных частиц

- Таким образом, складывая этот результат с (28), получим закон сохранения полной энергии:

$$\boxed{\nabla_k T^{ik} = 0, \text{ где } T^{ik} = T^{(f)\ ik} + T^{(p)\ ik}} \qquad (30)$$

– суммарный тензор энергии-импульса системы «электромагнитное поле + частицы».

- Введем теперь интегральные величины – полную энергию-импульс системы заряженных частиц:

$$P^i = \frac{1}{c}\int T^{ik} dS_k, \qquad (31)$$

где интегрирование проводится по трехмерной гиперповерхности с нормальным вектором $n_k : n_k dS = dS_k$.

- Вследствие равенства нулю ковариантной дивергенции тензора энергии-импульса эти величины сохраняются для замкнутой системы:

$$P^i = \mathrm{Const}. \qquad (32)$$