

**Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФГАОУ ВО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**А.В. ЕЛИСЕЕВ**

# **ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ БАРОКЛИННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ АТМОСФЕРЫ**

**Учебно-методическое пособие  
для магистрантов направления 05.04.04 «Гидрометеорология»**

**КАЗАНЬ – 2017**

**Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФГАОУ ВО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**А.В. ЕЛИСЕЕВ**

# **ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ БАРОКЛИННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ АТМОСФЕРЫ**

**Учебно-методическое пособие  
для магистрантов направления 05.04.04 «Гидрометеорология»**

**КАЗАНЬ – 2017**

**УДК 551.511**

*Печатается по решению методической комиссии Института  
экологии и природопользования  
ФГАОУ ВО*

*«Казанский (Приволжский) федеральный университет»  
Протокол № 9 от 23 декабря 2016 г.*

*заседания кафедры метеорологии, климатологии и экологии  
атмосферы*

*Протокол №7 от 20 декабря 2016 г.*

*Автор:*

доктор физ.-мат. наук, проф. КФУ **А.В. Елисеев**

*Рецензенты:*

кандидат геогр. наук, доц. КФУ **К.М. Шанталинский;**

кандидат геогр. наук, доц. КФУ **В.В. Гурьянов**

**Елисеев А.В.**

**Линейные модели бароклинной неустойчивости атмосферы:** Учебно-методическое пособие / А.В. Елисеев – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. – 16 с.

Данное пособие составлено в соответствии с материалом курса «Устойчивость и предсказуемость атмосферных процессов», читаемой магистрантам, обучающимся по направлению 05.04.04 «Гидрометеорология». В него включён анализ линейных моделей бароклинной неустойчивости атмосферы. Пособие предназначено для студентов вузов, аспирантов и преподавателей.

© Издательство Казанского университета, 2017

© Елисеев А.В., 2017

# 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О БАРОКЛИННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Бароклидная неустойчивость - основной механизм развития погодных возмущений в земной атмосфере. Физически бароклидный циклогенез можно описать следующим образом. При приходе начальной циклонической аномалии в верхнюю тропосферу данного региона она передаётся в нижнюю тропосферу. Адвекция температуры (точнее - потенциальной температуры) приводит к возникновению индуцированной циклонической аномалии у поверхности к востоку от исходного циклона. За счёт восходящих движений эта аномалия передаётся в верхнюю тропосферу, усиливая исходный циклон. Бароклидная неустойчивость является частным случаем наклонной конвекции. Специальное название для бароклидной неустойчивости связано с тем, что, в отличие от общего случая наклонной конвекции, она происходит во вращающемся газе (или жидкости). Это вращение обусловлено вращением Земли вокруг своей оси. Более подробно физическая картина бароклидной неустойчивости изложена в пособии [1].

Методы теоретического анализа бароклидной неустойчивости можно подразделить на две группы. К первой из них относится линейный метод анализа нормальных мод. Решения уравнение термогидромеханики для любой векторной переменной  $\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t)$ , где  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  - радиус-вектор, а  $t$  - время, в этой группе методов ищутся в виде

$$\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \mathbf{Y} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-ct)} \right] \quad (1)$$

Здесь  $i$  - мнимая единица,  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  - волновой вектор,  $c = c_r + i c_i$  - комплексная фазовая скорость,  $\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{r}, t)$  - комплексная амплитуда, медленно меняющаяся в пространстве и времени:

$$\left| \frac{1}{\hat{\mathbf{Y}}} \frac{\partial \hat{\mathbf{Y}}}{\partial x} \right| \ll |k_x|, \quad \left| \frac{1}{\hat{\mathbf{Y}}} \frac{\partial \hat{\mathbf{Y}}}{\partial y} \right| \ll |k_y|, \quad \left| \frac{1}{\hat{\mathbf{Y}}} \frac{\partial \hat{\mathbf{Y}}}{\partial z} \right| \ll |k_z|, \quad \left| \frac{1}{\hat{\mathbf{Y}}} \frac{\partial \hat{\mathbf{Y}}}{\partial t} \right| \ll |c\mathbf{k}|.$$

При этом предполагается, что наиболее неустойчивая волна (т. е. волна с максимальным положительным  $\text{Im } c|\mathbf{k}|$ ) определяет структуру развивающихся бароклидных возмущений. В приложениях модального анализа уравнения, как правило, линеаризуются, что исключает исследование нелинейных процессов.

Вторая группа методов носит название немодального анализа. Она представляет собой решение задачи Коши при заданных начальных условиях для нелинейных уравнений термогидромеханики. Это позволяет анализировать не только линейные, но и нелинейные процессы бароклинной неустойчивости.

В данном пособии рассматриваются только линейные модели бароклинной неустойчивости, в которых используется метод нормальных мод.

## 2. МОДЕЛЬ ИДИ

Теоретические модели развития бароклинных волн в атмосфере были впервые предложены в 1947 г. Дж.Г. Чарни [5] и в 1949 г. Ю.Т. Иди [7]. В обоих случаях рассматриваются квазигеострофические возмущения (т. е. движения, в которых горизонтальный градиент давления балансируется силой Кориолиса и изменением скорости ветра) с  $k_y = 0$ . При этом также считалось, что скорость ветра  $\bar{u}$ , на фоне которой развиваются бароклинные волны, зависит от давления  $p$  (которое выбирается в качестве вертикальной координаты) линейно с коэффициентом  $\Lambda$ . Существенное различие [5] и [7] состоит в том, что в первой работе движения рассматриваются на  $\beta$ -плоскости (т. е. в случае, когда параметр Кориолиса  $f = 2 \Omega \sin \varphi$ , где  $\Omega$  - угловая скорость вращения Земли,  $\varphi$  - географическая широта, представляется в линейном виде  $f = f_0 + \beta y$  с постоянными  $f_0$  и  $\beta$ ;  $y = a \varphi$  - меридиональная координата,  $a$  - радиус Земли), тогда как во второй - на  $f$ -плоскости ( $f \equiv f_0$ ).

В данном разделе будет подробно рассмотрена модель Иди [7] (рис. 1). В этой задаче рассматривается канал в виде прямоугольного параллелепипеда, вращающийся вокруг вертикальной оси. В качестве вертикальной координаты выбрано давление  $p$ , так что вертикальные границы канала соответствуют  $p = p_0$  (поверхность) и  $p = p_1$  (тропопауза). Фоновое состояние жидкости в канале характеризуется скоростью движения вдоль оси  $x$ , причём, как уже было отмечено, эта скорость линейно возрастает по вертикали с коэффициентом  $\Lambda$  (при использовании давления  $p$  в качестве вертикальной координаты):

$$u_0(p) = \Lambda(p_0 - p).$$

Движение воздуха считается адиабатическим.

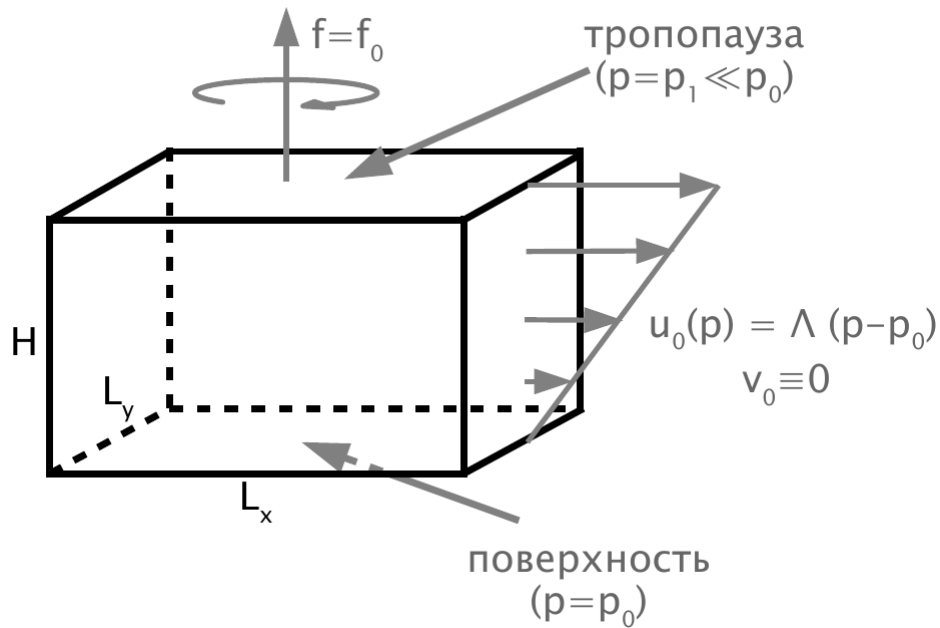


Рис. 1. Задача Иди.

Исходным уравнением модели служит уравнение сохранения квазигеострофического потенциального вихря, справедливое при адиабатических движениях [2, 8]:

$$\frac{Dq}{Dt} = 0, \quad (2)$$

где квазигеострофический потенциальный вихрь

$$q = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + f + \frac{\partial}{\partial p} \left( m^2 p^2 \frac{\partial \psi}{\partial p} \right). \quad (3)$$

Здесь  $\psi$  - функция тока, определённая согласно

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

(при таком определении и фоновой плотности, зависящей только от вертикальной координаты:  $\rho_0(z) = \rho_0(0) \exp(-z/H_0)$ ,

$H_0$  - высота однородной атмосферы, уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно. Материальная производная в (2) является суммой частной производной по времени и оператора переноса со скоростью  $\mathbf{U}_h = (u, v)$ , где  $u$  и  $v$  - соответственно зональная и меридиональная компоненты скорости:

$$\frac{D(\bullet)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + \mathbf{U}_h \cdot \nabla_h(\bullet)$$

Здесь  $\nabla_h$  - двумерный оператор дифференцирования по пространству на изобарической поверхности (т.е при дополнительном условии  $p = const$ ).

В обычных евклидовых координатах он имеет вид  $\nabla_h(\bullet) = \left( \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}, \frac{\partial(\bullet)}{\partial y} \right)$ .

Граничными условиями для (2) служат условия отсутствия отрыва жидкости (газа) от вертикальных границ канала

$$\omega = \frac{dp}{dt} = 0 \text{ при } p = p_0, p_1 \quad (4)$$

Задача (2)-(4) решается при использовании следующих предположений:

i) Приближение  $f$ -плоскости, что позволяет считать влияние вращения не зависящим от точки пространства внутри канала, так что в (2)  $f \equiv f_0$ .

ii)  $n^2 = m^2 p^2 = const$ .

iii) Рассматриваются только возмущения, для которых  $\partial(\bullet)/\partial y = 0$  (это справедливо для канала с достаточно большим меридиональным размером).

Указанному выше вертикальному профилю фоновой скорости соответствует фоновая функция тока

$$\psi_0 = -u_0(p) y + F_0(p)$$

с произвольной функцией давления  $F_0(p)$ . Это приводит к фоновому квазигеострофическому потенциальному вихрю

$$q_0 = \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} + n^2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial p^2} + f_0 = n^2 \frac{d^2 F_0}{dp^2} - n^2 y \frac{d^2 u_0}{dp^2} + f_0 = n^2 \frac{d^2 F_0}{dp^2} + f_0 \quad (5)$$

Решение (2) ищем в виде суммы фонового состояния и отклонений от него (возмущений):

$$q = q_0 + q', \quad \psi = \psi_0 + \psi', \quad u = u_0 + u', \quad v = v', \quad \omega = \omega',$$

что приводит к

$$\frac{\partial q_0}{\partial t} + \frac{\partial q'}{\partial t} + (u_0 + u') \left( \frac{\partial q_0}{\partial x} + \frac{\partial q'}{\partial x} \right) + v' \left( \frac{\partial q_0}{\partial y} + \frac{\partial q'}{\partial y} \right) = 0.$$

С учётом стационарности фонового состояния, соотношения (5) и предположения iii, последнее уравнение сводится к

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + (u_0 + u') \frac{\partial q'}{\partial x} + v' \frac{\partial q_0}{\partial y} = 0$$

Раскроем в нём скобки и исключим слагаемым с перемножением штрихованных величин (такая процедура называется *линеаризацией*)

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial q'}{\partial x} + v' \frac{\partial q_0}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

Из (5) следует, что  $\partial q_0 / \partial y = 0$ . Поэтому (6) приводится к виду

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial q'}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$q' = \left( \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left( m^2 p^2 \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right) = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + n^2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial p^2}$$

Из (4) с учётом  $\omega_0 \equiv 0$  следует, что граничными условиями для него являются

$$\omega' = 0 \text{ при } p = p_0, p_1. \quad (8)$$

Решение (7) ищем в виде нормальной моды вида

$$\psi' = \Psi'(p) \exp(i k_x (x - ct)),$$

с комплексной фазовой скоростью

$$c = c_r + i c_i,$$

так что

$$\psi' = \Psi'(p) e^{k_x c_i t} e^{i k_x (x - c_r t)}$$

Скорость роста этой волны определяется, очевидно, величиной  $k_x c_i$ . Таким образом,

$$q' = -k_x^2 \psi' + \frac{n^2}{\Psi'(p)} \frac{d^2 \Psi'}{dp^2} \psi',$$

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t} = -i k_x c \psi',$$

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = i k_x \psi'.$$

Как следствие, для нетривиальных (т.е. не равных тождественно нулю) решений (что, очевидно, эквивалентно условию  $\Psi(p) \neq 0$ ) уравнение (7) сводится к



$$ik_x(u_0 - c)\left(\frac{d^2\Psi'}{dp^2} - \lambda^2\Psi'(p)\right) = 0.$$

Если последнее уравнение разделить на  $ik_x(u_0 - c)$ , то оно сведётся к уравнению

$$\frac{d^2\Psi'}{dp^2} - \lambda^2\Psi'(p) = 0 \quad (9)$$

с  $\lambda^2 = k_x^2 / n^2$ , решения которого

$$\Psi'(p) = \Psi'_1 \operatorname{ch}(\lambda p) + \Psi'_2 \operatorname{sh}(\lambda p). \quad (10)$$

Постоянные  $\Psi'_1$  и  $\Psi'_2$  находятся из граничного условия (8). С учётом термодинамического уравнения [2, 8]

$$gp^2 \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial p} \right) + \alpha^2 c_0^2 \omega = 0, \quad (11)$$

где  $g$  - ускорение свободного падения,  $\Phi$  - геопотенциал,  $\alpha$  - коэффициент сжимаемости атмосферы,  $c_0$  - фазовая скорость длинных гравитационных волн, из (8) легко получить

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial\Phi'}{\partial p} \right) = 0. \quad (12)$$

С учётом геострофических соотношений на  $f$ -плоскости

$$f_0 v = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad f_0 u = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

из (8), (12) и определения функции тока следует, что

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial\psi'}{\partial p} \right) = 0. \quad (13)$$

Из последнего соотношения можно получить (подобно тому, как было получено (6); этот вывод предлагается в качестве самостоятельного упражнения)

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial t\partial p} + u_0 \frac{\partial^2\psi'}{\partial x\partial p} + \frac{\partial\psi'}{\partial x} \frac{\partial^2\psi_0}{\partial y\partial p} = 0 \text{ при } p = p_0, p_1,$$

а, учитывая также выражение для  $\psi_0$  и  $u_0$ :

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial t\partial p} + u_0 \frac{\partial^2\psi'}{\partial x\partial p} + \Lambda \frac{\partial\psi'}{\partial x} = 0 \text{ при } p = p_0, p_1.$$

Подставляя в это выражение решение в виде нормальных мод, приходим к

$$(u_0 - c) \frac{d\Psi'}{dp} + \Lambda \Psi'(p) = 0 \text{ при } p = p_0, p_1. \quad (14)$$

Подставляя (10) в (14), имеем:

$$\left[ (u_{00} - c) \lambda \operatorname{sh} \lambda p_0 + \Lambda \operatorname{ch} \lambda p_0 \right] \Psi_1' + \left[ (u_{00} - c) \lambda \operatorname{ch} \lambda p_0 + \Lambda \operatorname{sh} \lambda p_0 \right] \Psi_2' = 0,$$

$$\left[ (u_{01} - c) \lambda \operatorname{sh} \lambda p_1 + \Lambda \operatorname{ch} \lambda p_1 \right] \Psi_1' + \left[ (u_{01} - c) \lambda \operatorname{ch} \lambda p_1 + \Lambda \operatorname{sh} \lambda p_1 \right] \Psi_2' = 0.$$

где  $u_{00} = u_0(p_0)$ ,  $u_{01} = u_0(p_1)$ . Значения  $\Psi_1' = \Psi_2' = 0$ , очевидно, являются её решениями. Чтобы эта система имела также ненулевые (нужные нам) решения, необходимо нарушение условия её однозначной разрешимости. Из линейной алгебры известно, что это условие нарушается при равенстве нулю определителя системы, т.е. при

$$\begin{aligned} & \left[ (u_{00} - c) \lambda \operatorname{sh} \lambda p_0 + \Lambda \operatorname{ch} \lambda p_0 \right] \left[ (u_{01} - c) \lambda \operatorname{ch} \lambda p_1 + \Lambda \operatorname{sh} \lambda p_1 \right] - \\ & - \left[ (u_{00} - c) \lambda \operatorname{ch} \lambda p_0 + \Lambda \operatorname{sh} \lambda p_0 \right] \left[ (u_{01} - c) \lambda \operatorname{sh} \lambda p_1 + \Lambda \operatorname{ch} \lambda p_1 \right] = 0. \end{aligned}$$

С учётом свойств гиперболических функций это выражение приводится к виду квадратичного уравнения относительно  $c$ :

$$c^2 - c(u_{00} + u_{01}) + u_{00}u_{01} + \frac{\Lambda}{\lambda}(u_{01} - u_{00}) \operatorname{cth} \mu - \left( \frac{\Lambda}{\lambda} \right)^2 = 0, \quad (15)$$

где  $\mu = \lambda(p_0 - p_1)$ .

Т.к. уравнение (7) и граничные условия (13) линейны, то можно использовать и комплексно сопряжённые к ним. Вследствие последнего, если существует его решение с некоторым  $c^{(1)} = c_r^{(1)} + i c_i^{(1)}$ , то существует и решение с  $c^{(2)} = c^{(1)*} = c_r^{(1)} - i c_i^{(1)}$  (звёздочка означает комплексное сопряжение). Поэтому для доказательства наличия бароклинной неустойчивости достаточно показать, что есть решения с существенно комплексными  $c$ .

В свою очередь, наличие у задачи решений с существенно комплексными  $\lambda$  определяется знаком дискриминанта квадратного уравнения (15):

$$D = (u_{01} - u_{00})^2 \left[ 1 - \frac{4}{\mu^2} (\mu \operatorname{cth} \mu - 1) \right].$$

С учётом свойств гиперболических функций gjkexftv

$$D = \frac{4}{\mu^2} (u_{01} - u_{00})^2 \left[ \frac{\mu}{2} - \text{cth} \frac{\mu}{2} \right] \left[ \frac{\mu}{2} - \text{th} \frac{\mu}{2} \right].$$

Т.к. при любом значении аргумента  $\mu/2 \leq \text{th} \mu/2$ , то смена знака  $D$  происходит при  $\mu = \mu_c$ , таком что

$$\frac{\mu_c}{2} = \text{cth} \frac{\mu_c}{2}.$$

Численное решение этого уравнения приводит к значению  $\mu_c \approx 2.4$ . Бароклидная неустойчивость возникает при  $\mu < \mu_c$ . Решая (15), можно также получить выражение для скорости роста бароклидной волны (см. выше):

$$k_x c_i = \frac{k_x}{\mu} (u_{01} - u_{00}) \left[ \left( \frac{\mu}{2} - \text{cth} \frac{\mu}{2} \right) \left( \frac{\mu}{2} - \text{th} \frac{\mu}{2} \right) \right]^{1/2}.$$

Эта скорость достигает максимума при  $\mu = \mu_m \approx 1.75$ . Ему соответствует вертикальное волновое число в изобарических координатах  $\lambda_m = \mu_m / (p_0 - p_1)$  (см. определение  $\lambda$  в пояснении к уравнению (13)), что, в свою очередь, соответствует горизонтальному волновому числу  $k_{x,m} = \lambda_m n$ . Этому волновому числу соответствует длина волны

$$L_m = \frac{2\pi}{k_{x,m}} = \frac{2\pi}{\lambda_m n} = \frac{2\pi}{\lambda_m m p} = \frac{2\pi}{\lambda_m p} L_R = \frac{2\pi (p_0 - p_1)}{\mu_m p} L_R.$$

Для простейших оценок в этом выражении можно заменить  $p$  на  $\frac{1}{2} \cdot (p_0 + p_1)$  и положить  $p_1 = p_0 / 3$ . При  $p_0 \approx 1000$  гПа это приводит к  $p_1 \approx 300$  гПа, что несколько отличается от типичного давления на высоте тропопаузы в средних широтах ( $\approx 200$  гПа). Однако при этом множитель  $2 (p_0 - p_1) / (p_0 + p_1) = 1$ . Это приводит к

$$L_m \approx 3.6 L_R,$$

$$(k_x c_i)_m \approx 0.306 \frac{u_{01} - u_{00}}{L_R}.$$

Последняя величина носит название показателя Иди. При  $L_R \sim 10^3$  км длина максимально неустойчивой волны оказывается равной нескольким тысячам километров, а половина этой длины по порядку величины совпадает с горизонтальным размером синоптических образований в атмосфере. При  $u_1 - u_0 \sim 10^1$  м/с оценка характерного времени развития возмущений  $[ (k_x c_i)_m ]^{-1} \sim 4$  сут. Эти оценки дают правильные по порядку

значения для характерного горизонтального размера бароклинических волн в атмосфере и характерного временного интервала смены погоды.

### 3. ДВУХРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЛИПСА

В 1951 г. Н.Э. Филлипсом было предложено расширение модели Иди, в которой использовалась конечно-разностная дискретизация вертикальной структуры [9]. Это позволяет рассматривать эту модель как "мостик" между теоретическими исследованиями в динамической метеорологии и современным численным подходом к интегрированию уравнений прогноза погоды и климата.

Подобно модели Иди, основным уравнением модели служит уравнение сохранения (2) для квазигеострофического потенциального вихря (3). В отличие от модели Иди, это уравнение записывается в виде системы

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + f \right) &= -f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}, \\ \frac{D}{Dt} \left( p^2 m^2 \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) &= f_0 \omega. \end{aligned} \tag{16}$$

Подобно выводу граничного условия (13) (при этом также используется термодинамическое уравнение (11); детальный вывод оставлен в качестве самостоятельного упражнения) можно показать, что  $\omega$  пропорциональна вертикальной скорости в изобарических координатах (на самом деле, она даже равна этой скорости, но для вывода этого нам нужно было бы дополнительно рассмотреть длинные гравитационные волны). Поэтому граничными условиями для (16) служат условия отсутствия вертикальной скорости на поверхности и на верхней границе атмосферы

$$\omega = 0 \text{ при } p = p_0, 0. \tag{17}$$

В отличие от модели Иди, в модели Филлипса верхнее граничное условие ставится не на тропопаузе, а именно на верхней границе атмосферы (формально при  $p = 0$ ), так что стратосфера не учитывается.

Следует также обратить внимание, что, в отличие от модели Иди, в задаче Филлипса приближение  $f$ -плоскости ослаблено: параметр Кориолиса считается постоянным только в правых частях (16), тогда как в

левой части первого уравнения учитывается его зависимость от широты. Это приводит к важному следствию (см. ниже).

Уравнения (16) и (17) решаются на 5 изобарических уровнях в атмосфере. На уровнях  $p = \frac{1}{4} p_0$  и  $p = \frac{3}{4} p_0$  (так называемые динамические уровни 1 и 2 соответственно; см. рис. 2) решается первое уравнение системы (16). На уровне  $p = \frac{1}{2} p_0$  решается второе уравнение этой системы. Т.к. оно получено из термодинамического уравнения, то этот уровень называется термодинамическим, а т.к. он расположен между динамическими уровнями 1 и 2, то в оригинальной работе Н.А. Филлипса ему приписан индекс 3/2. Для замыкания системы на этом уровне функция тока интерполируется между уровнями 1 и 2:

$$\psi_{3/2} \approx \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2).$$

На этом же уровне вертикальная производная функции тока приближается её конечно-разностной аппроксимацией:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial p} \right|_{3/2} \approx \frac{\psi_1 - \psi_2}{3p_0/4 - p_0/4} = \frac{\psi_1 - \psi_2}{p_0/2}.$$

На уровнях 1 и 2 вертикальная производная  $\omega$  заменяется на её конечно-разностное приближение. Например, для уровня 1:

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial p} \approx \frac{\tilde{\omega}|_{p=0} - \tilde{\omega}_{3/2}}{0 - p_0/2}.$$

На уровнях  $p = p_0$  и  $p = 0$  учитываются только граничные условия (17).

Таким образом, решается система (нижний числовой индекс у оператора  $D/Dt$  также указывает на вертикальный уровень):

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{Dt} \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + f_0 \right) &= f_0 \frac{\omega_{3/2}}{(p_0/2)}, \\ \frac{D_2}{Dt} \left( \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + f_0 \right) &= -f_0 \frac{\omega_{3/2}}{(p_0/2)}, \\ \frac{D_{3/2}}{Dt} \left[ \frac{p_0}{2} m^2 (\psi_1 - \psi_2) \right] + f_0 \omega_{3/2} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Исключая с помощью последнего уравнения (18)  $\omega_{3/2}$ , приходим к системе двух уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + J(\psi_1, \zeta_1) &= 0, \\ \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} + J(\psi_2, \zeta_2) &= 0,\end{aligned}\tag{19}$$

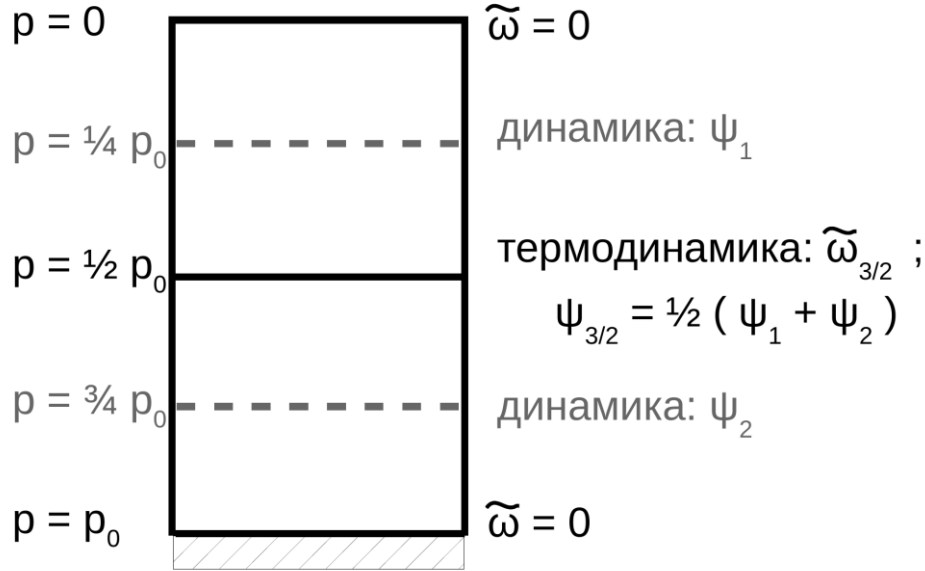


Рис. 2. Модель Филиппса.

где завихренность на изобарических уровнях

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + f_0 - m^2 (\psi_1 - \psi_2), \\ \zeta_2 &= \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + f_0 + m^2 (\psi_1 - \psi_2),\end{aligned}$$

а якобиан (называемый также оператором Якоби)

$$J(\psi_j, \zeta_j) = \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \zeta_j}{\partial y} - \frac{\partial \zeta_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, \quad j = 1, 2.$$

Как уже было использовано при анализе модели Иди, решения представляются в виде суммы фонового состояния и отклонения от него:

$$\psi_j = \psi_{j,0} + \psi_j', \quad \zeta_j = \zeta_{j,0} + \zeta_j', \quad j = 1, 2.$$

После подстановки их в (19), исключения слагаемых с перемножением штрихованных величин ( $J(\psi_j', \zeta_j')$  при  $j = 1, 2$ ) и учёта, что для фонового состояния (19) выполняется само по себе ( $\partial \zeta_{j,0} / \partial t + J(\psi_{j,0}, \zeta_{j,0}) = 0$  при  $j = 1, 2$ ), приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial \zeta_1'}{\partial t} + J(\psi_{1,0}, \zeta_1') + J(\psi_1', \zeta_{1,0}) = 0,$$

$$\frac{\partial \zeta_2'}{\partial t} + J(\psi_{2,0}, \zeta_2') + J(\psi_2', \zeta_{2,0}) = 0.$$

Решения этой системы ищем в виде нормальных мод

$$\psi_j' = \Psi_j' \exp(ik_x(x - ct)) \text{ при } j = 1, 2.$$

с комплексной фазовой скоростью  $c = c_r + i c_i$ . Ввиду использования дискретных уровней по вертикали, амплитуда  $\Psi_j$  решения задачи Филлипса не зависит явно от вертикальной координаты (в отличие от решения задачи Иди), но явно зависит от номера дискретного вертикального уровня.

С использованием того же подхода, который уже был использован при решении задачи Иди, для модели Филлипса можно получить уравнение нейтральной кривой (кривой, на которой для решений  $c_i = 0$ , т.е. эти решения не растут и не затухают в линейном приближении):

$$(u_{1,0} - u_{2,0})^2 = \frac{\left(\frac{2}{m^2} \cdot \beta\right)^2}{k_x^4 (4m^4 - k_x^4)} = \frac{\left(\frac{2}{m^2} \cdot \beta\right)^2}{\chi^2 (1 - \chi^2)},$$

где  $\beta = df/dy$ , а  $\chi = (k_x/2m)^2$ . График функции

$$F_P(\chi) = \frac{1}{\chi^2 (1 - \chi^2)}$$

приведён на рис. 3. Она достигает минимума  $F_{P,min} = 4$  при  $\chi = \chi_m = 1/\sqrt{2} \approx 0.71$  и стремится к бесконечности при  $\chi$ , стремящемся к 0 или к 1.

Бароклинная неустойчивость развивается выше нейтральной кривой модели Филлипса (рис. 3). Наиболее неустойчивая волна соответствует  $\chi = \chi_m$ , т.е. характеризуется зональным волновым числом

$$k_{x,m} = 2m\chi_m$$

и длиной волны

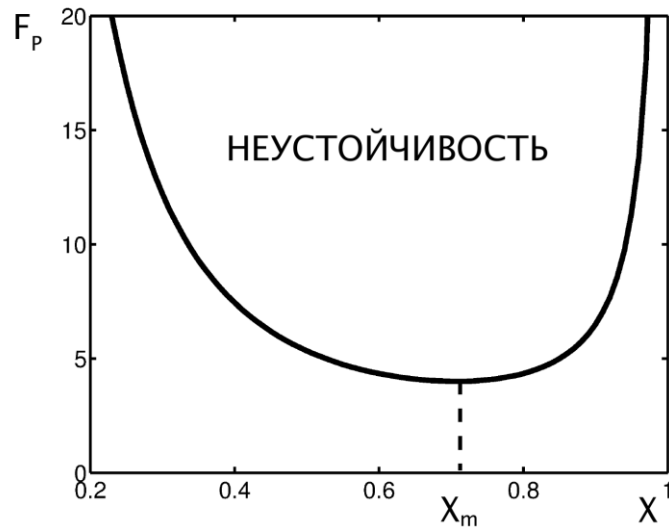


Рис. 3. Нейтральная кривая модели Филлипса.

$$L_m = \frac{2\pi}{k_{x,m}} = \frac{\pi}{m\chi_m} \approx 4.5 \cdot 10^3 \text{ км.}$$

Важным отличием модели Филлипса от модели Иди является то, что в этой модели для развития бароклинной неустойчивости необходим минимальный сдвиг скорости

$$(u_{1,0} - u_{2,0})_{min} \sim \left[ \frac{\left(2 \frac{\beta}{m^2}\right)^2}{F_{P,min}} \right]^{1/2} = \frac{2\beta}{m^2 F_{P,min}^{1/2}} \sim 10 \text{ м/с.}$$

(при этом считается, что  $\cos \varphi \sim 1$ ). В случае, когда  $\beta = df/dy = 0$  (т.е. на  $f$ -плоскости) этот минимальный сдвиг скорости также становится нулевым, что согласуется с решением модели Иди.



### Литература для самостоятельного изучения

1. *Елисеев, А.В.* Основные понятия устойчивости и предсказуемости крупномасштабных атмосферных процессов: Учебно-методическое пособие / А.В. Елисеев – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. – 24 с.
2. *Курганский М.В.* Введение в крупномасштабную динамику атмосферы (адиабатические инварианты и их применение) / М.В. Курганский - СПб: Гидрометеоздат, 1993. – 168 с.
3. *Переведенцев Ю.П.* Теория общей циркуляции атмосферы / Ю.П. Переведенцев, И.И. Мохов, А.В. Елисеев, К.М. Шанталинский, Н.А. Важнова Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2013. 224 с.
4. *Монин А.С.* Прогноз погоды как задача физики. / А.С. Монин. М.: Наука, 1969 – 183 с.
5. *Charney, J.G.* The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current // J. Meteorol. – 1947 - V. 4 - № 5 - P. 135-162.
6. *Drazin T.* Introduction to Hydrodynamic Stability. / T. Drazin — Cambridge: Cambridge University Press, 2002. — 276 с.
7. *Eady, E.T.* Long waves and cyclone waves // Tellus – 1949 - V. 1 - № 3 - P. 33-52
8. *Holton J.R.* An Introduction to Dynamic Meteorology / J.R. Holton— Cambridge, MA: Academic Press, 2004. — 535 с.
9. *Phillips N.A.* A simple 3-dimensional model for the study of large-scale extratropical flow patterns // J. Meteorol. - 1951 - V. 8 - № 6. - P. 381-394.

**Елисеев Алексей Викторович**

**ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ БАРОКЛИННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
АТМОСФЕРЫ**

Учебно-методическое пособие

Корректурa автора

Подписано в печать 06.02.2017.

Бумага офсетная. Печать цифровая.

Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman».

Усл.печ.л.

Уч.-изд. л.. Тираж 4 экз. Заказ

Отпечатано в типографии

Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужи́на, 1/37

тел. (843) 233-73-59, 233-73-28