Математические модели теоретической физики

(математика и компьютерные науки)

Математические основы физики

(математика и информатика)

профессор Игнатьев Юрий Геннадиевич

Казанский федеральный университет
Институт математики и механики
им. Н.И. Лобачевского
Кафедра высшей математики и математического моделирования

Казань, VI семестр, 2015 г.

Содержание лекции

- Преобразования Галилея
- Закон Ньютона
- Закон сохранения энергии

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. – *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf.*
3. Игнатьев Ю.Г. Аналитическая геометрия. Часть II. Аффинные и евклидовы пространства. Учебное пособие. II семестр. НИЛИТМО КФУ, 2013, Казань, - 188 с. *http://www.kpfu.ru/docs/F1788036257/Aff_Evk13.pdf*

Содержание лекции

- Преобразования Галилея
- Закон Ньютона
- Закон сохранения энергии

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. – *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf.*
3. Игнатьев Ю.Г. Аналитическая геометрия. Часть II. Аффинные и евклидовы пространства. Учебное пособие. II семестр. НИЛИТМО КФУ, 2013, Казань, - 188 с. *http://www.kpfu.ru/docs/F1788036257/Aff_Evk13.pdf*

Лекция IV: Механические системы

Содержание лекции

- Преобразования Галилея
- Закон Ньютона
- Закон сохранения энергии

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. – *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf.*
3. Игнатьев Ю.Г. Аналитическая геометрия. Часть II. Аффинные и евклидовы пространства. Учебное пособие. II семестр. НИЛИТМО КФУ, 2013, Казань, - 188 с. *http://www.kpfu.ru/docs/F1788036257/Aff_Evk13.pdf*

Содержание лекции

- Преобразования Галилея
- Закон Ньютона
- Закон сохранения энергии

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. – *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf.*
3. Игнатьев Ю.Г. Аналитическая геометрия. Часть II. Аффинные и евклидовы пространства. Учебное пособие. II семестр. НИЛИТМО КФУ, 2013, Казань, - 188 с. *http://www.kpfu.ru/docs/F1788036257/Aff_Evk13.pdf*

Лекция IV: Механические системы

Содержание лекции

- Преобразования Галилея
- Закон Ньютона
- Закон сохранения энергии

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. – *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf.*
3. Игнатьев Ю.Г. Аналитическая геометрия. Часть II. Аффинные и евклидовы пространства. Учебное пособие. II семестр. НИЛИТМО КФУ, 2013, Казань, - 188 с. *http://www.kpfu.ru/docs/F1788036257/Aff_Evk13.pdf*

Содержание лекции

- Преобразования Галилея
- Закон Ньютона
- Закон сохранения энергии

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. – *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf.*
3. Игнатьев Ю.Г. Аналитическая геометрия. Часть II. Аффинные и евклидовы пространства. Учебное пособие. II семестр. НИЛИТМО КФУ, 2013, Казань, - 188 с. *http://www.kpfu.ru/docs/F1788036257/Aff_Evk13.pdf*

Содержание лекции

- Преобразования Галилея
- Закон Ньютона
- Закон сохранения энергии

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. – *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf.*
3. Игнатьев Ю.Г. Аналитическая геометрия. Часть II. Аффинные и евклидовы пространства. Учебное пособие. II семестр. НИЛИТМО КФУ, 2013, Казань, - 188 с. *http://www.kpfu.ru/docs/F1788036257/Aff_Evk13.pdf*

Преобразование евклидова пространства

- Функция Лагранжа должна быть инвариантной (Л2), но по отношению к каким преобразованиям? Оказывается, свойства преобразований фазового пространства, относительно которых функция Лагранжа является инвариантной, кардинальным образом определяет свойства самой динамической системы, — физику системы. Согласно современным представлениям теоретической физики именно группа преобразований, положенная в основу динамики, определяет всю физическую картину данной динамики.
- Напомним, что группой преобразований называется множество преобразований G, которое удовлетворяет трем условим:
  1. Это множество содержит тождественное преобразование.
  2. Это множество содержит обратное преобразование к каждому преобразованию множества;
  3. Это множество содержит произведение двух преобразований множества.
- При этом порядком группы $r \rightarrow G_r$ называется минимальное число существенных параметров преобразования.
- Механика, построенная на абсолютном времени и группе преобразований евклидова пространства, $E_3 \times T$, называется классической или ньютоновой механикой.

Преобразование евклидова пространства

- Функция Лагранжа должна быть инвариантной (Л2), но по отношению к каким преобразованиям? Оказывается, свойства преобразований фазового пространства, относительно которых функция Лагранжа является инвариантной, кардинальным образом определяет свойства самой динамической системы, — физику системы. Согласно современным представлениям теоретической физики именно группа преобразований, положенная в основу динамики, определяет всю физическую картину данной динамики.
- Напомним, что группой преобразований называется множество преобразований G, которое удовлетворяет трем условим:
  1. Это множество содержит тождественное преобразование;
  2. Это множество содержит обратное преобразование к каждому преобразованию множества;
  3. Это множество содержит произведение двух любых преобразований множества.
- При этом порядком группы $r \to G_r$ называется минимальное число существенных параметров преобразования.
- Механика, построенная на абсолютном времени и группе преобразований евклидова пространства, $E_3 \times T$, называется классической или ньютоновой механикой.

Преобразование евклидова пространства

- Функция Лагранжа должна быть инвариантной (Л2), но по отношению к каким преобразованиям? Оказывается, свойства преобразований фазового пространства, относительно которых функция Лагранжа является инвариантной, кардинальным образом определяет свойства самой динамической системы, — физику системы. Согласно современным представлениям теоретической физики именно группа преобразований, положенная в основу динамики, определяет всю физическую картину данной динамики.
- Напомним, что группой преобразований называется множество преобразований G, которое удовлетворяет трем условиям:
  1. Это множество содержит тождественное преобразование;
  2. Это множество содержит обратное преобразование к любому преобразованию множества;
  3. Это множество содержит произведение двух любых преобразований множества.
- При этом порядком группы $r \to G_r$ называется минимальное число существенных параметров преобразования.
- Механика, построенная на абсолютном времени и группе преобразований евклидова пространства, $E_3 \times T$, называется классической или ньютоновой механикой.

Преобразование евклидова пространства

- Функция Лагранжа должна быть инвариантной (Л2), но по отношению к каким преобразованиям? Оказывается, свойства преобразований фазового пространства, относительно которых функция Лагранжа является инвариантной, кардинальным образом определяет свойства самой динамической системы, — физику системы. Согласно современным представлениям теоретической физики именно группа преобразований, положенная в основу динамики, определяет всю физическую картину данной динамики.
- Напомним, что группой преобразований называется множество преобразований G, которое удовлетворяет трем условиям:
  1. Это множество содержит тождественное преобразование;
  2. Это множество содержит обратное преобразование к любому преобразованию множества;
  3. Это множество содержит произведение двух любых преобразований множества.
- При этом порядком группы $r \to G_r$ называется минимальное число существенных параметров преобразования.
- Механика, построенная на абсолютном времени и группе преобразований евклидова пространства, $E_3 \times T$, называется классической или ньютоновой механикой.

Преобразование евклидова пространства

- Функция Лагранжа должна быть инвариантной (Л2), но по отношению к каким преобразованиям? Оказывается, свойства преобразований фазового пространства, относительно которых функция Лагранжа является инвариантной, кардинальным образом определяет свойства самой динамической системы, — физику системы. Согласно современным представлениям теоретической физики именно группа преобразований, положенная в основу динамики, определяет всю физическую картину данной динамики.
- Напомним, что группой преобразований называется множество преобразований G, которое удовлетворяет трем условиям:
  1. Это множество содержит тождественное преобразование;
  2. Это множество содержит обратное преобразование к любому преобразованию множества;
  3. Это множество содержит произведение двух любых преобразований множества.
- При этом порядком группы $r \to G_r$ называется минимальное число существенных параметров преобразования.
- Механика, построенная на абсолютном времени и группе преобразований евклидова пространства, $E_3 \times T$, называется классической или ньютоновой механикой.

Преобразование евклидова пространства

- Функция Лагранжа должна быть инвариантной (Л2), но по отношению к каким преобразованиям? Оказывается, свойства преобразований фазового пространства, относительно которых функция Лагранжа является инвариантной, кардинальным образом определяет свойства самой динамической системы, — физику системы. Согласно современным представлениям теоретической физики именно группа преобразований, положенная в основу динамики, определяет всю физическую картину данной динамики.
- Напомним, что группой преобразований называется множество преобразований G, которое удовлетворяет трем условиям:
  1. Это множество содержит тождественное преобразование;
  2. Это множество содержит обратное преобразование к любому преобразованию множества;
  3. Это множество содержит произведение двух любых преобразований множества.
- При этом порядком группы $r \to G_r$ называется минимальное число существенных параметров преобразования.
- Механика, построенная на абсолютном времени и группе преобразований евклидова пространства, $E_3 \times T$, называется классической или ньютоновой механикой.

Преобразование евклидова пространства

- Функция Лагранжа должна быть инвариантной (Л2), но по отношению к каким преобразованиям? Оказывается, свойства преобразований фазового пространства, относительно которых функция Лагранжа является инвариантной, кардинальным образом определяет свойства самой динамической системы, — физику системы. Согласно современным представлениям теоретической физики именно группа преобразований, положенная в основу динамики, определяет всю физическую картину данной динамики.
- Напомним, что группой преобразований называется множество преобразований G, которое удовлетворяет трем условим:
    1. Это множество содержит тождественное преобразование;
    2. Это множество содержит обратное преобразование к любому преобразованию множества;
    3. Это множество содержит произведение двух любых преобразований множества.
- При этом порядком группы $r \to G_r$ называется минимальное число существенных параметров преобразования.
- Механика, построенная на абсолютном времени и группе преобразований евклидова пространства, $E_3 \times T$, называется классической или ньютоновой механикой.

Преобразование евклидова пространства

- Функция Лагранжа должна быть инвариантной (Л2), но по отношению к каким преобразованиям? Оказывается, свойства преобразований фазового пространства, относительно которых функция Лагранжа является инвариантной, кардинальным образом определяет свойства самой динамической системы, — физику системы. Согласно современным представлениям теоретической физики именно группа преобразований, положенная в основу динамики, определяет всю физическую картину данной динамики.
- Напомним, что группой преобразований называется множество преобразований G, которое удовлетворяет трем условиям:
  1. Это множество содержит тождественное преобразование;
  2. Это множество содержит обратное преобразование к любому преобразованию множества;
  3. Это множество содержит произведение двух любых преобразований множества.
- При этом порядком группы $r \to G_r$ называется минимальное число существенных параметров преобразования.
- Механика, построенная на абсолютном времени и группе преобразований евклидова пространства, $E_3 \times T$, называется классической или ньютоновой механикой.

- Изучим преобразования множества $E_3 \times T$. Требование однородности и изотропии трехмерного конфигурационного пространства приводит, как известно, к требованию инвариантности длины дуги по отношению к допустимым преобразованиям пространства:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \delta_{ik} dx^i dx^k. \qquad (1)$$

- Как известно, такими преобразованиями евклидова пространства являются движения E_3 и только они:

$$x^{i'} = C^{i'}_k x^k + x^i_0, \to \mathbf{r}' = \mathbf{C}\mathbf{r} + \mathbf{r}_0, \qquad (2)$$

- где

$$\mathbf{C} \equiv ||C^{i'}_k|| \to \mathbf{e}_k = C^{i'}_k \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{E}$$

– ортогональная матрица перехода, $\mathbf{r}_0 = (x^1_0, x^2_0, x^3_0)$ – вектор параллельного переноса. Преобразования (2) образуют 6-параметрическую группу движений.

- Поскольку в классической механике время t является инвариантом, то вместе с (1) и абсолютная величина скорости также является инвариантом по отношению к движениям (2):

$$v^2 = \frac{d\mathbf{r}^2}{dt^2} = \frac{d\mathbf{r'}^2}{dt^2} = \mathrm{Inv}. \qquad (3)$$

- Изучим преобразования множества $E_3 \times T$. Требование однородности и изотропии трехмерного конфигурационного пространства приводит, как известно, к требованию инвариантности длины дуги по отношению к допустимым преобразованиям пространства:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \delta_{ik} dx^i dx^k. \qquad (1)$$

- Как известно, такими преобразованиями евклидова пространства являются движения E_3 и только они:

- где

$$\mathbf{C} \equiv ||C^{i'}_k|| \to \mathbf{e}_k = C^{i'}_k \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{E}$$

– ортогональная матрица перехода, $\mathbf{r}_0 = (x^1_0, x^2_0, x^3_0)$ – вектор параллельного переноса. Преобразования (2) образуют 6-параметрическую группу движений.

- Поскольку в классической механике время t является инвариантом, то вместе с (1) и абсолютная величина скорости также является инвариантом по отношению к движениям (2):

- Изучим преобразования множества $E_3 \times T$. Требование однородности и изотропии трехмерного конфигурационного пространства приводит, как известно, к требованию инвариантности длины дуги по отношению к допустимым преобразованиям пространства:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \delta_{ik} dx^i dx^k. \tag{1}$$

- Как известно, такими преобразованиями евклидова пространства являются движения E_3 и только они:

$$x'i = C^{i'}_k x^k + x^i_0, \to \mathbf{r}' = \mathbf{C}\mathbf{r} + \mathbf{r}_0, \tag{2}$$

- где

$$\mathbf{C} \equiv ||C^{i'}_k|| \to \mathbf{e}_k = C^{i'}_k \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{E}$$

– ортогональная матрица перехода, $\mathbf{r}_0 = (x^1_0, x^2_0, x^3_0)$ – вектор параллельного переноса. Преобразования (2) образуют 6-параметрическую группу движений.

- Поскольку в классической механике время t является инвариантом, то вместе с (1) и абсолютная величина скорости также является инвариантом по отношению к движениям (2):

$$\mathrm{v}^2 = \frac{d\mathbf{r}^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2} = \mathrm{Inv}. \tag{3}$$

Группа преобразований евклидова пространства и группа преобразований Галилея

- Изучим преобразования множества $E_3 \times T$. Требование однородности и изотропии трехмерного конфигурационного пространства приводит, как известно, к требованию инвариантности длины дуги по отношению к допустимым преобразованиям пространства:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \delta_{ik} dx^i dx^k. \tag{1}$$

- Как известно, такими преобразованиями евклидова пространства являются движения E_3 и только они:

$$x'i = C^{i'}_k x^k + x^i_0, \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{C}\mathbf{r} + \mathbf{r}_0, \tag{2}$$

- где

$$\mathbf{C} \equiv ||C^{i'}_k|| \rightarrow \mathbf{e}_k = C^{i'}_k \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{E}$$

– ортогональная матрица перехода, $\mathbf{r}_0 = (x^1_0, x^2_0, x^3_0)$ – вектор параллельного переноса. Преобразования (2) образуют 6-параметрическую группу движений.

- Поскольку в классической механике время t является инвариантом, то вместе с (1) и абсолютная величина скорости также является инвариантом по отношению к движениям (2):

$$v^2 = \frac{dr^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2} = \mathrm{Inv}. \tag{3}$$

Группа преобразований евклидова пространства и группа преобразований Галилея

- Изучим преобразования множества $E_3 \times T$. Требование однородности и изотропии трехмерного конфигурационного пространства приводит, как известно, к требованию инвариантности длины дуги по отношению к допустимым преобразованиям пространства:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \delta_{ik} dx^i dx^k. \tag{1}$$

- Как известно, такими преобразованиями евклидова пространства являются движения E_3 и только они:

$$x'i = C^{i'}_k x^k + x^i_0, \to \mathbf{r}' = \mathbf{C}\mathbf{r}+\mathbf{r}_0, \tag{2}$$

- где

$$\mathbf{C} \equiv ||C^{i'}_k|| \to \mathbf{e}_k = C^{i'}_k \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{E}$$

– ортогональная матрица перехода, $\mathbf{r}_0 = (x^1_0, x^2_0, x^3_0)$ – вектор параллельного переноса. Преобразования (2) образуют 6-параметрическую группу движений.

- Поскольку в классической механике время t является инвариантом, то вместе с (1) и абсолютная величина скорости также является инвариантом по отношению к движениям (2):

$$v^2 = \frac{d\mathbf{r}^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2} = \mathrm{Inv} \tag{3}$$

Группа преобразований евклидова пространства и группа преобразований Галилея

- Изучим преобразования множества $E_3 \times T$. Требование однородности и изотропии трехмерного конфигурационного пространства приводит, как известно, к требованию инвариантности длины дуги по отношению к допустимым преобразованиям пространства:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \delta_{ik} dx^i dx^k. \qquad (1)$$

- Как известно, такими преобразованиями евклидова пространства являются движения E_3 и только они:

$$x'i = C_k^{i'} x^k + x_0^i, \to \mathbf{r}' = \mathbf{C}\mathbf{r} + \mathbf{r}_0, \qquad (2)$$

- где

$$\mathbf{C} \equiv ||C_k^{i'}|| \to \mathbf{e}_k = C_k^{i'} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{E}$$

– ортогональная матрица перехода, $\mathbf{r}_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ – вектор параллельного переноса. Преобразования (2) образуют 6-параметрическую группу движений.

- Поскольку в классической механике время t является инвариантом, то вместе с (1) и абсолютная величина скорости также является инвариантом по отношению к движениям (2):

$$\mathbf{v}^2 = \frac{dx^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2} = \mathrm{Inv}. \qquad (3)$$

- Изучим преобразования множества $E_3 \times T$. Требование однородности и изотропии трехмерного конфигурационного пространства приводит, как известно, к требованию инвариантности длины дуги по отношению к допустимым преобразованиям пространства:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \delta_{ik} dx^i dx^k. \tag{1}$$

- Как известно, такими преобразованиями евклидова пространства являются движения E_3 и только они:

$$x'i = C_k^{i'} x^k + x_0^i, \to \mathbf{r}' = \mathbf{C}\mathbf{r} + \mathbf{r}_0, \tag{2}$$

- где

$$\mathbf{C} \equiv ||C_k^{i'}|| \to \mathbf{e}_k = C_k^{i'} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{E}$$

– ортогональная матрица перехода, $\mathbf{r}_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ – вектор параллельного переноса. Преобразования (2) образуют 6-параметрическую группу движений.

- Поскольку в классической механике время t является инвариантом, то вместе с (1) и абсолютная величина скорости также является инвариантом по отношению к движениям (2):

$$\mathbf{v}^2 = \frac{d\mathbf{r}^2}{dt^2} \equiv \frac{ds^2}{dt^2} = \mathrm{Inv.} \tag{3}$$

Группа преобразований евклидова пространства и группа преобразований Галилея

- Изучим преобразования множества $E_3 \times T$. Требование однородности и изотропии трехмерного конфигурационного пространства приводит, как известно, к требованию инвариантности длины дуги по отношению к допустимым преобразованиям пространства:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \delta_{ik} dx^i dx^k. \qquad (1)$$

- Как известно, такими преобразованиями евклидова пространства являются движения E_3 и только они:

$$x'i = C_k^{i'} x^k + x_0^i, \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{C}\mathbf{r} + \mathbf{r}_0, \qquad (2)$$

- где

$$\mathbf{C} \equiv ||C_k^{i'}|| \rightarrow \mathbf{e}_k = C_k^{i'} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{E}$$

– ортогональная матрица перехода, $\mathbf{r}_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ – вектор параллельного переноса. Преобразования (2) образуют 6-параметрическую группу движений.

- Поскольку в классической механике время t является инвариантом, то вместе с (1) и абсолютная величина скорости также является инвариантом по отношению к движениям (2):

$$\mathbf{v}^2 = \frac{d\mathbf{r}^2}{dt^2} \equiv \frac{ds^2}{dt^2} = \mathrm{Inv}. \qquad (3)$$

- Поскольку время по отношению к геометрии E_3 является внешним объектом, преобразования (2) ничего не говорят о возможной зависимости параметров преобразования от времени. В этом пункте необходимо добавить дополнительный принцип, называемый принципом относительности Галилея, который на основе анализа опытных данных был сформулирован Галилео Галилеем и заключается в современной трактовке в следующем:
- Уравнения механики инвариантны относительно преобразований Галилея:
- Преобразования Галилея (4) (группу Галилея) можно объединить с преобразованиями движения (2), полагая в (2) (закон сложения скоростей):

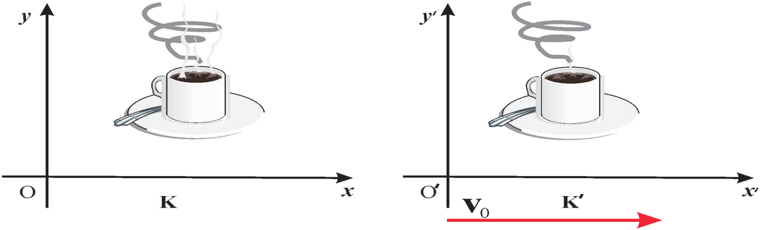

Figure 1. Принцип относительности Галилея. Все законы природы протекают одинаково в инерциальных системах отсчета.

Группа преобразований евклидова пространства и группа преобразований Галилея

- Поскольку время по отношению к геометрии E_3 является внешним объектом, преобразования (2) ничего не говорят о возможной зависимости параметров преобразования от времени. В этом пункте необходимо добавить дополнительный принцип, называемый принципом относительности Галилея, который на основе анализа опытных данных был сформулирован Галилео Галилеем и заключается в современной трактовке в следующем:
- Уравнения механики инвариантны относительно преобразований Галилея:
$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}_0 t; \quad t' = t. \tag{4}$$
- Преобразования Галилея (4) (группу Галилея) можно объединить с преобразованиями движения (2), полагая в (2) (закон сложения скоростей):

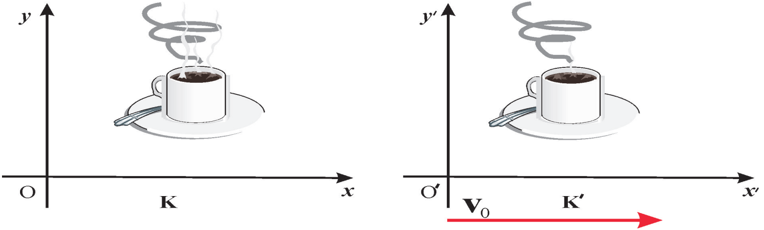

Figure 1. Принцип относительности Галилея. Все законы природы протекают одинаково в инерциальных системах отсчета.

- Поскольку время по отношению к геометрии E_3 является внешним объектом, преобразования (2) ничего не говорят о возможной зависимости параметров преобразования от времени. В этом пункте необходимо добавить дополнительный принцип, называемый принципом относительности Галилея, который на основе анализа опытных данных был сформулирован Галилео Галилеем и заключается в современной трактовке в следующем:
- Уравнения механики инвариантны относительно преобразований Галилея:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}_0 t; \quad t' = t. \tag{4}$$

- Преобразования Галилея (4) (группу Галилея) можно объединить с преобразованиями движения (2), полагая в (2) (закон сложения скоростей):

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{v}_0 = \mathrm{Const}, \mathbf{R}_0 = \mathrm{Const}. \tag{5}$$

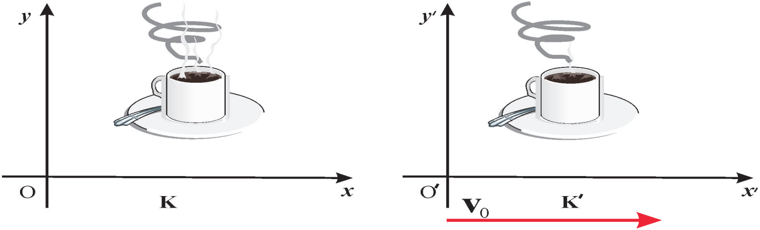

Figure 1. Принцип относительности Галилея. Все законы природы протекают одинаково в инерциальных системах отсчета.

- Поскольку время по отношению к геометрии E_3 является внешним объектом, преобразования (2) ничего не говорят о возможной зависимости параметров преобразования от времени. В этом пункте необходимо добавить дополнительный принцип, называемый принципом относительности Галилея, который на основе анализа опытных данных был сформулирован Галилео Галилеем и заключается в современной трактовке в следующем:
- Уравнения механики инвариантны относительно преобразований Галилея:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}_0 t; \quad t' = t. \tag{4}$$

- Преобразования Галилея (4) (группу Галилея) можно объединить с преобразованиями движения (2), полагая в (2) (закон сложения скоростей):

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{R}_0; \quad \mathbf{v}_0 = \mathrm{Const}, \ \mathbf{R}_0 = \mathrm{Const}. \tag{5}$$

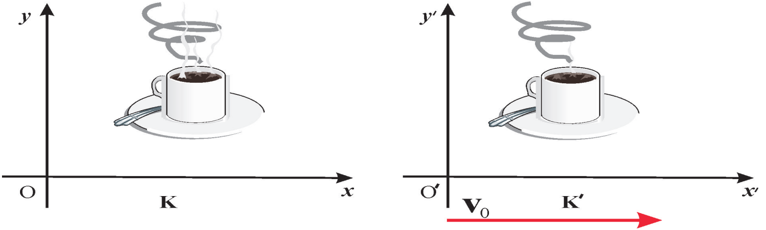

Figure 1. Принцип относительности Галилея. Все законы природы протекают одинаково в инерциальных системах отсчета.

Группа преобразований евклидова пространства и группа преобразований Галилея

- Поскольку время по отношению к геометрии E_3 является внешним объектом, преобразования (2) ничего не говорят о возможной зависимости параметров преобразования от времени. В этом пункте необходимо добавить дополнительный принцип, называемый принципом относительности Галилея, который на основе анализа опытных данных был сформулирован Галилео Галилеем и заключается в современной трактовке в следующем:
- Уравнения механики инвариантны относительно преобразований Галилея:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}_0 t; \quad t' = t. \tag{4}$$

- Преобразования Галилея (4) (группу Галилея) можно объединить с преобразованиями движения (2), полагая в (2) (закон сложения скоростей):

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{v}_0 = \mathrm{Const}, \ \mathbf{R}_0 = \mathrm{Const}. \tag{5}$$

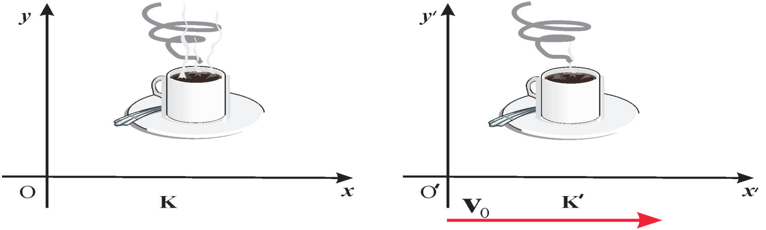

Figure 1. Принцип относительности Галилея. Все законы природы протекают одинаково в инерциальных системах отсчета.

- Поскольку время по отношению к геометрии E_3 является внешним объектом, преобразования (2) ничего не говорят о возможной зависимости параметров преобразования от времени. В этом пункте необходимо добавить дополнительный принцип, называемый принципом относительности Галилея, который на основе анализа опытных данных был сформулирован Галилео Галилеем и заключается в современной трактовке в следующем:
- Уравнения механики инвариантны относительно преобразований Галилея:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}_0 t; \quad t' = t. \tag{4}$$

- Преобразования Галилея (4) (группу Галилея) можно объединить с преобразованиями движения (2), полагая в (2) (закон сложения скоростей):

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{v}_0 = \mathrm{Const}, \ \mathbf{R}_0 = \mathrm{Const}. \tag{5}$$

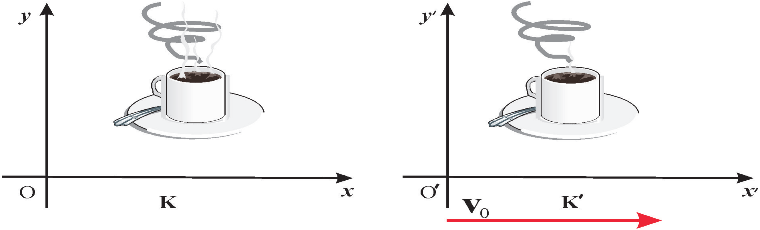

Figure 1. Принцип относительности Галилея. Все законы природы протекают одинаково в инерциальных системах отсчета.

- Поскольку время по отношению к геометрии E_3 является внешним объектом, преобразования (2) ничего не говорят о возможной зависимости параметров преобразования от времени. В этом пункте необходимо добавить дополнительный принцип, называемый принципом относительности Галилея, который на основе анализа опытных данных был сформулирован Галилео Галилеем и заключается в современной трактовке в следующем:
-

> Уравнения механики инвариантны относительно преобразований Галилея:
> $$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}_0 t; \quad t' = t. \tag{4}$$

- Преобразования Галилея (4) (группу Галилея) можно объединить с преобразованиями движения (2), полагая в (2) (закон сложения скоростей):

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{v}_0 = \mathrm{Const}, \; \mathbf{R}_0 = \mathrm{Const}. \tag{5}$$

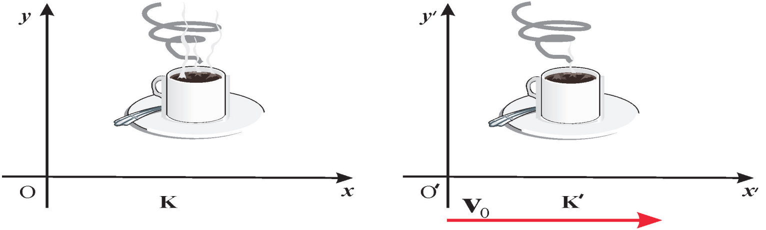

Figure 1. Принцип относительности Галилея. Все законы природы протекают одинаково в инерциальных системах отсчета.

- Функция Лагранжа свободной частицы вследствие однородности и изотропии пространства может зависеть лишь от инварианта $\mathbf{v}^2$. Вследствие принципа относительности Галилея при переходе в другую инерциальную систему отсчета $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{v}_0$ функция Лагранжа $L(\mathbf{v}^2)$ должна перейти в такую же функцию Лагранжа с точностью до полной производной по времени (*объяснить,* ▸ почему?)

$$L'(\mathbf{v}'^2) = L(\mathbf{v} + \mathbf{v}_0)^2) = L(\mathbf{v}^2) + \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}, t).$$

- Этого можно добиться лишь в одном случае:

$$L(v^2) = \alpha \mathbf{v}^2, \quad \alpha = \mathrm{Const}; \quad f(\mathbf{r}, t) = 2\mathbf{r}\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^2 t.$$

- Полагая далее $\alpha = m/2$, где m – инертная масса, получим окончательно:

- Поскольку функция Лагранжа не зависит явно от координат частицы, уравнения Эйлера принимаю вид:

Таким образом, свободная частица совершает прямолинейное равномерное движение.

- Функция Лагранжа свободной частицы вследствие однородности и изотропии пространства может зависеть лишь от инварианта $\mathbf{v}^2$. Вследствие принципа относительности Галилея при переходе в другую инерциальную систему отсчета $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{v}_0$ функция Лагранжа $L(\mathbf{v}^2)$ должна перейти в такую же функцию Лагранжа с точностью до полной производной по времени (*объяснить*, почему?)

$$L'(\mathbf{v}'^2) = L(\mathbf{v} + \mathbf{v}_0)^2) = L(\mathbf{v}^2) + \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}, t).$$

- Этого можно добиться лишь в одном случае:

$$L(v^2) = \alpha \mathbf{v}^2, \quad \alpha = \mathrm{Const}; \quad f(\mathbf{r}, t) = 2\mathbf{r}\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^2 t.$$

- Полагая далее $\alpha = m/2$, где m – инертная масса, получим окончательно:

- Поскольку функция Лагранжа не зависит явно от координат частицы, уравнения Эйлера принимаю вид:

Таким образом, свободная частица совершает прямолинейное равномерное движение.

- Функция Лагранжа свободной частицы вследствие однородности и изотропии пространства может зависеть лишь от инварианта $\mathbf{v}^2$. Вследствие принципа относительности Галилея при переходе в другую инерциальную систему отсчета $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{v}_0$ функция Лагранжа $L(\mathbf{v}^2)$ должна перейти в такую же функцию Лагранжа с точностью до полной производной по времени (*объяснить*, почему?)

$$L'(\mathbf{v}'^2) = L(\mathbf{v} + \mathbf{v}_0)^2) = L(\mathbf{v}^2) + \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}, t).$$

- Этого можно добиться лишь в одном случае:

$$L(v^2) = \alpha \mathbf{v}^2, \quad \alpha = \mathrm{Const}; \quad f(\mathbf{r}, t) = 2\mathbf{r}\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^2 t.$$

- Полагая далее $\alpha = m/2$, где m – инертная масса, получим окончательно:

$$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3}\dot{x}^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{6}$$

- Поскольку функция Лагранжа не зависит явно от координат частицы, уравнения Эйлера принимаю вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \mathrm{Const} \ldots$$

Таким образом, свободная частица совершает прямолинейное равномерное движение.

- Функция Лагранжа свободной частицы вследствие однородности и изотропии пространства может зависеть лишь от инварианта $\mathbf{v}^2$. Вследствие принципа относительности Галилея при переходе в другую инерциальную систему отсчета $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{v}_0$ функция Лагранжа $L(\mathbf{v}^2)$ должна перейти в такую же функцию Лагранжа с точностью до полной производной по времени (*объяснить*, почему?)

$$L'(\mathbf{v}'^2) = L(\mathbf{v} + \mathbf{v}_0)^2) = L(\mathbf{v}^2) + \frac{d}{dt}f(\mathbf{r}, t).$$

- Этого можно добиться лишь в одном случае:

$$L(v^2) = \alpha\mathbf{v}^2, \quad \alpha = \mathrm{Const}; \quad f(\mathbf{r}, t) = 2\mathbf{r}\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^2 t.$$

- Полагая далее $\alpha = m/2$, где m – инертная масса, получим окончательно:

$$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3}\dot{x}^2 \equiv \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \qquad (6)$$

- Поскольку функция Лагранжа не зависит явно от координат частицы, уравнения Эйлера принимаю вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0 \to \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \mathrm{Const}_i \to \dot{x}^i = v_0^i \to x^i = x_0^i + v_0^i t. \qquad (7)$$

Таким образом, свободная частица совершает прямолинейное равномерное движение.

- Функция Лагранжа свободной частицы вследствие однородности и изотропии пространства может зависеть лишь от инварианта $\mathbf{v}^2$. Вследствие принципа относительности Галилея при переходе в другую инерциальную систему отсчета $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{v}_0$ функция Лагранжа $L(\mathbf{v}^2)$ должна перейти в такую же функцию Лагранжа с точностью до полной производной по времени (*объяснить*, почему?)

$$L'(\mathbf{v}'^2) = L(\mathbf{v} + \mathbf{v}_0)^2) = L(\mathbf{v}^2) + \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}, t).$$

- Этого можно добиться лишь в одном случае:

$$L(v^2) = \alpha \mathbf{v}^2, \quad \alpha = \mathrm{Const}; \quad f(\mathbf{r}, t) = 2\mathbf{r}\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^2 t.$$

- Полагая далее $\alpha = m/2$, где m – инертная масса, получим окончательно:

$$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3} \dot{x}^2 \equiv \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{6}$$

- Поскольку функция Лагранжа не зависит явно от координат частицы, уравнения Эйлера принимаю вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \mathrm{Const}_i \Rightarrow \dot{x}^i = v_0^i \Rightarrow x^i = v_0^i t + x_0^i. \tag{7}$$

Таким образом, свободная частица совершает прямолинейное равномерное движение.

Классическая механика одной частицы

- Функция Лагранжа свободной частицы вследствие однородности и изотропии пространства может зависеть лишь от инварианта $\mathbf{v}^2$. Вследствие принципа относительности Галилея при переходе в другую инерциальную систему отсчета $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{v}_0$ функция Лагранжа $L(\mathbf{v}^2)$ должна перейти в такую же функцию Лагранжа с точностью до полной производной по времени (*объяснить*, почему?)

$$L'(\mathbf{v}'^2) = L(\mathbf{v} + \mathbf{v}_0)^2) = L(\mathbf{v}^2) + \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}, t).$$

- Этого можно добиться лишь в одном случае:

$$L(v^2) = \alpha \mathbf{v}^2, \quad \alpha = \mathrm{Const}; \quad f(\mathbf{r}, t) = 2\mathbf{r}\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^2 t.$$

- Полагая далее $\alpha = m/2$, где m – инертная масса, получим окончательно:

$$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3} \dot{x}^2 \equiv \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{6}$$

- Поскольку функция Лагранжа не зависит явно от координат частицы, уравнения Эйлера принимаю вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \mathrm{Const}_i \Rightarrow \dot{x}^i = v_0^i \Rightarrow x^i = v_0^i t + x_0^i. \tag{7}$$

Таким образом, свободная частица совершает прямолинейное равномерное движение.

- Функция Лагранжа свободной частицы вследствие однородности и изотропии пространства может зависеть лишь от инварианта $\mathbf{v}^2$. Вследствие принципа относительности Галилея при переходе в другую инерциальную систему отсчета $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{v}_0$ функция Лагранжа $L(\mathbf{v}^2)$ должна перейти в такую же функцию Лагранжа с точностью до полной производной по времени (*объяснить,* почему?)

$$L'(\mathbf{v}'^2) = L(\mathbf{v} + \mathbf{v}_0)^2) = L(\mathbf{v}^2) + \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}, t).$$

- Этого можно добиться лишь в одном случае:

$$L(v^2) = \alpha \mathbf{v}^2, \quad \alpha = \mathrm{Const}; \quad f(\mathbf{r}, t) = 2\mathbf{r}\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^2 t.$$

- Полагая далее $\alpha = m/2$, где m – инертная масса, получим окончательно:

$$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3} \dot{x}^2 \equiv \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{6}$$

- Поскольку функция Лагранжа не зависит явно от координат частицы, уравнения Эйлера принимаю вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \mathrm{Const}_i \Rightarrow \dot{x}^i = v_0^i \Rightarrow x^i = v_0^i t + x_0^i. \tag{7}$$

Таким образом, свободная частица совершает прямолинейное равномерное движение.

- Рассмотрим частицу во внешнем поле, зависящем от радиуса-вектора $\mathbf{r}$. В этом случае однородность и изотропность пространства нарушается. Но мы можем, следуя принципу ▸ аддитивности функции Лагранжа записать ее в виде:
- $$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r}, t), \qquad (8)$$

  где $V(\mathbf{r}, t)$ – некоторая скалярная функция радиуса-вектора.
- Тогда уравнения Эйлера принимают вид:

  $$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \nabla V, \qquad (9)$$

  где $\nabla_i = \partial_i$.
- Полагая
  $$\nabla V = \mathbf{F}, \qquad (10)$$
- получим закон Ньютона:
  $$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \qquad (11)$$
- Закон сохранения энергии: Умножим скалярно обе части уравнений движения (9) на $\dot{\mathbf{r}}$, тогда получим:

  $$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \partial_i V \frac{dx^i}{dt}.$$

  В случае, если потенциальная функция $V(\mathbf{r}, t)$ не зависит от времени, мы получим в правой части последнего соотношения полную производную по времени, перенося которую в левую часть, получим закон сохранения полной энергии

  $$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = E_0 = Const, \quad E = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - V(\mathbf{r}). \qquad (12)$$

- Рассмотрим частицу во внешнем поле, зависящем от радиуса-вектора $\mathbf{r}$. В этом случае однородность и изотропность пространства нарушается. Но мы можем, следуя принципу ▸ аддитивности функции Лагранжа записать ее в виде:
- $$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r}, t), \tag{8}$$
  где $V(\mathbf{r}, t)$ – некоторая скалярная функция радиуса-вектора.
- Тогда уравнения Эйлера принимают вид:
  $$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \nabla V, \tag{9}$$
  где $\nabla_i = \partial_i$.
- Полагая
  $$\nabla V = \mathbf{F}, \tag{10}$$
- получим закон Ньютона:
  $$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{11}$$
- Закон сохранения энергии: Умножим скалярно обе части уравнений движения (9) на $\dot{\mathbf{r}}$, тогда получим:
  $$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \partial_i V \frac{dx^i}{dt}.$$
  В случае, если потенциальная функция $V(\mathbf{r}, t)$ не зависит от времени, мы получим в правой части последнего соотношения полную производную по времени, перенося которую в левую часть, получим закон сохранения полной энергии
  $$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = E_0 = Const, \quad E = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - V(\mathbf{r}). \tag{12}$$

- Рассмотрим частицу во внешнем поле, зависящем от радиуса-вектора $\mathbf{r}$. В этом случае однородность и изотропность пространства нарушается. Но мы можем, следуя принципу аддитивности функции Лагранжа записать ее в виде:
- $$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r}, t), \tag{8}$$
  где $V(\mathbf{r}, t)$ – некоторая скалярная функция радиуса-вектора.
- Тогда уравнения Эйлера принимают вид:
  $$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x^i} \to \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \nabla V, \tag{9}$$
  где $\nabla_i = \partial_i$.
- Полагая
  $$\nabla V = \mathbf{F}, \tag{10}$$
- получим закон Ньютона:
  $$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{11}$$
- Закон сохранения энергии: Умножим скалярно обе части уравнений движения (9) на $\dot{\mathbf{r}}$, тогда получим:
  $$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \partial_i V \frac{dx^i}{dt}.$$
  В случае, если потенциальная функция $V(\mathbf{r}, t)$ не зависит от времени, мы получим в правой части последнего соотношения полную производную по времени, перенося которую в левую часть, получим закон сохранения полной энергии
  $$\frac{dE}{dt} = 0 \to E = E_0 = Const, \quad E = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - V(\mathbf{r}). \tag{12}$$

- Рассмотрим частицу во внешнем поле, зависящем от радиуса-вектора $\mathbf{r}$. В этом случае однородность и изотропность пространства нарушается. Но мы можем, следуя принципу ▸ аддитивности функции Лагранжа записать ее в виде:
- $$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r}, t), \tag{8}$$
  где $V(\mathbf{r}, t)$ – некоторая скалярная функция радиуса-вектора.
- Тогда уравнения Эйлера принимают вид:
  $$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \nabla V, \tag{9}$$
  где $\nabla_i = \partial_i$.
- Полагая
  $$\nabla V = \mathbf{F}, \tag{10}$$
- получим закон Ньютона:
  $$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{11}$$
- Закон сохранения энергии: Умножим скалярно обе части уравнений движения (9) на $\dot{\mathbf{r}}$, тогда получим:
  $$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \partial_i V\frac{dx^i}{dt}.$$
  В случае, если потенциальная функция $V(\mathbf{r}, t)$ не зависит от времени, мы получим в правой части последнего соотношения полную производную по времени, перенося которую в левую часть, получим закон сохранения полной энергии
  $$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = E_0 = \mathrm{Const}, \quad E = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - V(\mathbf{r}). \tag{12}$$

- Рассмотрим частицу во внешнем поле, зависящем от радиуса-вектора $\mathbf{r}$. В этом случае однородность и изотропность пространства нарушается. Но мы можем, следуя принципу аддитивности функции Лагранжа записать ее в виде:
- $$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r},t), \qquad (8)$$
  где $V(\mathbf{r},t)$ – некоторая скалярная функция радиуса-вектора.
- Тогда уравнения Эйлера принимают вид:
  $$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \nabla V, \qquad (9)$$
  где $\nabla_i = \partial_i$.
- Полагая
- получим закон Ньютона:
- Закон сохранения энергии: Умножим скалярно обе части уравнений движения (9) на $\dot{\mathbf{r}}$, тогда получим:
  $$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \partial_i V\frac{dx^i}{dt}.$$
  В случае, если потенциальная функция $V(\mathbf{r},t)$ не зависит от времени, мы получим в правой части последнего соотношения полную производную по времени, перенося которую в левую часть, получим закон сохранения полной энергии

- Рассмотрим частицу во внешнем поле, зависящем от радиуса-вектора $\mathbf{r}$. В этом случае однородность и изотропность пространства нарушается. Но мы можем, следуя принципу ‣ аддитивности функции Лагранжа записать ее в виде:
- $$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r}, t), \tag{8}$$
  где $V(\mathbf{r}, t)$ – некоторая скалярная функция радиуса-вектора.
- Тогда уравнения Эйлера принимают вид:
  $$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \nabla V, \tag{9}$$
  где $\nabla_i = \partial_i$.
- Полагая
  $$\nabla V = \mathbf{F}, \tag{10}$$
- получим закон Ньютона:
  $$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{11}$$
- Закон сохранения энергии: Умножим скалярно обе части уравнений движения (9) на $\dot{\mathbf{r}}$, тогда получим:
  $$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \partial_i V\frac{dx^i}{dt}.$$
  В случае, если потенциальная функция $V(\mathbf{r}, t)$ не зависит от времени, мы получим в правой части последнего соотношения полную производную по времени, перенося которую в левую часть, получим закон сохранения полной энергии
  $$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = E_0 = \mathrm{Const}, \; E = \frac{mv^2}{2} - V(\mathbf{r}). \tag{12}$$

- Рассмотрим частицу во внешнем поле, зависящем от радиуса-вектора $\mathbf{r}$. В этом случае однородность и изотропность пространства нарушается. Но мы можем, следуя принципу ▸ аддитивности функции Лагранжа записать ее в виде:
- $$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r}, t), \tag{8}$$
  где $V(\mathbf{r}, t)$ – некоторая скалярная функция радиуса-вектора.
- Тогда уравнения Эйлера принимают вид:
  $$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \nabla V, \tag{9}$$
  где $\nabla_i = \partial_i$.
- Полагая
  $$\nabla V = \mathbf{F}, \tag{10}$$
- получим закон Ньютона:
  $$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{11}$$
- Закон сохранения энергии: Умножим скалярно обе части уравнений движения (9) на $\dot{\mathbf{r}}$, тогда получим:
  $$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \partial_i V\frac{dx^i}{dt}.$$
  В случае, если потенциальная функция $V(\mathbf{r}, t)$ не зависит от времени, мы получим в правой части последнего соотношения полную производную по времени, перенося которую в левую часть, получим закон сохранения полной энергии
  $$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = E_0 = \mathrm{Const}, \quad E = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - V(\mathbf{r}) \tag{12}$$

- Рассмотрим частицу во внешнем поле, зависящем от радиуса-вектора $\mathbf{r}$. В этом случае однородность и изотропность пространства нарушается. Но мы можем, следуя принципу ▸ аддитивности функции Лагранжа записать ее в виде:
- $$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r}, t), \tag{8}$$
  где $V(\mathbf{r}, t)$ – некоторая скалярная функция радиуса-вектора.
- Тогда уравнения Эйлера принимают вид:
  $$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \nabla V, \tag{9}$$
  где $\nabla_i = \partial_i$.
- Полагая
  $$\nabla V = \mathbf{F}, \tag{10}$$
- получим закон Ньютона:
  $$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{11}$$
- Закон сохранения энергии: Умножим скалярно обе части уравнений движения (9) на $\dot{\mathbf{r}}$, тогда получим:
  $$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \partial_i V\frac{dx^i}{dt}.$$
  В случае, если потенциальная функция $V(\mathbf{r}, t)$ не зависит от времени, мы получим в правой части последнего соотношения полную производную по времени, перенося которую в левую часть, получим закон сохранения полной энергии
  $$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = E_0 = \mathrm{Const}, \quad E = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - V(\mathbf{r}). \tag{12}$$

- Рассмотрим частицу во внешнем поле, зависящем от радиуса-вектора $\mathbf{r}$. В этом случае однородность и изотропность пространства нарушается. Но мы можем, следуя принципу аддитивности функции Лагранжа записать ее в виде:
- $$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r}, t), \tag{8}$$
  где $V(\mathbf{r}, t)$ – некоторая скалярная функция радиуса-вектора.
- Тогда уравнения Эйлера принимают вид:
  $$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \nabla V, \tag{9}$$
  где $\nabla_i = \partial_i$.
- Полагая
  $$\nabla V = \mathbf{F}, \tag{10}$$
- получим закон Ньютона:
  $$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{11}$$
- Закон сохранения энергии: Умножим скалярно обе части уравнений движения (9) на $\dot{\mathbf{r}}$, тогда получим:
  $$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \partial_i V\frac{dx^i}{dt}.$$
  В случае, если потенциальная функция $V(\mathbf{r}, t)$ не зависит от времени, мы получим в правой части последнего соотношения полную производную по времени, перенося которую в левую часть, получим закон сохранения полной энергии

Классическая механика одной частицы

- Рассмотрим частицу во внешнем поле, зависящем от радиуса-вектора $\mathbf{r}$. В этом случае однородность и изотропность пространства нарушается. Но мы можем, следуя принципу ▸ аддитивности функции Лагранжа записать ее в виде:
- $$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r}, t), \tag{8}$$
  где $V(\mathbf{r}, t)$ – некоторая скалярная функция радиуса-вектора.
- Тогда уравнения Эйлера принимают вид:
  $$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \nabla V, \tag{9}$$
  где $\nabla_i = \partial_i$.
- Полагая
  $$\nabla V = \mathbf{F}, \tag{10}$$
- получим закон Ньютона:
  $$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{11}$$
- Закон сохранения энергии: Умножим скалярно обе части уравнений движения (9) на $\dot{\mathbf{r}}$, тогда получим:
  $$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \partial_i V\frac{dx^i}{dt}.$$
  В случае, если потенциальная функция $V(\mathbf{r}, t)$ не зависит от времени, мы получим в правой части последнего соотношения полную производную по времени, перенося которую в левую часть, получим закон сохранения полной энергии
  $$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = E_0 = \mathrm{Const}, \quad E = \frac{mv^2}{2} - V(\mathbf{r}). \tag{12}$$

- Рассмотрим частицу во внешнем поле, зависящем от радиуса-вектора $\mathbf{r}$. В этом случае однородность и изотропность пространства нарушается. Но мы можем, следуя принципу ▸ аддитивности функции Лагранжа записать ее в виде:
- $$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r}, t), \tag{8}$$
  где $V(\mathbf{r}, t)$ – некоторая скалярная функция радиуса-вектора.
- Тогда уравнения Эйлера принимают вид:
  $$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \nabla V, \tag{9}$$
  где $\nabla_i = \partial_i$.
- Полагая
  $$\nabla V = \mathbf{F}, \tag{10}$$
- получим закон Ньютона:
  $$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{11}$$
- Закон сохранения энергии: Умножим скалярно обе части уравнений движения (9) на $\dot{\mathbf{r}}$, тогда получим:
  $$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \partial_i V\frac{dx^i}{dt}.$$
  В случае, если потенциальная функция $V(\mathbf{r}, t)$ не зависит от времени, мы получим в правой части последнего соотношения полную производную по времени, перенося которую в левую часть, получим закон сохранения полной энергии
  $$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = E_0 = \mathrm{Const}, \quad E = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - V(\mathbf{r}). \tag{12}$$

- Рассмотрим частицу во внешнем поле, зависящем от радиуса-вектора $\mathbf{r}$. В этом случае однородность и изотропность пространства нарушается. Но мы можем, следуя принципу аддитивности функции Лагранжа записать ее в виде:
- $$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r}, t), \tag{8}$$
  где $V(\mathbf{r}, t)$ – некоторая скалярная функция радиуса-вектора.
- Тогда уравнения Эйлера принимают вид:
  $$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \nabla V, \tag{9}$$
  где $\nabla_i = \partial_i$.
- Полагая
  $$\nabla V = \mathbf{F}, \tag{10}$$
- получим закон Ньютона:
  $$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{11}$$
- Закон сохранения энергии: Умножим скалярно обе части уравнений движения (9) на $\dot{\mathbf{r}}$, тогда получим:
  $$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \partial_i V \frac{dx^i}{dt}.$$
  В случае, если потенциальная функция $V(\mathbf{r}, t)$ не зависит от времени, мы получим в правой части последнего соотношения полную производную по времени, перенося которую в левую часть, получим закон сохранения полной энергии
  $$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = E_0 = \mathrm{Const}, \quad E = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - V(\mathbf{r}). \tag{12}$$

Дополнительные свойства функции Лагранжа

- Еще одним важным свойством функции Лагранжа является ее *неоднозначность*, заключающаяся в следующем. Добавим к функции Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$ полную производную произвольной функции $f(q, t)$. Тогда для соответствующей поправки к действию получим:
-
$$\Delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{df}{dt} dt \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1} f(q, t) = f(q^{(1)}, t1) - f(q^{(0)}, t0) = 0.$$
- Поэтому:

Функция Лагранжа L определена с точностью до полной производной по времени от произвольной функции $f(q, t)$.

Обратно

Дополнительные свойства функции Лагранжа

- Еще одним важным свойством функции Лагранжа является ее *неоднозначность*, заключающаяся в следующем. Добавим к функции Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$ полную производную произвольной функции $f(q, t)$. Тогда для соответствующей поправки к действию получим:
- $$\Delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{df}{dt} dt \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1} f(q,t) = f(q^{(1)}, t1) - f(q^{(0)}, t0) = 0.$$
- Поэтому:

  Функция Лагранжа L определена с точностью до полной производной по времени от произвольной функции $f(q, t)$.

Обратно

Дополнительные свойства функции Лагранжа

- Еще одним важным свойством функции Лагранжа является ее *неоднозначность*, заключающаяся в следующем. Добавим к функции Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$ полную производную произвольной функции $f(q, t)$. Тогда для соответствующей поправки к действию получим:
- $$\Delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{df}{dt} dt \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1} f(q, t) = f(q^{(1)}, t1) - f(q^{(0)}, t0) = 0.$$
- Поэтому:

  Функция Лагранжа L определена с точностью до полной производной по времени от произвольной функции $f(q, t)$.

Обратно

Дополнительные свойства функции Лагранжа

- Еще одним важным свойством функции Лагранжа является ее *неоднозначность*, заключающаяся в следующем. Добавим к функции Лагранжа $L(q,\dot{q},t)$ полную производную произвольной функции $f(q,t)$. Тогда для соответствующей поправки к действию получим:
-
$$\Delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{df}{dt}dt \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1} f(q,t) = f(q^{(1)},t1) - f(q^{(0)},t0) = 0.$$

- Поэтому:

Функция Лагранжа L определена с точностью до полной производной по времени от произвольной функции $f(q,t)$.

Обратно

Дополнительные свойства функции Лагранжа

- Еще одним фундаментальным свойством функции Лагранжа помимо ее инвариантности является свойство аддитивности:
- Если динамическая система S состоит из замкнутых подсистем S_A, то функция Лагранжа всей системы при удалении частей на бесконечность равна сумме функций Лагранжа подсистем:

$$\lim_{r\to\infty} L = \sum_A L_A.$$

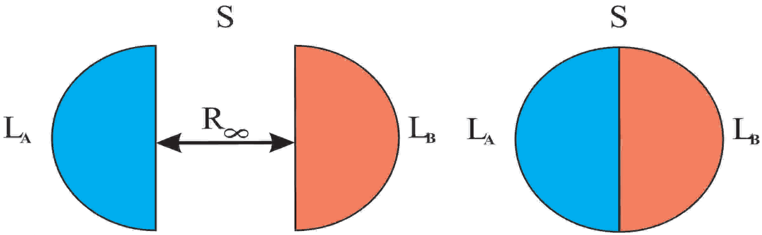

Figure 2. Аддитивность функции действия.

Обратно

Дополнительные свойства функции Лагранжа

- Еще одним фундаментальным свойством функции Лагранжа помимо ее инвариантности является свойство аддитивности:
- Если динамическая система S состоит из замкнутых подсистем S_A, то функция Лагранжа всей системы при удалении частей на бесконечность равна сумме функций Лагранжа подсистем:

$$\lim_{r \to \infty} L = \sum_A L_A. \tag{13}$$

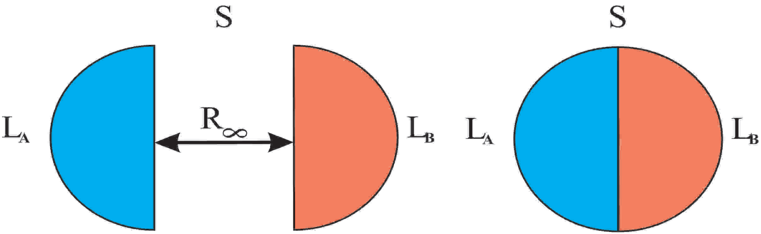

Figure 2. Аддитивность функции действия.

Обратно

Дополнительные свойства функции Лагранжа

- Еще одним фундаментальным свойством функции Лагранжа помимо ее инвариантности является свойство аддитивности:
- Если динамическая система S состоит из замкнутых подсистем S_A, то функция Лагранжа всей системы при удалении частей на бесконечность равна сумме функций Лагранжа подсистем:

$$\lim_{r\to\infty} L = \sum_A L_A. \tag{13}$$

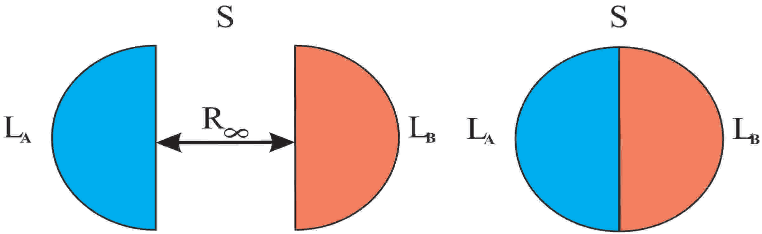

Figure 2. Аддитивность функции действия.

Обратно

Дополнительные свойства функции Лагранжа

- Еще одним фундаментальным свойством функции Лагранжа помимо ее инвариантности является свойство аддитивности:
- Если динамическая система S состоит из замкнутых подсистем S_A, то функция Лагранжа всей системы при удалении частей на бесконечность равна сумме функций Лагранжа подсистем:

$$\lim_{r\to\infty} L = \sum_A L_A\,. \tag{13}$$

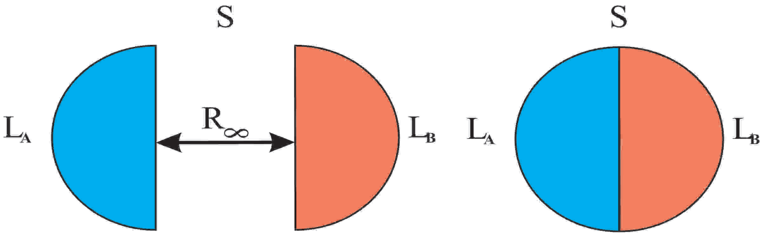

Figure 2. Аддитивность функции действия.

Обратно

Дополнительные свойства функции Лагранжа

- Еще одним фундаментальным свойством функции Лагранжа помимо ее инвариантности является свойство аддитивности:
-

Если динамическая система S состоит из замкнутых подсистем S_A, то функция Лагранжа всей системы при удалении частей на бесконечность равна сумме функций Лагранжа подсистем:

$$\lim_{r\to\infty} L = \sum_A L_A \,. \tag{13}$$

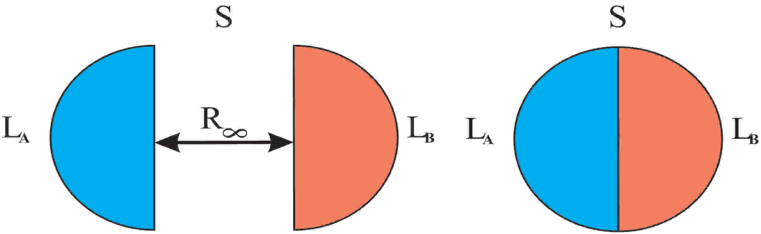

Figure 2. Аддитивность функции действия.

Обратно