КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ СОЦИАЛЬНО-ФИЛОСОФСКИХ НАУК И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ

Кафедра социальной философии

М.Г. ХОРТ

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНАЯ ЛОГИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ПСИХОЛОГОВ:
учебно-методическое пособие

Казань – 2023

УДК 164.1
ББК 87.4
Х 82

Рекомендовано учебно-методической комиссией Института социально-философских наук и массовых коммуникаций КФУ к размещению в электронном архиве Научной библиотеки им. Н.И. Лобачевского
Протокол № 5 от 10 марта 2023

Автор: Хорт М.Г., кандидат философских наук, ассистент кафедры социальной философии КФУ

Рецензент: Сафонов А.С., кандидат философских наук, доцент кафедры социальной философии КФУ

Х 82 Хорт М.Г. Пропозициональная логика для студентов-психологов: учебно-методическое пособие / М.Г. Хорт. – Казань: Казанский федеральный университет, 2023. – 52 с.

В данном пособии дается описание основ пропозициональной логики. Объясняется, как формализовать рассуждение, построить таблицу истинности и проверить валидность вывода. Отдельное внимание уделяется методу проверки валидности вывода через анализ значений. Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 37.03.01 – Психология.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Логическая форма

Когда мы говорим, что кто-то мыслит логично, мы подразумеваем, что его аргументы правильны, подходящи, последовательны, обоснованы, необходимы. Но в каком смысле аргументы могут быть «правильными»? Что определяет, какие доводы подходят в рассуждении, а какие — нет? Что вообще такое «аргумент», «вывод»? Почему некоторые суждения с необходимостью выводятся из других? На все эти вопросы стремится ответить наука, которая называется «формальная логика». Дадим предварительное определение:

Логика — наука о валидности (т.е. правильности, пригодности) аргументов.

Любой аргумент состоит из того, что называют посылками и заключением. Посылки и заключения, как правило, представлены высказываниями. Рассмотрим два примера:

(1) Ваня не психолог, потому что если бы он им был, то знал бы в чем разница между психологом и психиатром, а он не знает.
(2) Если Айша психолог, то она знает значение термина «бихевиоризм». И Айша им является, потому что она действительно знает значение этого термина.

В обоих примерах мы имеем дело с аргументами, состоящими из двух посылок и заключения. В обыденной речи мы часто называем сначала заключение, а потом посылки к нему. Иногда заключение может располагаться между посылками. Иногда посылки даны перед выводом. В логике для удобства анализа принято записывать посылки друг над другом, отделяя их чертой от заключения. Осуществим эту процедуру для наших примеров:

(1) Если Ваня психолог, то он знает в чем разница между психологом и психиатром.

Но Ваня не знает в чем разница между психологом и психиатром.

Следовательно, Ваня не психолог.

(2) Если Айша психолог, то она знает значение термина «бихевиоризм».

Айша знает значение термина «бихевиоризм».

Следовательно, Айша психолог.

Аргумент валиден только в том случае, если вывод не может быть ложным, при допущении истинности посылок. В противном случае он невалиден. Первый из приведенных выше аргументов является валидным, потому что если его посылки истинны, то его вывод не может быть ложным. Второй аргумент невалиден, потому что вывод может быть ложным при истинности данных посылок. Относительно первого примера мы не можем вообразить ситуацию, когда посылки истинны, а заключение ложно (то есть, что Ваня является психологом). Относительно второго примера мы можем представить такие ситуации, когда посылки истинны, а заключение ложно (например, если Айша знает о значении термина «бихевиоризм», потому что она философ).

Посылки и заключение каждого умозаключения (аргумента) являются высказываниями, которые могут быть истинными или ложными. Далее мы будем называть такие высказывания «пропозициями». **Главная особенность пропозиций в том, что они являются носителями истинностного значения.** Но среди выражений языка есть такие, которые НЕ могут быть истинными или ложными, то есть не являются пропозициями. Например: «Какого числа будет экзамен по логике?», «Откройте, пожалуйста, окно», «Вперед, Рубин!».

Вопросы, приказы, просьбы, восклицания и т.п. не являются пропозициями, потому что не могут быть истинными или ложными.

Необходимо различать валидность (или невалидность) умозаключения и истинность (ложность) посылок, из которых оно состоит. Зачастую возможно осуществить логически обоснованный, валидный вывод из фактически ложных посылок. Верно и обратное: фактическая истинность посылок еще не гарантирует обоснованность вывода. Например:

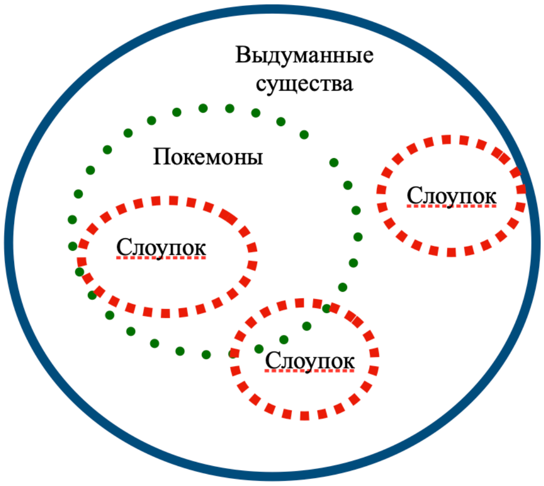
(3) Все психологи знают удмуртский язык.
Пикачу — психолог.
Следовательно, Пикачу знает удмуртский язык.

(4) Все покемоны — выдуманные существа.
Слоупок — выдуманное существо.
Следовательно, Слоупок — покемон.

В примере (3) обе посылки и вывод являются фактически ложными, то есть они не соответствуют действительности. При этом осуществленный в примере (3) вывод является валидным, то есть логически правильным. Допуская, что все психологи знают удмуртский и что Пикачу — психолог, невозможно отрицать, что и Пикачу должен знать удмуртский.

В примере (4) показана обратная ситуация: обе посылки и заключение фактически истинные, они соответствуют действительности, но вывод от заданных посылок к данному заключению не является валидным. Вопрос о том, что определяет валидность вывода, является важнейшим для формальной логики как науки.

Данные ниже схемы визуально показывают, почему вывод (3) валиден, тогда как (4) — нет:

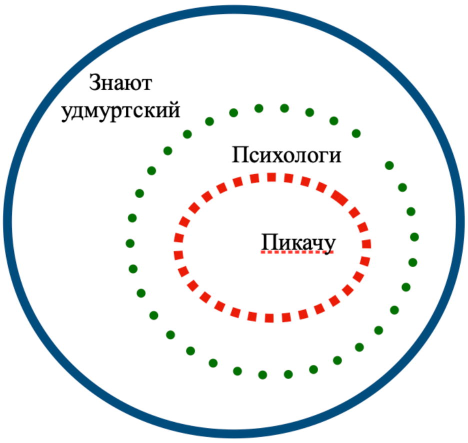


(4)

Круги на схеме иллюстрируют множества объектов. Мы видим, что круг «покемоны» (окружность изображена точками) полностью включен в круг «выдуманные существа» (окружность изображена сплошной линией), а значит объекты, называемые покемонами, есть подмножество в множестве объектов, названных выдуманными существами (то есть мы имеем схему высказывания «все покемоны — выдуманные существа»).

В посылках также было сказано, что «Слоупок — выдуманное существо», то есть он тоже является подмножеством множества «выдуманные существа». Но в посылках не конкретизировано, относится ли Слоупок еще и ко множеству покемонов, поэтому мы можем расположить обозначающий его круг (окружность изображена четырехугольниками) как минимум тремя возможными способами. Он может быть полностью включен в круг покемонов (фактическая ситуация), включен только частично (если Слоупоков несколько и некоторые из них покемоны, а некоторые — нет) или полностью исключен. Во втором и третьем случаях вывод «Слоупок — покемон» был бы ложным, сохраняя при этом истинность посылок. Это показывает, что (логически) заключение может быть неправильным, если посылки истинны.

Если допустить относительно (3), что посылки («все психологи знают удмуртский язык» и «Пикачу — психолог») верны, то круг психологов мы должны изобразить полностью включенным в круг знающих удмуртский язык, а круг Пикачу должен быть полностью включен в круг психологов. Но тогда красный круг тем самым полностью включен в круг знатоков удмуртского языка, то есть Пикачу относится к тем, кто знает удмуртский язык. Это показывает, что вывод логически верен, даже если составляющие аргумент высказывания ложны. Логика выходит за рамки реальной ситуации – она рассматривает все возможные миры.



(3)

Логическая валидность или невалидность вывода определяется его структурой, а не тем, о чем говорят посылки. То есть для логики важна форма, а не содержание. Независимо от того, как мы изменим содержание двух приведенных выше выводов, если мы сохраним их структуру (т.е. сохраним их логическую форму), первое останется логически верным, а второе логически неверным. Например, приведенные ниже выводы получены из (3) и (4) путем замены в них слов или выражений, но при этом их общая структура остается неизменной. В результате содержание выводов полностью меняется, но логические формы остаются прежними:

(3*) Все люди смертны.

Сократ — человек.

Следовательно, Сократ смертен.

(4*) Все студенты — учащиеся.
Ваня — учащийся.
Следовательно, Ваня — студент.

Мы заменили в (3) множество психологов на множество людей, а множество знающих удмуртский на множество смертных существ, а также Пикачу на Сократа. Теперь посылки и заключение в (3*) фактически истинны. Замена никак не повлияла на валидность вывода — он по-прежнему логически верен, так как посылки связаны друг с другом по той же схеме, что и в (3). Замена содержательных элементов для (4) осуществлена в (4*). Она так же не повлияла на логический статус вывода, он по-прежнему не валиден (Ваня может быть учащимся, но не студентом, а школьником).

Поскольку валидность выводов определяется их структурой, а не содержанием, в логике мы используем символы для замены слов или выражений содержания, чтобы сосредоточить внимание на логической форме. Обозначим содержательные элементы в (3) и (3*) буквами латинского алфавита S (для «Пикачу» / «Сократ»), M (для «психологи» / «люди»), P (для «знают удмуртский» / «смертны»). Тогда аргумент можно записать так:

Все M есть P.
Все S есть M.
Следовательно, все S есть P.

Таким образом, **валидный аргумент — это умозаключение, вывод которого является необходимым из-за правильной формальной связи посылок**. О том, в каких случаях посылки связанны «правильно», будет сказано в следующих параграфах.

Итак, валидность в логике зависит исключительно от структуры рассуждения, которую называют «логической формой».

Сравним два высказывания:

1. Все деревья — растения

2. Все планеты сделаны из зеленого сыра

В них говориться о разном, но они одинаково устроены, то есть имеют общую форму, которую можно выразить так:

Все S есть P.

Эта форма отражает внутреннюю структуру высказывания.

Сравним еще два высказывания:

1. *Если человек дышит, то он потребляет кислород.*
2. *Если у людей общие родители, то они сиблинги.*

Оба данных высказывания являются сложными, так как состоят из двух простых. Их форма:

Если A, то B

Эта форма отражает внутреннюю структуру сложных высказываний.

Логическая форма и умозаключений:

Если (A) вскипятить воду до 100°C, то (B) начнется образование пара.

(A) Воду вскипятили до 100°C.

Следовательно, (B) началось образование пара.

Форма этого умозаключения может быть записана так:

1) Если A, то B.

2) A.

Следовательно, B.

Отсюда ясно, что логическая форма — это способ связи входящих в рассуждение содержательных частей. Этими содержательными частями могут быть понятия или высказывания, то есть лингвистические (языковые) сущности. Поэтому логика очень тесно связана с языком. Язык — знаковая система, служащая для целей коммуникации и познания. Системность языка выражается в наличии в каждом языке словаря, синтаксиса, семантики и прагматики.

Прагматические правила языка определяют возможные способы употребления языковых выражений. Синтаксические правила языка устанавливают способы образования сложных выражений из простых и способы преобразования выражений языка. Семантические правила определяют способы придания значения, или смысла, выражениям языка. Правила значения обычно подразделяются на три группы: аксиоматические, выводные и эмпирические.

Все языки могут быть разделены на естественные, искусственные и частично искусственные. Естественные языки, называемые также повседневными, разговорными, обычными и т.п., складываются стихийно и постепенно. История каждого такого языка неотделима от истории народа, владеющего им. К ним относятся, например: русский язык, татарский, английский и т.д. Искусственные языки сознательно создаются людьми для каких-либо специальных целей: языки математики, языки программирования, алгоритмические языки, шифры и т.п Логика как наука тоже создает свои искусственные языки. Логические языки позволяют работать с логической формой.

§ 2. Таблицы истинности

Рассмотрим наиболее элементарный логический язык, который называется «пропозициональная логика» или «логика высказываний». Этот язык нужен, чтобы осуществлять вывод от одних пропозиций к другим, преобразовывать пропозиции и определять истинность или ложность сложных высказываний. Напомним, что пропозиция — это высказывание, являющееся носителем истинностного значения. То есть такое высказывание, к которому в принципе применим критерий истинности или ложности.

Пропозициями, например, являются следующие высказывания:

1) Кошка спит на коврике;
2) Все люди смертны;
3) Луна сделана из зеленого сыра;
4) Единороги любят спать.

Следующие высказывания НЕ являются пропозициями:

1) Как вас зовут?
2) Откройте окно!
3) Пообещай, что придешь.

Пропозиция — это логическая переменная в логике высказываний. Также ее можно назвать «содержательной частью» или «содержательным элементом». Пропозиции, соединенные логическими союзами, образуют сложные (составные) высказывания.

Пример сложных высказываний:

1) Кошка спит на коврике, а щенок на диване.
2) Если все люди смертны, то и Сократ смертен.
3) Луна сделана из зеленого сыра или из мрамора.

4) Завтра будет суббота только в том случае, если сегодня пятница.
5) Единороги любят либо спать, либо прыгать.

Сложное высказывание состоит из нескольких пропозиций. Кроме пропозиций сложное высказывание включает в себя логические константы (также их называют логическими связками или логическими союзами). Таким образом, синтаксис языка пропозициональной логики состоит из двух категорий:

1) Переменные (пропозиции).
2) Константы (логические связки).

Семантика языка пропозициональной логики ограничивается двумя значениями:

1) Значение «истинно» (обозначается как «⊤», «T», «И», «1»).
2) Значение «ложно» (обозначается как «⊥», «F», «Л», «0»).

Истинность или ложность простых пропозиций НЕ устанавливается логикой. Эти значения задаются в основном эмпирически или аксиоматически. Пропозициональная логика нужна, когда нам нужно определить истинность или ложность сложных высказываний, а также осуществить вывод новой пропозиции из заданных пропозиций или сложных высказываний.

Так как в логике нас интересует только форма и не интересует содержание (высказываний или умозаключений), то чтобы отвлечься от содержания, мы вводим условные обозначения. Введение условных обозначений вместо высказываний естественного языка называется формализацией. **Осуществить формализацию значит заменить содержательные элементы рассуждения (понятия, пропозиции, высказывания) переменными, т.е. знаками, не**

имеющими никакого самостоятельного содержания и указывающими только вид, или категорию, заменяемого выражения.

Примем следующие принципы формализации:

1) Пропозиции будем обозначать буквами латинского алфавита (A, B, C, p, q, r и т.д.).
2) Для логических констант введем особые знаки. В логической литературе используются различные системы обозначений, поэтому далее в таблице даются два и более вариантов символов:

~; ¬; верхнее подчеркивание формулы, !	знаки, служащие для обозначения отрицания; читаются: «не», «неверно что».
•; ∧; &	знаки для обозначения логической связки, называемой конъюнкцией; читаются: «и».
∨	знак для обозначения логической связки, называемой дизъюнкцией; читается: «или».
→; ⊃	знаки для обозначения импликации; читаются: «если, то».
≡; ↔	знаки для обозначения эквивалентности высказываний; читаются: «если и только если».

Чтобы формализовать высказывание, нужно сначала определить имеющиеся в нем пропозиции. Далее сопоставить этим пропозициям буквы латинского алфавита. Далее определить какие связки используются в данном высказывании. Далее скомбинировать пропозиции при помощи связок в правильном порядке. **Результатом формализации будет образование формулы пропозициональной логики.** Рассмотрим несколько примеров.

I. Дано высказывание «кошка спит на коврике». Так как это пропозиция, нам достаточно сопоставить ей любую букву, чтобы получить формулу: «кошка спит на коврике» — C. (C) уже является формулой пропозициональной логики. Заключаем законченные формулы в скобки. Скобки являются служебным элементом языка и выполняют ту же функцию, что и в арифметике (обозначают порядок действий).

II. Дано высказывание «кошка спит на коврике, а щенок на диване». Здесь имеется две пропозиции. Обозначим «кошка спит на коврике» как C. Обозначим «щенок спит на диване» как D. Эти две пропозиции связаны конъюнкцией. Следовательно, запишем формулу всего сложного высказывания так: $(C \wedge D)$.

III. Дано высказывание «если кошка спит на коврике, а щенок на диване, то луна сделана из зеленого сыра или незнайка не является моим троюродным братом». Здесь имеется четыре пропозиции. Сопоставим им буквы:

«Кошка спит на коврике» — C
«Щенок спит на диване» — D
«Луна сделана из зеленого сыра» — L
«Незнайка мой троюродный брат» — N.

При формализации сложного высказывания стоит придерживаться следующего принципа. После выявления пропозиций и сопоставления им букв необходимо сначала выявить союз, который является главным. **Главным называется союз, от которого зависит значение всей формулы (он выполняется последним)**. В примере III таким союзом является «Если, … то». Этот союз связывает два сложных высказывания: «Кошка спит на коврике, а щенок на диване», «Луна сделана из зеленого сыра или незнайка не является моим троюродным братом».

Первое из этих высказываний содержит конъюнкцию, а второе — дизъюнкцию (причем один из членов этой дизъюнкции отрицается).

Теперь построим общую формулу:

$$\rightarrow$$

$$(C \wedge D) \rightarrow$$

$$((C \wedge D) \rightarrow (L \vee (\neg N)))$$

Любая формула пропозициональной логики состоит из подформул. Формула всегда является подформулой самой себя. Далее подформулой является любое законченное выражение.

Пример.

Формула $((C \wedge D) \rightarrow (L \vee (\neg N)))$ состоит из следующих подформул:

1) $((C \wedge D) \rightarrow (L \vee (\neg N)))$
2) $(C \wedge D)$
3) $(L \vee (\neg N))$
4) $(\neg N)$
5) (C)
6) (D)
7) (L)
8) (N)

Значение сложного высказывания зависит от значения пропозиций и от операций, при помощи которых они связаны. Каждая операция определённым образом преобразует значение высказываний. Отрицание меняет значение на противоположное, конъюнкция истинна в случае истинности обоих связываемых пропозиций и ложна во всех остальных случаях, дизъюнкция ложна когда оба элемента дизъюнкции ложны и истинна во всех остальных случаях, импликация ложна только когда первый член истинен, а второй ложен и истинна во всех других случаях, эквиваленция ложна, когда у членов эквиваленции разные значения и истинна, когда одинаковые.

Допустим, что в высказывании ((C∧D)→(L∨(¬N))) пропозиции C и D истинны, а L и D — ложны. Тогда мы можем подставить на место пропозициональных букв сами значения:

((⊤∧⊤)→(⊥∨(¬⊥)))

Выполним по порядку операции в скобках:

((⊤∧⊤)→(⊥∨(¬⊥)))

((⊤∧⊤)→(⊥∨ ⊤))

((⊤)→(⊤))

(⊤)

Следовательно, высказывание ((C∧D)→(L∨(¬N))) истинно при истинных C и D и ложных L и D.

Часто бывает так, что мы не знаем какие значения у входящих в формулу пропозиций. Тогда нам нужно «перебрать» все возможные варианты. Выполнить это можно при помощи построения таблиц истинности. Таблицы истинности показывают какое значение принимает формула при разных наборах значений составляющих ее пропозиций. Эта процедура называется интерпретацией формулы.

Например, таблица истинности для отрицания будет выглядеть так:

A	**¬A**
⊤	⊥
⊥	⊤

Таблица наглядно показывает, что если А истинно, то отрицание А ложно и наоборот. Отрицание является единственным союзом, который может выполняться для одной пропозиции (поэтому отрицание называется одноместным союзом). Для всех остальных союзов необходимо две пропозиции.

Таблица для конъюнкции:

A	B	A∧B
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊥

Таблица для дизъюнкции:

A	B	A∨B
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥

Таблица для импликации:

A	B	A→B
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤

Импликация зачастую трудна для понимания. Это бинарная операция, которая определяется в таблицах истинности так, что она ложна тогда и только тогда, когда антецедент (первая переменная в формуле импликации) истинен, а консенквент (вторая переменная) ложен. Во всех остальных случаях импликация истинна, даже когда антецедент ложен или ложны оба члена импликации. Чтобы понять, почему импликация определяется именно так, представьте, что кто-то сообщает вам следующее условие: «если идет дождь, то асфальт мокрый». Зададимся вопросом: в каком случае это условие истинно, а в каком — ложно? Очевидно, что если дождь идет, но асфальт НЕ мокрый, то условие «если идет дождь, то асфальт мокрый» оказывается ложным. Это и есть случай, представленный во второй строке данной выше таблицы. Сложнее понять, почему когда антецедент ложен, то вне зависимости от значения консенквента, импликация в любом случае будет истинна (строки три и четыре). Представим, что дождя нет, но асфальт на улице мокрый. Что это сообщает нам о значении условия «если идет дождь, то асфальт мокрый»? Ничего, так как в указанной импликации речь идет о ситуации, когда дождь идет и что эта ситуация (факт) связана с наличием мокрого асфальта. Само по себе это условие не исключает, что асфальт может быть мокрым и без дождя (например, когда проехала поливочная машина). Такое же объяснение можно дать ситуации, когда нет дождя и асфальт сухой, а кто-то нам сообщает, что «если идет дождь, то асфальт мокрый». Мы как бы не можем проверить это условие, потому что факты в мире другие, а потому придерживаемся мнения об истинности этого условия. Только ситуация дождя без мокрого асфальта будет свидетельствовать о том, что высказанное условие было ложным.

Кроме этого, из уроков информатики вам должно быть известно понятие булевой функции (функции, у которой несколько аргументов, принимающих значения 0 или 1, и сама функция тоже принимает значение 0 или 1). Логические союзы — это булевые функции, которые в языке обозначаются теми же словами, что и грамматические союзы (грамматические союзы «не», «и», «или», «если...то»). Непонимание импликации возникает тогда, когда мы смешиваем булевую функцию с нашим естественным, то есть грамматическим, понимаем связки «если...то». Грамматическое понимание основано на обусловленности одного другим («если я его ударю, он обидится»). В импликации же речь не идёт об обусловленности. Импликация (точнее ее называют «материальная импликация») как булевая функция говорит нам лишь, что если имеется положение дел A, то имеется и положение дел B. И эта связь является постоянной, в отличие от обусловленности. Поэтому «если 2+2=5, то луна – это кусок зеленого сыра» истинно, а «если 2+2=4, то луна – это кусок зеленого сыра» ложно. Утверждение произвольных фактов в импликации истинно в силу их произвольности, но нельзя из чего-то истинного вывести ложное и произвольное.

Таблица для эквиваленции:

A	B	$A \leftrightarrow B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

Мы можем построить таблицу для любого сложного высказывания. Для этого нам нужно выполнить следующие действия:

1) Определить количество строк по принципу 2^n, где n — количество переменных в формуле (каждую переменную считаем только один раз).
2) Определить количество столбцов по принципу количество переменных + количество операций (переменные считаем один раз, операции столько, сколько встречаются). Количество столбцов равно количеству подформул.
3) Выписываем в заглавие первых столбцов буквы переменных.
4) Следующие столбцы соответствуют операциям (подформулам). Важно соблюдать порядок. Сначала то, что в скобках, потом отрицание, потом конъюнкция, потом дизъюнкция, потом импликация, потом эквиваленция.

Пример.

Построим таблицу истинности для следующей формулы: (A→(B∨(¬C)))

Количество строк = 8, т.к. (2^3)

Количество столбцов = 6, т.к. 3+3

Первые столбцы будут для подформул (A), (B), (C)

Далее столбцы для (¬C), затем для (B∨(¬C), затем для (A→(B∨(¬C))).

Таблица имеет следующий вид:

(A)	(B)	(C)	(¬C)	(B∨(¬C)	(A→(B∨(¬C)))
⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤

Последний столбец показывает, какие истинностные значения принимает сложное высказывание при определенных наборах значений входящих в выражение пропозиций. Так, например, для рассмотренного выше выражения есть только один случай, когда оно ложно (когда A и C — истинно, а B — ложно). Такая формула будет называться выполнимой и случайной. Если в последнем столбце мы видим только значения ⊥, то перед нами тождественно ложная формула. Если в последнем столбце мы видим только значения ⊤, то перед нами тавтология (тождественно истинная формула).

§ 3. Анализ значений

Построение таблицы истинности — это семантический метод определения, является ли формула выполнимой, тождественно ложной или тавтологией. Хотя этот метод работает всегда, но зачастую он не очень удобен. Если дана формула с большим количеством переменных и союзов, то таблица будет очень большой, а ее построение займет много времени. Поэтому рассмотрим два метода, которые менее трудозатраты.

Сначала рассмотрим метод косвенного определения статуса формулы. Чтобы косвенно определить, что формула является тавтологией, мы предполагаем, что она имеет значение $\bot$. Далее, основываясь на этом предположении, делаем выводы об истинностных значениях ее подформул. Цель состоит в том, чтобы прийти к противоречию, то есть к подформуле, имеющей как значение $\top$, так и значение $\bot$. Из противоречия будет следовать, что исходное предположение неверно. Следовательно, если невозможно, чтобы исходная формула имела значение $\bot$, значит она всегда имеет значение $\top$, то есть является тавтологией.

В качестве примера мы докажем, что формула $(((p\to q)\wedge(\neg q)) \to (\neg p))$ является тавтологией. На первом шаге предположим, что она имеет значение $\bot$. Запишем так:

1. $(((p\to q)\wedge(\neg q)) \to (\neg p))$ — $\bot$ (допущение);

Теперь мы должны определить, какой союз является главным в данной формуле, и вспомнить, при каких значениях содержательных частей формула с данным союзом ложна. В рассматриваемой формуле главным союзом является импликация (она выполняется последней). Импликация ложна только в случае $\top\to\bot$. Следовательно, чтобы удовлетворять допущению, значения содержательных частей должны быть следующими:

2. $(((p\to q)\wedge(\neg q))$ — $\top$ (из 1);

3. $(\neg p)$ — $\bot$ (из 1);

Теперь проделываем ту же операцию с каждым из полученных выражений. Наша цель прийти к утверждению истинности и ложности одного и того же выражения. В (2) главным союзом является конъюнкция и всему выражению приписывается значение $\top$. Чтобы удовлетворять этому условию, каждый член конъюнкции в (2) тоже должен быть истинным:

4. $(p\to q)$ — T (из 2);
5. $(\neg q)$ — T (из 2);

В выражении (3) главным и единственным союзом является отрицание, причем ему приписывается значение $\bot$. Следовательно, пропозиция без отрицания должна иметь противоположное значение:

6. (p) — $\top$ (из 3);

То же самое для (5):

7. (q) — $\bot$ (из 5);

Теперь мы видим, что пункты (6) и (7) противоречат пункту (4). В (6) говорится, что (p) — $\top$, в (7) говорится, что (q) — $\bot$. Следовательно, выражение $p\to q$ должно иметь значение $\bot$, но в (4) утверждается, что оно $\top$. Это и есть противоречие. Найдя противоречие, мы можем записать:

8. (6) и (7) противоречит (4), следовательно, допущение в (1) неверно.
9. $(((p\to q)\wedge(\neg q)) \to (\neg p))$ — $\top$ (из 8)

Мы можем сделать вывод из значения истинности формулы о значениях истинности ее составляющих, только если это отрицание, или истинная конъюнкция, ложная дизъюнкция или ложная импликация, потому что тогда существует только одна возможность для истинностных значений составляющих выражение частей. Напротив, например, мы не можем сделать вывод из истинности условного «$\alpha \rightarrow \beta$» о значениях истинности α или β, потому что они могут быть как истинными, так и ложными, или α может быть ложным, а β истинным. В таких случаях нам нужны дополнительные предпосылки для того, чтобы сделать вывод. Когда дополнительной информации нет, необходимо рассматривать различные случаи. Например, из того факта, что $(p \wedge q)$ имеет значение $\perp$, можно сделать вывод, что либо (p) — $\perp$ или (q) — $\perp$, или оба. В таких случаях, чтобы доказать, что исходная формула является тавтологией (противоречием), мы должны прийти к противоречию в обоих случаях. Поскольку рассмотрение разных случаев усложняет доказательство, мы должны попытаться обойтись без него. Однако это не всегда возможно. Например, если мы хотим доказать, что формула с эквиваленцией в качестве главного союза является тавтологией или противоречием, мы должны рассмотреть два случая, потому что "$\alpha \leftrightarrow \beta$" истинно тогда и только тогда, когда α и β оба истинны или оба ложны.

Доказательство того, что формула является тождественно ложной, ничем не отличается от доказательства тавтологичности. Только для доказательства ложности формулы, необходимо изначально сделать допущение о ее истинности. То есть отличие только в изначальном допущении. Вот пример доказательства ложности формулы $(\neg((p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg q \vee r)) \wedge (p \wedge \neg r))$:

1. $(\neg((p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg q \vee r)) \wedge (p \wedge \neg r))$ – $\top$ (допущение);
2. $\neg((p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg q \vee r))$ — $\top$ (из 1);
3. $(p \wedge \neg r)$ — $\top$ (из 1);
4. $((p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg q \vee r))$ — $\perp$ (из 2);
5. p — $\top$ (из 3);

6. r — $\bot$ (из 3);
7. $(p\wedge\neg q)$ — $\bot$ (из 4);
8. $(\neg q\vee r)$ — $\top$ (из 4);
9. q — $\bot$ (из 8);
10. (5) и (9) противоречит (7);
11. $(\neg((p\wedge\neg q)\vee\neg(\neg q\vee r)) \wedge (p\wedge\neg r))$ — $\bot$ (из 10).

Косвенно доказывая, что формула является тавтологией или тождественно ложной, мы можем по-разному прийти к противоречию. Более того, мы можем прийти к противоречию только в том случае, если исходная формула является тавтологией, и мы предполагаем, что она ложна, или если это тождественно ложная формула, и мы предполагаем, что она истинна. Если формула случайная, мы не можем прийти к противоречию. Мы также не можем прийти к противоречию, если формула является тавтологией, и мы предполагаем, что она верна, а также если это противоречие и мы предполагаем, что она ложна. Поскольку мы обычно заранее не знаем, каков тип рассматриваемой формулы, это существенный недостаток косвенного доказательства. Поэтому рассмотрим еще один метод, который можно назвать методом анализа значений.

Чтобы понять, в чем заключается этот метод, давайте спросим себя, что следует из значения истинности формулы $((p\wedge(\neg q\vee r))\vee(\neg p\wedge q))$, если одна из ее пропозициональных букв – скажем, (p) – получает определенное значение истинности. Что произойдет, например, если (p) имеет значение $\top$? Чтобы ответить на этот вопрос, мы заменим в формуле (p) на $(\top)$:

$$((p\wedge(\neg q\vee r)) \vee (\neg p\wedge q))$$

1.	p: $\top$
2.	$((\top\wedge(\neg q\vee r))\vee(\neg\top\wedge q))$

Конъюнкция истинной пропозиции и пропозиции с неизвестным значением всегда имеет значение истинности последнего предложения, т. е. $\top\wedge\alpha$ имеет истинное значение α. Это происходит потому, что если α имеет значение $\top$, то $\top\wedge\alpha$ также имеет значение $\top$ (конъюнкция двух истинных предложений является истинным предложением), и если α имеет значение $\bot$, то $\top\wedge\alpha$ также имеет значение $\bot$ (конъюнкция истинного предложения и ложного предложения является ложным предложением). Это дает нам право заменять выражения вида $(\top\wedge\alpha)$ на α. Поэтому в приведенном выше выражении мы можем заменить $(\top\wedge(\neg q\vee r))$ на $(\neg q\vee r)$:

$$((p\wedge(\neg q\vee r)) \vee (\neg p\wedge q))$$

1. $p: \top$
2. $((\top\wedge(\neg q\vee r))\vee(\neg\top\wedge q))$
3. $((\neg q\vee r)\vee(\neg\top\wedge q))$

Далее мы видим, что имеется отрицание пропозиции со значением $\top$. Это позволяет нам оставить вместо $(\neg\top)$ просто $\bot$:

$$((p\wedge(\neg q\vee r)) \vee (\neg p\wedge q))$$

1. $p: \top$
2. $((\top\wedge(\neg q\vee r))\vee(\neg\top\wedge q))$
3. $((\neg q\vee r)\vee(\neg\top\wedge q))$
4. $((\neg q\vee r)\vee(\bot\wedge q))$

Высказывание $(\bot\wedge q)$ будет всегда ложным, какое бы значение q мы не подставили. Поэтому запишем вместо него $\bot$:

$$((p\wedge(\neg q\vee r)) \vee (\neg p\wedge q))$$

1. $p: \top$
2. $((\top\wedge(\neg q\vee r))\vee(\neg\top\wedge q))$
3. $((\neg q\vee r)\vee(\neg\top\wedge q))$
4. $((\neg q\vee r)\vee(\bot\wedge q))$
5. $((\neg q\vee r)\vee(\bot))$

В получившемся выражении главный союз дизъюнкция. Формула, следовательно, имеет такую форму: $(\alpha\vee\bot)$. Значение такого выражения зависит от α, следовательно, оставляем $(\neg q\vee r)$:

$$((p\wedge(\neg q\vee r)) \vee (\neg p\wedge q))$$

1. $p: \top$
2. $((\top\wedge(\neg q\vee r))\vee(\neg\top\wedge q))$
3. $((\neg q\vee r)\vee(\neg\top\wedge q))$
4. $((\neg q\vee r)\vee(\bot\wedge q))$
5. $((\neg q\vee r)\vee(\bot))$
6. $(\neg q\vee r)$

Произведенная подстановка показывает, что когда «p» имеет значение $\top$, истинностное значение всего выражения такое же, как и значение подформулы «$(\neg q\vee r)$». Но значение этой подформулы зависит от значений «q» и «r». Поэтому мы выбираем одну из этих переменных (например, «r») и делаем новую подстановку. Заменяем «r» в «$(\neg q\vee r)$» на $\top$:

$$((p\wedge(\neg q\vee r)) \vee (\neg p\wedge q))$$

1. $p: \top$
2. $((\top\wedge(\neg q\vee r))\vee(\neg\top\wedge q))$
3. $((\neg q\vee r)\vee(\neg\top\wedge q))$

4. $((\neg q \vee r) \vee (\bot \wedge q))$

5. $((\neg q \vee r) \vee (\bot))$

6. $(\neg q \vee r)$

7. r: ⊤

8. $(\neg q \vee \top)$

Когда одна составляющая дизъюнкции истинна, дизъюнкция также истинна, независимо от того, каково значение другого дизъюнкта, т.е. выражение формы $\top \vee \alpha$ всегда имеет значение ⊤. Поэтому мы заменили «$(\neg q \vee \top)$» на (⊤). Получается, что когда «p» и «r» имеют значение ⊤, то ИСХОДНАЯ формула истинна, независимо от истинного значения «q». Но в другом возможном случае, когда «r» имеет значение ⊥, мы заменяем «r» в «$(\neg q \vee r)$» на «⊥». Как уже видно, «$\bot \vee \alpha$» имеет то же истинное значение, что и α, и поскольку порядок дизъюнктов не имеет значения, то «$\neg q \vee \bot$» можно заменить на «$\neg q$».

$$((p \wedge (\neg q \vee r)) \vee (\neg p \wedge q))$$

1.	p: ⊤	
2.	$((\top \wedge (\neg q \vee r)) \vee (\neg \top \wedge q))$	
3.	$((\neg q \vee r) \vee (\neg \top \wedge q))$	
4.	$((\neg q \vee r) \vee (\bot \wedge q))$	
5.	$((\neg q \vee r) \vee (\bot))$	
6.	$(\neg q \vee r)$	
7.	r: ⊤	7’. r:⊥
8.	$(\neg q \vee \top)$	8’. $(\neg q \vee \bot)$
9.	⊤	9’. $\neg q$
10.	⊤	10’. ⊤ ⊥

Проведенный анализ показывает, что когда «p» истинно, а «r» ложно, начальная формула имеет истинное значение «¬q», т.е. она ложна, когда «q» истинно, и истинно, когда «q» ложно. На данном этапе мы видим, что формула случайная. Если бы нас интересовал только тип формулы, мы могли бы остановиться на этом. В этом заключается важное преимущество анализа истинностных значений по сравнению с таблицами. Чтобы определить тип формулы при помощи таблицы, нам нужно заполнить ее полностью. Другая половина анализа, когда «p» имеет значение $\bot$:

$$((p\wedge(\neg q\vee r)) \vee (\neg p\wedge q))$$

1.		$p\colon \top$	1'. $p\colon \bot$
2.		$((\top\wedge(\neg q\vee r))\vee(\neg\top\wedge q))$	2'. $((\bot\wedge(\neg q\vee r))\vee(\neg\bot\wedge q))$
3.		$((\neg q\vee r)\vee(\neg\top\wedge q))$	3'. $\bot\vee(\neg\top\wedge q))$
4.		$((\neg q\vee r)\vee(\bot\wedge q))$	4'. $\bot\vee\bot$
5.		$((\neg q\vee r)\vee(\bot))$	5'. $\top$
6.		$(\neg q\vee r)$	
7.	$r\colon \top$	7'. $r\colon \bot$	
8.	$(\neg q\vee\top)$	8'. $(\neg q\vee\bot)$	
9.	$\top$	9'. $\neg q$	
10.		10'. $\top$ $\bot$	

Правила замены производны от функции, которую выполняет логический союз. Греческими буквами обозначены места в формуле, на которые могут быть подставлены пропозиции или сложные высказывания:

Отрицание:	$\neg\top$ заменяется на $\bot$
	$\neg\bot$ заменяется на $\top$
Конъюнкция:	$\top\wedge\alpha$ (or $\alpha\wedge\top$) заменяется на α
	$\bot\wedge\alpha$ (or $\alpha\wedge\bot$) заменяется на $\bot$

Дизъюнкция:	$\top \vee \alpha$ (or $\alpha \vee \top$) заменяется на $\top$
	$\perp \vee \alpha$ (or $\alpha \vee \perp$) заменяется на α
Импликация:	$\perp \rightarrow \alpha$ заменяется на $\top$
	$\alpha \rightarrow \top$ заменяется на $\top$
	$\top \rightarrow \alpha$ заменяется на α
	$\alpha \rightarrow \perp$ заменяется на $\neg\alpha$
Эквиваленция:	$\top \leftrightarrow \alpha$ (or $\alpha \leftrightarrow \top$) заменяется на α
	$\perp \leftrightarrow \alpha$ (or $\alpha \leftrightarrow \perp$) заменяется на $\neg\alpha$

§ 4. Логический вывод и эквивалентность

Существует связь между понятием *тавтологии* и понятием *логического вывода.* В пропозициональной логике предложение *B* является логическим следствием предложения *A* тогда и только тогда, когда предложение «Если *A*, то *B*» является тавтологией. Примем в качестве знака логического вывода (не путать со знаком логического союза импликации!) стрелку «⇒», тогда логическое следование можно определить так:

A⇒B тогда и только тогда, когда формула «A→B» является тавтологией.

Приведенная выше связь дает нам следующий метод проверки, является ли предложение B логическим следствием предложения A. Мы формируем условие A и B (A→B) и проверяем, является ли получившаяся формула тавтологией. Если это так, то из A с необходимостью следует B. Если это не так, то вывод либо невозможен, либо он вероятностен.

Рассмотрим следующий вывод в качестве примера:

I. Или неверно, что психологический эффект Овсянкиной верно интерпретируется в научной литературе и тот факт, что прерванная задача (даже без стимула) ценится как квазипотребность, имеет эмпирическое подтверждение, или, если у субъекта есть навязчивые мысли о возобновлении деятельности, то она не была закончена.

II. Следовательно, если деятельность была закончена, а у субъекта все равно есть навязчивые мысли о ее возобновлении, то или эффекта Овсянкиной не верно интерпретируется в литературе, или нет эмпирического подтверждения того, что прерванная задача (даже без стимула) ценится как «квазипотребность.

(I) — посылка, а (II) — вывод. Формализуем пропозиции:

(A) — «психологический эффект Овсянкиной верно интерпретируется в научной литературе»

(B) — «имеется эмпирическое подтверждение, что прерванная задача (даже без стимула) ценится как квазипотребность»

(C) — «у субъекта есть навязчивые мысли о возобновлении деятельности».

(D) — «деятельность была закончена».

Тогда все умозаключение выглядит следующим образом: $\neg(A \wedge B) \vee (C \rightarrow \neg D) \Rightarrow (C \wedge D) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$. Следовательно, если формула $((\neg(A \wedge B)) \vee (C \rightarrow \neg D) \rightarrow (C \wedge D) \rightarrow (\neg A \vee \neg B))$ — тавтология, то $((C \wedge D) \rightarrow (\neg A \vee \neg B))$ с необходимостью следует из $((\neg(A \wedge B)) \vee (C \rightarrow \neg D))$. Проверим, является ли получившаяся формула тавтологией с помощью анализа значений:

$$((\neg(A \wedge B) \vee (C \rightarrow \neg D)) \rightarrow ((C \wedge D) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)))$$

1. $A: \top$
2. $((\neg(\top \wedge B) \vee (C \rightarrow \neg D)) \rightarrow ((C \wedge D) \rightarrow (\neg \top \vee \neg B)))$
3. $((\neg B) \vee (C \rightarrow \neg D)) \rightarrow ((C \wedge D) \rightarrow \neg B))$
4. $B: \top$
5. $((\neg \top) \vee (C \rightarrow \neg D)) \rightarrow ((C \wedge D) \rightarrow \neg \top))$
6. $((\bot) \vee (C \rightarrow \neg D)) \rightarrow ((C \wedge D) \rightarrow \bot))$
7. $(C \rightarrow \neg D) \rightarrow \neg(C \wedge D)$
8. $C: \top$
9. $(\top \rightarrow \neg D) \rightarrow \neg(\top \wedge D)$
10. $\neg D \rightarrow \neg D$
11. $\top$

8’. $C: \bot$

9’. $(\bot \rightarrow \neg D) \rightarrow \neg(\bot \wedge D)$

10’. $\top \rightarrow \top$

11’. $\top$

4’. $B: \bot$

5’. $((\neg \bot) \vee (C \to \neg D)) \to ((C \wedge D) \to \neg \bot))$

6’. $\top \to \top$

7’. $\top$

1’. A: $\bot$

2’. $((\neg(\bot \wedge B) \vee (C \to \neg D)) \to ((C \wedge D) \to (\neg \bot \vee \neg B)))$

3’. $((\top \vee (C \to \neg D)) \to ((C \wedge D) \to \top))$

4’. $\top \to \top$

5’. $\top$

Таким образом, валидность вывода в пропозициональной логике определяется как тавтологичность формулы с импликацией в качестве главного союза, который связывает посылки и заключение. В случае, если в аргументе имеется несколько посылок, то их нужно связать друг с другом при помощи конъюнкции. Последнее связано с тем, что высказывание с конъюнкцией эквивалентно утверждению, что каждый из конъюнктов истинен. Валидный аргумент содержит вывод, который не может быть ложным при истинных посылках, и это должно быть отражено в самой форме аргумента. По сути, мы утверждаем, что если *каждая* из данных посылок истинна, то должно быть истинно и заключение.

Также отметим, что логическая валидность (невалидность) схемы умозаключения указывает на логическую валидность (невалидность) не только данного конкретного умозаключения, но и любого другого умозаключения, имеющего ту же логическую форму. При этом стоит учитывать, что пока что мы имеем дело лишь с наиболее элементарным логическим языком — пропозициональной логикой. Он имеет серьезные ограничения. Есть выводы, которые невозможно проанализировать при помощи данного языка. Но если какой-то вывод валиден в рамках пропозициональной логики, то он обязательно валиден в любом другом логическом языке. Если же вывод НЕ валиден в пропозициональной логике, то из этого еще не следует, что он обязательно НЕ валиден в других логических языках.

Выше речь шла о логическом выводе, то есть об аргументах, в которых из заданных посылок можно прийти к утверждению истинности некоторого следствия. При этом обратное невозможно, то есть посылки нельзя вывести из пропозиции, содержащейся в выводе. Но бывают такие аргументы, где вывод возможен «в обе стороны». Подобные аргументы содержат в себе логическую эквивалентность. Если обозначить логическую эквивалентность двойной стрелкой «⇔», то ей можно дать следующее определение:

A⇔B тогда и только тогда, когда формула «A↔B» является тавтологией.

Как видно из этого определение, разница с логическим выводом лишь в том, что при образовании формулы, мы должны связать формулы посылок и вывода логическим союзом эквиваленции, а не импликации.

Рассмотрим пример:

I. Любой человек подвержен когнитивным искажениям и не всегда может их распознать.
II. Неправда, что если человек не всегда может распознать когнитивные искажения, то он им не подвержен.

Высказывания (I) и (II) являются эквивалентными. По сути, это означает, что они сообщают нам одно и то же. Формализуем данные выражения:

(A) — «любой человек подвержен когнитивным искажениям».

(B) — «человек всегда может распознать когнитивные искажения».

Тогда эквивалентность можно записать следующим образом: $(A\land\neg B)\Leftrightarrow\neg(\neg B\rightarrow\neg A)$. Указанная эквивалентность валидная только в том случае, если формула $(A\wedge\neg B)\leftrightarrow\neg(\neg B\rightarrow\neg A)$ — тавтология. Используем анализ значений для проверки:

	$(A\wedge\neg B)\leftrightarrow\neg(\neg B\rightarrow\neg A)$
1.	$A: \top$
2.	$(\top\wedge\neg B)\leftrightarrow\neg(\neg B\rightarrow\neg\top)$
3.	$(\neg B)\leftrightarrow\neg(\neg B\rightarrow\bot)$
4.	$(\neg B)\leftrightarrow(\neg B)$
5.	$\top$
1’.	$A: \bot$
2’.	$(\bot\wedge\neg B)\leftrightarrow\neg(\neg B\rightarrow\neg\bot)$
3’.	$\bot\leftrightarrow\bot$
4’.	$\top$

Так как формула, соответствующая аргументу, всегда имеет в качестве главного союза импликацию или эквиваленцию, то для проверки валидности вывода не всегда нужно осуществлять полный анализ значений. В целом, проверка валидности схемы умозаключения сводится к определению того, возможно ли, чтобы заключение было ложным, если посылка (конъюнкция посылок) истинна. Проверка может быть упрощена, если ясно, что посылка (конъюнкция посылок) истинна только в одном случае или что заключение ложно только в одном случае. Если посылка истинна только в одном случае, можно проверить, может ли в этом случае заключение быть ложным. Схема будет верна тогда и только тогда, когда это невозможно. Рассмотрим пример:

$(\neg A \wedge B \wedge C) \Rightarrow ((A\rightarrow(B\vee D)) \wedge (\neg C\leftrightarrow\neg B))$

Посылки умозаключения должны быть истинными — это минимальное условие, чтобы аргумент был валидным. Из этого мы можем сделать вывод, что B и C должны быть истинными, тогда как A — ложным (чтобы отрицание A оказалось истинным). Зная, какими значениями должны обладать указанные пропозиции, мы можем подставить эти значения в формулу вывода и проверить, какое значение она приобретает. Если вывод может быть только истинным при подобных значениях пропозиций, входящих в посылки, то вывод валидный. В противном случае — нет. Осуществим подстановку и преобразования:

$$(\neg A \land B \land C) \Rightarrow ((A \rightarrow (B \lor D)) \land (\neg C \leftrightarrow \neg B))$$

1. $A{:}\bot,\ B{:}\top,\ C{:}\top$
2. $\top \Rightarrow ((\bot \rightarrow (\top \lor D)) \land (\neg\top \leftrightarrow \neg\top))$
3. $\top \Rightarrow ((\bot \rightarrow \top) \land (\top))$
4. $\top \Rightarrow (\top \land \top)$
5. $\top \Rightarrow \top$
6. $\top$

Указанный метод проверки также применим, когда заключение ложно только в одном случае. Тогда мы можем проверить, может ли в этом случае посылка быть истинной. Если нет, то заключение не может быть ложным, когда посылка истинна, и поэтому схема умозаключения будет верна. И наоборот, если в рассматриваемом случае посылка может быть истинной, то схема умозаключения будет недействительной.

§ 5. Натуральное исчисление

Натуральное исчисление (также называют «естественная дедукция») — это способ определения валидности аргумента, который, в отличие от таблиц истинности или анализа значений, схож с тем, как мы в действительности осуществляем вывод в повседневном размышлении. Он заключается в построении доказательств через сведение посылок к схемам умозаключения, чья валидность уже известна. Рассмотрим, к примеру, три наиболее известных схемы вывода (цифрами обозначены номера посылок, знаком «⇒» — логическое следование) :

Modus ponens: (1) $\alpha \rightarrow \beta$; (2) $\alpha \Rightarrow \beta$

Modus tollens: (1) $\alpha \rightarrow \beta$; (2) $\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$

Disjunctive syllogism: (1) $\alpha \vee \beta$; (2) $\neg\alpha \Rightarrow \beta$

Валидность указанных схем может быть проверена с помощью таблиц истинности или анализа значений, но это вряд ли необходимо, поскольку их обоснованность интуитивно очевидна. Слева от каждой схемы написано имя, которым мы будем ее обозначать. Чтобы увидеть, как работает метод натурального исчисления, рассмотрим следующий пример:

(1) $A \rightarrow B$; (2) $B \vee (A \vee C)$; (3) $B \rightarrow D$ (4) $\neg D$; (5) $C \rightarrow E \Rightarrow E$.

Необходимо доказать, что пропозиция E следует из данных пяти посылок. Использовать таблицы истинности или анализ значений здесь может быть проблематично, поэтому используем натуральное исчисление. Если посмотреть на посылки (3) и (4), то можно увидеть, что из них, если мы применим схему modus tollens, следует вывод $\neg B$. Далее, полученное $\neg B$ можно применить к посылке (1) по тому же правилу для вывода $\neg A$. Кроме этого, $\neg B$ можно применить к посылке (2) по disjunctive syllogism для вывода $A \vee C$. Но так как у нас уже есть $\neg A$, то применив его к $A \vee C$, мы можем утверждать просто C. Полученную посылку можно применить к утверждению (5) по modus ponens и прийти, наконец, к утверждению E. Для упрощения восприятия, запишем преобразования, договорившись, что в квадратных скобках будут указываться сокращенные названия применяемого правила и номера посылок, из которых осуществлен вывод:

Дано: (1) $A \to B$; (2) $B \vee (A \vee C)$; (3) $B \to D$ (4) $\neg D$; (5) $C \to E \Rightarrow E$.

Доказательство: (6) $\neg B$ (MT 3,4); (7) $\neg A$ (MT 1,6); (8) $A \vee C$ (DS 2,6); (9) C (DS 7,8); E (MP 5,9).

В более объемных выводах может потребоваться знание большего количества схем вывода. Вот список наиболее важных правил:

modus ponens (MP)	$(\alpha \to \beta), (\alpha) \Rightarrow \beta$
disjunctive syllogism (DS)	$(\alpha \vee \beta), (\neg\alpha) \Rightarrow \beta$
simplification (S)	$(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \alpha$
conjunction (Conj):	$(\alpha), (\beta) \Rightarrow (\alpha \wedge \beta)$
absorption (Abs)	$(\alpha \to \beta) \Rightarrow \alpha \to (\alpha \wedge \beta)$
modus tollens (MT)	$(\alpha \to \beta), (\neg\beta) \Rightarrow \neg\alpha$
hypothetical syllogism (HS)	$(\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma) \Rightarrow (\alpha \to \gamma)$
addition (Add)	$(\alpha) \Rightarrow (\alpha \vee \beta)$
constructive dilemma (CD)	$(\alpha \to \beta) \wedge (\gamma \to \delta), (\alpha \vee \gamma) \Rightarrow (\beta \vee \delta)$

Натуральное исчисление отличается от таблиц истинности и анализа значений тем, что последние — это общие алгоритмы (рецепты), которые всегда дают нам нужный ответ. Используя таблицу истинности или анализ значений, мы имеем гарантию, что получим ответ на вопрос, логически подразумевают ли некоторые конкретные предложения (формулы) предложение (формулу), или являются ли два предложения логически эквивалентными (в пропозициональной логике). Напротив, процедуры доказательства, каким является натуральное исчисление, не похожи на рецепты, применение которых гарантирует получение желаемого результата. Хотя верно, что если умозаключение логически достоверно, то существует естественное дедуктивное доказательство этого, мы можем оказаться не в состоянии найти такое доказательство. Поэтому таблицы и анализ значений предпочтительнее процедур доказательства. Однако первые не всегда возможны. Например, в отличие от пропозициональной логики, где у нас есть таблицы истинности и анализ значений, в логике предикатов невозможно сформулировать универсальную процедуру проверки логического вывода.

Помимо валидных схем вывода, также имеются валидные схемы эквиваленции. В них вывод возможно осуществлять «в обе стороны». Вот наиболее значимые из них:

transposition (Trans):	$\alpha\to\beta \Leftrightarrow \neg\beta\to\neg\alpha$
double negation (DN):	$\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha$
exportation (Exp):	$\alpha\to(\beta\to\gamma) \Leftrightarrow (\alpha\wedge\beta)\to\gamma$
material implication (Imp):	$\alpha\to\beta \Leftrightarrow \neg\alpha\vee\beta$ $\neg(\alpha\to\beta) \Leftrightarrow \alpha\wedge\neg\beta$
De Morgan (De M):	$\neg(\alpha\wedge\beta) \Leftrightarrow \neg\alpha\vee\neg\beta$ $\neg(\alpha\vee\beta) \Leftrightarrow \neg\alpha\wedge\neg\beta$
commutation (Com):	$\alpha\wedge\beta \Leftrightarrow \beta\wedge\alpha$ $\alpha\vee\beta \Leftrightarrow \beta\vee\alpha$
association (Assoc):	$\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma) \Leftrightarrow (\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$ $\alpha\vee(\beta\vee\gamma) \Leftrightarrow (\alpha\vee\beta)\vee\gamma$
distribution (Distr):	$\alpha\wedge(\beta\vee\gamma) \Leftrightarrow (\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)$ $\alpha\vee(\beta\wedge\gamma) \Leftrightarrow (\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)$
material equivalence (Equiv):	$\alpha\leftrightarrow\beta \Leftrightarrow (\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)$ $\alpha\leftrightarrow\beta \Leftrightarrow (\alpha\wedge\beta)\vee(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$
tautology (Taut):	$\alpha\wedge\alpha \Leftrightarrow \alpha$ $\alpha\vee\alpha \Leftrightarrow \alpha$

§ 6. Доказательства через допущение

Доказательство от противного (или косвенное доказательство, называемое также reductio ad absurdum, т.е. «редукция к противоречию») — это метод доказательства того, что некоторое предложение является логическим следствием некоторых посылок, путем допущения его отрицания. Если в результате допущения мы приходим к противоречию (то есть к предложению и его отрицанию), это показывает, что предположение не может быть истинным и, следовательно, его противоположность обязательно истинна. Возможность косвенного доказательства основывается на законе непротиворечия и законе исключенного третьего. Тот факт, что последовательность логически обоснованных умозаключений приводит к противоречию ($\beta \wedge \neg\beta$), показывает, что если $\neg\alpha$ истинно, то $\beta \wedge \neg\beta$ также должно быть истинным. Но закон непротиворечия исключает последнее, поэтому $\neg\alpha$ не может быть истинным. Однако по закону исключенного третьего по крайней мере одно — α или $\neg\alpha$ — должно быть истинным, но поскольку $\neg\alpha$ ложно, единственной альтернативой является то, что α истинно. Рассмотрим пример:

Дано: (1) $(A \to B) \to \neg D$; (2) $D \vee (C \wedge \neg E)$; (3) $C \to E \Rightarrow A$.

Решение: (4’) $\neg A$ (допущение); (5’) $\neg A \vee B$ (Add 4’); (6’) $A \to B$ (Imp 5’); (7’) $\neg D$ (MP 1,6); (8’) $C \wedge \neg E$ (DS 2,7’); (9’) C (S 8’); (10’) $\neg E \wedge C$ (Com 8’); (11’) $\neg E$ (S 10’); (12’) E (MP 3,9’) – противоречит (11’); (13) A (по редукции 4’-12’).

В пункте 4’ мы предположили, что предложение $\neg A$ истинно. Это только допущение — мы не утверждаем, что оно истинно (на самом деле мы хотим доказать, что оно ложно и, следовательно, его отрицание истинно). Поэтому номер данного предложения, а также номера всех предложений, которые зависят от него, записываются с индексом «’». Так мы указываем, что они могут не быть истинными и используются исключительно для целей редукции к противоречию. (5’) зависит от предположения, поскольку вытекает из него. (6’) является следствием (5’); то же самое относится к (7’) и так далее. Таким образом, путем ряда умозаключений, зависящих от допущения, в (12’) мы приходим к противоречию. Это доказывает истинность A. Хотя мы и вывели A благодаря допущению, но оно выводится НЕ из него (и последующих утверждений), но исключительно из отрицания допущения. Поэтому предложение (13) записано без индекса — оно не следует напрямую из предложений, номера которых имеют индекс. В приведенном примере предложение, которое мы вывели с помощью допущения, было конечным заключением естественной дедукции. Однако мы можем использовать косвенные доказательства для выведения предложений, которые не являются окончательным выводом, но могут быть использованы для его достижения. В этом случае важно, чтобы после завершения косвенного доказательства мы больше не использовали предложения, записанные с индексом, поскольку они служат только для процедуры косвенного доказательства и могут не быть истинными. Рассмотрим пример, в котором для доказательства вывода используется два допущения:

Дано: (1) $A \to (C \lor \neg B)$; (2) $(B \land C) \to (A \land D)$; (3) $B \Rightarrow A \leftrightarrow C$

Решение: (4’) $\neg(A \to C)$ (допущение); (5’) $A \land \neg C$ (Imp 4’); (6’) A (S 5’); (7’) $C \lor \neg B$ (MP 1,6’); (8’) $\neg C$ (S+Com 5’); (9’) $\neg B$ (DS 7’,8’) — противоречит (3); (10) $A \to C$ (по редукции 4’–9’); (11’’) $\neg(C \to A)$ (допущение); (12’’) $C \land \neg A$ (Imp 11’’); (13’’) C (S 12’’); (14’’) $B \land C$ (Conj 3,13’’); (15’’) $A \land D$ (MP 2,14’’); (16’’) A (S 15’’); (17’’) $\neg A$ (S+Com 12’’) — противоречит (16’’); (18) $C \to A$ (по редукции 11–17); (19) $(A \to C) \land (C \to A)$ (Conj 10,18); $A \leftrightarrow C$ (Equiv 19).

Другой вид доказательства, в котором используется допущение, — это условное доказательство. Как и в косвенном доказательстве, в нем предполагается истинность предложения для того, чтобы доказать истинность другого предложения. Предполагаемое предложение может быть не истинным, поэтому мы так же записываем его с индексом (делаем то же самое со всеми зависимыми от него предложениями). Условное доказательство проводится следующим образом. Предполагая истинность предложения α, если мы можем (в результате предположения) логически вывести предложение β, то тем самым мы показали, что если α истинно, то β истинно; другими словами, мы показали, что условное предложение «Если α, то β» (то есть $\alpha \to \beta$) истинно, хотя сами α и β могут быть не истинными. Рассмотрим пример:

Дано: (1) $(\neg P \lor Q) \to \neg S$; (2) $(S \land T) \lor (Q \to P) \Rightarrow \neg P \to \neg Q$

Решение: (3’) $\neg P$ (допущение); (4’) $\neg P \lor Q$ (Add 3’); (5’) $\neg S$ (MP 1,4’); (6’) $\neg S \lor \neg T$ (Add 5’); (7’) $\neg(S \land T)$ (DeM 6’); (8’) $Q \to P$ (DS 2,7’); (9’) $\neg Q$ (MT 8’,3’); (10) $\neg P \to \neg Q$ (по условному допущению 3’-9’).

Таким образом, мы всегда можем предположить, что произвольное предложение α истинно, указав, что это всего лишь предположение, написав его с индексом. Затем мы делаем некоторые выводы, используя в качестве предпосылок как предложения, зависящие от предположения (с индексом), так и другие предложения (без индекса). В любой момент мы можем завершить доказательство. Если предложение, к которому мы пришли, - β, то в следующей строке слева пишем предложение $\alpha \to \beta$ как заключение условного доказательства. Истинность этого предложения несомненна (если посылки истинны). С этого момента мы больше не имеем права использовать предложения условного доказательства (те, что с индексом) — они служат только для условного доказательства и не являются частью основного доказательства. Мы можем использовать как косвенное доказательство, так и условное доказательство в одном и том же доказательстве посредством естественной дедукции. Кроме того, мы можем использовать доказательство через допущение внутри другого доказательства через допущение.

§ 6. Конъюнктивная и дизъюнктивная нормальные формы

В первых параграфах мы строили таблицы истинности, которые позволяют осуществить семантическую интерпретацию любой формулы пропозициональной логики. Но давайте представим ситуацию, что нам дана таблица истинности, но неизвестно, какой формуле она соответствует. Допустим, дана следующая таблица истинности для трех переменных:

A	B	C	?
⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊤
⊥	⊥	⊥	⊤

Из этой таблицы видно, что формула является выполнимой и случайной. Она принимает значение ⊤ всегда, кроме двух случаев: когда A:⊤, B:⊥, C:⊤ и когда A:⊤, B:⊥, C:⊥. Давайте рассмотрим именно эти две строки и подумаем, в каких случаях при данных значениях переменной некоторая сложная формула будет ложной? Чтобы ответить на данный вопрос, нужно вспомнить, что формулы взаимозаменяемы. То есть одной таблице истинности могут соответствовать формально разные формулы (при этом они выражают одно и тоже, то есть одинаково преобразуют значения переменных).

В частности, используя схемы эквивалентности, формулу можно преобразовать в другую формулу, отличную по виду, которая логически эквивалентна первой. Логически эквивалентные формулы имеют одинаковое значение — если пропозициональные буквы в них интерпретировать одинаковым образом, то полученные предложения будут выражать одно и то же. Процесс логического преобразования осуществляется путем многократной замены частей формулы логически эквивалентными частями на основе определенных схем эквивалентности (заменяемой частью может быть вся формула). Принцип подстановки эквивалентов гарантирует, что такие замены приводят к формулам, логически эквивалентным исходной. Например, на основе схемы эквивалентности для импликации ($\alpha\to\beta \Longleftrightarrow \neg\alpha\vee\beta$), мы можем преобразовать исходное выражение:

$$(\neg A\to(B\to\neg C))\to\neg(B\wedge C) \Rightarrow \neg(\neg A\to(B\to\neg C))\vee\neg(B\wedge C).$$

Таким образом, мы избавились от импликации. Но в получившемся выражении можно продолжить замену, последовательно избавляясь от импликаций:

$$(\neg A\to(B\to\neg C))\to\neg(B\wedge C) \Rightarrow \neg(\neg A\to(B\to\neg C))\vee\neg(B\wedge C) \Rightarrow$$

$$\neg(\neg\neg A\vee(B\to\neg C))\vee\neg(B\wedge C) \Rightarrow \neg(\neg\neg A\vee(\neg B\vee\neg C))\vee\neg(B\wedge C).$$

Теперь у нас имеется выражение, только со знаками отрицания, дизъюнкции и конъюнкции. Причем от некоторых из этих знаков можно избавиться. Уберем двойное отрицание, а также отрицания перед скобками по правилу DeM:

$$\neg(A\vee(\neg B\vee\neg C))\vee\neg(B\wedge C) \Rightarrow (\neg A\wedge B\wedge C)\vee\neg B\vee\neg C.$$

Скобки вокруг «$\neg B\vee\neg C$» не нужны, так как это дизъюнкция, которая связана с остальной частью формулы дизъюнкцией, т.е. вся формула является трехчленной дизъюнкцией. Получившаяся формула логически эквивалентна исходной формуле $(\neg A\to(B\to\neg C))\to\neg(B\wedge C)$, так как получается из нее путем ряда преобразований. $(\neg A\wedge B\wedge C)\vee\neg B\vee\neg C$ выражает то же самое, что и исходная формула. Но для получившегося выражения гораздо проще понять, когда оно будет истинным, а когда ложным. Поскольку это дизъюнкция, то формула истинна тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее дизъюнктов истинен, а это так, когда «A» ложно, а «B» и «C» истинны (тогда «$\neg A\wedge B\wedge C$» истинно), или когда «B» ложно (тогда «$\neg B$» истинно), или когда «C» ложно (тогда «$\neg C$» истинно).

В целом, преобразование любой формулы в конечном счете приведет либо к конъюнкции некоторых элементарных дизъюнкций (то есть подформул с дизъюнкцией в качестве главного союза, которая связывает переменные или их отрицания), либо к дизъюнкции элементарных конъюнкций (то есть подформул с конъюнкцией в качестве главного союза, которая связывает переменные или их отрицания).

Таким образом, любая формула пропозициональной логики может быть преобразована в формулу, в которой есть только три союза: отрицание, конъюнкция и дизъюнкция. Подобные формулы упрощают оценку значения и определения статуса формулы (например, когда нам нужно знать, является ли данная формула тавтологией), поэтому их называют «нормальными формами». В случае дизъюнкции элементарных конъюнкций мы имеем дело с дизъюнктивной нормальной формой (сокращенно ДНФ), а в случае с конъюнкцией элементарных дизъюнкций — с конъюнктивной нормальной формой (сокращенно КНФ).

Так как любая формула может быть преобразована в ДНФ или КНФ, то их можно использовать для определения формулы, соответствующей таблице истинности. Вернемся к примеру, который дан в начале этого параграфа. Имеется два случая, когда неизвестная формула ложна. Это условие можно сформулировать так: когда значения переменных соответствуют четвертой строке и шестой, то формула ложна, в остальных случаях — истинна. Как связать три переменные со значениями $A{:}\top$, $B{:}\bot$, $C{:}\top$, чтобы сложная формула преобразовывалась в ложь? Это дизъюнкция: «$\neg A \vee B \vee \neg C$». А в случае шестой строки ($A{:}\top$, $B{:}\bot$, $C{:}\bot$) формула будет выглядеть так: «$\neg A \vee B \vee C$». Соединение их при помощи конъюнкции образует КНФ, которой соответствует рассматриваемая таблица истинности: $(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$.

Задания

Задание 1. Ответьте на вопросы.

а) Что изучает логика?

б) Что такое логическая форма?

в) Что такое логическая переменная?

г) Зачем нужны таблицы истинности?

Задание 2. Установите, какие из приведенных ниже предложений являются высказываниями.

а) Рукописи не горят.

б) Нет такого лабиринта, из которого не было бы выхода.

в) «Прощай, свободная стихия!» (А.С.Пушкин).

г) «Что яростной толпе сраженный гладиатор?» (М.Ю.Лермонтов).

д) Кто автор сочинения «Война и мир»?

ж) Сколько волка не корми, он все в лес просится.

з) «В речи, как и в жизни, надо всегда иметь в виду, что уместно» (Цицерон).

Задание 3. Определите, какие из приведенных ниже высказываний являются простыми, а какие сложными.

а) Кошка на рогожке.

б) Стол покрыт большой синей скатертью с красивым изображением цветов.

в) Неправда, что Луна сделана из зеленого сыра

г) Переговоры будут успешны при взаимных уступках.

д) Мой друг хорошо сдал экзамен по логике, хотя и не готовился.

Задание 4. Запишите логические формулы высказываний.

а) Накопить деньги для инвестиций возможно только если внимательно контролировать свой бюджет и постоянно повышать доходы.

б) Это ложь, что президент Трамп работает на Россию и является несамостоятельным политиком, ведь иначе он бы отменил санкции.

в) Он разозлится и будет ругать нас если окажется, что мы сломали компьютер или хотя бы просто его трогали, хотя если у него будет очень хорошее настроение, то он нас простит.

Задание 5.

а) Допустим, что импликация $A \rightarrow B$ истинна, а эквивалентность $A \equiv B$ ложна. Что можно сказать о значении импликации $B \rightarrow A$?

б) Допустим, что импликация $A \rightarrow B$ ложна. Каково значение $\neg A \wedge B \equiv A \vee B$

Задание 6. Пусть A - истинно , B - ложное. Определите значение истинности следующих высказываний:

а) $(A \vee B) \rightarrow A$

б) $(A \wedge B) \rightarrow A$

в)$A \rightarrow (A \wedge B)$

Задание 7. Найдите все подформула данных выражений:

а) $(\neg A \wedge B) \vee (B \leftrightarrow \neg A)$

б) $(C \wedge (D \vee \neg C)) \leftrightarrow ((E \wedge D) \vee \neg C)$

в) $(B \wedge \neg A) \leftrightarrow (C \rightarrow \neg A)$

г) $((A \rightarrow \neg B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg D \wedge \neg E)$

Задние 8. Постройте таблицы истинности для высказываний:

а) «Если на улице дождь, то выходя из квартиры я беру зонт или остаюсь дома».

б) «Буддизм — это философия или религия, но никак не наука».

в) «Вложив сбережения в акции получишь большую прибыль или разоришься и впадешь в депрессию».

Задние 9. При помощи таблиц истинности, определите, являются ли указанные формулы тавтологиями:

а) $p \vee \neg p$

б) $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$

в) $\{p \vee ((\neg q \vee r) \wedge p)\} \rightarrow (p \vee \neg r)$

г) $((p \rightarrow \neg q) \wedge q) \rightarrow \neg p$

д) $((p \vee q) \wedge \neg p) \leftrightarrow (\neg p \wedge q)$

е $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

Задание 10.

В Деревне Универсиады есть дом, где живут студенты-психологи.

Прослушав курс логики, они решили провести эксперимент: половина жильцов дома всегда и на все вопросы отвечает правду, а другая — всегда врет. Зайдя в этот дом, вы увидели двух жильцов этого дома — Сашу и Катю — испросили «Вы говорите правду или ложь?». На что Катя ответила: «я могу оказаться лжецом только при условии, что Саша всегда говорит правду». Кто есть кто?

Задание 11.

Однажды в школе разбили окно. Под подозрение попали три главных школьных хулигана — Ваня, Салават и Маша — ведь их видели недалеко от «места преступления». Директор решил побеседовать с каждым из них по отдельности. Каждый из хулиганов называл себя невиновным, обвиняя одного или двух товарищей. Их показания выглядели так:

Ваня: «Я не виноват, окно разбили Салават и Маша».

Салават: «Я и Маша невиновны, Ваня разбил окно» Маша: «Моей вины тут нет, окно разбили мальчики».

Директор быстро выяснил, кто точно виновен. Как он это выяснил?

Задание 12. Используйте метод косвенного доказательства для подтверждения, что указанные формулы являются тавтологиями:

а) $\neg(p \vee q) \to \neg p$

б) $(p \to q) \to ((r \vee p) \to (r \vee q))$

в) $(p \vee (q \wedge \neg r)) \to ((p \vee q) \wedge (r \to p))$

г) $((p \to q) \wedge (r \to s)) \to ((p \vee r) \to (q \vee s))$

д) $\neg p \to \neg(p \wedge q)$

е) $\neg p \to ((p \to q) \vee q)$

ж) $(p \wedge (q \vee r)) \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

з) $((p \to q) \vee r) \to \neg((p \wedge \neg q) \wedge \neg r)$

Задание 13. Используя анализ значений, определить статус формул:

а) $p \to (q \to p)$

б) $\neg(p \vee q) \to (p \wedge q)$

в) $(\neg p \vee \neg q) \to \neg(p \wedge q)$

г) $(p \to (\neg q \vee r)) \vee (\neg p \vee q)$

д) $((p \to q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))$

е) $(p \to \neg q) \to \neg p$

ж) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

з) $(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$

и) $(p \to q) \to ((\neg r \vee p) \to (r \wedge \neg q))$

к) $((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r) \to ((p \wedge q) \leftrightarrow r)$

Задание 14. Определите, в каких случаях имеется валидное следование.

а) Если Боб не совершал ограбление, то это сделал Пол, а Гарри солгал. Следовательно, либо это неправда, что ни Боб, ни Пол не совершали ограбления, либо Гарри не лгал.

б) Корабли проходили либо через южный, либо через северный пролив. Если погода была хорошей, они прошли через южный пролив и не подверглись нападению пиратов. Если они прошли через северный пролив, на них напали пираты. Следовательно, если корабли не подверглись нападению пиратов, значит, погода была хорошей.

в) Если закат красный (при условии, сегодня вечером ветрено), то завтра море будет бурным. Значит, если закат красный или сегодня вечером ветрено, то завтра море будет бурным.

г) Если у Джона есть борода, я либо не узнаю его, либо, если я узнаю его, я не поприветствую его. Следовательно, если я поприветствую Джона, то узнаю его, а если не поприветствую, то значит у него есть борода.

Задание 15. Проверьте валидность эквиваленций:

а) $\neg\neg p \Leftrightarrow p$

б) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

в) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

г) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

д) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

е) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

ж) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

з) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \Leftrightarrow p$

и) $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \leftrightarrow \neg q$

к) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Задание 16. Используйте натуральное исчисление для проверки валидности выводов:

а) (1) $A \rightarrow C$; (2)$D \vee (A \wedge B)$; (3) $\neg D \Rightarrow C$

б) (1) $I \rightarrow J$; (2)$J \vee (I \vee K)$; (3) $J \rightarrow M$; $\neg M$; (4) $K \rightarrow \neg N \Rightarrow \neg N$

в) (1) $A \rightarrow C$; (2)$C \rightarrow (A \leftrightarrow B)$; (3) $\neg B$; (4) $\neg D \rightarrow [D \vee \neg(A \leftrightarrow B)]$; (5)$D \rightarrow B \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$

г) (1) $A \rightarrow B$; (2)$(A \wedge B) \rightarrow (\neg\neg C \wedge \neg D)$; (3) $\neg E \rightarrow \neg C$; (4) A; (5) $\neg\neg E \rightarrow F \Rightarrow F \vee (\neg A \leftrightarrow \neg B)$

д) (1) $F \to G$; (2) $\neg(F \wedge G) \wedge L$; (3) $(G \vee H) \to (I \wedge J)$; (4) $F \vee (K \vee G)$; (5) $\neg K \wedge L \Rightarrow I \vee H$

е) (1) $(A \vee B) \wedge C$; (2) $A \to D$; (3) $B \to E$; (4) $E \to F$; $\Rightarrow D \vee F$

ж) (1) $Q \to (V \vee R)$; (2) $T \to \neg U$; (3) $\neg V$; (4) $T \vee Q$; (5) $\neg U \to V \Rightarrow R$

з) (1) $\neg S \to (N \vee O)$; (2) $(N \to U) \wedge (P \to T)$; (3) $(O \to T) \wedge (P \to N)$; (4) $\neg U$; (5) $S \to U$; $\Rightarrow T$

и) (1) $A \to B$; $\neg B$; (2) $[(\neg A \wedge \neg B) \vee C] \to (B \vee D) \Rightarrow D \vee \neg E$

к) (1) $(Q \vee R) \to [(S \vee L) \to \neg T]$; (2) $(S \vee U) \to Q$; (3) $S \wedge \neg U$; (4) $T \vee K \Rightarrow K$

Литература

1. Дмитриевская И.В. Логика / И.В. Дмитриевская. – М.: Флинта, 2013. – 384 с.
2. Бочаров В. А. Основы логики / В.А. Бочаров, В.И. Маркин. – М.: Инфра-М, 1998. – 296 с.
3. Бочаров В. А. Введение в логику / В.А. Бочаров, В.И. Маркин. – М.: Инфра-М, 2011. – 560 с.
4. Кириллов В.И. Логика / В.И.Кириллов, А.А. Старченко. – М.: Юристъ, 2001. – 254 с.
5. Ивин А.А. Практическая логика / А.А. Ивин. – М.: ФАИР-ПРЕСС, 2002. – 288 с.
6. Светлов В.А. Логика / В.А. Светлов. – М.: Логос, 2012. – 432 с.
7. Рузавин Г. И. Основы логики и аргументации / Г.И. Рузавин. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – 320 с