Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
201_, №_, с. 1–16 *e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

А.Н. АБЫЗОВ, Д.Т. ТАПКИН

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ КОЛЕЦ ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Аннотация. Рассматривается проблема изоморфизма колец обобщенных матриц порядка три со значением в некотором кольце R. Изучаются условия регулярности и вполне идемпотентности для колец обобщенных матриц.

Ключевые слова: кольца обобщенных матриц, регулярность, вполне идемпотентность.

УДК: 512.55

Пусть R_1, R_2, ..., R_n - кольца, а M_{ij} - (R_i, R_j)-бимодули, причем $M_{ii} = R_i$, для всех $1 \leq i, j \leq n$. Пусть также $\varphi_{ijk} : M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \to M_{ik}$ будут (R_i, R_k)-бимодульными гомоморфизмами, с оговоркой, что φ_{iij} и φ_{ijj} - канонические изоморфизмы для всех $1 \leq i, j \leq n$. Введем обозначение $a \circ b = \varphi_{ijk}(a \otimes b)$ для $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$. За K обозначим множество всех $n \times n$-матриц (m_{ij}), с элементами $m_{ij} \in M_{ij}$ для всех $1 \leq i, j \leq n$. Простая проверка показывает, что относительно обычных операций сложения и умножения K будет кольцом, если и только если $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ для всех $a \in M_{ik}$, $b \in M_{kl}$, $c \in M_{lj}$, $1 \leq i, k, l, j \leq n$. Если K оказывается кольцом, то оно называется *кольцом формальных матриц* порядка n и обозначается $K(\{M_{ij}\} : \{\varphi_{ikj}\})$. Кольцо формальных матриц $K(\{M_{ij}\} : \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n, в котором $M_{ij} = R$ для всех $1 \leq i, j \leq n$, называется кольцом формальных матриц над R порядка n и обозначается $K_n(R)$ или $K_n(R : \{\varphi_{ikj}\})$.

Пусть $K_n(R : \{\varphi_{ikj}\})$ - кольцо формальных матриц над R порядка n. Обозначим $\eta_{ijk} = \varphi_{ijk}(1 \otimes 1)$ для всех $1 \leq i, j \leq n$. Тогда $a \circ b = \varphi_{ijk}(a \otimes b) = \eta_{ijk} ab$ для всех $a, b \in R$. Для любого $a \in R$ имеем $a\,\eta_{ijk} = \varphi_{ijk}(a \otimes 1) = \varphi_{ijk}(1 \otimes a) = \eta_{ijk} a$. Таким образом, η_{ijk} лежит в центре $C(R)$ кольца R. Также выполняются условия

1) $\eta_{iij} = \eta_{ijj} = 1, \quad 1 \leq i, j \leq n,$
2) $\eta_{ijk}\eta_{ikl} = \eta_{ijl}\eta_{jkl}, \quad 1 \leq i, j, k, l \leq n,$
3) $\eta_{iji} = \eta_{jij}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$
4) $\eta_{iji} = \eta_{ijk}\eta_{jik} = \eta_{kij}\eta_{kji}, \quad 1 \leq i, j, k \leq n.$

Первое условие выполняется в силу того, что φ_{iij} и φ_{ijj} - канонические изоморфизмы. А в

Поступила _._.201_

силу ассоциативности операции $\circ$ имеем $\eta_{ijk}\eta_{ikl}abc = \eta_{ijl}\eta_{jkl}abc$ для всех $a, b, c \in R$. Положив $a = b = c = 1$ получаем второе условие. Остальные условия непосредственно следуют из первых двух условий.
В то же время, для любого набора $\{\eta_{ijk} \,|\, 1 \leq i, j, k \leq n\}$ центральных элементов R, удовлетворяющих первому и второму условию, можно положить $\varphi_{ijk}(a \otimes b) = \eta_{ijk}ab$ для всех $a, b \in R$. Непосредственная проверка показывает, что $K_n(R : \{\varphi_{ikj}\})$ будет кольцом формальных матриц над R порядка n. Таким образом, кольцо формальных матриц $K_n(R : \{\varphi_{ikj}\})$ однозначно определяется набором центральных элементов $\{\eta_{ijk} \,|\, 1 \leq i, j, k \leq n\}$. В этом случае кольцо формальных матриц $K_n(R : \{\varphi_{ikj}\})$ мы будем обозначать через $K_n(R : \{\eta_{ikj}\})$.

В настоящей работе изучаются кольца формальных матриц со значением в некотором кольце R. В первом пункте статьи приведены предварительные результаты и основные примеры колец обобщенных матриц со значением в некотором кольце R. Во втором пункте изучаются условия регулярности и вполне идемпотентности для колец обобщенных матриц. Третий пункт настоящей статьи посвящен проблеме изоморфизма колец обобщенных матриц порядка три со значением в некотором кольце R. Отметим, что проблема изоморфизма колец обобщенных матриц порядка два со значением в некотором кольце была изучена в работе [2].

1. Предварительные результаты

Предложение 1. *Пусть $K = K_n(R : \{\eta_{ikj}\})$ - кольцо формальных матриц над R порядка n, $I = (I_{ij})$ - идеал в кольце K. Тогда*
1)$K_n(\{R/I_{ij}\} : \{\psi_{ikj}\})$ - кольцо формальных матриц, где
$\psi : R/I_{ij} \otimes R/I_{jk} \to R/I_{ik}$ определяется по формуле
$\psi_{ijk}(\overline{a} \otimes \overline{b}) = ab\,\eta_{ijk} + I_{ik}$, $1 \leq i, j, k \leq n$;
2) $K/I \cong K_n(\{R/I_{ij}\} : \{\psi_{ikj}\})$.

$\square$ **1)** Показывается непосредственной проверкой.
2) Отображение $\Phi : K \to K_n(\{R/I_{ij}\} : \{\psi_{ikj}\})$, определяемое по правилу $\Phi((a_{ij})) = (a_{ij} + I_{ij})$, есть эпиморфизм колец с ядром $\mathrm{Ker}(\Phi) = I$. $\blacksquare$

Предложение 2. *Пусть $K_n(R : \{\eta_{ikj}\})$ - кольцо формальных матриц над R порядка n, причем $\eta_{ikj} \in U(R)$, $1 \leq i, k, j \leq n$. Тогда $K_n(R : \{\eta_{ikj}\}) \cong M_n(R)$.*

$\square$ Рассмотрим отображение $\Phi : K_n(R : \{\eta_{ikj}\}) \to M_n(R)$ переводящее матрицу (a_{ij}) в $(\eta_{1ij}a_{ij})$. Легко видеть, что это отображение биективно и сохраняет операцию сложения. А в силу того, что $\eta_{1ij}\eta_{1jk} = \eta_{1ik}\eta_{ijk} = \eta_{ijk}\eta_{1ik}$, отображение Φ сохраняет еще и операцию произведения, т.е. является изоморфизмом. $\blacksquare$

Пусть $s \in C(R)$. Введем обозначение $J_s(R) = (s : J(R)) = \{x \in R \mid sx \in J(R)\}$. Из [7] непосредственно следует следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $K = K_n(R : \{\eta_{ikj}\})$ - кольцо формальных матриц над R порядка n. Тогда*

$$J(K) = \begin{pmatrix} J(R) & J_{\eta_{121}}(R) & \dots & J_{\eta_{1n1}}(R) \\ J_{\eta_{212}}(R) & J(R) & \dots & J_{\eta_{2n2}}(R) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_{\eta_{n1n}}(R) & J_{\eta_{n2n}}(R) & \dots & J(R) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим кольцо формальных матриц $K_3(R : \{\eta_{ikj}\})$ порядка 3. Пусть e_{ij}, $1 \leq i, j \leq 3$ - матричные единицы кольца $K_3(R : \{\eta_{ikj}\})$. Далее будем придерживаться следующих обозначений

$$\begin{aligned}
&e_{32}e_{23} = \alpha_1 e_{33}, \quad e_{23}e_{32} = \alpha_1 e_{22},\\
&e_{13}e_{31} = \alpha_2 e_{11}, \quad e_{31}e_{13} = \alpha_2 e_{33},\\
&e_{12}e_{21} = \alpha_3 e_{11}, \quad e_{21}e_{12} = \alpha_3 e_{22},\\
&e_{31}e_{12} = \beta_1 e_{32}, \quad e_{21}e_{13} = \beta'_1 e_{23},\\
&e_{32}e_{21} = \beta_2 e_{31}, \quad e_{12}e_{23} = \beta'_2 e_{13},\\
&e_{23}e_{31} = \beta_3 e_{21}, \quad e_{13}e_{32} = \beta'_3 e_{12}.
\end{aligned}$$

Из результатов предыдущего пункта следуют соотношения

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \beta_2\beta_3 = \beta'_2\beta'_3,\\
&\alpha_2 = \beta'_1\beta_3 = \beta_1\beta'_3,\\
&\alpha_3 = \beta_1\beta_2 = \beta'_1\beta'_2
\end{aligned}$$

Несложно заметить, что каждое семейство элементов $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in C(R)$, удовлетворяющих предыдущим равенствам, задает кольцо формальных матриц над R порядка три.

Рассмотрим кольца формальных матриц порядка три, у которых $1 = \beta_1 = \beta'_2 = \beta_3$ и $q = \beta'_1 = \beta_2 = \beta'_3$, где $q \in C(R)$. В результате получим кольца скрещенных матриц порядка три, которые имеют важные приложение в структурной теории артиновых колец [4].

Рассмотрим кольца формальных матриц порядка три, у которых $\beta_1 = \beta'_1$, $\beta_2 = \beta'_2$, $\beta_3 = \beta'_3$. Эти кольца мы будем обозначать через $M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R)$.

Предложение 4. *Пусть R - кольцо, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in C(R)$. Тогда отображение $\Phi_{\beta_1\beta_2\beta_3} : M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R) \to M_3(R)$, определенное по правилу*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \beta_1 a_{12} & \beta_1 a_{13} \\ \beta_2 a_{21} & a_{22} & \beta_2 a_{23} \\ \beta_3 a_{31} & \beta_3 a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

является гомоморфизмом колец. Более того, выполняется следующее
1) $\Phi_{\beta_1\beta_2\beta_3}(1) = 1$;
2) $(\mathrm{Ker}(\Phi_{\beta_1\beta_2\beta_3}))^2 = 0$;
3) $\Phi_{\beta_1\beta_2\beta_3}$ *сюрьекция* $\Leftrightarrow \beta_1, \beta_2, \beta_3$ *- неделители нуля в* R;
4) $\Phi_{\beta_1\beta_2\beta_3}$ *инъекция* $\Leftrightarrow \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in U(R) \Leftrightarrow \Phi_{\beta_1\beta_2\beta_3}$ *биекция.*

□ Предложение доказывается непосредственной проверкой. ■

Обобщим некоторые важные свойства матриц на кольцо $M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R)$.

Рассмотрим свободный левый R - модуль $\widetilde{R}$ над кольцом R, у которого базис имеет вид e_0, e_1, e_2, e_3. На модуле $\widetilde{R}$ определим операцию умножения, согласно следующему правилу

$(\sum_{0\le i\le 3} r'_i e_i)(\sum_{0\le j\le 3} r''_j e_j) = \sum_{0\le i,j\le 3} r'_i r''_j e_i e_j$, где $e_1^2 = \beta_2\beta_3 e_0,\ e_2^2 = \beta_1\beta_3 e_0,\ e_3^2 = \beta_1\beta_2 e_0$, $e_1e_2 = \beta_3 e_3,\ e_2e_3 = \beta_1 e_1,\ e_1e_3 = \beta_2 e_2$ и $e_0e_i = e_ie_0 = e_i$ для каждого $0 \le i \le 3$

Несложно заметить, что относительно введенной операции умножения модуль $\widetilde{R}$ является кольцом. Отождествляя каждый элемент $r \in R$ с элементом re_0, мы можем считать, что кольцо R является подкольцом кольца $\widetilde{R}$.

Следующая лемма проверяется непосредственно.

Лемма 5. *Отображение $\pi : M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R) \to M_3(\widetilde{R})$, действующее по правилу*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}e_3 & a_{13}e_2 \\ a_{21}e_3 & a_{22} & a_{23}e_1 \\ a_{31}e_2 & a_{32}e_1 & a_{33} \end{pmatrix}$$

является инъективным гомоморфизмом колец.

В кольце $M_3(\widetilde{R})$ определен определитель $\det_{\widetilde{R}}$. Однако, в силу того что $e_1e_2e_3 = \beta_1\beta_2\beta_3$, для любой матрицы $A \in M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R)$ определитель $\det_{\widetilde{R}}(\pi(A)) \in R$. Это позволяет ввести определитель в $M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R)$ по правилу

$$\det_{\beta_1\beta_2\beta_3}(A) = \det_{\widetilde{R}}(\pi(A)).$$

Теорема 6. *Пусть R - коммутативное кольцо, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in R$ и $A, B \in M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R)$. Тогда*
1) $\det_{\beta_1\beta_2\beta_3}(AB) = \det_{\beta_1\beta_2\beta_3}(A)\det_{\beta_1\beta_2\beta_3}(B)$*;*
2) если f - характеристический многочлен матрицы A, то $f(A) = 0$
3) матрица A обратима в $M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R)$ тогда и только тогда, когда $\det_{\beta_1\beta_2\beta_3}(A) \in U(R)$.

$\square$ **1)** Следует из свойств определителя $M_3(\widetilde{R})$.

2)Пусть $f(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$. По теореме Гамильтона-Кэли $f(\pi(A)) = 0$. Имеем

$$0 = f(\,\pi(A)\,) = a_3(\pi(A))^3 + a_2(\pi(A))^2 + a_1\pi(A) + a_0E =$$
$$\pi(a_3A^3 + a_2A^2 + a_1A + a_0) = \pi(f(A)).$$

Таким образом $f(A) = 0$.
3) Утверждение непосредственно следует из предыдущего пункта.$\blacksquare$

Рассмотрим кольцо формальных матриц порядка три вида $M_{\beta\beta\beta}(R)$. Матричные единицы кольца $M_{\beta\beta\beta}(R)$ перемножаются согласно следующим правилам $e_{ij}e_{ji} = \beta^2 e_{ii}$ и $e_{ij}e_{jk} = \beta e_{ik}$, если $i \neq k$. Рассмотрим следующее непосредственное обобщение колец формальных матриц $M_{\beta\beta\beta}(R)$. Обозначим через $K_\beta(n, R)$ - кольцо формальных матриц порядка n над R, у которого матричные единицы перемножаются согласно следующим правилам $e_{ij}e_{ji} = \beta^2 e_{ii}$ и $e_{ij}e_{jk} = \beta e_{ik}$, если $i \neq k$. Кольца формальных матриц вида $K_{n,\beta}(R)$ были рассмотрено в работе [6]. Покажем, что кольцо формальных матриц вида $K_{n,\beta}(R)$ мы можем рассматривать как подкольцо кольца обыкновенных матриц на кольцом, которое является расширением кольца R. Рассмотрим свободный левый R - модуль $\widehat{R}$ над кольцом R, у которого базис имеет вид $\{e_A\}_{A \in 2^{\{1,\ldots,n\}}}$. На модуле $\widehat{R}$ определим операцию умножения, согласно следующему правилу

$(\sum r'_A e_A)(\sum r''_A e_A) = \sum r'_A r''_B e_A e_B$, где $e_A e_\varnothing = e_\varnothing e_A = e_A$ и $e_A e_B = \beta e_{A \Delta B}$, $e_A e_A = \beta^2 e_\varnothing$, если $A \neq B, A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$.

Несложно заметить, что относительно введенной операции умножения модуль $\widehat{R}$ является кольцом. При этом мы можем считать, что кольцо R является подкольцом кольца $\widehat{R}$, отождествляя каждый элемент $r \in R$ с элементом $re_\varnothing$. Следующая лемма проверяется непосредственно.

Лемма 7. *Отображение $f : K_{n,\beta}(R) \to M_n(\widehat{R})$, действующее по правилу*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}e_{\{12\}} & \dots & a_{1n}e_{\{1n\}} \\ a_{21}e_{\{12\}} & a_{22} & \dots & a_{2n}e_{\{2n\}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}e_{\{1n\}} & a_{n2}e_{\{2n\}} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

является иъективным гомоморфизмом колец.

Если R - коммутативное кольцо, то для матриц из кольца $K_{n,\beta}(R)$ мы можем вести аналоги понятий определителя и характеристического многочлена согласно следующим правилам

$det_\beta(A) = det(f(A)), \chi_{\beta,A}(\lambda) = \chi_{f(A)}(\lambda)$.

Непосредственная проверка показывает, что $det_\beta(A) \in R, \chi_{\beta,A}(\lambda) \in R[\lambda]$. Заметим, что наши определения определителя и характеристического многочлена совпадают с соответствующими определениями из работы [6]. Следующее утверждение непосредственно следует из предыдущей леммы.

Теорема 8 (6, предложение 32, теорема 34)**.** *Пусть R - коммутативное кольцо и $A, B \in K_{n,\beta}(R)$. Тогда*
1) $det_\beta(AB) = det_\beta(A)det_\beta(B)$;
2) $\chi_{\beta,A}(A) = 0$;
3) матрица A обратима в $K_{n,\beta}(R)$ тогда и только тогда, когда $det_\beta(B) \in U(R)$.

2. Вполне идемпотентность и регулярность колец обобщенных матриц

Для произвольного кольца R через $Reg(R)$ (соответственно $I(R)$) обозначим наибольший регулярный (соответственно вполне идемпотентный справа) идеал кольца R. Для кольца формальных матриц $R = K(\{M_{ij}\} : \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n и для каждых $1 \leq i, j \leq n$ через $I(M_{ij})$ обозначим множество вида

$\{m \in M_{ij} \mid \exists k \in \mathbb{N}\, \exists m_1, \dots m_k \in M_{ji}\, \exists r_1, \dots r_k \in R_{jj} : m = m \sum_{1 \leq t \leq k} m_t m r_t\}$.

Элемент кольца формальных матриц $R = K(\{M_{ij}\} : \{\varphi_{ikj}\})$, у которого компонента, находящееся на персечении i строки и j столбца равна r, а остальные компоненты равны нулю, будем обозначать через re_{ij} Следующая теорема аналогична утверждению [5, теорема 5.2].

Теорема 9. *Для произвольного кольца формальных матриц $R = K(\{M_{ij}\} : \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n имеет место равенство*

$$I(R) = \{r \in R \mid M_{ti} r_{ij} M_{js} \subset I(M_{ts})\}.$$

$\square$ Обозначим множество $\{r \in R \mid M_{ti} r_{ij} M_{js} \subset I(M_{st})\}$ через I'. Из доказательства [1, теорема 5.3] следует, что I' - идеал кольца R. Покажем, что $I(R) \subset I'$. Так как $e_{ii} R e_{jj} I(R) e_{ss} R e_{tt} \subset$

$I(R)$, то достаточно показать, что у каждого элемента идеала $I(R)$ все компоненты вполне идемпотентны справа. Пусть $a \in I(R)$. Тогда для каждой пары индексов i, j имеют место равенства

$e_{ii}ae_{jj} = e_{ii}ae_{jj}(\sum_{k=1}^{m} b_k e_{ii}ae_{jj}c_k) = e_{ii}ae_{jj}(\sum_{k=1}^{m} b_k e_{ii}ae_{jj}c_k e_{jj}), a_{ij} = a_{ij}(\sum_{k=1}^{m}(b_k)_{ji}a_{ij}(c_k)_{jj}$.

Покажем, что $I' \subset I(R)$. Предположим, что идеал I' содержит элемент, который не является вполне идемпотентным справа. Выберем в I' не вполне идемпотентный элемент r, у которого строка $r_{11}, \ldots, r_{1n}, \ldots, r_{n1}, \ldots, r_{nn}$ имеет наибольшее количество первых нулей. Пусть $r_{i_0j_0}$ первый ненулевой элемент в этой строке. Имеет место равенство $r_{i_0j_0} = r_{i_0j_0}\sum_k a_k r_{i_0j_0} b_k$, где $a_k \in M_{j_0i_0}, b_k \in R_{j_0j_0}$ для каждого k. Тогда

$$r - r\sum_k a_k e_{j_0i_0} r b_k e_{j_0j_0} = \sum_{i,j} r_{ij}e_{ij} - (\sum_{i,j} r_{ij}e_{ij})(\sum_k a_k e_{j_0i_0}(\sum_{i,j} r_{ij}e_{ij})b_k e_{j_0j_0}) = \sum_{i,j} g_{ij}e_{ij},$$

где $g_{ij} = r_{ij}$, если $j \neq j_0$, и $g_{ij_0} = r_{ij_0} - \sum_k r_{ij_0}a_k r_{i_0j_0} b_k$. Ясно, что $g_{ij} = 0$, если либо $i < i_0$, либо $i = i_0, j < j_0$, либо $i = i_0$, $j = j_0$. Следовательно, в силу выбора элемента r элемент $r - r\sum_k a_k e_{j_0i_0} r b_k e_{j_0j_0}$ является вполне идемпотентным справа. Тогда из [1, лемма 5.2] следует вполне идемпотентность элемента r, что противоречит нашим исходным предположениям. ∎

Следствие 10. [1, теорема 6.9]. *Кольцо формальных матриц $R = K(\{M_{ij}\} : \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n является вполне идемпотентным справа тогда и только тогда, когда для каждых $1 \leq i, j \leq n$ и каждого $m \in M_{ij}$ для некоторого натурального числа k найдутся такие элементы $m_1, \ldots m_k \in M_{ji}$, $r_1, \ldots r_k \in R_{jj}$, что*

$$m = m\sum_{1 \leq t \leq k} m_t m r_t.$$

Теорема 11. *Пусть $K = K_n(R : \{\eta_{ikj}\})$ - кольцо формальных матриц над R порядка n. Тогда*

1) Если каждый элемент из множества $\{\eta_{ikj}\}$ не является делителем нуля, то имеют *место равенства*

a) $I(K)=\begin{pmatrix} I(R) & I(R) & \dots & I(R)\\ I(R) & I(R) & \dots & I(R)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ I(R) & I(R) & \dots & I(R)\end{pmatrix}$;

b) $Reg(K)=\begin{pmatrix} Reg(R) & Reg(R) & \dots & Reg(R)\\ Reg(R) & Reg(R) & \dots & Reg(R)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ Reg(R) & Reg(R) & \dots & Reg(R)\end{pmatrix}$.

2) K вполне идемпотентно справа $\Leftrightarrow$ R вполне идемпотентно справа и $\{\eta_{ikj}\}\subset U(R)$.

3) K регулярно по фон Нейману $\Leftrightarrow$ R регулярно по фон Нейману и $\{\eta_{ikj}\}\subset U(R)$.

4) K - простое кольцо $\Leftrightarrow$ R простое и каждый элемент из $\{\eta_{ikj}\}$ отличен от нуля.

$\square$ Для произвольных элементов $r_1, r_2\in R$ через $r_1 *_{ijk} r_2$ будем обозначать выражение $\phi_{ijk}(r_1\otimes r_2)$.

1) Покажем выполнимость равенства из пункта a). Обозначим правую часть пункта a) через I'. Включение $I(K)\subset I'$ непосредственно следует из теоремы 8. Покажем, что имеет место обратное включение. Пусть $r\in I'$. Тогда для произвольных $1\le i,j,s,t\le n$ и $a,b\in R$ имеет место равенства вида

$ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij}\eta_{tst} = ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij}\eta_{tst}\sum_{1\le l\le k} c_l ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij}\eta_{tst}d_l$

$ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij} = ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij}\sum_{1\le l\le k} c_l ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij}\eta_{tst}d_l$

$(a *_{sij} r_{ij}) *_{sjt} b = ((a *_{sij} r_{ij}) *_{sjt} b)\sum_{1\le l\le k}(c_l *_{tst} ((a *_{sij} r_{ij}) *_{sjt} b))d_l.$

Тогда согласно теореме 8 $r\in I(K)$. Равенство из пункта b) доказывается аналогично.

2) ($\Rightarrow$) Из следствия 9 для произвольных $1\le i,j\le n$ следует равенство

$1=\sum_{1\le t\le k} r_t *_{iji} s_t = \eta_{iji}\sum_{1\le t\le k} r_t s_t.$

Таким образом, элементы вида η_{iji} обратимы в R. Поскольку для каждого $1\le k\le n$ имеет место равенство $\eta_{iji}=\eta_{ijk}\eta_{jik}$, то $\{\eta_{ikj}\}\subset U(R)$

($\Leftarrow$) Импликация непосредственно следует из первого пункта исходной теоремы.

3) Доказательство аналогично доказательству предыдущего пункта.

4) ($\Leftarrow$) Поскольку кольцо R простое и каждый элемент из $\{\eta_{ikj}\}$ отличен от нуля, то $\{\eta_{ikj}\}\subset U(R)$. Тогда, очевидно, K является простым кольцом.

($\Rightarrow$) Пусть K просто и пусть L - идеал R. Тогда $\begin{pmatrix} L & L & \dots & L \\ L & L & \dots & L \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L & L & \dots & L \end{pmatrix}$ идеал в K. Таким образом, кольцо R просто. Так как кольцо K является вполне идемпотентным, то для произвольных $1 \le i, j \le n$ из [1, теорема 5.10] следует выполнимость равенства вида

$1 = \sum_{1\le t\le k} r_t *_{iji} s_t = \eta_{iji} \sum_{1\le t\le k} r_t s_t$.

Тогда элементы вида η_{iji} обратимы в R и, следовательно, $\{\eta_{ikj}\} \subset U(R)$. ■

3. Проблема изоморфизма в $M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R)$

Теорема 12. *Пусть R - кольцо, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in C(R)$. Тогда*
1) если $\pi \in S_3$, то $M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R) \cong M_{\beta_{\pi(1)}\beta_{\pi(2)}\beta_{\pi(3)}}(R)$;
2) если $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in U(R) \cap C(R)$ и $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$, то $M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R) \cong M_{\gamma_1\alpha(\beta_1),\, \gamma_2\alpha(\beta_2),\, \gamma_3\alpha(\beta_3)}(R)$;
3) если $a_1, a_2, a_3 \in R$ - центральные ортогональные идемпотенты кольца R, $1 = a_1+a_2+a_3$ $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in S_3$, то $M_{\beta_1,\beta_2,\beta_3}(R) \cong$
$M_{\beta_{\pi_1(1)}a_1+\beta_{\pi_2(1)}a_2+\beta_{\pi_3(1)}a_3,\, \beta_{\pi_1(2)}a_1+\beta_{\pi_2(2)}a_2+\beta_{\pi_3(2)}a_3,\, \beta_{\pi_1(3)}a_1+\beta_{\pi_2(3)}a_2+\beta_{\pi_3(3)}a_3}(R)$;
4) Если R - нормальное кольцо, T - кольцо, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in C(T)$, $M_{0,0,0}(R) \cong M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(T)$, то $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.

□ **1)** Из леммы 4 следует, что

$$M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R) \cong \begin{pmatrix} R & e_3R & e_2R \\ e_3R & R & e_1R \\ e_2R & e_1R & R \end{pmatrix}.$$

Несложно заметить, что

$$\begin{pmatrix} R & e_3R & e_2R \\ e_3R & R & e_1R \\ e_2R & e_1R & R \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} R & e_{\pi(3)}R & e_{\pi(2)}R \\ e_{\pi(3)}R & R & e_{\pi(1)}R \\ e_{\pi(2)}R & e_{\pi(1)}R & R \end{pmatrix} \cong M_{\beta_{\pi(1)}\beta_{\pi(2)}\beta_{\pi(3)}}(R).$$

Следовательно, $M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R) \cong M_{\beta_{\pi(1)}\beta_{\pi(2)}\beta_{\pi(3)}}(R)$.

2) Построим $\Theta : M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R) \to M_{\gamma_1\alpha(\beta_1),\gamma_2\alpha(\beta_2),\gamma_3\alpha(\beta_3)}(R)$ как композицию отображений $\Theta = \Phi \circ \Psi$.

Отображение $\Psi : M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R) \to M_{\alpha(\beta_1),\alpha(\beta_2),\alpha(\beta_3)}(R)$ зададим по правилу $(a_{ij}) \mapsto (\alpha(a_{ij}))$. Легко видеть, что это изоморфизм колец.

Для краткости обозначим $t_1 = \alpha(\beta_1)$, $t_2 = \alpha(\beta_2)$, $t_3 = \alpha(\beta_3)$. Отображение $\Phi : M_{t_1t_2t_3}(R) \to M_{\gamma_1t_1,\gamma_2t_2,\gamma_3t_3}(R)$ зададим по правилу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \gamma_1^{-1}a_{12} & \gamma_1^{-1}a_{13} \\ \gamma_2^{-1}a_{21} & a_{22} & \gamma_2^{-1}a_{23} \\ \gamma_3^{-1}a_{31} & \gamma_3^{-1}a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что отображение Φ есть биекция, сохраняющая операцию сложения. Непосредственная проверка показывает, что Φ также сохраняет и произведение. В частности, пусть $(a_{ij}), (b_{ij}) \in M_{t_1,t_2,t_3}$. Положим $(c_{ij}) = (a_{ij})(b_{ij})$, $(d_{ij}) = \Phi(\,(a_{ij})\,)\Phi(\,(b_{ij})\,)$. Имеем

$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + t_3a_{13}b_{32}$,
$d_{12} = a_{11}(\gamma_1^{-1}b_{12}) + (\gamma_1^{-1}a_{12})b_{22} + \gamma_3t_3(\gamma_1^{-1}a_{13})(\gamma_3^{-1}a_{32}) = \gamma_1^{-1}c_{12}$.

3) Имеют место изоморфизмы

$M_{\beta_1,\beta_2,\beta_3}(R) \cong M_{a_1\beta_1,a_1\beta_2,a_1\beta_3}(a_1R) \times M_{a_2\beta_1,a_2\beta_2,a_2\beta_3}(a_2R) \times M_{a_3\beta_1,a_3\beta_2,a_3\beta_3}(a_3R) \cong$ $M_{a_1\beta_{\pi_1(1)},a_1\beta_{\pi_1(2)},a_1\beta_{\pi_1(3)}}(a_1R) \times M_{a_2\beta_{\pi_2(1)},a_2\beta_{\pi_2(2)},a_2\beta_{\pi_2(3)}}(a_2R) \times M_{a_3\beta_{\pi_3(1)},a_3\beta_{\pi_3(2)},a_3\beta_{\pi_3(3)}}(a_3R) \cong$ $M_{\beta_{\pi_1(1)}a_1+\beta_{\pi_2(1)}a_2+\beta_{\pi_3(1)}a_3,\,\beta_{\pi_1(2)}a_1+\beta_{\pi_2(2)}a_2+\beta_{\pi_3(2)}a_3,\,\beta_{\pi_1(3)}a_1+\beta_{\pi_2(3)}a_2+\beta_{\pi_3(3)}a_3}(R)$.

4) Обозначим $K_1 = M_{0,0,0}(R)$ и $K_2 = M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(T)$. Пусть одно из $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ не равно нулю. Не нарушая общности, можно считать что это β_1. За $\Theta: K_1 \to K_2$ обозначим изоморфизм колец. Рассмотрим идеал I в K_1, $I = \begin{pmatrix} 0 & R & R \\ R & 0 & R \\ R & R & 0 \end{pmatrix}$. Легко видеть, что $I^2 = 0$. Тогда и $(\Theta(I))^2 = 0$. За F_{ij} обозначим матричные единицы в K_2. Так как $F_{21}F_{13} = \beta_1F_{23} \neq 0$, то либо F_{21} либо F_{13} не лежит в $\Theta(I)$. Будем считать, что это F_{21}. В этом случае $F_{22}(F_{22} + F_{21}) - (F_{22} + F_{21})F_{22} = F_{21} \notin \Theta(I)$. А значит образ $(F_{22} + F_{21})$ не центральный элемент в $K_2/\Theta(I)$. Но $K_2/\Theta(I) \cong K_1/I \cong R \oplus R \oplus R$ - абелево. Получили противоречие. ■

Следствие 13. *Пусть R - кольцо, $\beta \in C(R)$, и найдутся центральные ортогональные идемпотенты $a_1, a_2, a_3 \in R$ такие, что $1 = a_1 + a_2 + a_3$. Тогда $M_{\beta,0,0}(R) \cong M_{\beta a_1,\,\beta a_2,\,\beta a_3}(R)$;*

Следствие 14. *Пусть R - кольцо, $\beta \in C(R)$ и $e \in R$ - идемпотент. Тогда $M_{\beta,0,0}(R) \cong M_{\beta e,\,\beta(1-e),\,0}(R) \cong M_{\beta(1-e),\,\beta e,\,0}(R)$.*

Лемма 15. *Пусть R - коммутативное кольцо $\beta_i, \gamma_i \in R$, $i = \overline{1..3}$, $K_1 = M_{\beta_1,\,\beta_2,\,\beta_3}(R)$, $K_2 = M_{\gamma_1,\,\gamma_2,\,\gamma_3}(R)$ и $\Theta: K_1 \to K_2$ - изоморфизм колец. За $I \subseteq K_1$ обозначим идеал порожденный матричными единицами E_{ij} кольца K_1, $i \neq j$. Аналогично определим $J \subseteq K_2$. Тогда $\Theta(I) = J$.*

□ Обозначим за F_{ij} матричные единицы K_2. Покажем, что $F_{ij} \in J$, $i \neq j$. Пусть это не верно и найдутся $i \neq j$ такие, что $F_{ij} \notin \Theta(I)$. Тогда $F_{ii}(F_{ii}+F_{ij}) = F_{ii}+F_{ij}$, $(F_{ii}+F_{ij})F_{ii} = F_{ii}$. А значит $(F_{ii} + F_{ij}) \notin C(K_2/\Theta(I))$. Однако

$$I = \begin{pmatrix} \beta_1(\beta_2 R + \beta_3 R) & R & R \\ R & \beta_2(\beta_1 R + \beta_3 R) & R \\ R & R & \beta_3(\beta_1 R + \beta_2 R) \end{pmatrix}.$$

И поэтому $K_2/\Theta(I) \cong K_1/I \cong R/(\beta_1(\beta_2 R+\beta_3 R))\oplus R/(\beta_2(\beta_1 R+\beta_3 R))\oplus R/(\beta_3(\beta_1 R+\beta_2 R))$. Но это коммутативное кольцо. Получили противоречие. Таким образом $J \subseteq \Theta(I)$. Аналогичные рассуждения показывают, что $I \subseteq \Theta^{-1}(J)$. А значит $\Theta(I) = J$. ■

Теорема 16. *Пусть R - коммутативное кольцо, $\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in R$, $\mathrm{ann}_R(\beta) \subseteq J(R)$ и $M_{\beta,0,0}(R) \cong M_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}(R)$. Тогда найдутся $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$, $y_1, y_2, y_3 \in U(R)$ и разложение единицы $1 = a_1 + a_2 + a_3$ такие, что $\gamma_i = \alpha(\beta)y_i a_i$, $i = \overline{1,3}$.*

□ Обозначим $K_1 = M_{\beta,0,0}$, $K_2 = M_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$, а $\Theta : K_1 \to K_2$ - изоморфизм. За E_{ij} будем обозначать матричные единицы K_1, а за F_{ij} - матричные единицы K_2. Для любого $r \in R$ имеем $rE \in C(K_1)$ и $\Theta(rE) \in C(K_2)$. Тогда найдется некоторое $s \in R$ такое, что $\Theta(rE) = sE$. Введем отображение $\alpha : R \to R$ и положим $\alpha(r) = s$. Полученное отображение есть автоморфизм кольца R.

Положим $I = \beta K_1$ - идеал в K_1. $\Theta(I) = \alpha(\beta)K_2$ - идеал в K_2. Тогда $M_{0,0,0}(R/\beta R) \cong K_1/I \cong K_2/\Theta(I) \cong M_{\bar\gamma_1,\bar\gamma_2,\bar\gamma_3}(R/\alpha(\beta)R)$. Таким образом, найдутся y_1, y_2, $y_3 \in R$ такие, что $\gamma_1 = \alpha(\beta)y_1$, $\gamma_2 = \alpha(\beta)y_2$, $\gamma_3 = \alpha(\beta)y_3$.

Так как α - автоморфизм R, то α^{-1} - тоже автоморфизм. Найдутся x_1, x_2, $x_3 \in R$ такие, что $\alpha^{-1}(y_i) = x_i$, $i = \overline{1..3}$. Тогда существует изоморфизм $\Psi : K_2 \to M_{\beta x_1,\beta x_2,\beta x_3}(R)$. Причем соответсвующий изоморфизму $\Psi \circ \Theta$ автоморфизм колец R - тождественный. Далее за Θ будем обозначать изоморфизм $\Psi \circ \Theta$, а за K_2 - $M_{\beta x_1,\beta x_2,\beta x_3}(R)$.

В то же время, можно рассмотреть идеал $I = \beta x_1 K_2 + \beta x_2 K_2 + \beta x_3 K_2$ в K_2. $\Theta^{-1}(I)$ - идеал в K_1, $K_2/I \cong K_1/\Theta^{-1}(I)$. Получаем, что найдутся $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in R$ такие, что $\beta = \beta x_1\eta_1 + \beta x_2\eta_2 + \beta x_3\eta_3$.

Рассмотрим идеал $I = \begin{pmatrix} 0 & R & R \\ R & 0 & R \\ R & R & 0 \end{pmatrix} \in K_1$. Найдем $\Theta(I)$. Согласно доказанной выше лемме: $\begin{pmatrix} 0 & R & R \\ R & 0 & R \\ R & R & 0 \end{pmatrix} \subseteq \Theta(I)$. Утверждается, что на самом деле это равенство. Пусть $C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \in \Theta(I)$. Так как $\Theta(I)$ - идеал в K_2, то $CF_{11} = c_1F_{11} \in \Theta(I)$. Обозначим $A = (a_{ij}) = \Theta^{-1}(F_{11})$. Т.к. $(c_1F_{11})F_{11} = c_1F_{11}$, то $(c_1A)A = c_1A$ в K_1. Т.к. $c_1A \in I$, то $c_1a_{11} = c_1a_{22} = c_1a_{33} = 0$. За $\widehat{A}$ обозначим матрицу, получаемую из A обнулением главной диагонали. Тогда $c_1 A = c_1 \widehat{A}$. Имеем

$$c_1 A = (c_1 A)A = (c_1 \widehat{A})A = \widehat{A}(c_1 A) = c_1 \widehat{A}^2 = c_1 \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta c_1 a_{21} a_{13} \\ 0 & \beta c_1 a_{31} a_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Однако, в этом случае

$$c_1 A = (c_1 A)A = (c_1 A)\widehat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta c_1 a_{21} a_{13} \\ 0 & \beta c_1 a_{31} a_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

А раз так, то $c_1 F_{11} = \Theta(c_1 A) = 0$. Таким образом $c_1 = 0$. Аналогично получаем, что матрица $C = 0$. Итак

$$\Theta\left(\begin{pmatrix} 0 & R & R \\ R & 0 & R \\ R & R & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & R & R \\ R & 0 & R \\ R & R & 0 \end{pmatrix} =: J.$$

Так как $\Theta(I)$ - идеал в K_2, то $(\beta x_1)(\beta x_2) = (\beta x_2)(\beta x_3) = (\beta x_1)(\beta x_3) = 0$.

Обозначим $U_{ij} = \Theta(E_{ij})$ - образы матричных единиц K_1 и положим

$$U_{11} = \begin{pmatrix} c_1 & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & c_2 & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & c_3 \end{pmatrix}, U_{22} = \begin{pmatrix} d_1 & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & d_2 & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & d_3 \end{pmatrix}, U_{33} = \begin{pmatrix} f_1 & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & f_2 & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & f_3 \end{pmatrix}.$$

В кольце K_1 выполняются равенства: $E_{11}^2 = E_{11}$, $E_{22}^2 = E_{22}$, $E_{33}^2 = E_{33}$,
$E_{11}E_{22} = E_{22}E_{33} = E_{11}E_{33} = 0$, $E_{11} + E_{22} + E_{33} = E$. Из аналогичных равенств для образов, получаем

$$1 = c_1 + d_1 + f_1,$$
$$1 = c_2 + d_2 + f_2,$$
$$1 = c_3 + d_3 + f_3.$$

Это разложения единицы в сумму ортогональных идемпотентов. Теперь, заметим что $K_2 = \oplus_{i,j} U_{ij} R$. Т.к. $E_{ij} \in I$ для всех $i \neq j$, то $U_{ij} \in J$, $i \neq j$. А значит

$$\begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} = \widehat{U_{11}}R \oplus \widehat{U_{22}}R \oplus \widehat{U_{33}}R, \quad \text{где}$$

$$\widehat{U_{11}} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}, \widehat{U_{22}} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}, \widehat{U_{33}} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{pmatrix}.$$

В частности, $F_{11} = w_1\widehat{U_{11}} + w_2\widehat{U_{22}} + w_3\widehat{U_{33}}$. Получаем систему

$$\begin{cases} w_1c_1 + w_2d_1 + w_3f_1 = 1, \\ w_1c_2 + w_2d_2 + w_3f_2 = 0, \\ w_1c_3 + w_2d_3 + w_3f_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $w_1c_1 = c_1$, $w_1c_2 = 0$. Тогда $c_1c_2 = w_1c_1c_2 = 0$. Таким образом, $c_ic_j = d_id_j = f_if_j = 0$ для всех $i \neq j$. В этом случае $\widehat{U_{11}} = c_1\widehat{U_{11}} + c_2\widehat{U_{11}} + c_3\widehat{U_{11}} = (c_1 + c_2 + c_3)\widehat{U_{11}}$. Поэтому $c_1 + c_2 + c_3 = 1$. В самом деле, пусть $c = c_1 + c_2 + c_3$. Тогда $U_{11}(1-c) = \widehat{U_{11}}(1-c) + (U_{11} - \widehat{U_{11}})(1-c) = (U_{11} - \widehat{U_{11}})(1-c) \in J$, а значит $U_{11}(1-c) = 0$. Аналогично и для d_i и f_j.

Т.к $\Theta(I) = J$, то $\Theta(I^2) = J^2$.

$$\Theta\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta R \\ 0 & \beta R & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \beta x_3 R & \beta x_2 R \\ \beta x_3 R & 0 & \beta x_1 R \\ \beta x_2 R & \beta x_1 R & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\beta U_{23} = \Theta(\beta E_{23}) = \begin{pmatrix} 0 & \beta x_3 u_5 & \beta x_2 u_3 \\ \beta x_3 u_6 & 0 & \beta x_1 u_1 \\ \beta x_2 u_4 & \beta x_1 u_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta U_{32} = \Theta(\beta E_{32}) = \begin{pmatrix} 0 & \beta x_3 v_5 & \beta x_2 v_3 \\ \beta x_3 v_6 & 0 & \beta x_1 v_1 \\ \beta x_2 v_4 & \beta x_1 v_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из равенств $\beta U_{23} = \beta(U_{22}U_{23}) = U_{22}(\beta U_{23})$ и $\beta U_{23} = \beta(U_{23}U_{33}) = (\beta U_{23})U_{33}$ и аналогичных равенств для βU_{32} получаем

$$\beta U_{23} = \begin{pmatrix} 0 & d_1f_2\,\beta x_3 u_5 & d_1f_3\,\beta x_2 u_3 \\ d_2f_1\,\beta x_3 u_6 & 0 & d_2f_3\,\beta x_1 u_1 \\ d_3f_1\,\beta x_2 u_4 & d_3f_2\,\beta x_1 u_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta U_{32} = \begin{pmatrix} 0 & f_1d_2\,\beta x_3 v_5 & f_1d_3\,\beta x_2 v_3 \\ f_2d_1\,\beta x_3 v_6 & 0 & f_2d_3\,\beta x_1 v_1 \\ f_3d_1\,\beta x_2 v_4 & f_3d_2\,\beta x_1 v_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдутся такие $a, b \in R$, что

$$\Theta(a\beta E_{23} + b\beta E_{32}) = a\beta U_{23} + b\beta U_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta x_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta x_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a\beta U_{23} + b\beta U_{32} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & \beta x_1(d_2 f_3\, u_1 a + f_2 d_3\, v_1 b) \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $1 = (d_1 + d_2 + d_3)(f_1 + f_2 + f_3) = d_1 f_2 + d_1 f_3 + d_2 f_1 + d_2 f_3 + d_3 f_1 + d_3 f_2$ - разложение единицы в сумму ортогональных идемпотентов. В этом случае, равенство $\beta x_1 = \beta x_1(d_2 f_3\, u_1 a + f_2 d_3\, v_1 b)$ влечет $\beta x_1 = \beta x_1(d_2 f_3 + d_3 f_2)$. Аналогично

$$\beta x_2 = \beta x_2(d_1 f_3 + d_3 f_1), \quad \beta x_3 = \beta x_3(d_2 f_1 + d_1 f_2).$$

Введем обозначения

$$a_1 = d_2 f_3 + d_3 f_2,$$
$$a_2 = d_1 f_3 + d_3 f_1,$$
$$a_3 = d_1 f_2 + d_2 f_1.$$

Заметим, что $1 = a_1 + a_2 + a_3$ - разложение в сумму ортогональных идемпотентов. Также $\beta x_1 = \beta a_1 x_1, \beta x_2 = \beta a_2 x_2, \beta x_3 = \beta a_3 x_3$. В самом начале доказательства теоремы было показано, что $\beta = \beta x_1 \eta_1 + \beta x_2 \eta_2 + \beta x_3 \eta_3$. Совмещая эти равенства, получаем

$$\beta = a_1(\beta x_1 \eta_1) + a_2(\beta x_2 \eta_2) + a_3(\beta x_3 \eta_3).$$

Однако, $\beta = \beta a_1 + \beta a_2 + \beta a_3$. Отсюда $\beta a_1 = \beta x_1 \eta_1 a_1$. Положим $y_1 = x_1 a_1 + (a_2 + a_3)$, $\xi_1 = \eta_1 a_1 + (a_2 + a_3)$. Тогда

$$\beta y_1 \xi_1 = \beta x_1 \eta_1 a_1 + \beta a_2 + \beta a_3 = \beta a_1 + \beta a_2 + \beta a_3 = \beta,$$
$$\beta(1 - y_1 \xi_1) = 0.$$

Т.к. $\mathrm{ann}_R(\beta) \in J(R)$, то $(1 - y_1 \xi_1) \in J(R)$, $1 - (1 - y_1 \xi_1) = y_1 \xi_1 \in U(R)$. А значит и $y_1 \in U(R)$. Ясно, что $\beta y_1 a_1 = \beta x_1 a_1$. Аналогично показывается, что для некоторых $y_2, y_3 \in U(R)$ выполнены равенства $\beta y_2 a_2 = \beta x_2 a_2$, $\beta y_3 a_3 = \beta x_3 a_3$. ■

Следствие 17. *Пусть R - коммутативное кольцо, $\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in R$ и $M_{\beta,0,0}(R) \cong M_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}(R)$. Тогда имеют место следующие утверждения:*
1) Если β не является делителем нуля в кольце R, то найдутся $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$, $y_1, y_2, y_3 \in U(R)$ и разложение единицы $1 = a_1 + a_2 + a_3$ такие, что $\gamma_i = \alpha(\beta) y_i a_i$, $i = \overline{1,3}$.
2) Если R - целостное кольцо, то найдутся $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$, $y \in U(R)$ такие, что для некоторого $1 \le i \le 3$ выполнены условия $\gamma_i = \alpha(\beta) y$ и $\gamma_j = 0$, если $i \ne j$.

Теорема 18. *Пусть R - коммутативное кольцо, $\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in R$, $\mathrm{ann}_R(\beta^2) \subseteq J(R)$ и $M_{\beta,\beta,\beta}(R) \cong M_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}(R)$. Тогда найдутся $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$ и $y_1, y_2, y_3 \in U(R)$ такие, что $\gamma_i = \alpha(\beta)y_i$, $i = \overline{1,3}$.*

$\square$ Повторяя рассуждения прошлой теоремы и избавляясь от автоморфизма α, получаем что $\gamma_i = \beta x_i$, для некоторых $x_i \in R$, $i = \overline{1,3}$. Введем обозначения: $K_1 = M_{\beta,\beta,\beta}$, $K_2 = M_{\beta x_1, \beta x_2, \beta x_3}$, $\Theta : K_1 \to K_2$ - изоморфизм, E_{ij} - матричные единицы K_1, F_{ij} - матричные единицы K_2. За I обозначим идеал в K_1, порожденный E_{ij}, $i \neq j$. А за J - аналогичный идеал в K_2. Тогда $\Theta(I) = J$.

$$\Theta\left(\begin{pmatrix} \beta^2 R & R & R \\ R & \beta^2 R & R \\ R & R & \beta^2 R \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \beta^2 x_1(x_2 R + x_3 R) & R & R \\ R & \beta^2 x_2(x_1 R + x_3 R) & R \\ R & R & \beta^2 x_3(x_1 R + x_2 R) \end{pmatrix}.$$

Матрица $\beta^2 E \in I$. Тогда $\beta^2 E = \Theta(\beta^2 E) \in J$. Найдутся такие $a, b \in R$, что $\beta^2 = \beta^2 x_1(x_2 a + x_3 b)$. А т.к. $\mathrm{ann}_R(\beta^2) \subseteq J(R)$, то $x_1(x_2 a + x_3 b) \in U(R)$. А значит $x_1 \in U(R)$. Аналогично и $x_2, x_3 \in U(R)$. $\blacksquare$

Следствие 19. *Пусть R - коммутативное кольцо, $\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in R$ и $M_{\beta,\beta,\beta}(R) \cong M_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}(R)$. Если β не является делителем нуля в кольце R, то найдутся $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$, $y_1, y_2, y_3 \in U(R)$ такие, что $\gamma_i = \alpha(\beta)y_i$, $i = \overline{1,3}$.*

Рассмотрим некоторые обобщения результатов полученных нами выше. Пусть R кольцо и $n \geq 3$. Определим класс формальных матриц $M_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$ для произвольных $\beta_1, \ldots, \beta_n \in C(R)$. Для всех $i, j, k \in \overline{1,n}$ положим

$$\eta_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \text{ или } j = k, \\ \beta_j, & \text{если } i, j, k \text{ различны}, \\ \beta_i \beta_j, & \text{если } i = k, \text{ но } i \neq j. \end{cases}$$

Непосредственная проверка показывает, что $K_n(R : \{\eta_{ikj}\})$ является кольцом формальных матриц. Это кольцо мы будем обозначать $M_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$. Для этого кольца сохраняются следующие полученные ранее результаты, с соответствующими изменениями.

Теорема 20. *Пусть R - кольцо, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in C(R)$. Тогда*
1) если $\pi \in S_n$, то $M_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R) \cong M_{\beta_{\pi(1)},\ldots,\beta_{\pi(n)}}(R)$;
2) если $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in U(R) \cap C(R)$ и $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$, то $M_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R) \cong M_{\gamma_1\alpha(\beta_1),\ldots,\gamma_n\alpha(\beta_n)}(R)$;
3) если $\pi_1, \ldots \pi_n \in S_n$, $a_1, \ldots, a_n \in R$ - центральные ортогональные идемпотенты кольца R и $1 = a_1 + \ldots + a_n$, то $M_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R) \cong$

$M_{\beta_{\pi_1(1)}a_1+\beta_{\pi_2(1)}a_2+...+\beta_{\pi_n(1)}a_n,\beta_{\pi_1(2)}a_1+\beta_{\pi_2(2)}a_2+...+\beta_{\pi_n(2)}a_n,...,\beta_{\pi_1(n)}a_1+\beta_{\pi_2(n)}a_2+...+\beta_{\pi_n(n)}a_n}(R)$;
4) Если R - нормальное кольцо, T - кольцо, $\beta_1,...,\beta_n \in C(T)$, $M_{\underbrace{0,..,0}_{n}}(R) \cong M_{\beta_1...\beta_n}(T)$, то $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_n = 0$.

Теорема 21. *Пусть R - коммутативное кольцо, $\beta, \gamma_1, ..., \gamma_n \in R$, $\mathrm{ann}_R(\beta^2) \subseteq J(R)$ и $M_{\underbrace{\beta,..,\beta}_{n}}(R) \cong M_{\gamma_1,...,\gamma_n}(R)$. Тогда найдутся $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$ и $y_1,...,y_n \in U(R)$ такие, что $\gamma_i = \alpha(\beta)y_i$, $i = \overline{1,n}$.*

Будем обозначать множество делителей нуля кольца R за $Z(R)$. Как следствие, получаем обобщение результата G. Tang и Y. Zhou [6, Теорема 18].

Теорема 22. *Пусть R - коммутативное кольцо, такое что $Z(R) \subseteq J(R)$ и пусть $\beta, \gamma_1, ..., \gamma_n \in R$, где $n \geq 3$. Тогда $M_{\underbrace{\beta,..,\beta}_{n}}(R) \cong M_{\gamma_1,...,\gamma_n}(R)$ если и только если найдутся $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$ и $y_1,...,y_n \in U(R)$ такие, что $\gamma_i = \alpha(\beta)y_i$, $i = \overline{1,n}$.*

Литература

[1] Абызов А. Н., Туганбаев А.А. *Гомоморфизмы, близкие к регулярным, и их приложения*, Фундамент. и прикл. мат. - 2010. - Т.16, вып. 7. - С. 3-38

[2] Крылов П. А. *Об изоморфизме колец обобщенных матриц*, Алгебра и логика. – 2008. – Т. 47, вып. 4. – С. 456–463.

[3] Крылов П.А., Туганбаев А.А. *Модули над кольцами формальных матриц*, Фундамент. и прикл. мат. - 2009. - Т.15, вып. 8. - С. 145-211

[4] Baba Y., Oshiro K. Classical Artinian rings and related topics (WS, 2009)

[5] Nicholson W.K., Zhou Y. *Semiregular morphisms* // Comm. Algebra. – 2006. – Vol. 34. – P. 219–233.

[6] G. Tang, Y. Zhou *A class of formal matrix rings*, Linear Algebra Appl. 438 (2013) 4672-4688

[7] Zhou Y. *On (semi)regularity and the total of rings and modules* // J. Algebra. – Vol. 322. – 2009. – P. 562–578.

А.Н. Абызов

доцент, кафедра алгебры и математической логики,

Казанский федеральный университет,

420008, г.Казань, ул. Кремлевская, д.18

`e-mail:` aabyzov@ksu.ru

Д.Т. Тапкин

студент пятого курса,

Казанский федеральный университет,

420008, г.Казань, ул. Кремлевская, д.18

`e-mail:` danil.tapkin@yandex.ru