Дорогие студенты, вы зашли в так называемую "Виртуальную аудиторию," в которой к каждому вторнику и каждой пятнице я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

volodinstudent@gmail.com

Естественно, вам придется, как это делается оформлять результаты решений в более пристойней форме (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply'ем.

Если в ближайшее время студентам будет открыт доступ в университет, то вы можете приходить ко мне (ауд. 1205) в часы ваших занятий по расписанию (во вторник 11h.50m.-13h.30m. и в пятницу 15h.40m.-17h.30m.) для консультаций по решению домашних задач.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Занятие 45

Числовые ряды.
Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

На прошлом занятии был введен критерий Коши сходимости числового ряда

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

и три признака его сходимости.

1^0. **Признак сравнения.** *Если найдутся такие $b_n \geq a_n, \forall n \geq 1$, что ряд $\sum_1^\infty b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_1^\infty a_n$. В терминах расходимости: Если найдутся такие $b_n \leq a_n, \forall n \geq 1$, что ряд $\sum_1^\infty b_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_1^\infty a_n$.*

2^0. **Интегральный признак сравнения.** *Если неотрицательная на промежутке $[a, \infty)$, $a \geq 1$, функция $f(x)$ монотонно убывает с ростом аргумента x, то ряд $\sum_{n=1}^\infty$ и интеграл $\int_a^\infty (x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

3^0. **Асимптотический признак сравнения.** *Если при $n \to \infty$ общий член $a_n \sim b_n,$, то ряды $\sum_1^\infty b_n$ и $\sum_1^\infty a_n$ сходятся или расходятся одновременно.*

На этом занятии будут рассматриваться еще четыре признака сходимости числовых рядов с неотрицательными членами. Располагая в целом семью признаками, мы будем решать задачи на выяснения сходимости или расходимости конкретных числовых рядов.

4^0. **Признак Даламбера.** *Пусть*

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

– показатель Даламбера для скорости убывания членов ряда. Если $\lambda < 1$, *то ряд* (1) *сходится; если же* $\lambda > 1$, *то ряд* (1) *расходится; в случае* $\lambda = 1$ *признак Даламбера "не работает".*

При $\lambda = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться. Например, для гармонического ряда с $a_n = 1/n$ и ряда с $a_n = 1/n^2$ показатель Даламбера один и тот же: $\lambda = 1$. Однако гармонический ряд расходится, а ряд с n^2 сходится.

5^0. **Признак Коши.** *Пусть*

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

– показатель Коши для скорости убывания членов ряда. Если $\lambda < 1$, *то ряд* (1) *сходится; если же* $\lambda > 1$, *то ряд* (1) *расходится; в случае* $\lambda = 1$ *признак Даламбера "не работает".*

Таким образом, признаки Даламбера и Коши идентичны с точки зрения процедуры исследования сходимости ряда, и отличаются только показателями скорости убывания a_n, когда $n \to \infty$. Рассмотрим два числовых ряда, иллюстрирующих целесообразность использования признака Даламбера или Коши.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряды с общими членами

$$a_n = \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 6\cdot 11\cdots(5n-4)}, \qquad b_n = 3^{n+1}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}.$$

Решение. Очевидно, для ряда с a_n проще вычислить λ Даламбера, а для ряда с b_n - показатель λ Коши:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)-1}{5(n+1)-4} = \frac{3}{5} < 1$$

Следовательно, ряд с a_n сходится. Для ряда с b_n

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 3\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n = \frac{3}{\mathrm{e}} > 1,$$

так что этот ряд расходится.

Следующие два признака: Раабе и, особенно, Гаусса представляют наиболее сильный инструмент для исследования сходимости числового ряда с положительными членами. Однако их использование основано на технике разложения в ряд Маклорена по степеням $1/n$ функции $f(n) = a_n/a_{n+1}$ с оценкой сверху модуля остаточного члена. Я предлагаю ознакомится с этими методами исследования сходимости в основном студентам, не чурающимся высокой и хорошей математики.

6^0. **Признак Раабе.** *Пусть*

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

– показатель Раабе. Если $\lambda > 1$, *то ряд* (1) *сходится; если же* $\lambda < 1$, *то ряд* (1) *расходится; в случае* $\lambda = 1$ *признак Раабе "не работает".*

7^0. **Признак Гаусса.** *Представим отношение соседних членов ряда в асимптотической* ($n \to \infty$) *форме*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\delta}},$$

где $|\gamma_n|$ *меньше некоторой постоянной* C *при всех* $n \geq 1$ *и* $\delta > 0$. *Если* $\alpha > 1$, *то ряд сходится, если* $\alpha < 1$, *то ряд расходится, если же* $\alpha = 1$, *то ряд сходится когда* $\beta > 1$, *и расходится при* $\beta \leq 1$.

Пример 2. Определить область значений параметров α и β (> 0), при которых сходится ряд с общим членом

$$a_n = \frac{(n+1)!}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)\cdot n^\alpha}\,. \tag{2}$$

Решение. Представим отношение a_n/a_{n+1} в удобном для разложения по степеням $1/n$ виде:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(\beta+n+1)(n+1)^\alpha}{(n+2)n^\alpha} = \frac{\beta+n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha = \left(1+\frac{\beta-1}{n+2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha.$$

Из этого представления видно, что нам понадобится разложение функции $f(x) = (1+x)^\alpha$, $|x| < 1$, по степеням аргумента x с остаточным членом в форме Лагранжа. Имеем:

$$f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(1+\varepsilon x)^{\alpha-2}x^2 = 1 + \alpha x + \frac{x^2}{2}R(x),$$

где $0 < \varepsilon < 1$, и функция $R(x)$, определяющая остаточный член в асимптотическом разложении, является ограниченной в области $|x| < 1$. Используя это разложение с $x = 1/n$, находим, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{\beta - 1}{n+2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{R_n}{n^2}\right) = 1 + \frac{\beta + \alpha - 1}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2}\,.$$

Итак, показатель Раабе $\lambda = \beta + \alpha - 1$, так что ряд сходится при $\beta + \alpha > 2$ и расходится, когда $\beta + \alpha < 2$. Остается неясным сходимость ряда при $\beta + \alpha = 2$, когда показатель Раабе $\lambda = 1$.

Обратимся к признаку Гаусса, где роль α играет 1, а роль β выражение $\beta + \alpha - 1$. Признак Гаусса утверждает, что в данном случае область $\beta + \alpha - 1 = 1$ является областью расходимости ряда.

Таким образом, ряд с a_n вида (2) сходится только в области $\beta + \alpha > 2$.

Задание 45

Решение следующих задач, взятых из задачника Кудрявцев, Кутасов и др., высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий с большими полями вверху и внизу.

Задачи с номерами 14.18, 14. 19, 14.20, 14.21, 14.22 и 14. 27.2 (якобы сложный) решаются с помощью признаков Даламбера и Коши. Задача 14.23(2) решается в духе представленного выше Примера 2 с использованием признаков Раабе и Гаусса. При решении задач с номерами 14.27, 14.28, 14.33 необходимо использовать интегральный признак и асимптотический признак сравнения; некоторые из этих задач могут показаться достаточно сложными, но, зато, их решение оцениваются более высоким баллом.

Итак, предлагается исследовать на сходимость ряды, общие члены a_n которых имеют следующий вид.

$$14.18(4).\quad a_n = \frac{n!a^n}{n^n},\quad a \neq \mathrm{e},\ a > 0\,,$$

$$14.19(2).\qquad a_n = \frac{(2n+1)!}{(3n+4)\cdot 3^n}\,,$$

$$14.19(4).\quad a_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{(2n+1)!!},\ a>0\,,$$

$$14.19(7).\ a_n = \frac{3\cdot 6\cdot\cdots\cdot 3n}{(n+1)!}\arcsin\frac{1}{2^n}\,,$$

$$14.20(1).\qquad a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3\cdot 4^{3n}}\,,$$

$$14.21(3).\qquad a_n = \left(\frac{a\cdot n}{n+2}\right)^n,\ a>0\,,$$

$$14.21(5).\qquad a_n = \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{3/2}}\,,$$

$$14.21(8).\qquad a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}\,,$$

$$14.22(5).\qquad a_n = \frac{n^\alpha}{\ln^{n/2}(n+1)}\,,$$

$$14.27(2).\qquad a_n = (\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})\cdot(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}).$$

Задачи повышенной сложности.

$$14.23(2).\qquad a_n = \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^\alpha\frac{1}{n^\beta}\,,$$

$$14.27(5).\qquad a_n = (\ln\ln n)^{-\ln n}\,,$$

14.27(6). $a_n = (\ln n)^{-\ln\ln n}, \quad n \geq 3\,,$

14.29(1). $a_n = \dfrac{1}{\ln(n!)}\,,$

14.33(1). $a_n = \displaystyle\int_0^{1/n} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x}dx\,.$