§10. НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ МАТРИЦ

Пусть A — прямоугольная матрица. Матрица

$$A^* = (\overline{A})^T$$

называется ***сопряженной*** по отношению к матрице A. Ясно, что

$$(A^*)^* = A, \quad (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*, \quad (A+B)^* = A^* + B^*.$$

·

Квадратная матрица A называется *эрмитовой* (*самосопряженной*), если

$$A = A^*.$$

.

Квадратная матрица A называется ***косоэрмитовой***, если

$$A = -A^*.$$

.

Определитель эрмитовой матрицы вещественное число.

.

В самом деле, поскольку

$$\det(A^*) = \det((\overline{A})^T) = \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)},$$

то для эрмитовой матрицы, т. е. такой, что

$$A = A^*,$$

имеем

$$\det(A) = \det(A^*),$$

и

$$\det(A) = \overline{\det(A)}.$$

.

Любая квадратная матрица A представима в виде

$$A = H_1 + iH_2,$$

здесь H_1, H_2 — эрмитовы матрицы, i — мнимая единица. Матрицы H_1, H_2 однозначно определяются матрицей A.

.

Возможность представления

$$A = H_1 + iH_2,$$

вытекает из очевидного тождества

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + i\frac{1}{2i}(A - A^*)$$

и легко проверяемых соотношений

$$(A + A^*)^* = A + A^*, \quad \left(\frac{1}{i}(A - A^*)\right)^* = \frac{1}{i}(A - A^*).$$

.

Если предположить, что наряду с

$$A = H_1 + iH_2$$

возможно представление

$$A = \widetilde{H}_1 + i\widetilde{H}_2$$

с эрмитовыми матрицами $\widetilde{H}_1$, $\widetilde{H}_2$, то

$$(H_1 - \widetilde{H}_1) + i(H_2 - \widetilde{H}_2) = 0.$$

Переходя в

$$(H_1 - \widetilde{H}_1) + i(H_2 - \widetilde{H}_2) = 0$$

к сопряженным матрицам, получим

$$(H_1 - \widetilde{H}_1) - i(H_2 - \widetilde{H}_2) = 0.$$

Складывая почленно два этих равенства, будем иметь, что

$$H_1 = \widetilde{H}_1,$$

но тогда и

$$H_2 = \widetilde{H}_2,$$

т. е. представление

$$A = H_1 + iH_2$$

однозначно.

.

Матрицы, у которых все элементы вещественны, называют *вещественными* матрицами.

.

Вещественная эрмитова матрица A называется ***симметричной***.

Для такой матрицы

$$A = A^T.$$

.

Вещественная матрица A называется ***кососимметричной***, если

$$A = -A^T.$$

.

Для любой квадратной вещественной матрицы справедливо представление

$$A = A_1 + A_2,$$

где A_1 симметричная, A_2 кососимметричная матрицы. Такое представление единственно:

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad A_2 = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

.

Матрица A называется *унитарной*, если

$$AA^* = I, \quad A^*A = I,$$

иными словами, если

$$A^{-1} = A^*.$$

.

Определитель унитарной матрицы по модулю равен единице.

.

Действительно, по определению

$$AA^* = I,$$

следовательно,

$$\det(AA^*) = \det(I) = 1.$$

Запишем левую часть равенства подробнее:

$$\det(AA^*) = \det(A)\det(A^*) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det(A)|.$$

Значит,

$$|\det(A)| = 1.$$

.

Упражнение. Доказать, что произведение унитарных матриц является унитарной матрицей.

.

Упражнение. Проверить, что диагональная матрица, диагональ которой состоит из чисел $q_1, q_2, \ldots, q_n$, равных единице по модулю (n — порядок матрицы), является унитарной.

.

Вещественная унитарная матрица называется *ортогональной* матрицей. Для такой матрицы

$$AA^T = I, \quad A^T A = I.$$

Определитель ортогональной матрицы может быть равен только плюс единице или минус единице.

.

<u>Упражнение.</u> Проверить, что любая матрица перестановки P_{kl} ортогональна, например,

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

.

<u>Упражнение.</u> Проверить, что матрица второго порядка

$$Q_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где φ — любое вещественное число, является ортогональной.

.

Квадратная матрица A называется ***нормальной***, если она перестановочна с матрицей A^*, т. е.

$$AA^* = A^*A.$$

.

Нетрудно убедиться, что эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные матрицы — нормальные матрицы:

$$A = A^* \quad \Longrightarrow \quad AA^* = A^*A,$$

$$A = -A^* \quad \Longrightarrow \quad AA^* = A^*A,$$

$$AA^* = I, \quad A^*A = I \quad \Longrightarrow \quad AA^* = A^*A.$$

.

<u>Пример.</u> Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

является нормальной, но не принадлежит ни к одному из перечисленных выше классов. Действительно,

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

но

$$A \neq A^* \quad A \neq -A^* \quad AA^* \neq I.$$

.

Будем говорить, что на вещественном линейном пространстве **X** введено ***скалярное произведение***, если каждой паре элементов x, y этого пространства поставлено в соответствие вещественное число

$$(x, y),$$

и при этом выполнены ***аксиомы скалярного произведения***:

1) $(x, x) \geqslant 0$ для любого $x \in \mathbf{X}$, равенства $(x, x) = 0$ и $x = 0$ эквивалентны;

2) $(x, y) = (y, x)$ для любых $x, y \in \mathbf{X}$;

3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ для любых $x, y, z \in \mathbf{X}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

.

Если на линейном вещественном пространстве $\mathbf{X}$ введено скалярное произведение, его называют *вещественным евклидовым пространством*.

.

Будем говорить, что на комплексном линейном пространстве **X** введено ***скалярное произведение***, если каждой паре элементов x, y этого пространства поставлено в соответствие, вообще говоря, комплексное число

$$(x, y),$$

и при этом выполнены ***аксиомы скалярного произведения***:

1)$(x, x) \geqslant 0$ для любого $x \in \mathbf{X}$, равенства $(x, x) = 0$ **и** $x = 0$ эквивалентны;

2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ для любых $x, y \in \mathbf{X}$;

3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ для любых $x, y, z \in \mathbf{X}$ **и** $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

.

Если на линейном комплексном пространстве $\mathbf{X}$ введено скалярное произведение, его называют ***комплексным евклидовым пространством***.

.

Приведем примеры евклидовых пространств.

<u>Упражнение</u>. Проверить, что в рассматриваемых ниже примерах аксиомы скалярного произведения выполнены.

.

1) Множество всех векторов трехмерного пространства с введенными обычным образом линейными операциями и скалярным произведением — вещественное евклидово пространство. В дальнейшем будем обозначать это пространство через $\mathbf{V}_3$.

.

2) Пусть p — интегрируемая положительная на интервале (a, b) вещественной оси вещественная функция. Пространство $C[a, b]$ превращается в вещественное евклидово пространство, если определить скалярное произведение элементов f, g пространства $C[a, b]$ по формуле

$$(f, g) = \int\limits_a^b p(x) f(x) g(x) dx.$$

.

3) Для любой пары

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad Q_n(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n$$

элементов пространства $\mathbf{Q}_n$ определим скалярное произведение по формуле

$$(P_n, Q_n) = \sum_{j=0}^{n} \rho_j a_j \bar{b}_j,$$

где $\rho_0,\ \rho_1,\ \ldots,\ \rho_n$ — заданные положительные числа. После введения таким образом скалярного произведения пространство $\mathbf{Q}_n$ становится комплексным евклидовым пространством.

.

Матрица T перехода от любого ортонормированного базиса $\mathcal{E}_n$ к другому ортонормированному базису

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

евклидова пространства $\mathbf{X}_n$ является унитарной.

.

В самом деле, записывая равенство

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T$$

более подробно, получим

$$\widetilde{e}^k = \sum_{j=1}^{n} t_{jk} e^j, \quad k = 1, \ \dots, \ n.$$

.

Вследствие ортонормированности базиса $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ из

$$\widetilde{e}^k = \sum_{j=1}^{n} t_{jk} e^j, \quad k = 1, \ \ldots, \ n,$$

получаем, что

$$\left(\sum_{j=1}^{n} t_{jk} e^j, \sum_{j=1}^{n} t_{jl} e^j \right) = (\widetilde{e}^k, \widetilde{e}^l) = \delta_{kl}, \quad k, \ l = 1, \ \ldots, \ n.$$

.

Запишем равенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ik} e^{i}, \sum_{j=1}^{n} t_{jl} e^{j}\right) = \delta_{kl}, \quad k,\ l = 1,\ \ldots,\ n,$$

в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ik} \overline{t_{jl}} \left(e^{i}, e^{j}\right) = \delta_{kl}, \quad k,\ l = 1,\ \ldots,\ n.$$

Отсюда, с учетом ортонормированности базиса $\mathcal{E}_n$, получим, что

$$\sum_{j=1}^{n} t_{jk} \overline{t_{jl}} = \sum_{j=1}^{n} \overline{t_{jl}} t_{jk} = \delta_{kl}, \quad k,\ l = 1,\ \ldots,\ n,$$

а это и означает, что матрица T унитарна:

$$T^{*} T = I.$$

.

Если выполненные выкладки провести от конца к началу, то будет проверена справедливость обратного утверждения:
если базис $\mathcal{E}_n$ ортонормирован, а матрица T унитарна, то базис

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T$$

также ортонормирован.