ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2014, том 50, № 7, с. 909–922

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.962

ОБ inf – sup-УСЛОВИЯХ И ПРОЕКТОРАХ В ТЕОРИИ СМЕШАННЫХ МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

© 2014 г. Р. З. Даутов

Указываются ограничения на пространства конечных элементов, которые гарантируют выполнение дискретных inf – sup-условий, а также существование специальных проекторов, характерных для смешанных методов конечных элементов. Рассматриваются как конформные, так и неконформные аппроксимации. Предложен способ определения специальных проекторов на векторное пространство конечных элементов, позволяющий доказать их существование при весьма общих условиях без определения степеней свободы элементов.

DOI: 10.1134/S0374064114070061

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть X и Y – два банаховых пространства с нормами $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ соответственно и $b:\ X\times Y\to R$ – ограниченная билинейная форма. Говорят, что форма b удовлетворяет $\inf-\sup$-условию, если найдется постоянная $C>0$ такая, что

$$\sup_{\tau\in Y}(|b(v,\tau)|/\|\tau\|_Y)\ge C\|v\|_X,\quad v\in X. \tag{1}$$

Здесь и далее выражения вида $\sup\limits_{\tau\in Y}(|f(\tau)|/\|\tau\|_Y)$ понимаются как $\sup\limits_{\tau\in Y\setminus\{0\}}(|f(\tau)|/\|\tau\|_Y)$. Очевидно, что оценка (1) эквивалентна неравенству

$$\inf_{v\in X}\sup_{\tau\in Y}[|b(v,\tau)|/(\|\tau\|_Y\|v\|_X)]\ge C,$$

что объясняет название $\inf-\sup$. Часто говорят, что форма b удовлетворяет условию Ладыженской–Бабушки–Брецци (ЛББ-условию).

Если X_h и Y_h – конечномерные аппроксимации X и Y соответственно, зависящие от параметра h, а b_h – аппроксимация b, то неравенство, получающееся заменой в (1) тройки (b,X,Y) на (b_h,X_h,Y_h), называют дискретным $\inf-\sup$-условием. В этом случае, как правило, важно, чтобы постоянная C в полученном неравенстве не зависела от h.

В теории смешанных методов конечных элементов (МКЭ) важную роль играет форма

$$b(v,\tau)=\int\limits_\Omega v\nabla\cdot\tau\,dx, \tag{2}$$

когда $X=L_2(\Omega)$, а пространство $Y=H(\mathrm{div};\Omega)=\{\tau\in[L_2(\Omega)]^d:\ \nabla\cdot\tau\in L_2(\Omega)\}$ наделяется естественной нормой. Здесь $\Omega\subset R^d$, $d\ge 2$, $\nabla\cdot\tau$ – дивергенция τ. В этом случае $\inf-\sup$-условие принимает вид

$$\sup_{\tau\in H(\mathrm{div};\Omega)}(|b(v,\tau)|/\|\tau\|_{H(\mathrm{div};\Omega)})\ge C\|v\|_{L_2(\Omega)},\quad v\in L_2(\Omega). \tag{3}$$

Соответствующее неравенству (3) дискретное $\inf-\sup$-условие играет фундаментальную роль как при доказательстве разрешимости смешанных схем МКЭ, так и при исследовании их точности. Представляет интерес и более слабое условие, получающееся из неравенства (3) заменой нормы $\|\cdot\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}$ нормой $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$, а также его дискретный аналог.

Основной целью данной работы является установление таких ограничений на аппроксимирующие пространства, которые гарантируют выполнение дискретного $\inf-\sup$-условия для формы (2). Предполагается, что она определена на $X\times Y = L_p(\Omega)\times H_q(\mathrm{div};\Omega)$, где $p\in(1,\infty)$, $1/p+1/q=1$ (см. п. 2). Форма b с такой областью определения играет важную роль в теории смешанных методов для нелинейных задач.

В п. 2 доказывается $\inf-\sup$-условие для формы b с более узкой областью определения $X\times Y = L_p(\Omega)\times[W_q^1(\Omega)]^d$. Область Ω при этом предполагается лишь ограниченной. Другие непрерывные $\inf-\sup$-условия являются его следствием. На основе этого условия и известного приема Фортина далее доказываются дискретные $\inf-\sup$-условия.

В п. 3 определяется регулярная конформная триангуляция $\mathcal{T}_h$ области Ω и вводятся соответствующие обозначения. Пункт 4 является основным в работе; все рассмотрения в нем проводятся на отдельном конечном элементе $K\in\mathcal{T}_h$. Первоначально вводится аффинная тройка абстрактных конечномерных пространств $(V(K),W(K),\Lambda(\partial K))$, где $V(K)$, $W(K)$ – пространства скалярных и векторных функций на конечном элементе K соответственно, $\Lambda(\partial K)$ – пространство скалярных функций, определенных на границе ∂K элемента K, и формулируются два условия H_1) и H_2), ограничивающие выбор допустимых пространств. Основным и наиболее ограничительным является условие H_2), которое означает, что локальный дискретный градиент ∇_K, определяемый как оператор из $V(K)\times\Lambda(\partial K)$ в $W(K)$, обращается в нуль только на тождественно постоянных функциях. Доказывается, что условия H_1) и H_2) гарантируют существование локального проектора $\Pi_K:\ [W_q^1(K)]^d\to W(K)$, обладающего специальными свойствами. В теории смешанных методов он хорошо известен для конкретных примеров пространств $W(K)$ и играет ключевую роль при исследовании сходимости и точности смешанных схем. Существование Π_K при $q=2$ доказано в работе [1].

В п. 5 на основе троек $(V(K),W(K),\Lambda(\partial K))$, $K\in\mathcal{T}_h$, определяются пространства конечных элементов (V_h,W_h,Λ_h), а также на основе пары (W_h,Λ_h) – пространство $\overline{W}_h$. Пара $(V_h,\overline{W}_h)$ рассматривается как аппроксимация $(L_p(\Omega),H_q(\mathrm{div};\Omega))$. В зависимости от выбора локальных пространств $\Lambda(\partial K)$ пространство $\overline{W}_h$ может быть как конформной (внутренней), так и неконформной аппроксимацией $H_q(\mathrm{div};\Omega)$. Далее на основе локальных проекторов Π_K определяется глобальный проектор Π_h подпространства $H_q(\mathrm{div};\Omega)$ в $\overline{W}_h$, который позволяет доказать $\inf-\sup$-условия. Наконец, в п. 6 приводятся примеры конформных и неконформных пространств конечных элементов, удовлетворяющих установленным в работе ограничениям.

2. НЕПРЕРЫВНЫЕ $\inf-\sup$-УСЛОВИЯ

Пусть $p\in(1,\infty)$. Для произвольной области $\Omega\subset R^d$, $d\ge 2$, мы используем стандартное обозначение $W_p^s(\Omega)$ для скалярного пространства Соболева порядка s. При целых $s\ge 0$ это пространство определяется равенством

$$W_p^s(\Omega)=\{u\in L_p(\Omega):\ D^{|\alpha|}u\in L_p(\Omega),\ |\alpha|\le s\}.$$

Норма и полунормы в них обозначаются через $\|\cdot\|_{s,p,\Omega}$ и $|\cdot|_{k,p,\Omega}$, $0\le k\le s$, соответственно и определяются равенствами

$$\|v\|_{s,p,\Omega}^p=\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|\le s}|D^\alpha v|^p\,dx,\quad |v|_{k,p,\Omega}^p=\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=k}|D^\alpha v|^p\,dx.$$

Напомним, что если область Ω ограничена и обладает свойством сегмента, то $W_p^s(\Omega)$ совпадает с замыканием $C^\infty(\overline{\Omega})$ по норме $\|\cdot\|_{s,p,\Omega}$ (см., например, [2, теорема 3.18, с. 54]).

Для пространства вектор-функций $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_d)$ с компонентами из $W_q^s(\Omega)$, $1/q+1/p=1$, используется обозначение $[W_q^s(\Omega)]^d$. Норма и полунормы в нем обозначаются аналогично скалярному случаю и определяются равенствами

$$\|\tau\|_{s,q,\Omega}=\left(\sum_{k=0}^s|\tau|_{k,q,\Omega}^q\right)^{1/q},\quad |\tau|_{k,q,\Omega}=\left(\sum_{i=1}^d\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=k}|D^\alpha\tau_i|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

Отметим, что $W_q^0(\Omega) = L_q(\Omega)$, $\|\cdot\|_{0,q,\Omega} = |\cdot|_{0,q,\Omega}$. Векторное пространство $H_q(\mathrm{div};\Omega)$, наделенное нормой $\|\cdot\|_{H_q(\mathrm{div};\Omega)}$, определяется следующим образом:

$$H_q(\mathrm{div};\Omega) = \{\tau \in [L_q(\Omega)]^d : \ \nabla\cdot\tau \in L_q(\Omega)\}, \quad \|\tau\|^q_{H_q(\mathrm{div};\Omega)} = \|\tau\|^q_{0,q,\Omega} + \|\nabla\cdot\tau\|^q_{0,q,\Omega}.$$

Ясно, что вложение $[W_q^1(\Omega)]^d \subset H_q(\mathrm{div};\Omega)$ является непрерывным.

Далее обозначение $(\cdot,\cdot)_D$ используется для скалярного произведения как в скалярном $L_2(D)$, так и в векторном $[L_2(D)]^d$ случае, где либо $D \subset R^d$, либо $D \subset R^{d-1}$. Таким образом, если $u, v \in L_2(D)$, а $\tau, \sigma \in [L_2(D)]^d$, то

$$(u,v)_D = \int\limits_D uv\,dx, \quad (\tau,\sigma)_D = \int\limits_D \tau\cdot\sigma\,dx.$$

Далее считаем, что B – область с гладкой границей такая, что $B \supset \Omega$; $C_F(\Omega)$ – постоянная в неравенстве Фридрихса

$$\|v\|_{0,p,B} \le C_F(\Omega)|v|_{1,p,B}, \quad v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(B) = \{u \in W_p^1(B) : \ u|_{\partial B} = 0\}.$$

При соответствующем выборе B известна оценка $C_F(\Omega) \le \ell$, где ℓ – диаметр области Ω или ее толщина в каком-либо направлении. Простым обобщением леммы 2.2 из работы [3] в случае $q \ne 2$ является

Лемма 1. *Пусть $\Omega \subset R^d$ – ограниченная область, $d \ge 2$. Для заданного $f \in L_q(\Omega)$, $q \in (1,\infty)$, существует вектор-функция $\sigma \in [W_q^1(\Omega)]^d$ такая, что*

$$\nabla\cdot\sigma = f \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{4}$$

$$\|\sigma\|_{1,q,\Omega} \le C_D(\Omega)\|f\|_{0,q,\Omega}, \tag{5}$$

$$\|\sigma\|_{H_q(\mathrm{div};\Omega)} \le C_d(\Omega)\|f\|_{0,q,\Omega}, \tag{6}$$

где $C_D(\Omega) = (C^q(d,q) + C_F^q(\Omega))^{1/q}$, $C(d,2) = 1$, $C_d(\Omega) = (1 + C_F^q(\Omega))^{1/q}$.

Доказательство. Пусть B – область, определенная выше. Положим $\bar f = f$ на Ω и $\bar f = 0$ на $B \setminus \Omega$. Хорошо известно, что существует функция $u \in W_q^2(B)$, удовлетворяющая соотношениям $\Delta u = \bar f$ на B, $u|_{\partial B} = 0$, и $|u|_{2,q,B} \le C(d,q)\|\bar f\|_{0,q,B}$ (см., например, [4, с. 220, следствие 9.10]). Следовательно, $\sigma = \nabla u$ удовлетворяет соотношению (4). Из тождества $(\nabla u, \nabla v)_B = (\bar f, v)_B$, $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(B)$, следует оценка $|u|_{1,q,B} \le C_F(\Omega)\|\bar f\|_{0,q,B}$. Таким образом,

$$\|\sigma\|_{1,q,\Omega} \le (|u|^q_{1,q,B} + |u|^q_{2,q,B})^{1/q} \le C_D(\Omega)\|\bar f\|_{0,q,B} = C_D(\Omega)\|f\|_{0,q,\Omega},$$

что доказывает оценку (5). Аналогично доказывается неравенство (6), поскольку $\nabla\cdot\sigma = \bar f$:

$$\|\sigma\|_{H_q(\mathrm{div};\Omega)} \le (|u|^q_{1,q,B} + |\nabla\cdot\sigma|^q_{0,q,B})^{1/q} \le C_d(\Omega)\|\bar f\|_{0,q,B} = C_d(\Omega)\|f\|_{0,q,\Omega}.$$

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset R^d$ – ограниченная область, $d \ge 2$. Тогда*

$$\sup_{\tau\in[W_q^1(\Omega)]^d} (|(v,\nabla\cdot\tau)_\Omega|/\|\tau\|_{1,q,\Omega}) \ge C_D^{-1}(\Omega)\|v\|_{0,p,\Omega}, \quad v \in L_p(\Omega),$$

где $p \in (1,\infty)$, $1/p + 1/q = 1$, постоянная $C_D(\Omega)$ определена в лемме 1.

Доказательство. Пусть $v \in L_p(\Omega)$. Для любого $\sigma \in [W_q^1(\Omega)]^d \setminus \{0\}$ справедливо неравенство

$$\sup_{\tau\in[W_q^1(\Omega)]^d} (|(v,\nabla\cdot\tau)_\Omega|/\|\tau\|_{1,q,\Omega}) \ge |(v,\nabla\cdot\sigma)_\Omega|/\|\sigma\|_{1,q,\Omega}. \tag{7}$$

Пусть $f = |v|^{p-2}v$. Тогда $\|f\|_{0,q,\Omega} = \|v\|^{p-1}_{0,p,\Omega}$. Определим σ по f согласно лемме 1. Тогда $\nabla \cdot \sigma = |v|^{p-2}v$ на Ω, $\|\sigma\|_{1,q,\Omega} \le C_D(\Omega)\|v\|^{p-1}_{0,p,\Omega}$ и $(v, \nabla \cdot \sigma)_\Omega = \|v\|^p_{0,p,\Omega}$. Теперь утверждение теоремы непосредственно вытекает из неравенства (7).

Теорема 2. *Пусть* $\Omega \subset R^d$ *– ограниченная область,* $d \ge 2$. *Тогда*

$$\sup_{\tau \in H_q(\mathrm{div};\Omega)} (|(v, \nabla \cdot \tau)_\Omega| / \|\tau\|_{H_q(\mathrm{div};\Omega)}) \ge C_d^{-1}(\Omega)\|v\|_{0,p,\Omega}, \quad v \in L_p(\Omega),$$

где $p \in (1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$, *постоянная* $C_d(\Omega)$ *определена в лемме 1.*

Теорема 2 вытекает из теоремы 1 в силу непрерывности вложения $[W^1_q(\Omega)]^d \subset H_q(\mathrm{div};\Omega)$, но с худшей постоянной $C_D^{-1}(\Omega)$. Прямое доказательство приводит к постоянной, указанной в теореме. Для этого достаточно повторить доказательство теоремы 1, заменяя $[W^1_q(\Omega)]^d$ на $H_q(\mathrm{div};\Omega)$, а норму $\|\tau\|_{1,q,\Omega}$ на $\|\tau\|_{H_q(\mathrm{div};\Omega)}$, и воспользоваться оценкой (6).

При более сильных ограничениях на область Ω теорема 2 доказана в работе [5] (см. также [6]).

3. ТРИАНГУЛЯЦИЯ ОБЛАСТИ

Далее $\Omega \subset R^d$ – произвольная ограниченная многогранная область, $d \ge 2$, h – положительный параметр. Через $\mathcal{T}_h = \{K_1, K_2, \ldots, K_{N(h)}\}$ будем обозначать разбиение Ω (триангуляцию Ω) на многогранники (конечные элементы) максимального диаметра h, K_i считаются открытыми множествами. Будем придерживаться следующих соглашений.

Через K обозначаем произвольный элемент из $\mathcal{T}_h$. Под гранями элемента K понимаются его $(d-1)$-мерные грани (замкнутые множества), через e обозначается произвольная грань K. Если $e \subset \partial\Omega$, то e называется граничной гранью, иначе – внутренней (т.е. $e = \bar{K} \cap \bar{L}$, $K, L \in \mathcal{T}_h$). Через ∂K, $\mathcal{E}_h$ и $\mathcal{E}_h^\partial$ будем обозначать как множество, так и объединение всех граней K, всех внутренних и всех граничных граней соответственно; так что $\bar{\mathcal{E}}_h = \mathcal{E}_h \cup \mathcal{E}_h^\partial$ является как множеством, так и объединением всех граней. Далее под n_K будем понимать поле единичных нормалей на ∂K, направленных вне K. Сужение (след) функции u на множество D обозначаем через $u|_D$.

На триангуляцию $\mathcal{T}_h$ наложим следующие ограничения:

T_1) $K_i \cap K_j = \emptyset$ при $i \ne j$, $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N(h)} \overline{K}_i$;

T_2) триангуляция $\mathcal{T}_h$ является конформной, т.е. всякая грань K есть или подмножество границы $\partial\Omega$ или грань другого элемента;

T_3) каждый элемент $K \in \mathcal{T}_h$ является образом некоторого $\hat{K} \in \hat{\mathcal{T}}$ при обратимом аффинном преобразовании: $K = F_K(\hat{K})$, $F_K(x) = B_K\hat{x} + b_K$, где $\hat{\mathcal{T}}$ – конечный, не зависящий от h, набор многогранников в R^d единичного диаметра, называемых базисными элементами;

T_4) триангуляция $\mathcal{T}_h$ является регулярной, т.е. $\|B_K\| \sim h$, $\|B_K^{-1}\| \sim h^{-1}$, $K \in \mathcal{T}_h$.

Здесь и далее для числовых величин f, g выражение $f \sim g$ ($f(v) \sim g(v)$) означает, что $cg \le f \le Cg$ ($cg(v) \le f(v) \le Cg(v)$ при всех допустимых v). Через c и C обозначены положительные постоянные, не зависящие как от h, так и от Ω. Зависимость постоянных от Ω будет указываться явно, как и выше, например, $C_F(\Omega)$, $C_d(\Omega)$ и т.д.

Далее через u, v будем обозначать скалярные функции, через τ, σ – векторные. Они считаются определенными на области Ω. Скалярные функции, определенные на $\bar{\mathcal{E}}_h$, обозначаются через λ, μ. Через w обозначаются функции, которые могут быть как скалярными, так и векторными. Примем также следующие обозначения:

$$(w, \eta)_{\mathcal{T}_h} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (w, \eta)_K, \quad \|w\|_{s,p,\mathcal{T}_h} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|w\|^p_{s,p,K} \right)^{1/p}.$$

На основе триангуляции $\mathcal{T}_h$ определим пространство $W_p^s(\mathcal{T}_h)$ как подпространство функций из $L_p(\Omega)$, сужения которых на элемент $K \in \mathcal{T}_h$ принадлежат пространству $W_p^s(K)$; оно снабжается нормой $\|\cdot\|_{s,p,\mathcal{T}_h}$. Аналогично определяется $H_q(\mathrm{div};\mathcal{T}_h)$ как подпространство $[L_q(\Omega)]^d$ с нормой $\|\tau\|_{H_q(\mathrm{div};\mathcal{T}_h)} = (\|\tau\|_{0,q,\Omega}^q + \|\nabla\cdot\tau\|_{0,q,\mathcal{T}_h}^q)^{1/q}$.

Пусть Λ – пространство следов функций из $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ на $\bar{\mathcal{E}}_h$, т.е.

$$\Lambda = \{\lambda \in L_p(\bar{\mathcal{E}}_h):\ \lambda = v|_{\bar{\mathcal{E}}_h},\ v \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)\}.$$

Пространство $H_q(\mathrm{div};\Omega)$ на основе триангуляции $\mathcal{T}_h$ эквивалентно определяется парой пространств (W,Λ), $W = H_q(\mathrm{div};\mathcal{T}_h)$, следующим образом (см., например, [7; 8, с. 95] при $q = 2$):

$$H_q(\mathrm{div};\Omega) = \left\{\tau \in W:\ \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \langle \tau\cdot n_K, \lambda\rangle_{\partial K} = 0,\ \lambda \in \Lambda\right\}, \tag{8}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial K}$ – отношение двойственности между $W_q^{-1/q}(\partial K)$ и $W_p^{1/q}(\partial K)$. Из равенства (8) следует, что если τ является достаточно гладкой функцией на каждом элементе K (например, $\tau|_K \in [W_q^1(K)]^d$) и нормальные компоненты τ непрерывны на межэлементных границах (на $\mathcal{E}_h$), то $\tau \in H_q(\mathrm{div};\Omega)$. Равенство (8) служит основой построения как конформных, так и неконформных аппроксимаций $\overline{W}_h$ пространства $H_q(\mathrm{div};\Omega)$. В первом случае $\overline{W}_h \subset H_q(\mathrm{div};\Omega)$.

4. АНАЛИЗ НА ОТДЕЛЬНОМ КОНЕЧНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

В данном пункте вводятся конечномерные пространства функций на конечном элементе и дается определение локального дискретного градиента. Это определение позволит нам достаточно просто доказать существование специального проектора Π_K на векторное пространство конечных элементов при весьма общих условиях.

4.1. Локальные пространства конечных элементов. На каждом базисном элементе $\hat K \in \hat{\mathcal{T}}$ определим тройку $(V(\hat K), W(\hat K), \Lambda(\partial\hat K))$ конечномерных пространств, где $V(\hat K)$ – пространство скалярных функций на $\hat K$, $W(\hat K)$ – d-мерных вектор-функций на $\hat K$ и $\Lambda(\hat K)$ – пространство скалярных функций на $\partial\hat K$.

Используя аффинное преобразование $\hat K \to K$, определим тройку пространств $(V(K), W(K), \Lambda(\partial K))$ на каждом конечном элементе $K \in \mathcal{T}_h$. Точнее, пусть $\hat K$ – соответствующий K базисный элемент, $x = F_K(\hat x) = B_K\hat x + b_K$ – невырожденное преобразование $\hat K \to K$. Положим $|B_K| = \det(B_K)$,

$$V(K) = \{v = \hat v\circ F_K^{-1}, \hat v \in V(\hat K)\}, \quad \Lambda(\partial K) = \{\lambda = \hat\lambda\circ F_K^{-1},\ \hat\lambda \in \Lambda(\partial\hat K)\},$$

$$W(K) = \{\tau = |B_K|^{-1}B_K(\hat\tau\circ F_K^{-1}),\ \hat\tau \in W(\hat K)\}.$$

Обозначим через 1_D функцию, тождественно равную единице на множестве D. Пусть также

$$\boldsymbol{V}(K) = V(K)\times\Lambda(\partial K), \quad \boldsymbol{V}_0(K) = \{(v,\lambda) \in \boldsymbol{V}(K):\ (v,\lambda) = c(1_K, 1_{\partial K}),\ c \in R\}.$$

Сформулируем основные ограничения на выбор указанных пространств. Будем считать, что

$H_1)$ $V(K) \subset W_\infty^1(K)$, $W(K) \subset [W_\infty^1(K)]^d$, $\Lambda(\partial K) \subset L_\infty(\partial K)$, $V(K) \supseteq P_0(K)$, $W(K) \supseteq [P_0(K)]^d$, $\Lambda(\partial K) \supseteq P_0(\partial K)$, где $P_0(D)$ – множество тождественно постоянных на D функций;

$H_2)$ если $(v,\lambda) \in V(K)\times\Lambda(\partial K)$, то из соотношения

$$-(v,\nabla\cdot\tau)_K + (\lambda, \tau\cdot n_K)_{\partial K} = 0, \quad \tau \in W(K),$$

следует, что $(v,\lambda) \in \boldsymbol{V}_0(K)$.

Отметим некоторые следствия, вытекающие из условий H_1), H_2).

1) Из определения пространств $(V(K), W(K), \Lambda(\partial K))$ с очевидностью следует, что условие H_1) выполнено и при $K = \hat{K}$, т.е. и для базисной тройки $(V(\hat{K}), W(\hat{K}), \Lambda(\partial\hat{K}))$. Условие H_2) также выполнено при $K = \hat{K}$. Действительно, преобразование $\tau(x) = |B_K|^{-1}B_K\hat{\tau}(\hat{x})$, $x = B_K\hat{x}+b_K$, известное как преобразование Пиолы, обеспечивает справедливость следующих формул при замене переменных в интегралах (см., например, [8, с. 98]):

$$(\nabla\cdot\tau, v)_K = (\hat{\nabla}\cdot\hat{\tau}, \hat{v})_{\hat{K}}, \quad (\tau, \nabla v)_K = (\hat{\tau}, \hat{\nabla}\hat{v})_{\hat{K}}, \quad (\tau\cdot n_K, \lambda)_{\partial K} = (\hat{\tau}\cdot n_{\hat{K}}, \hat{\lambda})_{\partial\hat{K}}.$$

Здесь (v, λ) – образ $(\hat{v}, \hat{\lambda}) \in V(\hat{K})\times\Lambda(\partial\hat{K})$ при преобразовании $\hat{x} = F_K^{-1}(x)$, $n_{\hat{K}}$ – единичная внешняя нормаль к $\partial\hat{K}$, $\hat{\nabla} = (\partial/\partial\hat{x}_1, \ldots, \partial/\partial\hat{x}_d)$. Таким образом,

$$-(v, \nabla\cdot\tau)_K + (\lambda, \tau\cdot n_K)_{\partial K} = -(\hat{v}, \hat{\nabla}\cdot\hat{\tau})_{\hat{K}} + (\hat{\lambda}, \hat{\tau}\cdot n_{\hat{K}})_{\partial\hat{K}}. \tag{9}$$

Отсюда следует, что условие H_2) также выполнено при $K = \hat{K}$.

2) Из условия H_1) вытекает, что $\boldsymbol{V}_0(K)$ – одномерное подпространство $\boldsymbol{V}(K)$ (тождественно постоянных функций).

3) Допускаются следующие две возможности выбора пространства $\Lambda(\partial K)$:

a) $\Lambda(\partial K) \subset W_p^{1/q}(\partial K) = \{\lambda \in L_p(\partial K):\ \lambda = v|_{\partial K},\ v \in W_p^1(K)\}$;

b) $\Lambda(\partial K) = \prod_{e\in\partial K}\Lambda(e)$, где $\Lambda(e)$ – конечномерное пространство функций на e.

В случае a) элементы $\Lambda(\partial K)$ непрерывны на ∂K при $p > d$.

4) Условие H_2) включает в себя следующие два подусловия:

H_2') из $(v, \nabla\cdot\tau)_K = 0$, $\tau \in W(K)$, следует, что $v = 0$;

H_2'') из $(\lambda, \tau_n)_{\partial K} = 0$, $\tau_n \in W_n(\partial K)$, вытекает равенство $\lambda = 0$, где

$$W_n(\partial K) = \{\tau\cdot n_K|_{\partial K},\ \tau \in W(K)\}.$$

Например, H_2') следует из H_2), если рассматривать пары (v, λ) с $\lambda = 0$. Тогда $(v, \lambda) \in \boldsymbol{V}_0$ только при $v = 0$.

5) Из условия H_2) вытекают также следующие ограничения на размерности пространств:

$$\begin{gathered}\dim V(K) + \dim\Lambda(\partial K) - 1 \le \dim W(K), \quad \dim V(K) \le \dim\nabla\cdot W(K),\\ \dim\Lambda(\partial K) \le \dim W_n(\partial K),\end{gathered} \tag{10}$$

где $\nabla\cdot W(K) = \{\nabla\cdot\tau,\ \tau \in W(K)\}$. В самом деле, уравнение в H_2) эквивалентно сводится к однородной системе алгебраических уравнений, матрица которой в силу условия H_2) имеет столбцовый ранг, равный $\dim V(K) + \dim\Lambda(\partial K) - 1$. Отсюда следует первая оценка. Из условий H_2') и H_2'') аналогично выводятся остальные две оценки.

6) Способ определения пространств $(V(K), W(K), \Lambda(\partial K))$ и условия T_3), T_4) позволяют использовать стандартный в теории МКЭ способ доказательства оценок вида $p_K(v) \le$ $\le ch^\alpha q_K(v)$, $v \in H(K)$, где $K \in \mathcal{T}_h$, $\alpha \in R$, p_K и q_K – полунормы или нормы в необязательно конечномерном $H(K)$. Этот способ, называемый масштабированием, заключается в следующем: первоначально устанавливается оценка $p_{\hat{K}}(\hat{v}) \le cq_{\hat{K}}(\hat{v})$, $\hat{v} \in H(\hat{K})$, на базисном элементе $\hat{K}$, а затем проводится преобразование $\hat{K} \to K$ и в результате получается требуемая оценка. Подобным образом доказываются обратные неравенства (см., например, [9, с. 143]). Для $w \in W(K)$ или $w \in V(K)$ они имеют вид

$$|w|_{s,\alpha,K} \le c|B_K|^{1/\alpha-1/\beta}h^{t-s}|w|_{t,\beta,K}, \quad t \le s, \quad 1 \le \alpha, \beta \le \infty. \tag{11}$$

Используя для $\tau \in W(K)$ соотношения (см., например, [8, с. 95–98] при $q = 2$)

$$|B_K|^{1-1/q}\|B_K\|^{-1}\|\tau\|_{0,q,K} \le \|\hat{\tau}\|_{0,q,\hat{K}} \le |B_K|^{1-1/q}\|B_K^{-1}\|\|\tau\|_{0,q,K}, \tag{12}$$

$$|\hat{\tau}|_{1,q,\hat{K}} \le |B_K|^{1-1/q}\|B_K\|\|B_K^{-1}\||\tau|_{1,q,K}, \tag{13}$$

$$|B_K|^{1-1/q}\|B_K^{-1}\|^{-1/q}\|B_K\|^{-1}\|\tau\|_{0,q,\partial K} \le \|\hat{\tau}\|_{0,q,\partial\hat{K}}, \tag{14}$$

масштабированием доказываются также следующие два утверждения.

Лемма 2. *Справедливы оценки* $c\|\tau\|_{0,q,K} \le \sup\limits_{\sigma\in W(K)}(|(\tau,\sigma)_K|/\|\sigma\|_{0,p,K}) \le \|\tau\|_{0,q,K}, \ \ \tau\in W(K)$.

Доказательство. Оценка сверху очевидна. На базисном элементе оценка снизу имеет место в силу эквивалентности норм в конечномерных пространствах.

Лемма 3. *Для любого* $K\in\mathcal{T}_h$ *и* $\tau\in W(K)$ *справедливы следующие оценки:*

a) $\|\tau\|_{0,q,\partial K} \le ch^{-1/q}(|\tau|_{0,q,K} + h|\tau|_{1,q,K})$;

b) $\|\tau\|_{0,q,\partial K} \le ch^{-1/q}|\tau|_{0,q,K}$.

Доказательство. На базисном элементе имеем $\|\hat{\tau}\|_{0,q,\partial\hat{K}} \le c(|\hat{\tau}|_{0,q,\hat{K}} + |\hat{\tau}|_{1,q,\hat{K}})$, поскольку $W_q^1(\hat{K}) \subset L_q(\partial\hat{K})$. Отсюда с использованием оценок (12)–(14) и условия T_4) получаем оценку a). Оценка b) непосредственно следует из оценки a) и обратного неравенства (11).

4.2. Локальный дискретный градиент. В пространствах $W(K)$ и $\boldsymbol{V}(K)$ введем скалярные произведения, полагая $(\tau,\sigma)_{W(K)} = (\tau,\sigma)_K$, $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}(K)} = (u,v)_K + h(\lambda,\mu)_{\partial K}$. На $\boldsymbol{V}(K)$ введем также полунорму

$$|\boldsymbol{v}|_{1,p,K} = \|\nabla v\|_{0,p,K} + h^{-1/q}\|v-\lambda\|_{0,p,\partial K}.$$

Нетрудно видеть, что она является нормой в фактор-пространстве $\boldsymbol{V}(K)/\boldsymbol{V}_0(K)$.

Определим оператор $\nabla_K:\ \boldsymbol{V}(K)\to W(K)$ по правилу

$$(\nabla_K\boldsymbol{v},\tau)_{W(K)} = -(v,\nabla\cdot\tau)_K + (\lambda,\tau\cdot n_K)_{\partial K}, \quad \tau\in W(K), \quad \boldsymbol{v}=(v,\lambda)\in\boldsymbol{V}(K), \tag{15}$$

и будем называть его локальным дискретным градиентом.

Далее под условиями $H_{1,2}$) понимаем одновременное выполнение условий H_1) и H_2). Аналогично понимаем сокращения H_{1-3}), $H_{1,2,4,\ldots}$).

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* $H_{1,2}$). *Тогда: a)* $\ker(\nabla_K) = \boldsymbol{V}_0(K)$, *кроме того, b) справедливы соотношения*

$$\|\nabla_K\boldsymbol{v}\|_{0,p,K} \sim J_K(\boldsymbol{v}) = \sup_{\tau\in W(K)}(|(\nabla_K\boldsymbol{v},\tau)_K|/\|\tau\|_{0,q,K}) \sim |\boldsymbol{v}|_{1,p,K}, \quad \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}(K). \tag{16}$$

Доказательство. Утверждение a) непосредственно следует из определения (15) и условия H_2). Первое соотношение в (16) следует из леммы 2. Докажем второе соотношение. В силу a) функционал $J_K(\cdot)$ определяет полунорму в конечномерном $\boldsymbol{V}(K)$ и норму в фактор-пространстве $\boldsymbol{V}(K)/\boldsymbol{V}_0(K)$. Поэтому полунормы $J_K(\boldsymbol{v})$ и $|\boldsymbol{v}|_{1,p,K}$ эквивалентны. Используем масштабирование, чтобы показать, что постоянные эквивалентности не зависят от h. Замена переменных приводит к следующему равенству (см. (9)):

$$(\nabla_K\boldsymbol{v},\tau)_{W(K)} = -(\hat{v},\hat{\nabla}\cdot\hat{\tau})_{\hat{K}} + (\hat{\lambda},\hat{\tau}\cdot n_{\hat{K}})_{\partial\hat{K}} = (\hat{\nabla}_{\hat{K}}\hat{\boldsymbol{v}},\hat{\tau})_{W(\hat{K})}, \quad \hat{\tau}\in W(\hat{K}). \tag{17}$$

Поскольку $\ker(\hat{\nabla}_{\hat{K}}) = \boldsymbol{V}_0(\hat{K})$, то на $\boldsymbol{V}(\hat{K})$ имеет место соотношение

$$\sup_{\hat{\tau}\in W(\hat{K})}(|(\hat{\nabla}_{\hat{K}}\hat{\boldsymbol{v}},\hat{\tau})_{\hat{K}}|/\|\hat{\tau}\|_{0,q,\hat{K}}) \sim |\hat{\boldsymbol{v}}|_{1,p,\hat{K}} = \|\hat{\nabla}\hat{v}\|_{0,p,\hat{K}} + \|\hat{v}-\hat{\lambda}\|_{0,p,\partial\hat{K}}.$$

Возвращаясь в этих соотношениях к элементу K и используя при этом равенство (17), неравенства (12), а также следующие хорошо известные оценки (см., например, [9, с. 121–124]):

$$|B_K|^{-1/p}\|B_K^{-1}\|^{-1}|v|_{1,p,K} \le |\hat{v}|_{1,p,\hat{K}} \le |B_K|^{-1/p}\|B_K\||v|_{1,p,K}, \tag{18}$$

$$|B_K|^{-1/p}\|B_K^{-1}\|^{-1/p}\|\lambda\|_{0,p,\partial K} \le \|\hat{\lambda}\|_{0,p,\partial\hat{K}} \le |B_K|^{-1/p}\|B_K\|^{1/p}\|\lambda\|_{0,p,\partial K}, \tag{19}$$

получаем второе соотношение в (16), так как $\|B_K\|\sim h$, $\|B_K^{-1}\|\sim h^{-1}$.

4.3. Локальный проектор Π_K. Дадим определение проектора $\Pi_K : [W_q^1(K)]^d \to W(K)$, обладающего набором важных свойств (т.е. такого линейного оператора, что $\Pi_K^2 = \Pi_K$). Это определение основано на свойствах оператора ∇_K и порождаемых им разложений дискретных пространств.

Обозначим через ∇_K^* сопряженный к ∇_K оператор, т.е. $\nabla_K^* : W(K) \to \boldsymbol{V}(K)$ и

$$(\nabla_K^* \tau, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}(K)} = (\tau, \nabla_K \cdot \boldsymbol{v})_{W(K)}, \quad \tau \in W(K), \quad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(K).$$

Согласно лемме 4, имеем $\ker(\nabla_K) = \boldsymbol{V}_0(K)$. Пусть $\boldsymbol{V}_0(K)^\perp = \mathrm{Im}(\nabla_K^*)$, $\Phi(K) = \ker(\nabla_K^*)$, $\Phi(K)^\perp = \mathrm{Im}(\nabla_K)$. Как известно, справедливы ортогональные разложения

$$W(K) = \Phi(K) \oplus \Phi(K)^\perp, \quad \boldsymbol{V}(K) = \boldsymbol{V}_0(K) \oplus \boldsymbol{V}_0(K)^\perp, \tag{20}$$

причем ∇_K осуществляет изоморфизм пространств $\boldsymbol{V}_0(K)^\perp$ и $\Phi(K)^\perp$. Отсюда, в частности, следует, что $\dim \Phi(K)^\perp = \dim \boldsymbol{V}_0(K)^\perp$.

Лемма 5. *Пусть* σ *– произвольный элемент* $W(K)$ *и* $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, *где* $\sigma_1 \in \Phi(K)$, $\sigma_2 \in \Phi(K)^\perp$. *Тогда* $\|\sigma_1\|_{0,p,K} + \|\sigma_2\|_{0,p,K} \le c\|\sigma\|_{0,p,K}$.

Доказательство. Пусть $\tau \in W(K)$ и $\tau = \tau_1 + \tau_2$, где $\tau_1 \in \Phi(K)$, $\tau_2 \in \Phi(K)^\perp$. Тогда $\|\tau\|_{0,2,K} = (\|\tau_1\|_{0,2,K}^2 + \|\tau_2\|_{0,2,K}^2)^{1/2} \ge \|\tau_i\|_{0,2,K}$, $i = 1,2$. Поскольку $(\sigma_i, \tau)_K = (\sigma, \tau_i)_K$, то, дважды используя обратное неравенство (11), при $c_K^q = c\,|B_K|^{1/2-1/q}$ будем иметь

$$\frac{|(\sigma_i, \tau)_K|}{\|\tau\|_{0,q,K}} \le c_K^q \frac{|(\sigma, \tau_i)_K|}{\|\tau\|_{0,2,K}} \le c_K^q \frac{|(\sigma, \tau_i)_K|}{\|\tau_i\|_{0,2,K}} \le c_K^q \|\sigma\|_{0,2,K} \le c_K^q c_K^p \|\sigma\|_{0,p,K} = c\|\sigma\|_{0,p,K}.$$

Отсюда следует оценка $\|\sigma_i\|_{0,p,K} \le c\|\sigma\|_{0,p,K}$. Лемма доказана.

Теорема 3. *При условиях* $H_{1,2})$ *существует проектор* $\Pi_K : [W_q^1(K)]^d \to W(K)$, *при любом* $\tau \in [W_q^1(K)]^d$ *определяемый соотношениями*

$$(\nabla \cdot \Pi_K \tau, v)_K = (\nabla \cdot \tau, v)_K, \quad v \in V(K), \tag{21}$$

$$(\Pi_K \tau \cdot n_K, \lambda)_{\partial K} = (\tau \cdot n_K, \lambda)_{\partial K}, \quad \lambda \in \Lambda(\partial K), \tag{22}$$

$$(\Pi_K \tau, \sigma)_K = (\tau, \sigma)_K, \quad \sigma \in \Phi(K), \tag{23}$$

кроме того, справедливы оценки

$$\|\Pi_K \tau\|_{0,q,K} \le c(|\tau|_{0,q,K} + h|\tau|_{1,q,K}), \quad \tau \in [W_q^1(K)]^d. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть $\tau \in [W_q^1(K)]^d$. Согласно разложениям (20), с каждым $\sigma \in \Phi(K)^\perp$ однозначно связан $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_0(K)^\perp$ соотношением $\sigma = \nabla_K \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} = (v, \lambda)$. Это позволяет определить на $W(K)$ линейный функционал

$$g(\sigma) = \begin{cases} -(\nabla \cdot \tau, v)_K + (\tau \cdot n_K, \lambda)_{\partial K}, & \sigma = \nabla_K \boldsymbol{v} \in \Phi(K)^\perp, \\ (\tau, \sigma)_K, & \sigma \in \Phi(K). \end{cases}$$

Для его оценки воспользуемся леммами 3 и 4. Пусть $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, где $\sigma_1 \in \Phi(K)$, $\sigma_2 \in \Phi(K)^\perp$. Так как $g(\sigma_2) = (\tau, \nabla v)_K + (\tau \cdot n_K, \lambda - v)_{\partial K}$, то

$$|g(\sigma_2)| \le |\tau|_{0,q,K} \|\nabla v\|_{0,p,K} + \|\tau\|_{0,q,\partial K} \|\lambda - v\|_{0,p,\partial K} \le$$

$$\le (|\tau|_{0,q,K} + h^{1/q} \|\tau\|_{0,q,\partial K})(\|\nabla v\|_{0,p,K} + h^{-1/q} \|\lambda - v\|_{0,p,\partial K}) \le$$
$$\le c(|\tau|_{0,q,K} + h|\tau|_{1,q,K}) \|\nabla_K \boldsymbol{v}\|_{0,p,K} = c(|\tau|_{0,q,K} + h|\tau|_{1,q,K}) \|\sigma_2\|_{0,p,K}.$$

Очевидно, что $|g(\sigma_1)| \le |\tau|_{0,q,K} \|\sigma_1\|_{0,p,K}$. Следовательно, согласно лемме 5, имеем

$$|g(\sigma)| \le |g(\sigma_1)| + |g(\sigma_2)| \le c(|\tau|_{0,q,K} + h|\tau|_{1,q,K})\|\sigma\|_{0,p,K}, \quad \sigma \in W(K). \tag{25}$$

Определим теперь проектор $\Pi_K \tau \in W(K)$ как решение уравнения

$$(\Pi_K \tau, \sigma)_K = g(\sigma), \quad \sigma \in W(K). \tag{26}$$

Ясно, что решение уравнения (26) существует и единственно, а оценка (24) следует из неравенства (25) в силу леммы 2. Если $\tau \in W(K)$, то по определению ∇_K имеем

$$g(\sigma) = (\tau, \nabla_K \boldsymbol{v})_K = (\tau, \sigma)_K$$

для $\sigma \in \Phi(K)^\perp$. Поскольку также $g(\sigma) = (\tau, \sigma)_K$ для $\sigma \in \Phi(K)$, то $(\Pi_K \tau - \tau, \sigma)_K = 0$ для любого $\sigma \in W(K)$. Отсюда следует, что $\Pi_K \tau = \tau$, т.е. Π_K – проектор на $W(K)$.

Докажем соотношения (21)–(23). Выбирая $\sigma \in \Phi(K)$ в (26), получаем равенство (23). Согласно разложению (20), имеем

$$\boldsymbol{V}(K) = \boldsymbol{V}_0(K) \oplus \boldsymbol{V}_0(K)^\perp.$$

Если $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_0(K)^\perp$, то $\sigma = \nabla_K \boldsymbol{v} \in \Phi(K)^\perp$ и

$$(\Pi_K \tau, \nabla_K \boldsymbol{v})_K = -(\nabla \cdot \tau, v)_K + (\tau \cdot n_K, \lambda)_{\partial K}. \tag{27}$$

Очевидно, что это соотношение справедливо и при $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_0(K)$, т.е. при всех $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(K)$. Левая часть равенства (27), согласно определению ∇_K, равна $-(\nabla \cdot \Pi_K \tau, v)_K + (\Pi_K \tau \cdot n_K, \lambda)_{\partial K}$. Следовательно,

$$-(\nabla \cdot \Pi_K \tau, v)_K + (\Pi_K \tau \cdot n_K, \lambda)_{\partial K} = -(\nabla \cdot \tau, v)_K + (\tau \cdot n_K, \lambda)_{\partial K}, \quad (v, \lambda) \in V(K) \times \Lambda(\partial K).$$

Отсюда при $\lambda = 0$ следует равенство (21), а при $v = 0$ – равенство (22).

Убедимся в том, что соотношения (21)–(23) однозначно определяют проектор Π_K. Суммируя равенства (21), (22), получаем, что соотношение (27) справедливо для любого $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(K)$. Таким образом,

$$(\Pi_K \tau, \sigma)_K = -(\nabla \cdot \tau, v)_K + (\tau \cdot n_K, \lambda)_{\partial K}, \quad \sigma = \nabla_K \boldsymbol{v} \in \Phi(K)^\perp. \tag{28}$$

Однако равенства (28), (23) означают, что $\Pi_K \tau$ является решением уравнения (26). Следовательно, равенства (21)–(23) действительно определяют проектор Π_K. Теорема доказана.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия $H_{1,2}$). Тогда для любого $\tau \in [W_q^1(K)]^d$ справедливы оценки*

a) $\|\tau - \Pi_K \tau\|_{0,q,K} \le ch|\tau|_{1,q,K}$;

b) $\|\Pi_K \tau\|_{1,q,K} \le c\|\tau\|_{1,q,K}$.

Доказательство. Используя стандартные рассуждения, докажем оценку a). Согласно условию H_1), имеем $W(K) \supseteq [P_0(K)]^d$. Поэтому найдется такая функция $\tau_0 \in [P_0(K)]^d$, что $\|\tau - \tau_0\|_{0,q,K} \le ch|\tau|_{1,q,K}$. С учетом оценки (24) и равенства $\Pi_K \tau_0 = \tau_0$ будем иметь:

$$\|\tau - \Pi_K \tau\|_{0,q,K} = |(\tau - \tau_0) - \Pi_K(\tau - \tau_0)|_{0,q,K} \le |\tau - \tau_0|_{0,q,K} + |\Pi_K(\tau - \tau_0)|_{0,q,K} \le$$

$$\le |\tau - \tau_0|_{0,q,K} + c(|\tau - \tau_0|_{0,q,K} + h|\tau - \tau_0|_{1,q,K}) \le ch|\tau|_{1,q,K}.$$

Для доказательства оценки b) используем оценку a) и обратное неравенство

$$|\Pi_K \tau|_{1,q,K} = |\Pi_K \tau - \tau_0|_{1,q,K} \le ch^{-1}|\Pi_K \tau - \tau_0|_{0,q,K} \le c|\tau|_{1,q,K}.$$

Отсюда и из неравенства (24) следует оценка b). Лемма доказана.

Отметим свойства проектора Π_K, имеющие место при дополнительных условиях на пространства конечных элементов. Введем два таких условия:

H_3) $V(\partial K) \subseteq \Lambda(\partial K)$, $K \in \mathcal{T}_h$, где $V(\partial K) = \{v|_{\partial K},\ v \in V(K)\}$;

H_4) $V(K) = \nabla \cdot W(K)$, $K \in \mathcal{T}_h$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* $H_{1,2}$). *Тогда*

a) $(\Pi_K\tau, \nabla v)_K = (\tau, \nabla v)_K$, $v \in V(K)$, $\tau \in [W_q^1(K)]^d$, *при выполнении условия* H_3);

b) $\operatorname{div}(\Pi_K\tau) = \pi_{V,K}(\operatorname{div}\tau)$, $\tau \in H_q(\operatorname{div}; K)$, *при выполнении условия* H_4). *Здесь* $\pi_{V,K}$ *является продолжением* L_2 *-проектора в* $V(K)$ *:* $(\pi_{V,K}u - u, v)_K = 0$, $v \in V(K)$, $u \in L_1(K)$.

Доказательство. Утверждение a) следует из равенств (21), (22) и тождества

$$(\Pi_K\tau - \tau, \nabla v)_K = -(\nabla \cdot (\Pi_K\tau - \tau), v)_K + ((\Pi_K\tau - \tau) \cdot n_K, v)_{\partial K} = 0, \quad v \in V(K).$$

Из равенства (21) и определения $\pi_{V,K}$ вытекает, что $(\nabla \cdot \Pi_K\tau - \pi_{V,K}(\operatorname{div}\tau), v)_K = 0$ для любого $v \in V(K)$. Отсюда в силу условия H_4) следует утверждение b). Следствие доказано.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* H_1). *Тогда необходимым и достаточным условием существования проектора* Π_K *со свойствами (21), (22) является условие* H_2).

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что условие H_2) является достаточным. Докажем его необходимость. Суммируя равенства (21) и (22), получаем, что

$$-(\nabla \cdot \Pi_K\tau, v)_K + (\Pi_K\tau \cdot n_K, \lambda)_{\partial K} = -(\nabla \cdot \tau, v)_K + (\tau \cdot n_K, \lambda)_{\partial K}. \tag{29}$$

Это соотношение справедливо при произвольном $\tau \in W = [W_q^1(K)]^d$. Правая часть равенства (29) при произвольном $\tau \in W$ равна нулю только в том случае, когда $(v, \lambda) \in \boldsymbol{V}_0(K)$. Это легко выводится из эквивалентных равенств

$$(\tau, \nabla v)_K + (\tau \cdot n_K, \lambda - v)_{\partial K} = 0, \quad \tau \in W.$$

Следовательно, соотношения

$$-(v, \nabla \cdot \Pi_K\tau)_K + (\lambda, \Pi_K\tau \cdot n_K)_{\partial K} = 0, \quad \tau \in W,$$

также выполняются лишь при $(v, \lambda) \in \boldsymbol{V}_0(K)$. Поскольку Π_K – проектор на $W(K) \subset W$, то из равенств

$$-(v, \nabla \cdot \tau)_K + (\lambda, \tau \cdot n_K)_{\partial K} = 0, \quad \tau \in W(K),$$

вытекает, что $(v, \lambda) \in \boldsymbol{V}_0(K)$. Таким образом, условие H_2) выполнено. Теорема доказана.

5. ПРОСТРАНСТВА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Определим конечномерные пространства V_h и W_h, связанные с триангуляцией $\mathcal{T}_h$:

$$V_h = \{v \in L_\infty(\Omega) :\ v|_K \in V(K),\ K \in \mathcal{T}_h\}, \quad W_h = \{\tau \in [L_\infty(\Omega)]^d :\ \tau|_K \in W(K),\ K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Определим также конечномерное пространство Λ_h функций на $\bar{\mathcal{E}}_h$. Пусть

$$\Lambda(e, \partial K) = \{\lambda|_e :\ \lambda \in \Lambda(\partial K)\}$$

при $K \in \mathcal{T}_h$, $e \in \partial K$. Введем следующее обозначение и одновременно ограничение на выбор пространств $\Lambda(\partial K)$, которое далее будем считать выполненным:

H_1') $\Lambda(e) = \Lambda(e, \partial K) = \Lambda(e, \partial L)$ для $e = \bar{K} \cap \bar{L} \in \mathcal{E}_h$.

Условия вида H_1') в МКЭ фактически не являются ограничениями. Положим

$$\Lambda_h = \{\lambda \in L_\infty(\bar{\mathcal{E}}_h) :\ \lambda|_e \in \Lambda(e),\ e \in \mathcal{E}_h;\ \lambda|_{\mathcal{E}_h^\partial} = 0\}, \quad \boldsymbol{V}_h = V_h \times \Lambda_h.$$

Отметим, что функции из V_h и W_h не обязаны быть непрерывными на Ω, а также на них не накладывается никаких краевых условий. Таким образом, $V_h \subset W^1_\infty(\mathcal{T}_h)$, $W_h \subset [W^1_\infty(\mathcal{T}_h)]^d$. Кроме того, $v|_{\partial K}$, $\tau \cdot n_K|_{\partial K} \in L_\infty(\partial K)$ для $v \in V_h$, $\tau \in W_h$ и $K \in \mathcal{T}_h$. Из условия H_1') следует, что $\Lambda_h \subset C(\bar{\mathcal{E}}_h)$, если $\Lambda(\partial K) \subset C(\partial K)$ для всех $K \in \mathcal{T}_h$. Здесь $C(\partial K)$ – пространство непрерывных функций на ∂K. При $\Lambda(\partial K) = \prod_{e\in\partial K} \Lambda(e)$ для любого $K \in \mathcal{T}_h$ имеем $\Lambda_h = \prod_{e\in\bar{\mathcal{E}}_h} \Lambda(e)$. В этом случае $\Lambda_h \not\subseteq C(\bar{\mathcal{E}}_h)$.

Следующее подпространство пространства W_h

$$\overline{W}_h = \{\tau \in W_h : \ (\tau \cdot n, \lambda)_{\partial\mathcal{T}_h} = 0, \ \lambda \in \Lambda_h\}$$

мы будем рассматривать как аппроксимацию $H_q(\mathrm{div};\Omega)$ (см. также (8)).

5.1. Глобальный проектор Π_h. Определим проектор $\Pi_h : \ [W^1_q(\mathcal{T}_h)]^d \to W_h$ так, что $(\Pi_h\tau)|_K = \Pi_K(\tau|_K)$ для любых $\tau \in [W^1_q(\mathcal{T}_h)]^d$ и $K \in \mathcal{T}_h$. Отметим некоторые его свойства, непосредственно вытекающие из установленных ранее свойств Π_K. Для любого $\tau \in [W^1_q(\mathcal{T}_h)]^d$ имеют место следующие утверждения:

$$(\nabla \cdot \Pi_h\tau, v)_{\mathcal{T}_h} = (\nabla \cdot \tau, v)_{\mathcal{T}_h}, \quad v \in V_h, \tag{30}$$

$$\|\Pi_h\tau\|_{1,q,\mathcal{T}_h} \le C\,\|\tau\|_{1,q,\mathcal{T}_h}. \tag{31}$$

Лемма 7. *Пусть выполнены условия* $H_{1,2}$), $H_h = H_q(\mathrm{div};\Omega) \cap [W^1_q(\mathcal{T}_h)]^d$. *Тогда*

a) $\Pi_h H_h \subset \overline{W}_h$;

b) если $\Lambda_h = \prod_{e\in\bar{\mathcal{E}}_h} \Lambda(e)$ *и дополнительно выполнено условие*

H_5) $W_n(e,K) = W_n(e,L)$ *для* $e = \bar{K} \cap \bar{L} \in \mathcal{E}_h$; $\dim\Lambda(e) = \dim W_n(e,K)$, $e \in \partial K$, $K \in \mathcal{T}_h$, *то* $\overline{W}_h \subset H_q(\mathrm{div};\Omega)$. *Здесь* $W_n(e,K) = \{\tau \cdot n_K|_e, \ \tau \in W(K)\}$.

Доказательство. a). Пусть $\tau \in H_h$. Поскольку нормальные компоненты τ непрерывны на межэлементных границах, то после суммирования равенств (22) по всем $K \in \mathcal{T}_h$ будем иметь

$$(\Pi_h\tau \cdot n, \lambda)_{\partial\mathcal{T}_h} = (\tau \cdot n, \lambda)_{\partial\mathcal{T}_h} = 0, \quad \lambda \in \Lambda_h,$$

т.е. Π_h действует из H_h в $\overline{W}_h$.

b). Пусть $\tau \in \overline{W}_h$. Тогда $(\tau \cdot n, \lambda)_{\partial\mathcal{T}_h} = 0$ для любого $\lambda \in \Lambda_h$. Выбирая $\lambda = 0$ вне грани $e \in \bar{K} \cap \bar{L}$, получаем, что

$$(\tau_n, \lambda)_e = 0, \quad \lambda \in \Lambda(e), \tag{32}$$

где $\tau_n = (\tau|_K - \tau|_L) \cdot n_K|_e$. Требуется доказать, что из соотношения (32) следует равенство $\tau_n = 0$. Имеем $\tau_n \in W_n(e,K)$ в силу условия H_5). Поскольку размерности конечномерных пространств, которым принадлежат τ_n и $\lambda|_e$, совпадают, а сопряженное уравнение $(\lambda, \tau_n)_e = 0$, $\tau_n \in W_n(e,K)$, в силу условия H_2) имеет лишь тривиальное решение (см. H_2'') при $\lambda|_{\partial K\setminus e} = 0$), то из соотношения (32) вытекает, что $\tau_n = 0$. Лемма доказана.

Из леммы 7 следует, что при условиях $H_{1,2,5}$) при $\Lambda_h = \prod_{e\in\bar{\mathcal{E}}_h} \Lambda(e)$ справедливо эквивалентное определение

$$\overline{W}_h = \{\tau \in H_q(\mathrm{div};\Omega) : \ \tau|_K \in W(K), \ K \in \mathcal{T}_h\}, \tag{33}$$

означающее, что $\overline{W}_h$ является конформной аппроксимацией $H_q(\mathrm{div};\Omega)$. При реализации смешанных схем МКЭ на основе пары пространств $(V_h, \overline{W}_h)$ дополнительно требуется образовать конечные элементы $\{(K, \Sigma(K), W(K)), \ K \in \mathcal{T}_h\}$, где $\Sigma(K)$ – множество линейных функционалов на $W(K)$ (степеней свободы элемента). Выбор степеней свободы должен обеспечивать непрерывность нормальных компонент элементов $\overline{W}_h$ на межэлементных границах. При выборе $\Sigma(K)$ могут быть полезны свойства (21)–(23) проектора Π_K, а при выполнении также условия H_3) – свойства a) следствия 1 и (22), (23). Отметим, что из (20) следует равенство

$$\dim\Phi(K) = \dim W(K) - \dim V(K) - \dim\Lambda(\partial K) + 1.$$

5.2. Дискретные $\inf-\sup$ **-условия.** Существование устойчивого в $[W_q^1(\mathcal{T}_h)]^d$ глобального проектора Π_h, обладающего свойствами (30), (31), позволяет доказать дискретный аналог теоремы 1. При этом будет использован прием из работы [10] (см. также [8, с. 58, утверждение 2.8]).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* $H_{1,2}$). *Тогда*

$$\sup_{\tau\in W_h}(|(v,\nabla\cdot\tau)_{\mathcal{T}_h}|/\|\tau\|_{1,q,\mathcal{T}_h})\geq\sup_{\tau\in\overline{W}_h}(|(v,\nabla\cdot\tau)_{\mathcal{T}_h}|/\|\tau\|_{1,q,\mathcal{T}_h})\geq cC_D^{-1}(\Omega)\|v\|_{0,p,\Omega},\quad v\in V_h,$$

где $p\in(1,\infty)$, $1/p+1/q=1$, *постоянная* $C_D(\Omega)$ *определена в лемме 1.*

Доказательство. Первая оценка очевидна. Используя соотношения (30), (31) и теорему 1, будем иметь

$$\sup_{\tau\in\overline{W}_h}(|(v,\nabla\cdot\tau)_{\mathcal{T}_h}|/\|\tau\|_{1,q,\mathcal{T}_h})\geq\sup_{\tau\in[W_q^1(\Omega)]^d}(|(v,\nabla\cdot\Pi_h\tau)_{\mathcal{T}_h}|/\|\Pi_h\tau\|_{1,q,\mathcal{T}_h})=$$

$$=\sup_{\tau\in[W_q^1(\Omega)]^d}(|(v,\nabla\cdot\tau)_{\mathcal{T}_h}|/\|\Pi_h\tau\|_{1,q,\mathcal{T}_h})\geq\frac{1}{C}\sup_{\tau\in[W_q^1(\Omega)]^d}(|(v,\nabla\cdot\tau)_{\Omega}|/\|\tau\|_{1,q,\Omega})\geq\frac{1}{CC_D}\|v\|_{0,p,\Omega}.$$

Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* $H_{1,2}$). *Тогда*

$$\sup_{\tau\in\overline{W}_h}(|(v,\nabla\cdot\tau)_{\mathcal{T}_h}|/\|\tau\|_{0,q,\Omega})\geq\sup_{\tau\in\overline{W}_h}(|(v,\nabla\cdot\tau)_{\mathcal{T}_h}|/\|\tau\|_{H_q(\mathrm{div};\mathcal{T}_h)})\geq cC_D^{-1}(\Omega)\|v\|_{0,p,\Omega}$$

для любого $v\in V_h$.

Следствие 2 для аппроксимаций Равьяра–Тома RT_0 доказано в работе [6] (при более сильных ограничениях на область Ω).

6. ПРИМЕРЫ ПРОСТРАНСТВ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Приведем примеры троек $(W(K),V(K),\Lambda(\partial K))$, удовлетворяющих условиям $H_{1,2}$). Для пространств V_h, W_h и $\overline{W}_h$, построенных на их основе, справедливы все теоремы и следствия из них, доказанные выше.

6.1. Конформные аппроксимации. В теории смешанных методов хорошо известны семейства полиномиальных пространств $W(K)$, с помощью которых определяются конформные аппроксимации $H_q(\mathrm{div};\Omega)$ согласно равенству (33).

Отметим такие семейства, как RT_k [13], BDM_k, $BDM_{[k]}$ [14] и др. С этими пространствами $W(K)$ тесно связаны два других пространства $V(K)$ и $\Lambda(\partial K)$, которые возникают при определении соответствующих $W(K)$ степеней свободы $\Sigma(K)$, т.е. при определении конечного элемента $(K,\Sigma(K),W(K))$. Для всех отмеченных выше пространств имеем

$$\Lambda(\partial K)=\{\tau\cdot n_K|_{\partial K}:\ \tau\in W(K)\},\quad V(K)=\nabla\cdot W(K),\quad V(\partial K)\subset\Lambda(\partial K),\tag{34}$$

а из линейной независимости элементов $\Sigma(K)$ вытекает, в частности, что из соотношений

$$(\nabla v,\tau)_K+(\mu,\tau\cdot n_K)_{\partial K}=0,\quad \tau\in W(K),\quad (v,\mu)\in V(K)\times\Lambda(\partial K)\tag{35}$$

следуют равенства $v=\mathrm{const}$, $\mu=0$. Пусть $P_k(D)$ обозначает множество алгебраических полиномов степени не выше k по совокупности переменных на области D,

$$R_k(\partial K)=\prod_{e\in\partial K}P_k(e).$$

Таким образом, получаются, например, следующие семейства троек:

1) семейство RT_k. Элемент K является d-симплексом,

$$W(K) = [P_k(K)]^d + xP_k(K), \quad V(K) = P_k(K), \quad \Lambda(\partial K) = R_k(\partial K), \quad k \geq 0;$$

2) семейство BDM_k. Элемент K является d-симплексом,

$$W(K) = [P_k(K)]^d, \quad V(K) = P_{k-1}(K), \quad \Lambda(\partial K) = R_k(\partial K), \quad k \geq 1;$$

3) семейство $BDM_{[k]}$. Элемент K является аффинно-эквивалентным $\hat{K} = [-1,1]^d$, $d = 2, 3$,

$$W(K) = [P_k(K) + B(k,d)]^d, \quad V(K) = P_{k-1}(K), \quad \Lambda(\partial K) = R_k(\partial K), \quad k \geq 1.$$

Пространство полиномов $B(k,d)$ определяется так, что справедливы соотношения (34).

Указанные тройки $(W(K), V(K), \Lambda(\partial K))$ удовлетворяют всем условиям $H_{1-5})$. В самом деле, все пространства в примерах являются полиномиальными и поэтому для них выполнены условия $H_1)$. В силу соотношений (34) ограничения $H_{3-5})$ для них также выполняются. Легко видеть, что условие $H_2)$ следует из уравнения (35) при $\mu = \lambda - v$ после интегрирования по частям.

Аналогично семейству $BDM_{[k]}$ можно определить также семейства пространств $RT_{[k]}$, $BDFM_{[k+1]}$ и др. (по поводу определения соответствующего $W(K)$ см., например, [8, с. 119–125]).

Отметим, что проекторы Π_K для приведенных выше примеров пространств хорошо известны (см., например, [8, с. 125–128]).

6.2. Неконформные аппроксимации. Приведем примеры троек, использование которых приводит к неконформной аппроксимации $\overline{W}_h$ пространства $H_q(\mathrm{div};\Omega)$.

1) Пусть $(W_k(K), V_k(K), R_k(\partial K))$, $k \geq 1$, – любая из троек, указанная в п. 6.1. Тогда тройка $(W_k(K), V_k(K), T_k(\partial K))$ при $T_k(\partial K) = \{\lambda \in C(\partial K) : \ \lambda|_e \in P_k(e), \ e \in \partial K\}$ удовлетворяет условиям $H_{1-4})$. Справедливость условия $H_2)$ обеспечивается вложением $T_k(\partial K) \subset R_k(\partial K)$.

2) Пусть $(W(K), V(K), \Lambda(\partial K))$ – тройка, для которой выполнены условия $H_{1,2})$. Тогда нетрудно видеть, что пространства $(\widetilde{W}(K), \widetilde{V}(K), \widetilde{\Lambda}(\partial K))$, для которых выполнены условия $H_1)$, удовлетворяют также условию $H_2)$, если $\widetilde{W}(K) \supseteq W(K)$, $\widetilde{V}(K) \subseteq V(K)$ и $\widetilde{\Lambda}(\partial K) \subset \subset \Lambda(\partial K)$. Справедливость условия $H_2)$ обеспечивается указанными вложениями. В частности, подобным образом изменяя семейство RT_k, получаем тройку

$$W(K) = [P_k(K)]^d + xP_k(K), \quad V(K) = P_k(K), \quad \Lambda(\partial K) = R_{k-1}(\partial K), \quad k \geq 1,$$

которая удовлетворяет условиям $H_{1,2,4})$. Аналогично модифицируя указанные выше семейства BDM_k и $BDM_{[k]}$, приходим к тройкам, удовлетворяющим ограничениям $H_{1-4})$.

3) Пусть $d = 2, 3$, K является d-симплексом, тогда тройка

$$W(K) = [P_0(K)]^d + xP_0(K), \quad V(K) = P_0(K), \quad \Lambda(\partial K) = T_1(\partial K)$$

удовлетворяет условиям $H_{1-4})$. Необходимо проверить лишь условие $H_2)$, которое сформулируем в виде условия (35) при $\mu = \lambda - v \in T_1(\partial K)$. Уравнение в (35) для рассматриваемого примера сводится к уравнению $(\mu, \phi)_{\partial K} = 0$, $\phi \in R_0(\partial K)$. Простой анализ соответствующей системы алгебраических уравнений показывает, что $\mu = 0$, т.е. условие $H_2)$ выполнено.

Автор выражает глубокую благодарность М.М. Карчевскому и М.Р. Тимербаеву за критические замечания и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Даутов Р.З., Федотов Е.М.* Абстрактная теория HDG-схем для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2014. Т. 54. № 3. С. 94–112.
2. *Adams R.A.* Sobolev spaces. New York; San Francisco; London, 1975.
3. *Duran R.G.* Mixed Finite Elements, Compatibility Conditions, and Applications // Lect. Notes in Math. 2008. V. 1939. P. 1–44.
4. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.
5. *Scheurer B.* Existence et approximation de point-shelle pour certains problèmes non linéaires // RAIRO Anal. Numer. 1977. V. 11. № 4. P. 369–400.
6. *Farhloul M., Manouzi H.* On a mixed finite element method for the p-Laplasian // Canadian Applied Mathematics Quathrly. 2000. V. 8. № 1. P. 67–78.
7. *Causin P., Sacco R.* A dual-mixed hybrid formulation for fluid mechanics problems: mathematical analysis and application to semiconductor process technology // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2003. № 192. P. 593–612.
8. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and hybrid finite element methods. New York, 1991.
9. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980.
10. *Fortin M.* An analysis of the convergence of mixed finite element methods // RAIRO Anal. Numer. 1977. V. 11. P. 341–354.
11. *Arnold D.N., Brezzi F.* Mixed and non-conforming finite element methods: implementation, post-processing and error estimates // Math. Modell. Numer. Anal. 1985. V. 19. № 1. P. 7–32.
12. *Crouzeix M., Thomee V.* The Stability in L_p and W_p^1 of the L_2-Projection onto FEM Spaces // Math. of Comput. 1987. V. 48. № 178. P. 521–532.
13. *Raviart P.-A., Thomas J.M.* A mixed finite element method for 2-ond order elliptic problems // Lecture Notes in Math. 1977. V. 606. P. 292–315.
14. *Brezzi F., Douglas J., Marini L.D.* Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems // Numer. Math. 1985. V. 47. P. 217–235.

Казанский (Приволжский)
федеральный университет

Поступила в редакцию
13.02.2014 г.