УДК 517.95

РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

© Р.М.Мавлявиев, И.Б.Гарипов, С.М.Нураниева, Э.Д.Хусаинова

В работе рассматривается В-эллиптическое уравнение высшего порядка с младшими членами. Построена таблица, с помощью которой можно найти нормальные производные фундаментальных решений.

Ключевые слова: потенциалы, симметричная область, эллиптическое уравнение, рекуррентные формулы.

Пусть $\bar{D}$ верхняя половина ограниченной области, симметричной относительно координатной оси $y=0$, Γ – верхняя часть её достаточно гладкой границы. Снизу $\bar{D}$ ограничена частью $\Gamma_0=(a,b)$ координатной оси $y=0$. В области $\bar{D}$ рассматривается уравнение

$$L(\Delta_B^m u)=0\,, \qquad (1)$$

где

$$\Delta_B \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{y^k}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^k\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \left(k>0\right), \qquad (2)$$

$$L\equiv \Delta_B+2a\frac{\partial}{\partial x}-c^2\,,\ \left(c>a>0\right). \qquad (3)$$

Как отмечают Л.К.Мартинсон и Ю.И.Малов [1], с помощью замены

$$\Delta_B^m u=\omega\exp\left(-ax\right), \qquad (4)$$

в уравнении (1) можно избавиться от младшей производной. В результате такой замены, относительно неизвестной функции $\omega=\omega\left(x;y\right)$ получается уравнение

$$\Delta_B\omega-\lambda^2\omega=0\,, \qquad (5)$$

где $\lambda^2=a^2+c^2$. Наблюдения Г.Н.Ватсона доказывают [2], что фундаментальным решением этого уравнения (5) является функция

$$\omega=C_1 r^{-k/2}K_{k/2}\left(\lambda r\right), \qquad (6)$$

где $C_1=\dfrac{l^{k/2}\Gamma\left(k+2/2\right)}{\Gamma\left(1/2\right)\Gamma\left(k+1/2\right)}$, $K_{k/2}\left(\lambda r\right)$ – функция Макдональда.

Таким образом, как видно из (4) и (6) функция

$$f\left(x,y\right)=C_1\exp\left(-ax\right)r^{-k/2}K_{k/2}\left(\lambda r\right), \qquad (7)$$

является решением исходного уравнения (1). Для нахождения фундаментального решения уравнения (1), следует решить неоднородное уравнение

$$\Delta_B^m u=f\,. \qquad (8)$$

Согласно исследованиям И.А.Киприянов [3], фундаментальными решениями однородных уравнений

$$\Delta_B^m u=0 \qquad (8_0)$$

с особенностью в начале координат являются функции

$$\varphi_l=C_2 r^{2l-k}\,,\ \left(l=\overline{0,m-1}\right), \qquad (9)$$

где $C_2=\dfrac{\Gamma\left(k/2\right)}{2\Gamma\left(k/2\right)\Gamma\left(k+1/2\right)}$. А фундаментальные решения уравнений (8_0) с особенностью произвольной точке $M_0\left(x_0,y_0\right)$, суть функции

$$\overline{\varphi_l}=T_{x,y}^{x_0,y_0}\varphi_l\,, \qquad (10)$$

где $T_{x,y}^{x_0,y_0}$ – оператор обобщенного сдвига Бесселя [4]. Этот оператор определяется следующим образом

$$T_{x,y}^{x_0,y_0}g(x,y)=$$

$$=C_3\int_0^{\pi}g\left(x-x_0,\sqrt{y^2+y_0^2-2yy_0\cos\rho}\right)\times \qquad (11)$$

$$\times\sin^{k-1}\rho\,d\rho,$$

где $C_3=\dfrac{\Gamma\left(k+1/2\right)}{\Gamma\left(1/2\right)\Gamma\left(k/2\right)}$. Можно доказать, что фундаментальные решения (10) представимы в виде

$$\overline{\varphi_l}=\frac{1}{2\pi}r^{2l}\ln\frac{1}{r}+\overline{\overline{\varphi_l}},\ \left(l=0,\overline{m-1}\right), \qquad (12)$$

где функции $\overline{\overline{\varphi_l}}$ и их производные интегрируемы по любой конечной кривой, расположенной в верхней полуплоскости и содержащей точку M_0.

Решение неоднородного уравнения (8) и, следовательно, исходного уравнения (1) может быть представлено в виде свертки