Новые метрические характеристики неспрямляемых кривых и их приложения

Кац Д.Б.

Индекс УДК: 517.53/.55 (Теория функций комплексных переменных)

Ключевые слова: неспрямляемые кривые; метрические характеристики; задача о скачке; задача Римана

Keywords: non-rectifiable curves; metric characteristics; jump boundary value problem; Riemann problem

Аннотация

В данной работе автор вводит новые метрические характеристики неспрямляемых кривых. Они допускают приложения в теории краевых задач для аналитических функций. В частности, с помощью этих характеристик получены более точные по отношению к имеющимся условия разрешимости задачи о скачке и задачи Римана в областях с неспрямляемыми границами.

The present paper contains certain new characteristics for non-rectifiable curves and their applications in the theory of boundary value problems for analytic functions in domains with non-rectifiable boundaries. In particular, there are obtained new solvability conditions for the jump problem and the Riemann boundary value problem.

Введение

В последние десятилетия появилось множество публикаций по фрактальным множествам. Если такое множество является кривой, то эта кривая неспрямляема. Поэтому многие такие публикации содержат определения и исследования различных метрических характеристик неспрямляемых кривых (см., напр., [1, 2, 3]). В данной работе мы вводим новые характеристики такого рода. Они позволяют получить новые, более точные, чем известные ранее, условия разрешимости краевой задачи Римана в областях с неспрямляемыми границами и ее частного случая - задачи о скачке.

В секции 1 мы приводим необходимые в дальнейшем предварительные сведения. В секции 2 мы вводим новые метрические характеристики - показатели Марцинкевича - и устанавливаем некоторые их свойства. В последующих секциях описываются приложения этих показателей в краевых задачах.

1 Предварительные сведения

Перед введением собственно новых характеристик мы опишем вкратце некоторые базовые понятия и историю вопроса.

Условие Гельдера. Пусть Γ есть компактное множество на $\mathbb{C}$, $0 < \nu \leq 1$. Функция f, заданная на Γ, удовлетворяет условию Гельдера с показателем ν, если

$$\sup\left\{\frac{|f(t') - f(t'')|}{|t' - t''|^{\nu}} : t', t'' \in \Gamma, t' \neq t''\right\} := h_{\nu}(f, \Gamma) < \infty.$$

Множество всех таких функций обозначается как $H_{\nu}(\Gamma)$. Очевидно, это множество имеет структуру линейного пространства; норма

$$\|f\|_{\nu} := h_{\nu}(f, \Gamma) + \sup\{|f(t)| : t \in \Gamma\}$$

превращает это пространство в банахово.

Верхняя метрическая размерность. Пусть Γ есть компактное множество на $\mathbb{C}$, а $N(\varepsilon, \Gamma)$ - количество кругов диаметра ε в наименьшем наборе, покрывающем Γ. Верхняя метрическая размерность кривой Γ есть следующий предел (см. [1, 2, 4, 5]):

$$\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon, \Gamma)}{-\ln \varepsilon}.$$

Данная размерность плоских кривых заключена на отрезке [1,2]; для спрямляемой кривой она равна единице, а для неспрямляемой может быть больше.

Задача о скачке. Пусть Γ есть простая замкнутая неспрямляемая кривая. Она разбивает $\mathbb{C}$ на конечную область (назовем ее D^+) и содержащую бесконечно удаленную точку область (ее обозначим D^-). Задачей о скачке называют краевую задачу об отыскании голоморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции $\Phi(z)$, которая непрерывна в $\overline{D^+}$ и в $\overline{D^-}$, и предельные значения которой в точках $t \in \Gamma$ из областей D^+ и D^- связаны соотношением

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma. \tag{1}$$

Задача о скачке является частным случаем задачи Римана, решения которой на гладких (или хотя бы кусочно-гладких) контурах хорошо известны (см., напр., [6, 7]). Для неспрямляемого контура условие разрешимости было получено в работах [8, 9]. Вот это условие.

Теорема А (см. [8, 9]). *Пусть* Γ *есть простая замкнутая (вообще говоря, неспрямляемая) кривая на комплексной плоскости и* $f \in H_\nu(\Gamma)$. *Если*

$$\nu > \frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma, \tag{2}$$

то задача о скачке (1) имеет решение.

Известен пример (см. [9]), когда условие (2) нарушено и задача о скачке неразрешима. Есть и другой пример (см. [10]), когда она имеет решения несмотря на нарушение условия (2). Именно с этим связаны попытки улучшить и уточнить данное условие путем введения новых метрических характеристик. Так, в работах [10, 11, 12] введены так называемые аппроксимационная размерность и уточненная метрическая размерность. Доказано, что

(i) каждая из этих размерностей для кривой Γ не превосходит верхней метрической размерности данной кривой, и известны кривые, для которых она строго меньше ее;

(ii) теорема А сохраняет силу при замене в условии (2) верхней метрической размерности на любую из этих размерностей.

Таким образом ясно, что переход к этим характеристикам уточняет теорему А. Однако на практике оказалось, что точное вычисление данных характеристик затруднительно.

Итак, верхняя метрическая размерность не дает необходимой точности для оценки разрешимости задачи о скачке, а упомянутые выше аппроксимационная и уточненная метрическая размерность крайне трудны в вычислении. В связи с этим возникает потребность в создании новых метрических характеристик неспрямляемых кривых, лишенных этих недостатков.

2 Показатели Марцинкевича

Пусть Γ есть замкнутая жорданова кривая, разбивающая комплексную плоскость на конечную область D^+ и бесконечную область D^-. В дальнейшем мы предполагаем, что эта кривая неспрямляема, но имеет нулевую площадь, так что области D^+ и D^- измеримы. С любой конечной измеримой областью D мы свяжем интеграл

$$I_p(D) = \iint\limits_D \frac{dxdy}{\mathrm{dist}^p(z,\Gamma)}, \quad z = x + iy.$$

Очевидно, что при $p = 0$ этот интеграл конечен - равен площади D. При больших p он может оказаться бесконечным. Далее, введем в рассмотрение область D^*, равную $D^- \bigcap \{z : |z| < r\}$, где r настолько велико, что Γ полностью содержится в этом круге.

Определение 1 *Будем называть величины*

$$\mathfrak{m}^+(\Gamma) = \sup\{p : I_p(D^+) < \infty\},$$

$$\mathfrak{m}^-(\Gamma) = \sup\{p : I_p(D^*) < \infty\}$$

внутренним и внешним показателями Марцинкевича кривой Γ*, а величину*

$$\mathfrak{m}(\Gamma) = \max\{\mathfrak{m}^+(\Gamma), \mathfrak{m}^-(\Gamma)\}$$

(абсолютным) показателем Марцинкевича этой кривой.

Предлагаемое название связано с тем, что характеризация свойств множества через поведение некоторых интегралов по дополнению этого множества, содержащих $\mathrm{dist}(z,\Gamma)$, восходит к работам Марцинкевича (см., напр., [13]).

Опишем некоторые свойства этих показателей.

Прежде всего отметим, что они сохраняются при движениях и преобразовании подобия контура Γ; в этом легко убедиться, делая соответствующие замены переменных в интеграле $I_p(D)$.

Менее тривиальные свойства показателей Марцинкевича описывает

Теорема 1 *Внутренний и внешний показатели Марцинкевича любой замкнутой кривой* Γ *удовлетворяют неравенствам*

$$1 \geq \mathfrak{m}^+(\Gamma) \geq 2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma, \quad 1 \geq \mathfrak{m}^-(\Gamma) \geq 2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma.$$

Если кривая Γ *спрямляема, то её внутренний и внешний показатели Марцинкевича равны 1.*

Доказательство. Рассмотрим разбиение Уитни области D^+. Как известно [13], оно состоит из бинарных квадратов Q, удовлетворяющих оценке $\operatorname{diam} Q \le \operatorname{dist}(Q, \Gamma) \le C \cdot \operatorname{diam} Q$, где C - абсолютная константа.

Для квадрата Q со стороной 2^{-n} из этого разбиения получаем:

$$\iint\limits_{Q} \frac{dxdy}{(dist(z, \Gamma))^p} \le \frac{2^{-2n}}{(2^{-n})^p}.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{D^+} \frac{dxdy}{(dist(z, \Gamma))^p} \le \sum_{n=1}^{\infty} w_n \cdot 2^{n(p-2)},$$

где w_n - число квадратов со стороной 2^{-n}, входящих в разбиение Уитни. Из определения верхней метрической размерности следует, что при достаточно больших n $w_n \le 2^{nd}$, где d - любое число, большее верхней метрической размерности. Поэтому последний интеграл оценивается сверху рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n(p-2+d)}$. Он сходится, если $p-2+d<0$, то есть при $p<2-d$. Отсюда следует, что этот интеграл конечен, если $p \ge 2 - \overline{\operatorname{dm}}\, \Gamma$. Аналогично рассматривается интеграл по D^*. Итак, доказаны неравенства

$$\mathfrak{m}^+(\Gamma) \ge 2 - \overline{\operatorname{dm}}\, \Gamma, \quad \mathfrak{m}^-(\Gamma) \ge 2 - \overline{\operatorname{dm}}\, \Gamma.$$

Отметим, что в разбиения Уитни областей D^+, D^* могут войти и квадраты со стороной больше единицы. Но в силу свойств этого разбиения их число конечно и на сходимость возникающего ряда они не влияют.

Чтобы доказать оценку $1 \ge \mathfrak{m}^+(\Gamma)$, достаточно убедиться, что $\iint\limits_{D^+} \dfrac{dxdy}{dist(z, \Gamma)} = \infty$. Нетрудно показать,что на Γ всегда можно выбрать две точки $z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$ такие, что $x_1 < x_2$ и их можно соединить лежащей в D^+ кривой λ с уравнением вида $y = \psi(x), \quad x_1 \le x \le x_2$, где $\psi(x)$ – вещественная функция. Из каждой точки z этой кривой опустим перпендикуляр на вещественную ось и рассмотрим отрезок этого перпендикуляра, ограниченный сверху точкой z, а снизу – первой точкой его пересечения с кривой Γ. Обозначим через $d(z)$ длину этого отрезка; это "расстояние по вертикали"от точки z до кривой Γ. Очевидно, $d(z) \geq dist(z, \Gamma)$, и упомянутая выше первая точка пересечения перпендикуляра с Γ имеет ординату $\varphi(x) = \psi(x) - d(z)$. Пусть Δ есть часть области D^+, заключенная между λ и Γ. Имеем

$$\iint\limits_{D^+} \frac{dxdy}{dist(z,\Gamma)} \geq \iint\limits_{\Delta} \frac{dxdy}{d(z)} \geq \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{dy}{y - \varphi(x)}$$

Но последний интеграл равен ∞. Неравенство $\mathfrak{m}^- \Gamma \geq 1$ доказывается аналогично.

Равенство единице показателей Марцинкевича спрямляемой кривой теперь следует из того, что у такой кривой равна единице верхняя метрическая размерность (см., напр., [1]).

Теорема доказана.

Конечно, из этой теоремы следует неравенство

$$1 \geq \mathfrak{m}(\Gamma) \geq 2 - \overline{\mathrm{dm}}\, \Gamma.$$

Теперь мы построим примеры, показывающие что:

(а) показатель Марцинкевича неспрямляемой кривой может быть меньше единицы;

(б) существует неспрямляемая кривая Γ, показатель Марцинкевича которой (внутренний или внешний) строго больше $2 - \overline{\mathrm{dm}}\, \Gamma$;

(в) существует неспрямляемая кривая Γ для которой $\mathfrak{m}^+ \Gamma \neq \mathfrak{m}^- \Gamma$.

Кроме того, мы увидим, что показатели Марцинкевича могут быть точно вычислены для довольно непростой кривой.

Пример 1 *Возьмем квадрат $Q = \{x, y : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0\}$. Разобьем его сторону $\{0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ на участки I_n от 2^{-n} до 2^{-n+1}, где n меняется от 1 до $+\infty$. Каждый из этих участков разобьем на $2^{[n\beta]}$ равных частей, где $[n\beta]$ - целая часть $n\beta$. Обозначим точки деления участка I_n через x_{nj}, j - номер в порядке убывания. Присоединим к квадрату Q прямоугольники $p_{nj} = \{x, y : x_{nj} - C_n \leq x \leq x_{nj}, 0 \leq y \leq 2^{-n}\}$. Величину C_n определим равенством $C_n = \frac{1}{2} a_n^{\alpha}$, где a_n - расстояние между точками деления на отрезке I_n, то есть $2^{-n-[n\beta]}$. Границу полученной области D^+ обозначим Γ.*

В работах (см. [8], [9]) доказано, что при $\alpha = 1 \quad \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma = \frac{2\beta}{\beta+1}$. *Точно также вычисляется* $\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$ *при* $\alpha > 1$, *и она тоже равна* $\frac{2\beta}{\beta+1}$, *то есть не зависит от* α. *Интеграл* $\iint\limits_{D^+} \frac{dxdy}{dist^p(z,\Gamma)}$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{[n\beta]} \cdot 2^{-n} \cdot (C_n)^{1-p} \asymp 2^{n\beta-n-n(1+\beta)\alpha(1-p)}$, *то есть ряд сходится при условии* $\beta - 1 - (1+\beta)\alpha(1-p) < 0 \Leftrightarrow 1 - p > \frac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha} \Leftrightarrow p < 1 - \frac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha}$. *Отсюда*

$$\mathfrak{m}^+\,\Gamma = 1 - \frac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha}$$

При $\alpha = 1$ *получаем*

$$\mathfrak{m}^-\,\Gamma = 1 - \frac{\beta-1}{\beta+1} = \frac{2}{\beta+1} = 2 - \frac{2\beta}{\beta+1} = 2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma.$$

При $\alpha > 1$ *имеем*

$$2 - \mathfrak{m}^+\,\Gamma = 1 + \frac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha} < 1 + \frac{\beta-1}{\beta+1} = \frac{2|beta}{\beta+1} = \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma,$$

то есть $\mathfrak{m}^+\,\Gamma > 2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$. *Теперь найдем* $\mathfrak{m}^-\,\Gamma$. *Интеграл* $\iint\limits_{D^*} \frac{dxdy}{dist^p(z,\Gamma)}$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{[n\beta]} \cdot 2^{-n} \cdot b_n^{1-p},$$

где $b_n = a_n - c_n$. *Отсюда* $\mathfrak{m}^-\,\Gamma = \frac{2}{\beta+1}$ *при любом* α. *Таким образом, при* $\alpha > 1$

$$\mathfrak{m}^+\,\Gamma = 1 - \frac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha} > 1 - \frac{\beta-1}{\beta+1} = \frac{2}{\beta+1} = \mathfrak{m}^-\,\Gamma.$$

Пример 2 *Если в предыдущем примере сделать столбцы «толстыми», а промежутки между ними - «тонкими», то внешний и внутренний показатели Марцинкевича поменяются местами, т. е.* $\mathfrak{m}^+\,\Gamma < \mathfrak{m}^-\,\Gamma$.

Пример 3 *Пусть заданы* k *пар положительных чисел* $\alpha_j \geq 1$, $\beta_j \geq 1$, $j = 1, 2, \ldots, k$. *Для каждой из них построим область* D_j^+, *как в примере 1, и положим* $D = \cup_{j=1}^{k} \{D_j^+ + j - 1\}$ *(имеются ввиду параллельные переносы на* $j-1$ *единиц вдоль вещественной оси),* $\Gamma = \partial D$. *Тогда, очевидно,* $\mathfrak{m}^+\,\Gamma$ *есть наименьшее из чисел* $1 - \frac{\beta_j-1}{(\beta_j+1)\alpha_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, *а* $\mathfrak{m}^-\,\Gamma$ *- наименьшее из чисел* $\frac{2}{\beta_j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

3 Задача о скачке и показатели Марцинкевича.

Здесь мы докажем условие разрешимости задачи о скачке (1) в терминах показателей Марцинкевича.

Теорема 2 *Пусть* Γ *есть простая замкнутая (вообще говоря, неспрямляемая) кривая на комплексной плоскости и* $f \in H_\nu(\Gamma)$. *Если выполнено условие*

$$\nu > 1 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{m}\,\Gamma, \tag{3}$$

то задача о скачке (1) имеет решение.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\mathfrak{m}\,\Gamma = \mathfrak{m}^+\,\Gamma$. Продолжим f в $\mathbb{C}$ по Уитни. Получится функция $u(z)$ такая, что $u|_\Gamma = f$. В $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ эта функция имеет частные производные любого порядка. Если $f\epsilon H_\nu(\Gamma)$, то $|\frac{\partial u}{\partial x}| \le \frac{C}{dist^{1-\nu}(z,\Gamma)}$, $|\frac{\partial u}{\partial y}| \le \frac{C}{dist^{1-\nu}(z,\Gamma)}$ (см. [13]). Поэтому

$$\iint\limits_{D^+} |\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}|^p dxdy \le C \iint\limits_{D^+} \frac{dxdy}{(dist(z,\Gamma))^{p(1-\nu)}}$$

Если внутренний показатель Марцинкевича кривой Γ есть m, то последний интеграл сходится при $p(1-\nu) < m$, то есть при $p < \frac{m}{1-\nu}$. Потребуем, чтобы

$$\frac{m}{1-\nu} > 2, \tag{4}$$

то есть $\frac{\mathfrak{m}^+\,\Gamma}{2} > 1-\nu$ и $\nu > 1 - \frac{\mathfrak{m}^+\,\Gamma}{2}$. Тогда интегральный член выражения

$$\Phi(z) = \chi(z)u(z) - \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{D^+} \frac{\partial u}{\partial \overline{\zeta}}\frac{d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta - z}, \tag{5}$$

где $\chi(z)$ - характеристическая функция области D^+, непрерывен во всей плоскости при $\nu > 1 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{m}^+\,\Gamma$, то есть

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), t \in \Gamma,$$

и функция Φ есть решение задачи о скачке.

Теперь пусть $\mathfrak{m}\,\Gamma = \mathfrak{m}^-\,\Gamma$ и Γ полностью лежит в круге $K_1 = \{z : |z| < r_1\}, r > r_1, K = \{z : |z| < r\}$. Пусть $\omega(z)$ - функция класса C^∞, равная 1 в K_1 и нулю вне K. Положим $D^* = D^- \bigcap K, \quad u^* = u\omega$. Тогда производная $\frac{\partial u^*}{\partial \bar z}$ будет интегрируема в D^* в степени $p > 2$ при условии $\nu > 1 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{m}^-\,\Gamma$, и функция

$$\Phi^*(z) = -u^*(z)\chi^*(z) + \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{D^*} \frac{\partial u^*}{\partial \bar\zeta}\frac{d\zeta d\bar\zeta}{\zeta - z}$$

будет решением той же задачи о скачке. Теорема доказана.

Итак, задача о скачке разрешима, если выполнено хотя бы одно из условий $\nu > 1 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{m}^+\,\Gamma$, $\nu > 1 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{m}^-\,\Gamma$. Из примеров, построенных в предыдущей секции, следует, что установленное в последней теореме условие разрешимости задачи о скачке менее ограничительно (вообще говоря) чем условие (2).

При условиях теоремы можно получить и некоторую дополнительную информацию о свойствах построенных в них решений задачи о скачке. Хорошо известно (см., напр., [14]), что для компактного D интеграл $\iint\limits_{D} \frac{\phi(\zeta)d\zeta d\bar\zeta}{\zeta - z}$ представляет собою функцию гельдеровского класса $H_{1-\frac{2}{p}}(\mathbb{C})$, если его плотность ϕ интегрируема в D в степени $p > 2$. В рассматриваемом случае p есть любое число, удовлетворяющее одному из неравенств

$$p(1-\nu) < \mathfrak{m}^+\,\Gamma, \quad p(1-\nu) < \mathfrak{m}^-\,\Gamma.$$

Поэтому решения задачи о скачке, построенные в последней теореме, удовлетворяют в замыканиях областей D^+ и D^- условию Гёльдера с любым показателем, не превосходящим $1 - \frac{2(1-\nu)}{\mathfrak{m}\,\Gamma}$. Кроме того, эти решения обращаются в нуль в бесконечно удаленной точке.

Теперь обсудим единственность решения задачи о скачке. Пусть Φ_1 и Φ_2 – какие-то два ее решения в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ в замыканиях областей D^+ и D^-, $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$. Непосредственно из краевого условия (1) следует, что функция $\Psi(z)$ непрерывна в $\overline{\mathbb{C}}$ и голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$. Кроме того, она удовлетворяет условию Гёльдера с показателем μ в окрестности кривой Γ. Как установил Е.П.Долженко [15], такая функция будет голоморфной в точках кривой Γ если $\mu > \mathrm{dmh}\,\Gamma - 1$, где $\mathrm{dmh}\,\Gamma$ – размерность Хаусдорфа кривой Γ (см., напр., [5]). Но тогда она голоморфна в замкнутой комплексной плоскости, то есть постоянна. С учетом приведенных выше результатов получаем

Следствие 1 *Пусть выполнены условия теоремы 2 и*

$$\operatorname{dmh}\Gamma < \mu < 1 - \frac{2(1-\nu)}{\mathfrak{m}(\Gamma)}.$$

Тогда решение задачи о скачке (1) в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ в замыканиях областей D^+ и D^-, единственно с точностью до аддитивной постоянной.

Условия этого следствия подразумевают, что фигурирующее в нем неравенство выполнимо, т.е. его крайняя правая часть превосходят левую.

Если искать решение задачи о скачке среди функций,обращающихся в нуль в бесконечно удаленной точке, то при условиях следствиz ее решение будет единственным.

4 Краевая задача Римана

Применим полученные результаты к решению краевой задачи Римана на неспрямляемой кривой, используя при этом известные приемы решения этих задач на кусочно-гладких контурах (см. [6, 7]).

Сначала рассмотрим однородную задачу

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in \Gamma, \tag{6}$$

в классе функций, исчезающих в бесконечности и удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ в областях $D^{\pm}$. Пусть $G \in H_\nu(\Gamma)$ не обращается в нуль. Обозначим $\kappa = (2\pi)^{-1}[argG]_\Gamma$, где $[\arg G]_\Gamma$ есть приращение $\arg G$ при однократном обходе Γ против часовой стрелки. Зафиксируем точку $z_0 \in D^+$. Ясно, что для функции $G_0(t) = (t - z_0)^{-\kappa} G(t)$ величина $[\arg G_0]_\Gamma$ равна 0, и поэтому функция $f(t) = \ln G_0(t)$ можем выбрать непрерывной. Тогда при условии (3) задача о скачке $\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = f(t)$, $t \in \Gamma$, будет иметь решение, построенное ранее. Это решение удовлетворяет в $\overline{D^+}$ и $\overline{D^-}$ условию Гёльдера с показателем $\mu < 1 - \frac{2(1-\nu)}{\mathfrak{m}(\Gamma)}$.

Пусть $X(z) = e^{\Psi(z)}$ при $z \epsilon D^+$ и $X(z) = (z - z_0)^{-\kappa} e^{\Psi(z)}$ при $z \epsilon D^-$. Ясно, что

$$\frac{X^+(t)}{X^-(t)} = (t - z_0)^\kappa e^{\Psi^+(t) - \Psi^-(t)} = G(t), \quad t \in \Gamma,$$

т.е. функция $X(z)$ удовлетворяет краевому условию 6. Кроме того, она удовлетворяет в $\overline{D^+}$ и в любой конечной части $\overline{D^-}$ условию Гёльдера с тем же покателем μ и не обращается в нуль в конечной части плоскости. В точке ∞ она ведёт себя как $z^{-\kappa}$. В [6, 7] эта функция называется канонической.

Пусть $\Phi(z)$ - любое решение задачи (6). Тогда для функции $P(z) = \frac{\Phi(z)}{X(z)}$ на Γ имеем

$$P^+(t) = \frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)} = \frac{G(t)\Phi^-(z)}{G(t)X^-(z)} = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)} = P^-(t)$$

Если $\Phi(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера с тем же показателем μ и $\mu > \operatorname{dmh}\Gamma - 1$, то в силу теоремы Долженко функция $P(z)$ голоморфна в точках Γ.

Итак, функция $P(z)$ голоморфна в конечной части плоскости и ведет себя как z^κ в точке ∞. Поэтому $P(z)$ есть алгебраический многочлен степени не выше κ при $\kappa \geq 0$, и $P(z) \equiv 0$ при $\kappa < 0$. Мы получили следующий результат:

Теорема 3 *Пусть в задаче (6) коэффициент $G(t)$ не обращается в нуль и удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\nu > 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{m}(\Gamma)$, а μ удовлетворяет условию*

$$\operatorname{dmh}\Gamma - 1 < \mu < 1 - \frac{2(1-\nu)}{\mathfrak{m}(\Gamma)}. \tag{7}$$

Тогда $\kappa < 0$ задача имеет в указанном выше классе только нулевое решение, а при $\kappa \geq 0$ любое решение имеет вид $P(z)X(z)$, где P - алгебраический многочлен степени не выше κ.

Перейдем к неоднородной задаче

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma \tag{8}$$

На неспрямляемой кривой её решение можно получить по формуле

$$\Phi_0(z) = \phi(z) - \frac{X(z)}{2\pi i} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \overline{\zeta}} \cdot \frac{d\zeta d\overline{\zeta}}{X(\zeta)(\zeta - z)}, \tag{9}$$

где $\phi(z)$ есть либо $\phi_1(z) = u(z)\chi^+(z)$, где $u(z)$ - продолжение Уитни функции g с Γ на всю комплексную плоскость, а $\chi^+(z)$ - характеристическая функция области D^+, либо $\phi_2(z) = u(z)\chi^-(z)\omega_0(z)$, где $\chi^-(z) = \chi^+(z) - 1$, а ω_0 - гладкая (т.е. имеющая производные всех порядков) функция с компактным носителем, равная 1 на Γ. Повторяя предыдущие шаги, мы убеждаемся, что Φ_0 имеет скачок $\frac{g(t)}{X^+(t)}$ на Γ при условии (8). Теперь с использованием теоремы Е.П.Долженко мы получаем следующий результат.

Теорема 4 *Пусть в задаче (8) функции $G(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем ν, удовлетворяющим условию $\nu > 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{m}(\Gamma)$, и $G(t)$ не обращается в нуль. Если решение ищеться в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ в $\overline{D^+}$ и $\overline{D^-}$, причем показатель μ удовлетворяет условию (7), то:*

- при $\kappa \geq 0$ общее решение имеет вид

$$\Phi_0 + PX,$$

где P - произвольный алгебраический многочлен степени не выше κ;

- при $\kappa = -1$ функция Φ_0 есть единственное решение.

- при $\kappa < -1$ задача имеет $-\kappa - 1$ условий разрешимости, и её единственное решение в этом случае есть Φ_0.

Мы не выписываем здесь условия разрешимости, которые легко получаются путем разложения интеграла в 9 в степенной ряд в точке ∞.

Список литературы

[1] Tricot C., Curves and Fractal Dimension, 323 p., Springer; 1995

[2] Falconer K.J., Fractal geometry, Wiley & Sons (2003), 2nd edition

[3] Käenmäki A., Lerhbäck J. and Vuorinen M., Dimension, Whitney Covers, and Tubular Neighborhoods. Indiana University Mathematics Journal, Vol. 62, No.6 (2013), pp. 1861-1889

[4] Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М., $\varepsilon-$энтропия и емкость множеств в функциональных пространствах, Успехи Мат. Наук, 14 (1959), С. 3–86.

[5] Mattila P., Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[6] Гахов Ф.Д., Краевые задачи, Москва, Наука, 1977. - 640 с.

[7] Мусхелишвили Н.И., Сингулярные интегральные уравнения, Москва, Наука, 1962.

[8] Кац Б.А. Краевая задача Римана на неспрямляемой жордановой кривой. Доклады АН СССР. 1982. Т.267, №4. С. 789—792

[9] Кац Б.А., Задача Римана на замкнутой жордановой кривой. Известия ВУЗов. Математика. 1983, №4. С. 68-80

[10] Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Kats B.A. Integration over non-rectifiable curves and Riemann boundary value problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, V. 380, Issue 1, 2011, P. 177-187

[11] Кац Б.А. Метрические характеристики неспрямляемых дуг и задача о скачке. Ученые записки Казанского государственного университета. Серия Физико-математические науки. 2008 т.150 кн.1 с. 56-64

[12] Kats B.A. The Refined Metric Dimension with Applications. Computation Methods and Function Theory No.1 (2007), 77–89.

[13] Стейн И., Сингулярные интегралы и дифференциальные свойств функций, Москва, Мир, 1973. - 342 с.

[14] Векуа И.Н., Обобщенные аналитические фукции, Москва, Наука, 1988. - 512 с.

[15] Долженко Е.П., О "стирании"особенностей аналитических функций, Успехи Матем. Наук, 18(1963), No 4, С. 135-142