Постановка задачи

Одна из специальных функций математической физики — функция ошибок, определяется следующим образом

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Цель задания – изучить и сравнить различные способы приближенного вычисления этой функции.

Для этого:

1. Протабулировать $erf(x)$ на отрезке $[a, b]$ с шагом h точностью ε, основываясь на ряде Тейлора, предварительно вычислив его

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)},$$

где a = 0, b = 2, h = 0.2, $\varepsilon = 10^{-6}$, и получить, таким образом, таблицу

x_0	x_1	x_2	…	x_5
f_0	f_1	f_2	…	f_5

$f_i = erf(x_i),\ \ x_i = a + ih,\ \ i = 0,\ldots,n$

1. По полученной таблице значений построить интерполяционный полином Лагранжа :

$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{i \neq j \\ j=0}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ и вычислить погрешность интерполирования

$$\varepsilon(x) = \lfloor erf(x) - L_n(x) \rfloor, \qquad \varepsilon_n = \max_{x \epsilon (a,b)} \ \varepsilon(x).$$

В качестве узлов интерполяции взять:

- Равномерно распределенные узлы $\{x_i\}, i = 0,\ldots,n,\ где\ n = 5$, шаг вычисляется через $h = \frac{b-a}{n}$, где a и b – границы отрезка.
- Узлы интерполяции Чебышева, вычисляемые по формуле:

$$x_i = \frac{b-a}{2} cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) + \frac{a+b}{2}, i = 0,\ldots,n.$$

2. Выяснить зависимость максимальной погрешности интерполирования от числа узлов интерполяции.

Задание 1

Протабулировать $erf(x)$ на отрезке $[a, b]$ с шагом h с точностью ε, основываясь на ряде Тейлора, предварительно вычислив его

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \; .$$

Чтобы избежать переполнения при вычислении факториалов в рассматриваемом ряде, учтем, что каждый член ряда a_{n+1} получается из предыдущего a_n умножением на некоторую величину q_n, т.е. $a_{n+1} = a_n q_n$,

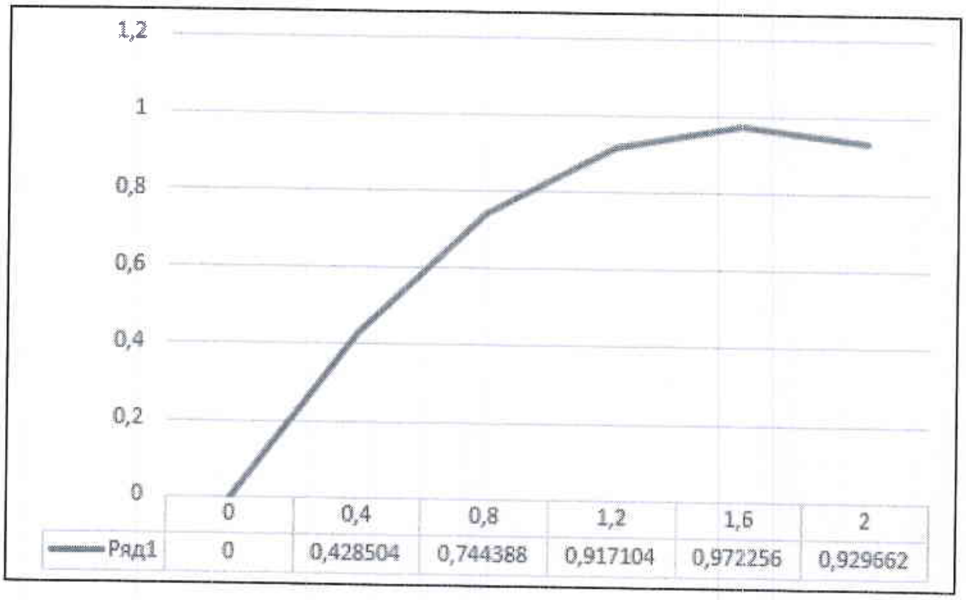
$$q_n = \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = -\frac{x^2(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} \; .$$

Табулирование на отрезке $[a, b]$ с шагом h и точностью ε реализуется с помощью функции, параметрами которой являются точка x, в которой вычисляется значение функцию.
Условием вычисления ряда с заданной точностью является выполнение неравенства $|a_n(x)| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-6}$.

Значения функции $erf(x)$

x_i	$Si(x)$
0	0
0,2	0,222533
0,4	0,428504
0,6	0,604475
0,8	0,744388
1	0,847632
1,2	0,917104
1,4	0,957275
1,6	0,972256
1,8	0,963858
2	0,929662

График функции $erf(x)$



Задание 2

По прибиженной таблице значений построить интерполяционный полином Лагранжа:

$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{i \neq j \\ j=0}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ и вычислить погрешность интерполирования

$$\varepsilon(x) = \left| erf(x) - L_n(x) \right|, \qquad \varepsilon_n = \max_{x\epsilon(a,b)} \varepsilon(x).$$

В таблице указаны значения полинома Лагранжа, построенного по равнораспределенным узлам

x_i	$erf(x)$	$Ln(x)$	$погрешность(\varepsilon(x))$
0	0	0.000000	0.000000
0,2	0,222706	0.222533	0.000173
0,4	0,428504	0.428504	0.000000
0,6	0,604565	0.604475	0.000090
0,8	0,744388	0.744388	0.000000
1	0,847479	0.847632	0.000153
1,2	0,917104	0.917104	0.000000
1,4	0,957571	0.957275	0.000296
1,6	0,972256	0.972256	0.000000
1,8	0,962865	0.963858	0.000993
2	0,929662	0.929662	0.000000

График полинома Лагранжа, построенного по равнораспределенным узлам

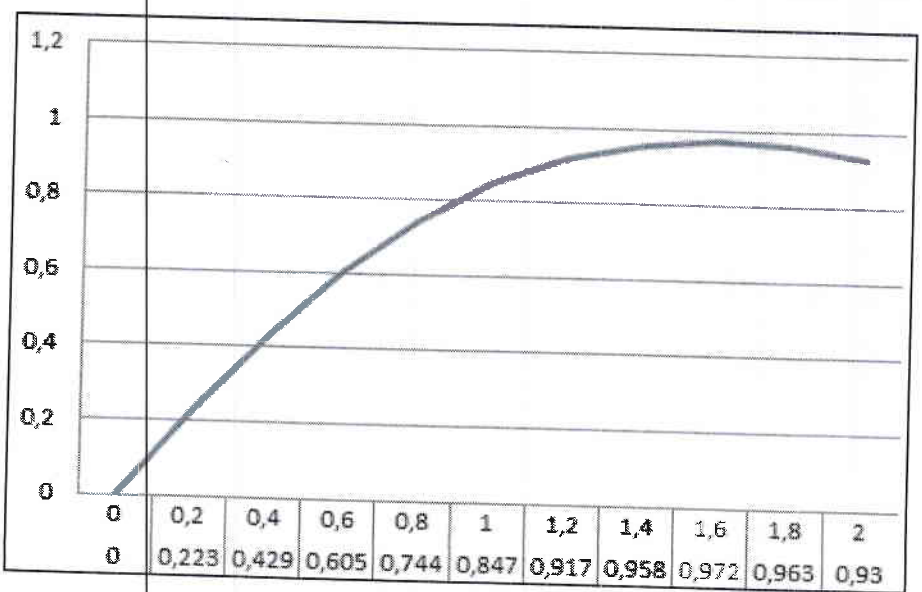
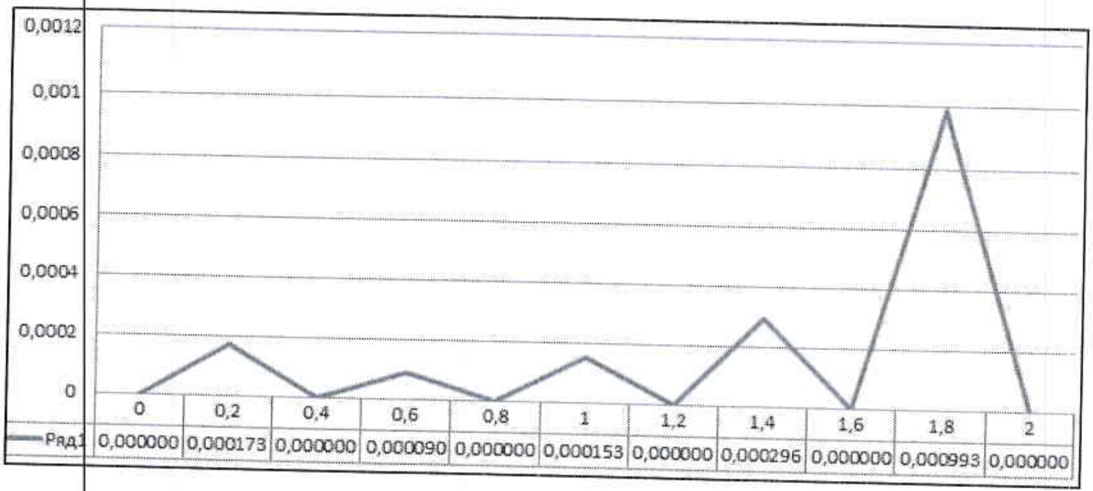


График погрешности полинома по равнораспределенным узлам:



В таблице ниже указаны значения полинома Лагранжа, построенного по чебышевским узлам

x_i	$erf(x)$	$Ln(x)$	$погрешность(\varepsilon(x))$
0	0	0,000213	0,000213
0,2	0,222706	0,222628	0,000078
0,4	0,428504	0,428497	0,000007
0,6	0,604565	0,604471	0,000094
0,8	0,744388	0,744467	0,000079
1	0,847479	0,847790	0,000311
1,2	0,917104	0,917240	0,000136
1,4	0,957571	0,957231	0,000340
1,6	0,972256	0,971902	0,000354
1,8	0,962865	0,963235	0,000370
2	0,929662	0,929162	0,000500

График интерполяционного полинома Лагранжа, построенного по чебышевским узлам:

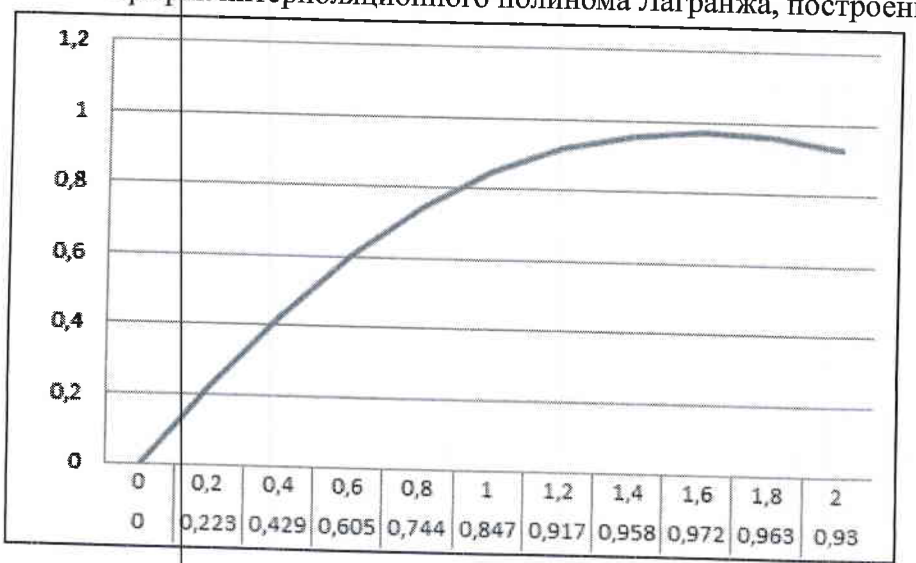
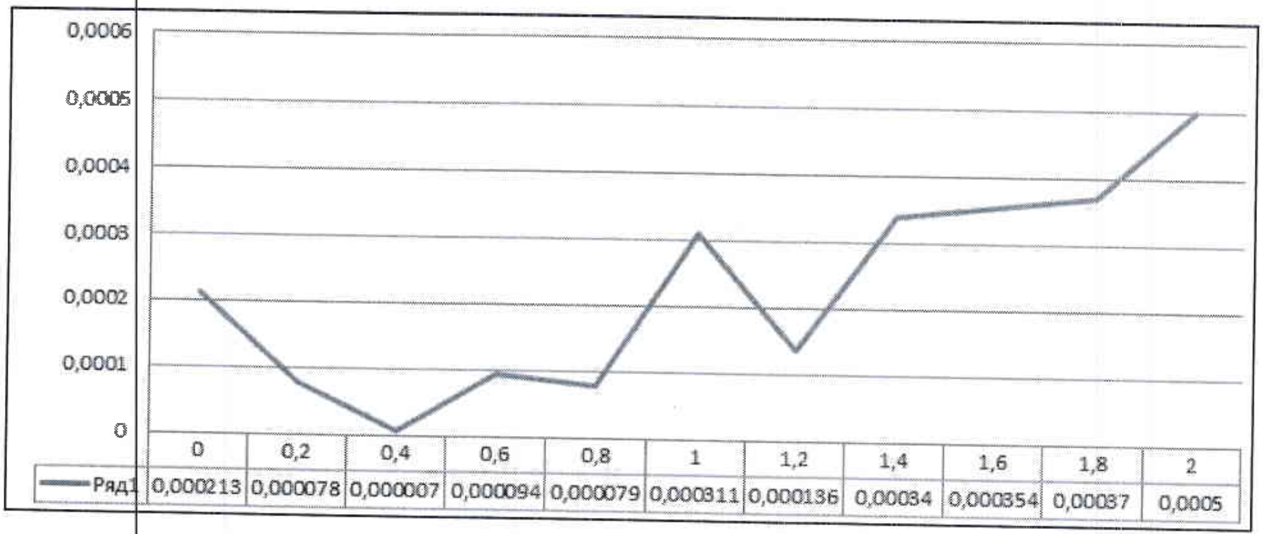


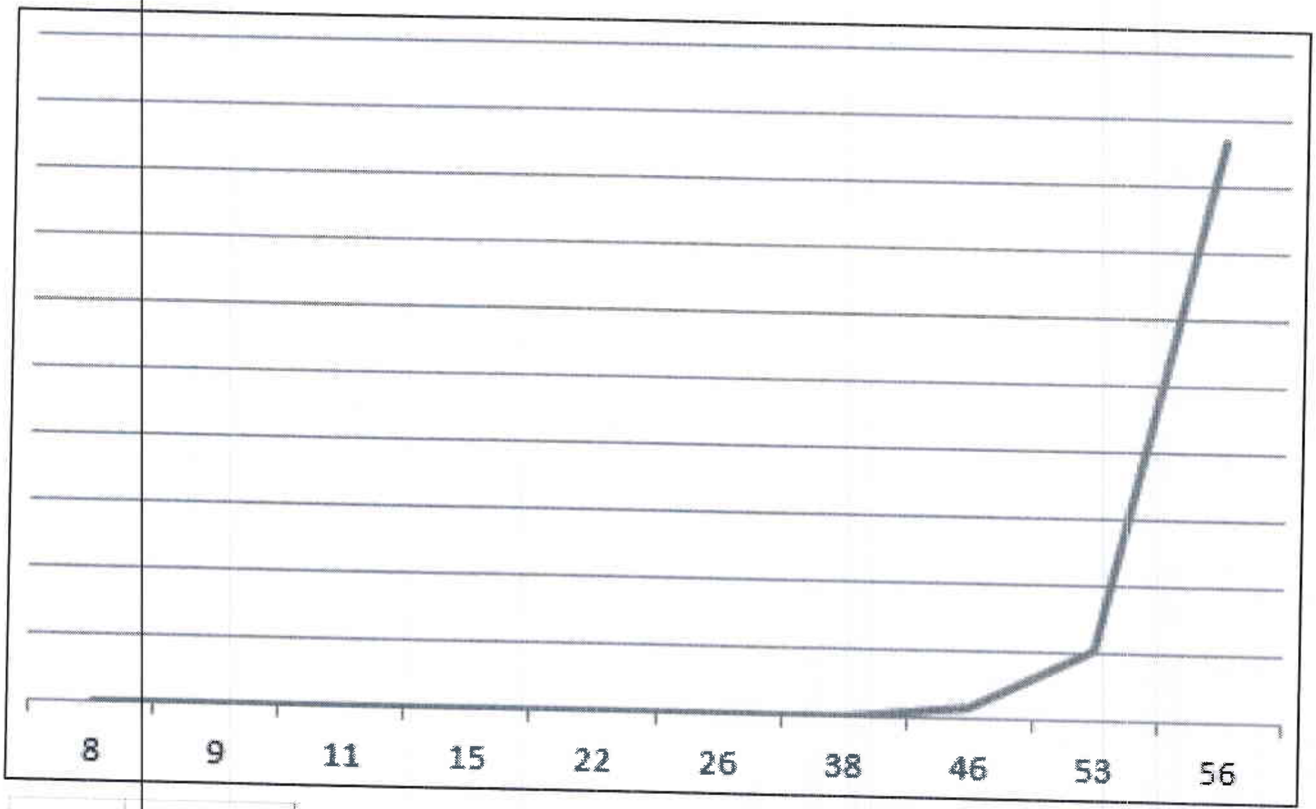
График погрешности полинома Лагранжа по чебышевским узлам:



Задание 3

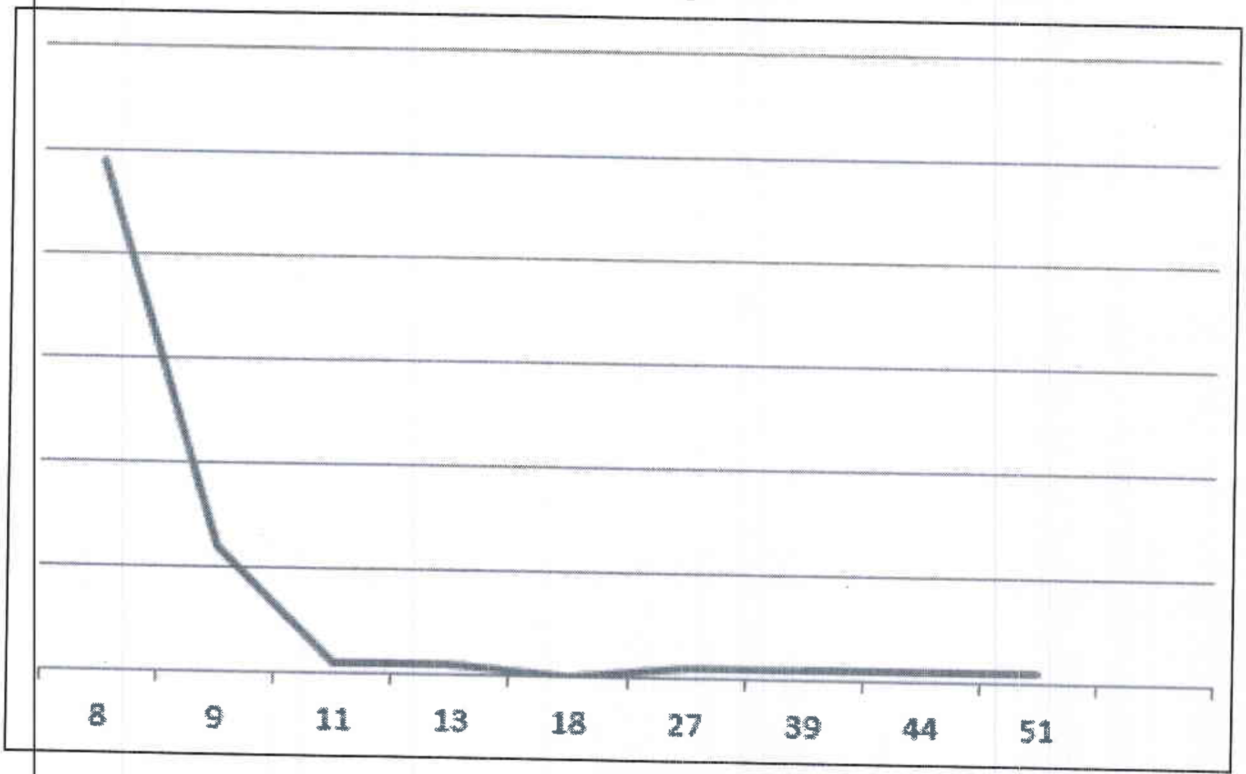
Необходимо выяснить зависимость максимальной погрешности интерполирования от числа узлов интерполяции. В качестве узлов интерполяции рассмотрим равнораспределенные узлы и корни полинома Чебышева.

График зависимости максимальной погрешности для равнораспределенным узлов:



n	$\varepsilon(x)$
8	0,000089
9	0,000014
11	0,000000
12	0,000001
13	0,000001
14	0,000001
15	0,000005
22	0,000013
26	0,000233
38	0,001175
46	0,176156
53	1,031365
56	8,692060

График зависимости максимальной погрешности для корней полинома Чебышева:



n	$\varepsilon(x)$
8	0,000049
9	0,000012
11	0,000001
13	0,000001
18	0,000000
27	0,000001
39	0,000001

Вывод

В данной работе были рассмотрены случаи построения интерполяционного полинома Лагранжа для функции ошибки по равномерно распределенным узлам и по корням полинома Чебышева.

В ходе проделанной работы было установлено, что при построении интерполяционного полинома Лагранжа для равномерно распределенных узлов и для такого же количества узлов Чебышева, максимальная погрешность в узлах Чебышева меньше, чем в равномерно распределенных узлах.

Также мы выяснили, что погрешность может равняться нулю по причине того, что точка совпадает узел интерполяции.

Затем мы провели эксперимент, с целью выяснить: как влияет увеличение количества узлов интерполяции на максимальную погрешность.

Численные эксперименты показали:

1) При увеличении количества узлов, максимальная погрешность интерполяционного полинома Лагранжа, построенного по равномерно распределенным узлам, сначала убывает, затем с n=26 постепенно возрастает. При количестве узлов интерполяции n=56 погрешность резко возрастает.

2) При увеличении количества узлов, максимальная погрешность интерполяционного полинома Лагранжа, построенного по чебышевским узлам, погрешность уменьшается и, достигнув определенного минимума, удерживается на нем.