Необходимое условие сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$

И. Р. Каюмов

1. Введение и основной результат. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_n$ – комплексные числа. *Наипростейшей дробью* называется функция

$$g_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t - z_k}\,.$$

В данной работе мы предполагаем, что $z_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

В статье [1] Протасовым исследована сходимость наипростейших дробей. В частности, в этой работе доказано, что если функциональный ряд

$$g_\infty(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t - z_k} \tag{1}$$

сходится в $L_p(\mathbb{R})$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{1/q+\varepsilon}} < +\infty, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{2}$$

Обратно, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|y_k|^{1/q}} < +\infty, \tag{3}$$

то ряд (1) сходится в $L_p(\mathbb{R})$.

Если предположить, что точки z_k лежат в угле $\{|z| \leqslant C|y|\}$ с фиксированным C, то легко видеть, что достаточное условие (3) весьма близко к необходимому условию (2).

Тем не менее, условия (2) и (3) не являются точными.

В работе автора [2] получено достаточное условие, которое является также необходимым в предположении, что все полюса z_n лежат в некотором угле $\{|z| \leqslant C|y|\}$ с фиксированным C. Таковым условием оказалось неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{p-1}}{|y_k|^{p-1}} < +\infty. \tag{4}$$

Нами [2] доказана

Теорема 1. *Пусть $p > 1$. Если выполнено условие (4), то ряд*

$$g_\infty(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t - z_k}$$

сходится в $L_p(\mathbb{R})$. Обратно, если этот ряд сходится в $L_p(\mathbb{R})$, последовательность $|y_n|$ упорядочена по возрастанию и $|z_k| \leqslant C|y_k|$, то выполнено условие (4).

Условие сходимости (4) хотя и близко к (3), но не следует из него. В самом деле, рассмотрим последовательность $y_k = k^q \ln^q(k+1)$. Для нее ряд (4) сходится, а ряд (3) нет.

Целью настоящей работы является получение необходимого условия сходимости ряда $g_\infty(t)$ в $L_p(\mathbb{R})$. Справедлива

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00762 а, 12-01-97013-р-поволжье а).