УДК 517.9

А. О. Спиридонов, Е. М. Карчевский, А. И. Носич

МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЮЛЛЕРА[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Ряд спектральных задач теории оптических волноводов и резонаторов сводится к нелинейным задачам поиска характеристических чисел граничных интегральных уравнений Мюллера. Одним из эффективных численных методов решения подобных задач является метод коллокации. Основные цели настоящей работы: реализация метода коллокации для поиска поверхностных и вытекающих собственных волн слабонаправляющего волновода с кусочно-постоянной диэлектрической проницаемостью, теоретическое доказательство сходимости этого метода. Численное решение исследуемой в работе задачи ранее проводилось методом коллокации на основе интегральных уравнений, построенных методом потенциала простого слоя. Поэтому одна из целей данной работы – выяснить, какой из методов построения интегральных уравнений является более эффективным с практической точки зрения при численном решении поставленной задачи: метод граничных интегральных уравнений Мюллера или метод потенциала простого слоя.

Материалы и методы. Доказательство сходимости метода коллокации опирается на общие результаты теории дискретной сходимости проекционных методов решения нелинейных спектральных задач и теории аппроксимации слабосингулярных интегральных уравнений. Сравнительный анализ практической эффективности метода граничных интегральных уравнений Мюллера и метода потенциала простого слоя проводится на основе численных экспериментов решения модельных задач.

Результаты. Доказано, что если решение поставленной задачи существует, то существует последовательность характеристических чисел матрицы метода коллокации, сходящаяся при увеличении числа точек коллокации к точному решению. С другой стороны, если существует сходящаяся последовательность упомянутых выше характеристических чисел, то она сходится к точному решению задачи. Численные эксперименты показали сходимость и устойчивость метода коллокации.

Выводы. Метод коллокации является теоретически обоснованным методом решения поставленной задачи с гарантированной сходимостью. Однако дискретизация интегральных уравнений с логарифмической особенностью ядер предложенным вариантом метода коллокации (метод сплайн-коллокации нулевого порядка) неэффективна для слишком малых шагов сетки. Кроме того, метод потенциалов простого слоя не дает преимущества во времени счета по сравнению с использованием граничных интегральных уравнений Мюллера. Поэтому в силу полной эквивалентности системы граничных интегральных уравнений Мюллера исходной дифференциальной задаче их использование для ее численного решения предпочтительнее.

Ключевые слова: диэлектрический волновод, задача на собственные значения, интегральные уравнения, метод коллокации.

[1] Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения проектной части государственного задания в сфере научной деятельности.

A. O. Spiridonov, E. M. Karchevskiy, A. I. Nosich

COLLOCATION METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION OF NONLINEAR SPECTRAL PROBLEMS FOR MULLER BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS

Abstract.

Background. A number of spectral problems of the theory of optical waveguides and resonators is reduced to nonlinear problem of searching eigenvalues of Muller boundary integral equations. One of effective numerical methods of solution of such problems is the collocation method. The present work has the following aims: to realize the collocation method for searching surface and leaky own waves of a weakly guiding waveguide with piecewise constant dielectric permittivity; to theoretically prove the convergence of the given method. Numerical solution of the problem under investigation was previously carried out by the collocation method on the basis of integral equations, built by the method of simple fiber potential. Therefore, one of the aims of the work is to find out which method of integral equations construction is the most efficient from the practical point of view at numerical solution of the set problem: the method of Muller boundary integral equations or the method of simple fiber potential.

Materials and methods. The proving of the collocation method convergence relies on general results of the theory of discrete convergence of projection methods of nonlinear spectral problem solution and the theory of approximation of weakly singular integral equations. The comparative analysis of practical efficiency of the mehtod of Muller boundary integral equations and the method of simple fiber potential was carried out on the basis of numerical experiments of model problems solution.

Results. It is proved that if there exists a solution to the set problems, there exists a sequence of eigenvalues of the collocation method matrix, coverging as a number of points of collocation to the exact solution increases. On the other hand, if there exists a converging sequence of the above mentioned eigenvalues, it converges to the exact problem solution. Numerical experiments displayed the collocation method convergence and stability.

Conclusions. The collocation method is a theoretically substantiated method of the set problem solution with guaranteed convergence. However, discretization of integral equations with logarithmic peculiarity of kernels by the suggested variant of the collocation method (method of spline-collocations of zeroth order) is unefficient minor grid pitches. Besides, the method of simple fiber offers no advantage in counting time in comparison with the Muller boundary integral equations. Therefore, due to absolute equivalence of the system of Muller boundary integral equations to the initial differential problem it is more preferable to use the given equations for numerical solution of the latter.

Key words: dielectric waveguide, eigenvalue problem, integral equations, collocation method.

Введение

Ряд спектральных задач теории оптических волноводов и резонаторов сводится к нелинейным задачам поиска характеристических чисел граничных интегральных уравнений Мюллера [1–3]. Одним из эффективных численных методов решения подобных задач является метод коллокации [4, 5]. В настоящей статье предлагается реализация метода коллокации для поиска поверхностных и вытекающих собственных волн слабонаправляющего волновода с кусочно-постоянной диэлектрической проницаемостью. Доказывается теорема сходимости, приводятся результаты численных экспериментов. Численное решение исследуемой в работе задачи ранее проводилось методом коллокации на основе интегральных уравнений, построенных методом потенциала простого слоя [6, 7]. Поэтому одна из целей данной работы – выяснить, какой из методов построения интегральных уравнений является более эффективным с практической точки зрения при численном решении поставленной задачи: метод граничных интегральных уравнений Мюллера или метод потенциала простого слоя.

1. Сходимость метода коллокации

Пусть диэлектрические проницаемости $\varepsilon_i > \varepsilon_e > 0$ волновода и окружающей среды, а также волновое число $k > 0$ фиксированы. Тогда задача о собственных волнах слабонаправляющего волновода спектрально эквивалентна задаче [3]

$$A(\beta)w = (I + B(\beta))w = 0, \tag{1}$$

где $w = (u,v)^T$, $u,v \in C$, $A(\beta)$ – фредгольмовая, голоморфная по $\beta \in \Lambda$ оператор-функция, вполне непрерывный оператор $B: W \to W$, $W = C \times C$ при каждом $\beta \in \Lambda$ определен равенством

$$Bw = \begin{bmatrix} B_{1,1} & -B_{1,2} \\ B_{2,1} & -B_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \tag{2}$$

символом I обозначен единичный оператор. Здесь C – пространство функций непрерывных на дважды непрерывно дифференцируемом замкнутом контуре Γ (ограничивающем область поперечного сечения волновода) с нормой

$$\| u \|_C = \max_{x \in \Gamma} | u(x) |.$$

Интегральные операторы в (2) определены равенствами

$$\left(B_{i,j}(\beta)u\right)(x) = \int_\Gamma K_{i,j}(\beta; x, y)u(y)dl(y), \quad x \in \Gamma,$$

$$K_{1,1}(\beta; x, y) = \frac{\partial G_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial G_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)}, \;\; K_{1,2}(\beta; x, y) = G_i(\beta; x, y) - G_e(\beta; x, y),$$

$$K_{2,1}(\beta; x, y) = \frac{\partial^2 G_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)} - \frac{\partial^2 G_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)},$$

$$K_{2,2}(\beta; x, y) = \frac{G_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} - \frac{G_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)},$$

$$G_i(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(\chi_i(\beta)|x - y|\right), \;\; G_e(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(\chi_e(\beta)|x - y|\right),$$

где $\chi_i = \sqrt{k^2\varepsilon_i - \beta^2}$, $\chi_e = \sqrt{k^2\varepsilon_e - \beta^2}$, $\partial u / \partial \nu$ – производная по внешней нормали к контуру Γ. Мы предполагаем, что постоянные распространения β принадлежат множеству Λ – пересечению римановых поверхностей Λ_i и Λ_e функций $\ln \chi_+(\beta)$ и $\ln \chi_e(\beta)$ соответственно.

Построим приближение к решению задачи (1) с помощью метода коллокации. Обозначим через $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел. Разобьем контур Γ на $N = N_h \in \mathbb{N}$ непересекающихся дуг $\Gamma_{j,h}$,

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N} \Gamma_{j,h}, \quad h = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} h_j.$$

Здесь h_j – длина дуги $\Gamma_{j,h}$. Обозначим символом $\Xi_h = \{s_{j,h}\}_{j=1}^{N}$ сетку на контуре Γ, образованную серединами $s_{j,h}$ дуг $\Gamma_{j,h}$, $j = 1, \ldots, N$.

Собственную функцию $w = (u, v)^T$ оператор-функции $A(\beta)$ будем разыскивать в виде кусочно-постоянной функции $w^{(h)} = (u^{(h)}, v^{(h)})^T$, где

$$u^{(h)}(x) = \sum_{j=1}^{N} u_h(s_{j,h}) \varphi_{j,h}, \quad v^{(h)}(x) = \sum_{j=1}^{N} v_h(s_{j,h}) \varphi_{j,h}, \tag{3}$$

$$\varphi_{j,h}(x) = \{1, x \in \Gamma_{j,h};\ 0, x \notin \Gamma_{j,h}\}.$$

Значения $u_{j,h} = u_h(s_{j,h})$, $v_{j,h} = v_h(s_{j,h})$ искомой сеточной функции (определенной на сетке Ξ_h) будем определять из уравнений

$$u_{i,h} + \sum_{j=1}^{N} u_{j,h} \int_{\Gamma_{j,h}} K_{1,1}(\beta; s_{i,h}, y) dl(y) -$$

$$- \sum_{j=1}^{N} v_{j,h} \int_{\Gamma_{j,h}} K_{1,2}(\beta; s_{i,h}, y) dl(y) = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{4}$$

$$v_{i,h} + \sum_{j=1}^{N} u_{j,h} \int_{\Gamma_{j,h}} K_{2,1}(\beta; s_{i,h}, y) dl(y) -$$

$$- \sum_{j=1}^{N} v_{j,h} \int_{\Gamma_{j,h}} K_{2,2}(\beta; s_{i,h}, y) dl(y) = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{5}$$

Приближением по методу коллокации к решению задачи (1) будем называть решение нелинейной алгебраической спектральной задачи

$$A_h(\beta) w_h = (I + B_h(\beta)) w_h = 0,$$

где $A_h(\beta)$ – матрица системы уравнений (4), (5) с элементами, нелинейно зависящими от β, а $w_h = (u_h, v_h)^T$ – вектор неизвестных этой системы. Характеристическое множество оператор-функции $A(\beta)$ обозначим $\sigma(A)$. Обозначим через $\sigma(A_h)$ множество характеристических чисел $\beta_h \in \Lambda$ матрицы $A_h(\beta)$. Метод коллокации приближенного решения задачи (1) обосновывает следующая теорема.

Теорема 1. Справедливы следующие утверждения.

1. Если $\beta_0 \in \sigma(A)$, то существует такое семейство чисел $\beta_h \in \sigma(A_h)$, что $\beta_h \to \beta_0$ при $h \to 0$.

2. Если семейство чисел $\beta_h \in \sigma(A_h)$ такое, что $\beta_h \to \beta_0 \in \Lambda$ при $h \to 0$, то $\beta_0 \in \sigma(A)$.

3. Пусть семейство чисел $\beta_h \in \Lambda$ и семейство нормированных векторов w_h такие, что $\beta_h \in \sigma(A_h)$, $A_h(\beta_h)w_h = 0$ и $\beta_h \to \beta_0$, $w_h \to w_0$ при $h \to 0$. Тогда $\beta_0 \in \sigma(A)$ и $A(\beta_0)w_0 = 0$, $\|w_0\|_W = 1$.

Здесь $w_h \to w_0$ при $h \to 0$ означает дискретную сходимость. Смысл этого термина мы сейчас поясним. При доказательстве этой теоремы будем опираться на общие результаты теории дискретной сходимости проекционных методов решения нелинейных спектральных задач [8] и теории аппроксимации слабосингулярных интегральных уравнений [4]. Поэтому предварим доказательство некоторыми определениями [4, 8] и известными результатами.

Введем пространство C_h функций, заданных на сетке Ξ_h, с нормой

$$\| u_h \|_{C_h} = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} | u_h(s_{j,h}) |, \quad u_h \in C_h.$$

При каждом фиксированном $\beta \in \Lambda$ матрица $A_h(\beta)$ определяет оператор, действующий в пространстве $W_h = C_h \times C_h$. Следуя [4, с. 52], введем в рассмотрение оператор $p_h : W \to W_h$ как оператор, определяющий сужение функции $w \in W$ на сетку Ξ_h: $p_h w \in W_h$ – сеточная функция со значениями

$$(p_h w)(s_{j,h}) = w(s_{j,h}), \quad j = 1, \ldots, N.$$

В работе [4, с. 52] доказано, что оператор p_h принадлежит пространству линейных ограниченных операторов $L(W, W_h)$,

$$\|p_h\|_{W \to W_h} = 1, \tag{6}$$

кроме того, оператор p_h удовлетворяет условию

$$\| p_h w \|_{W_h} \to \| w \|_W, \quad h \to 0, \quad \forall w \in W. \tag{7}$$

Семейство $(w_h)_{h \in (0, \bar{h})}$ элементов $w_h \in W_h$ (где $\bar{h}$ – некоторое положительное число) называется дискретно сходящимся к элементу $w \in W$, если

$$\| w_h - p_h w \|_{W_h} \to 0, \quad h \to 0.$$

Дискретную сходимость обозначаем так: $w_h \to w$. Последовательность элементов (w_{h_k}), где $w_{h_k} \in W_{h_k}$ и $h_k \to 0$, называется дискретно сходящейся к элементу $w \in W$, если

$$\| w_{h_k} - p_{h_k} w \|_{W_{h_k}} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Семейство $(w_h)_{h\in(0,\bar{h})}$ элементов $w_h \in W_h$ называется дискретно компактным, если любая последовательность w_{h_k}, для которой $h_k \to 0$, содержит дискретно сходящуюся подпоследовательность. Аналогично определяется дискретно компактная последовательность.

Семейство $(A_h)_{h\in(0,\bar{h})}$ операторов $A_h \in L(W_h, W_h)$ называется дискретно сходящимся к оператору $A \in L(W, W)$, если из дискретной сходимости векторов $w_h \to w$ следует, что $A_h w_h \to Aw$. Дискретную сходимость семейства операторов будем обозначать следующим образом: $A_h \to A$.

Доказательство теоремы заключается в проверке условий 1–6 теорем 1 и 2 статьи [8] в рассматриваемом случае.

1. Оператор $p_h : W \to W_h$ линеен и обладает свойством (7).

2. Оператор-функции $A(\beta)$ и $A_h(\beta)$ голоморфны по β на Λ. Первое утверждение содержится в [3], второе можно доказать, рассуждая аналогично [9, с. 459].

3. При любом $\beta \in \Lambda$ операторы $A(\beta)$ и $A_h(\beta)$ фредгольмовы. Первое утверждение доказано в [3], а второе – следствие конечномерности оператора $A_h(\beta)$.

4. Для любого $\beta \in \Lambda$ семейство операторов $(A_h(\beta))_{h\in(0,\bar{h})}$ собственно сходится к оператору $A(\beta)$. Согласно определению [8] семейство операторов $(A_h)_{h\in(0,\bar{h})}$ называется собственно сходящимся к оператору A, если выполнены следующие два условия:

а) из $w_h \to w$ следует, что $A_h w_h \to Aw$;

б) для любой равномерно ограниченной последовательности (w_{h_k}) элементов семейства $(w_h)_{h\in(0,\bar{h})}$ (т.е. $\left\| w_{h_k} \right\|_{W_{h_k}} \le \text{const}$, $h_k \in (0,\bar{h})$), из того, что последовательность векторов $(A_{h_k} w_{h_k})$ дискретно компактна, следует, что последовательность векторов (w_{h_k}) дискретно компактна.

Покажем сначала, что выполняется условие *а*. Зависимость операторов от параметра β не всегда будем указывать для сокращения обозначений. Очевидно, что

$$\left\| A_h w_h - p_h A w \right\|_{W_h} \le \left\| A_h w_h - A_h p_h w \right\|_{W_h} + \left\| A_h p_h w - p_h A w \right\|_{W_h}. \qquad (8)$$

Для вектора $p_h w \in W_h$ по формуле (3) определим кусочно-постоянную функцию $w^{(h)} = (u^{(h)}, v^{(h)}) \in L_\infty = L_\infty(\Gamma) \times L_\infty(\Gamma)$. Ясно, что тогда $A_h p_h w = p_h A w^{(h)}$, где $A : L_\infty \to W$, следовательно,

$$\left\| A_h p_h w - p_h A w \right\|_{W_h} \le \left\| p_h \right\|_{W \to W_h} \left\| A \right\|_{L_\infty \to W} \left\| w^{(h)} - w \right\|_{L_\infty}. \tag{9}$$

Объединяя неравенства (8) и (9), получаем оценку

$$\left\| A_h w_h - p_h A w \right\|_{W_h} \le \left\| A_h \right\|_{W_h \to W_h} \left\| w_h - p_h w \right\|_{W_h} +$$

$$+ \left\| p_h \right\|_{E \to W_h} \left\| A \right\|_{L_\infty \to W} \left\| w^{(h)} - w \right\|_{L_\infty}. \tag{10}$$

Напомним, что норма оператора p_h равна единице (6). Ясно, что

$$\left\| w^{(h)} - w \right\|_{L_\infty} \to 0, \quad h \to 0. \tag{11}$$

Кроме того, имеет место оценка

$$\left\| A(\beta) \right\|_{L_\infty \to W} \le c(\beta), \ \beta \in \Lambda, \tag{12}$$

где $c(\beta)$ – непрерывная в области Λ функция

$$c(\beta) = 1 + 4 \max_{i,j=1,2} \sup_{x \in \Gamma} \int_\Gamma | K_{i,j}(\beta, x, y) | \, dy.$$

Из определения оператора $A_h(\beta)$ вытекает, что

$$\left\| A_h(\beta) \right\|_{W_h \to W_h} \le \left\| A(\beta) \right\|_{L_\infty \to W}, \ \beta \in \Lambda. \tag{13}$$

Итак, условие *а* выполняется в силу оценок (10)–(13).

Проверим теперь условие *б*. Дискретная компактность последовательности векторов $(A_{h_k} w_{h_k})_{k \in \mathbb{N}}$ означает, что для любого подмножества $\mathbb{N}'$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ существует такое $\mathbb{N}'' \subseteq \mathbb{N}'$, что последовательность элементов $(A_{h_k} w_{h_k} = w_{h_k} + B_{h_k} w_{h_k})_{k \in \mathbb{N}''}$ дискретно сходится к некоторому $f \in W$. Для вектора $w_{h_k} \in W_{h_k}$ определим функцию $w^{(h_k)} \in L_\infty(\Omega)$ по формуле (3). В силу $\left\| w_{h_k} \right\|_{W_{h_k}} \le \mathrm{const}$ имеем $\left\| w^{(h_k)} \right\|_{L_\infty} \le \mathrm{const}$ при $k \in \mathbb{N}''$. Интегральный оператор $B : L_\infty \to W$ вполне непрерывен. Следовательно, множество $(Bu^{(h_k)})_{k \in \mathbb{N}''}$ относительно компактно. Значит, из любой последовательности векторов $(Bu^{(h_k)})_{k \in \mathbb{N}'''}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $(Bu^{(h_k)})_{k \in \mathbb{N}''''}$, т.е.

$$\left\| Bw^{(h_k)} - g \right\|_W \to 0, \quad k \to \infty, k \in \mathbb{N}'''', g \in W.$$

Отсюда в силу неравенства

$$\left\| B_{h_k} w_{h_k} - p_{h_k} g \right\|_{W_{h_k}} \le \left\| p_{h_k} \right\|_{W \to W_{h_k}} \left\| B w^{(h_k)} - g \right\|_W$$

и (6) следует, что последовательность $(B_{h_k} w_{h_k})_{k \in \mathbb{N}'''}$ дискретно сходится к вектору $g \in W$. Значит, последовательность $(w_{h_k})_{k \in \mathbb{N}'''}$ дискретно сходится к вектору $w = f - g \in W$, и условие *б* выполнено.

5. Нормы $\|A_h(\beta)\|_{W_h \to W_h}$ ограничены равномерно по h и β на каждом компакте $\Lambda_0 \subset \Lambda$. Справедливость этого утверждения непосредственно следует из оценок (12), (13).

6. Регулярное множество $\rho(A)$ не пусто, т.е. $\sigma(A) \ne \Lambda$. Справедливость этого утверждения доказана в [3].

Теорема доказана.

2. Результаты численных экспериментов

При теоретическом обосновании метода коллокации предполагалось, что интегралы вида

$$a_{i,j}^{(t,p)} = \int\limits_{\Gamma_j} K_{t,p}(s_i, y) dl(y), \quad t,p = 1,2, \quad i,j = 1,\dots,N, \tag{14}$$

в (4), (5) вычисляются точно. Напомним, что s_i – точки коллокации, а длину дуги Γ_j мы обозначили h_j. Интегралы (14) будем вычислять численно методом центральных прямоугольников. Если $i \ne j$, положим

$$a_{i,j}^{(t,p)} = h_j K_{t,p}(s_i, s_j), \quad t,p = 1,2, \quad i,j = 1,\dots,N.$$

В статье [3] изучены особенности ядер $K_{t,p}(\beta; x, y)$ при совпадении аргументов *x* и *y*. Доказано, что при любом $\beta \in \Lambda$ ядра $K_{1,1}$, $K_{1,2}$ и $K_{2,2}$ не имеют особенности, а именно,

$$\lim_{|x-y| \to 0} K_{1,1}(\beta; x, y) = \lim_{|x-y| \to 0} K_{2,2}(\beta; x, y) = 0,$$

$$\lim_{|x-y| \to 0} K_{1,2}(x, y) = \frac{\ln \chi_e - \ln \chi_i}{2\pi}.$$

При любом $\beta \in \Lambda$ ядро $K_{2,1}$ имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов *x* и *y*, точнее, при $|x - y| \to 0$ справедливо следующее асимптотическое представление:

$$K_{2,1}(x, y) \approx \frac{i(\chi_i^2 - \chi_e^2)}{8} + \frac{\chi_e^2 \ln \chi_e - \chi_i^2 \ln \chi_i}{4\pi} +$$

$$+ \frac{\chi_e^2 - \chi_i^2}{4\pi} \left[\ln|x - y| - \ln 2 - \psi(1) - \frac{1}{2} \right].$$

Здесь ψ – пси-функция. Тогда при $i = j$ имеем

$$a_{j,j}^{(1,1)} = a_{j,j}^{(2,2)} = 0, \quad a_{j,j}^{(1,2)} = h_j \frac{\ln \chi_e - \ln \chi_i}{2\pi}, \quad j = 1,...,N.$$

Легко видеть, что если точка коллокации s_j находится в середине дуги Γ_j при естественной параметризации контура Γ, то

$$\int_{\Gamma_j} \ln|s_j - y|\, dl(y) = h_j(\ln h_j - \ln 2 - 1).$$

Следовательно, положим

$$a_{j,j}^{(2,1)} = \int_{\Gamma_j} \left\{ \frac{i(\chi_i^2 - \chi_e^2)}{8} + \frac{\chi_e^2 \ln \chi_e - \chi_i^2 \ln \chi_i}{4\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{\chi_e^2 - \chi_i^2}{4\pi} \left[\ln|s_j - y| - \ln 2 - \psi(1) - \frac{1}{2} \right] \right\} dl(y) =$$

$$= h_j \left\{ \frac{i(\chi_i^2 - \chi_e^2)}{8} + \frac{\chi_e^2 \ln \chi_e - \chi_i^2 \ln \chi_i}{4\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{\chi_e^2 - \chi_i^2}{4\pi} \left[\ln h_j - \ln 4 - \psi(1) - \frac{3}{2} \right] \right\}, \quad j = 1,...,N.$$

Построенную таким образом нелинейную алгебраическую спектральную задачу мы решали методом обратных итераций с невязкой [10].

Опишем теперь результаты численного исследования поверхностных и вытекающих собственных волн диэлектрических волноводов кругового и квадратного поперечного сечения. Решение задачи было основано на параметрическом задании контура Γ функцией $r = (r_1(t), r_2(t))$, где

$$r_1(t) = f(t)\cos t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$r_2(t) = f(t)\sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$f(t) = \left(\left(\frac{\cos t}{a} \right)^{2m} + \left(\frac{\sin t}{b} \right)^{2m} \right)^{-\frac{1}{2m}}.$$

При $m \to \infty$ кривая стремится к прямоугольнику со сторонами $2a$ и $2b$. В нашем случае $a = b$, при $m = 1$ это окружность радиуса a.

Сравнение метода граничных интегральных уравнений Мюллера с методом потенциала простого слоя мы проводили, решая задачу для волновода кругового сечения, и сопоставляя полученные решения с известным точным решением метода разделения переменных (рис. 1).

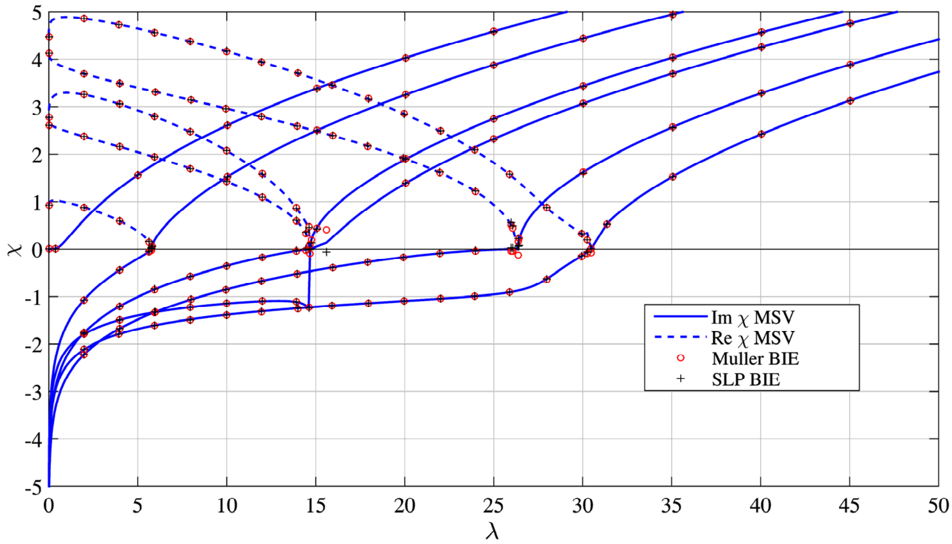
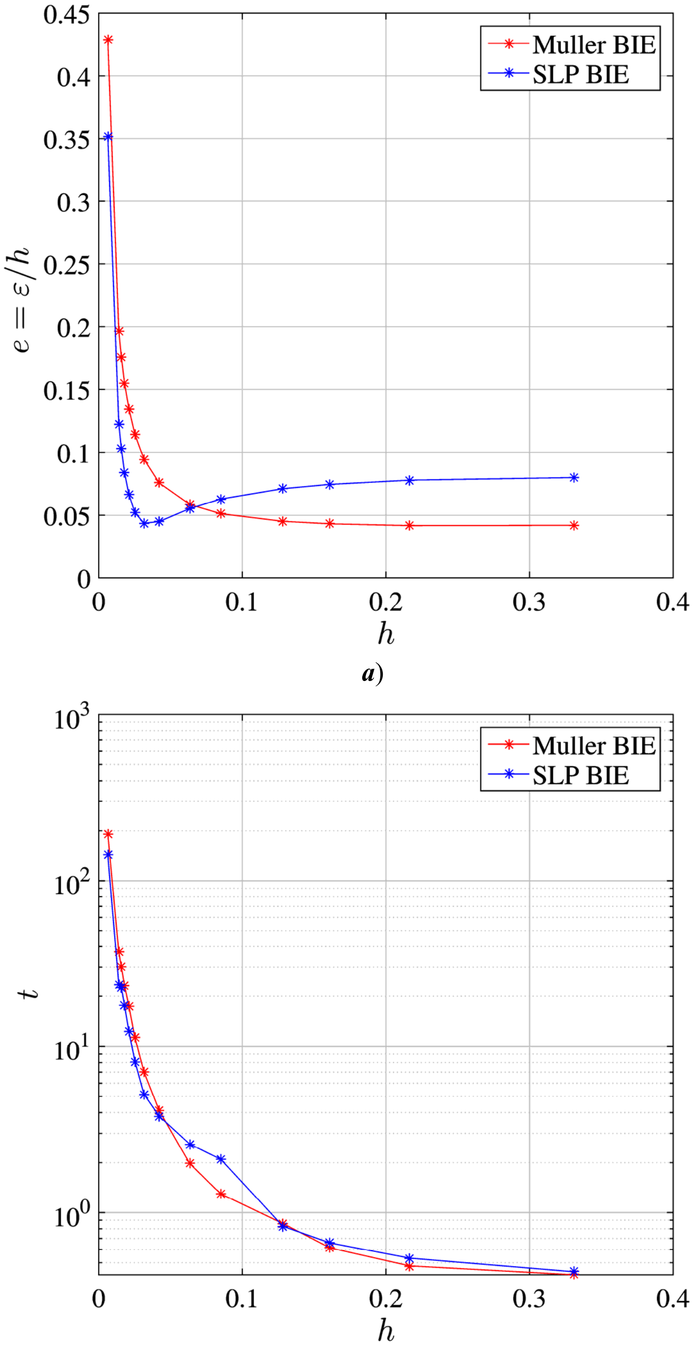


Рис. 1. Дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн волновода кругового поперечного сечения. Здесь $\chi = \sqrt{k^2\varepsilon_e - \beta^2}$, $\lambda = k^2(\varepsilon_i - \varepsilon_e)$. Сплошные и пунктирные линии – решения, полученные методом разделения переменных. Кружочками обозначены результаты вычислений на основе системы интегральных уравнений Мюллера, плюсиками – на основе метода потенциала простого слоя

Рисунок 2,***а*** показывает, что метод коллокации имеет скорость сходимости первого порядка. Если шаг сетки выбрать достаточно малым (в наших экспериментах – меньше пяти сотых), скорость сходимости падает. Этот эффект для уравнений с логарифмической особенностью ядер хорошо известен. Мы его наблюдали как для уравнений Мюллера, так и для уравнений метода потенциала простого слоя. Из рис. 2,***б*** видно, что с уменьшением шага сетки время счета обоими методами увеличивается экспоненциально, при этом ни один из методов не имеет преимуществ перед другим. Однако для достижения относительной точности вычислений в полпроцента достаточно выбирать шаг сетки, равный одной десятой. При этом время счета составляет несколько секунд.

Результаты счета для волновода квадратного сечения показаны на рис. 3 и 4 в сравнении с данными из работы [9].

Анализируя результаты счета, можно сделать следующие выводы. Во-первых, дискретизация интегральных уравнений с логарифмической особенностью ядер предложенным вариантом метода коллокации (метод сплайн-коллокации нулевого порядка) неэффективна для слишком малых шагов сетки. Во-вторых, метод потенциалов простого слоя не дает преимущества во времени счета по сравнению с использованием граничных интегральных уравнений Мюллера. Поэтому в силу полной эквивалентности системы граничных интегральных уравнений Мюллера исходной дифференциальной задаче их использование для ее численного решения предпочтительнее.



а)

б)

Рис. 2. Сравнение точности вычислений методом граничных интегральных уравнений Мюллера и методом потенциала простого слоя (***а***): $e = \varepsilon / h$, $\varepsilon = |\chi - \bar{\chi}| / |\chi|$, $\bar{\chi}$ – приближенное значение поперечного волнового числа в окружающей среде, вычисленное одним из указанных методов, χ – его точное значение, вычисленное для волновода кругового сечения методом разделения переменных, h – шаг сетки; сравнение времени счета (***б***): t – время счета в секундах

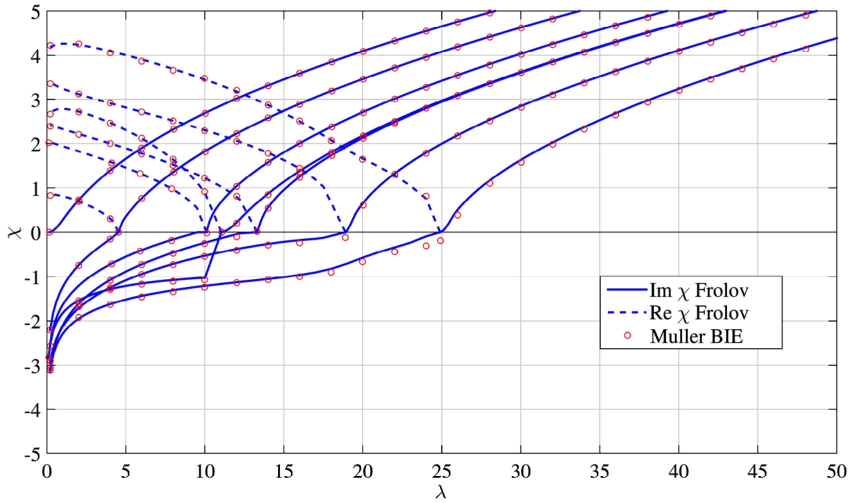


Рис. 3. Дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн слабонаправляющего однородного волновода квадратного поперечного сечения: $\chi = \sqrt{k^2\varepsilon_e - \beta^2}$, $\lambda = k^2(\varepsilon_i - \varepsilon_e)$. Сплошные и пунктирные линии – решения, полученные А. Г. Фроловым [9]. Кружочками обозначены результаты наших вычислений, полученные на основе системы интегральных уравнений Мюллера

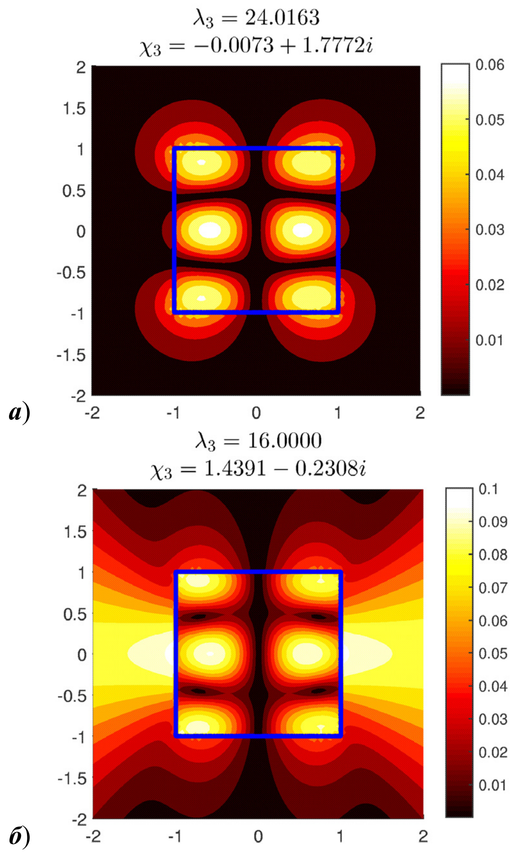


Рис. 4. Диаграммы функции $|u|$ для поверхностной (***а***) и вытекающей (***б***) собственных волн волновода квадратного поперечного сечения

Список литературы

1. Spectra, thresholds, and modal fields of a kite-shaped microcavity laser / E. I. Smotrova, V. Tsvirkun, I. Gozhyk, C. Lafargue, C. Ulysse, M. Lebental, A. I. Nosich // J. Opt. Soc. Am. B. – 2013. – Vol. 30, № 6. – P. 1732–1742.
2. **Wang, L.** Modal analysis of homogeneous optical waveguides by the boundary integral formulation and the Nystroem method / L. Wang, J. A. Cox, A. Friedman // J. Opt. Soc. Am. A. – 1998. – Vol. 15, № 1. – P. 92–100.
3. **Спиридонов, А. О.** Граничные интегральные уравнения Мюллера в спектральной теории диэлектрических волноводов / А. О. Спиридонов, Е. М. Карчевский, А. И. Носич // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 1 (33). – С. 24–36.
4. **Vainikko, G.** Multidimensional weakly singular integral equations / G. Vainikko. – Springer, 1993. – 159 p.
5. **Смирнов, Ю. Г.** Математические методы исследования задач электродинамики. / Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Инф.-изд. центр ПГУ, 2009. – 268 с.
6. **Spiridonov, A. O.** Projection methods for computation of spectral characteristics of weakly guiding optical waveguides / A. O. Spiridonov, E. M. Karchevskiy // Proceedings of International Conference Days on Diffraction (St. Petersburg, Russia, May 27–31, 2013). – St. Petersburg, Russia, 2013. – P. 131–135.
7. **Spiridonov, A. O.** Parallel computing for numerical calculations of step-index optical fibers eigenmodes by collocation method / A. O. Spiridonov, E. M. Karchevskii // Proceedings of International Conference Days on Diffraction (St. Petersburg, Russia, May 26–30, 2014). – St. Petersburg, Russia, 2014. – P. 209–214.
8. **Вайникко, Г. М.** О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра / Г. М. Вайникко, О. О. Карма // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1974. – Т. 14, № 6. – С. 1393–1408.
9. **Карчевский, Е. М.** Численное решение задачи о распространении электромагнитных волн в слабонаправляющих волноводах / Е. М. Карчевский, А. Г. Фролов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 1 (17). – С. 47–57.
10. **Neumaier, A.** Residual inverse iteration for the nonlinear eigenvalue problem / A. Neumaier // SIAM J. Numer. Anal. – 1985. – Vol. 22, № 5. – P. 914–923.

References

1. Smotrova E. I., Tsvirkun V., Gozhyk I., Lafargue C., Ulysse C., Lebental M., Nosich A. I. *J. Opt. Soc. Am. B*. 2013, vol. 30, no. 6, pp. 1732–1742.
2. Wang L., Cox J. A., Friedman A. *J. Opt. Soc. Am. A*. 1998, vol. 15, no. 1, pp. 92–100.
3. Spiridonov A. O., Karchevskiy E. M., Nosich A. I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2015, no. 1 (33), pp. 24–36.
4. Vainikko G. *Multidimensional weakly singular integral equations*. Springer, 1993, 159 p.
5. Smirnov Yu. G. *Matematicheskie metody issledovaniya zadach elektrodinamiki* [Mathematical methods of electrodynamic problems research]. Penza: Inf.-izd. tsentr PGU, 2009, 268 p.
6. Spiridonov A. O., Karchevskiy E. M. *Proceedings of International Conference Days on Diffraction (St. Petersburg, Russia, May 27–31, 2013)*. Saint-Petersburg, Russia, 2013, pp. 131–135.
7. Spiridonov A. O., Karchevskii E. M. *Proceedings of International Conference Days on Diffraction (St. Petersburg, Russia, May 26–30, 2014)*. Saint-Petersburg, Russia, 2014, pp. 209–214.

8. Vaynikko G. M., Karma O. O. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 1974, vol. 14, no. 6, pp. 1393–1408.
9. Karchevskiy E. M., Frolov A. G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2011, no. 1 (17), pp. 47–57.
10. Neumaier A. *SIAM J. Numer. Anal*. 1985, vol. 22, no. 5, pp. 914–923.

Спиридонов Александр Олегович
аспирант, Казанский (Приволжский) федеральный университет (Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 18)

Spiridonov Aleksandr Olegovich
Postgraduate student, Kazan (Volga region) Federal University (18 Kremlevskaya street, Kazan, Russia)

E-mail: sasha_ens@mail.ru

Карчевский Евгений Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет (Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 18)

Karchevskiy Evgeniy Mikhaylovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, sub-department of applied mathematics, Kazan (Volga region) Federal University (18 Kremlevskaya street, Kazan, Russia)

E-mail: sasha_ens@mail.ru

Носич Александр Иосифович
доктор физико-математических наук, профессор, лаборатория микро- и нанооптики, Институт радиофизики и электроники Национальной академии наук Украины (Украина, г. Харьков, ул. Академика Проскуры, 12)

Nosich Aleksandr Iosifovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, laboratory of micro and nanooptics, Institute of Radio Physics and Electronics of the National Academy of Sciences of Ukraine (12 Akademika Proskury street, Kharkov, Ukraine)

E-mail: sasha_ens@mail.ru

УДК 517.9

Спиридонов, А. О.

Метод коллокации решения нелинейных спектральных задач для граничных интегральных уравнений Мюллера / А. О. Спиридонов, Е. М. Карчевский, А. И. Носич // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 2 (34). – С. 32–45.