Елабужский государственный педагогический институт.

Ф.М.САБИРОВА

ЛЕКЦИИ ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

МЕХАНИКА

Елабуга

2002

Печатается по решению Ученого совета Елабужского государственного педагогического института от 21 февраля 2002 года..

Кафедра общей физики

Рецензенты:

зав.кафедрой общей физики, канд. физ.-мат. наук, доцент ЕГПИ

Акулинина А.В.,

профессор НГПИ, доктор физ.-мат. наук

Габбасов Н.С.

Сабирова Ф.М. Лекции по курсу общей физики. Механика./ Учебно-методическое пособие для студентов физико-математического факультета педвуза и школьных учителей физики. Елабуга: изд-во Елабужского пед. ин-та, 2002.– 96 с.

Договор №_____ Сдано в печать 22.08.2001 г. Формат 84х108/82. Объем 6,5 п.л.
Тираж 500 экз. Отпечатано .09.2001 г. Типография ЕГПИ.
Издательство ЕГПИ. 423603, г.Елабуга, ул.Казанская, 89.

Предисловие.

Предлагаемое учебное пособие предназначено для организации самостоятельной и аудиторной работы на лекционных и семинарских занятиях по курсу общей физики со студентами физико-математического факультета педагогического института. Оно написано по разделу "Механика" в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования для специальности «032200.00 – физика с дополнительной специальностью» по физике для педвузов и является обобщением опыта лекционной работы автора. Материал распределен по девяти основным темам, изучаемым в данном разделе курса общей физики: 1) кинематика материальной точки и вращательного движения твердого тела; 2) динамика материальной точки; 3) динамика системы материальных точек, законы сохранения; 4) механика твердого тела; 5) поле как форма материи; 6) механика жидкости и газа : 7) движение в неинерциальных системах отсчета ; 8) элементы специальной теории относительности; 9) механические колебания и волны.

Пособие не исключает работу с учебниками для вузов, более того, ряд вопросов в него не вошли в связи с дефицитом лекционного времени и ограниченными возможностями данного пособия. Например, такие вопросы, как вращение относительно подвижной оси, гироскопический эффект, эффект Доплера в акустике и др. предполагается в учебном процессе отвести на самостоятельное изучение и обсуждение на семинарских занятиях.

Распределение материала по нумерованным лекциям является ориентировочным, поскольку данное пособие может быть рекомендовано и для студентов других специальностей физико-математического факультета с ограниченным число часов по физике, а также студентов заочной формы обучения. В данном случае предполагается возможность использования части материала пособия для самостоятельного изучения.

Автор выражает признательность коллегам и заведующему кафедрой общей физики Насыбуллину Р.А. и старшему преподавателю кафедры общей физики Акулининой А.В. за ценные замечания и пожелания.

1. Предмет физики. Основная задача механики.

Мир представляет собой совокупность материальных объектов, находящихся в постоянном взаимодействии и непрерывном движении. Все, что нас окружает, называется материей. Это не только вещество (в твердом, жидком, газообразном состоянии), но вообще все, что находится вне нашего сознания. Например, силовые поля – поле тяготения, электромагнитное поле, поле ядерных сил – также являются различными формами материи. *Материя* познается через наши ощущения. Иногда восприятие материи может осуществляться не только непосредственно нашими органами чувств, но и с помощью различного вида приборов.

Всякое изменение материи называется *движением*. Оно понимается не только как механическое перемещение тел в пространстве, но и как всякий происходящий в природе процесс: физический, химический, биологический, общественный. Движение является формой существования материи. Движение материи может происходить только в пространстве и во времени.

Место расположения объектов материального мира составляет содержание понятия **пространство**. Длительность и последовательность изменения окружающего нас мира составляет содержание понятия **времени**. Материя не может находиться вне пространства и времени, пространство и время являются взаимосвязанными формами существования материи.

Для измерения пространства и времени вводятся единицы и величины длины и времени. В СИ:

1 *м* – длина, в которой укладывается определенное число раз (1.650.763.730) длина волны оранжевых лучей, испускаемых атомом криптона в вакууме.

1 *с* – интервал времени, в течение которого совершается определенное число (9.192.631.770) колебаний, соответствующих частоте излучения атома цезия 133.

Каждая наука занимается изучением определенных форм движения материи. Науки, изучающие разные формы движения, называются естественными. Физика – одна из естественных наук. «Физика» – по-гречески «природа», то есть физика изучает свойства окружающего нас мира, строение и свойства материи, законы взаимодействия и движения материальных тел.

Физика занимается изучением физической формы движения материи, под которым понимают механическое, тепловое, электромагнитное, внутриатомное, внутриядерное движения. Эти формы движения являются наиболее простыми и вместе с тем наиболее общими. Более сложные формы движения содержат в себе более простые. Например, биологические процессы, происходящие в живых организмах, содержат в себе физические формы движения, хотя свести биологию к физике нельзя.

Соответственно формам движения физика делится на разделы: механика, молекулярная физика, электродинамика, оптика, квантовая физика. В этом семестре мы будем изучать механику.

Механика – это раздел физики, в котором изучается движение тел в пространстве и во времени.

То, что механические явления протекают в пространстве и во времени, находит отражение в любом механическом законе. Изучая характер движения тел, мы тем самым познаем свойства пространства и времени.

Классическая механика изучает движение макроскопических тел при скоростях, много меньших скорости света. При таких скоростях линейные размеры и промежутки времени остаются неизменными при переходе от одной системы отсчета к другой, то есть не зависит от выбора системы отсчета.

Движение макроскопических тел с большими скоростями изучается в **релятивистской механике**. При переходе к скоростям, сравнимым со скоростью света линейные размеры и промежутки времени изменяются при переходе от одной системы отсчета к другой, то есть уже зависят от выбора системы отсчета и в разных системах отсчета будут разными. Релятивистская механика является более общей и в частном случае малых скоростей переходит в классическую.

Квантовая механика изучает движение микроскопических тел при любых скоростях.

Основная задача механики состоит в изучении различных движений и обобщении полученных результатов в виде законов движения, с помощью которых может быть предсказан характер движения в каждом конкретном случае.

Решение этой задачи привело к установлению законов кинематики и динамики, а также к обнаружению законов сохранения энергии, импульса, момента импульса.

Тема 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

2. Модели в механике. Система отсчета. Материальная точка. Траектория, длина пути. Вектор перемещения.

Механическое движение – изменение положения тела относительно других тел с течением времени.

Для описания движения тел, в зависимости от условий конкретных задач, в механике используются различные *физические модели*, в которых из всего многообразия проявлений движения выделены главные, определяющие характер движения. Простейшей моделью является *материальная точка*.

Материальная точка – это модель тела, размерами и формой которого можно пренебречь по сравнению с масштабами движения.

При взаимодействии тел друг с другом они могут деформироваться, то есть изменять свою форму и размеры. Поэтому в механике вводится еще одна модель – *абсолютно твердое тело*. Абсолютно твердым телом называется тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться, и при всех условиях расстояние между двумя частицами этого тела остается постоянным.

Любое движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движения. *Поступательное движение* – это движение, при котором любая прямая жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению. *Вращательное движение* – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой *осью вращения.*

Движение тел происходит в *пространстве* и во *времени*. Поэтому для описания движения материальной точки надо знать, в каких местах пространства эта точка находилась и в какие моменты времени она проходила то или иное положение.

Тела отсчета – тела, относительно которых определяется или изучается положение данного движущегося тела.

Система отсчета – это тело отсчета, связанная с ним система координат и способ измерения времени (часы).

Траектория – линия, которую описывает материальная точка в пространстве при движении. В зависимости от формы траектории движение может прямолинейным и криволинейным.

Расстояние, пройденное телом, с момента начала отсчета времени, называется *длиной пути.* Это длина траектории. Обозначения: L, S, ΔS.

Вектор, соединяющий начальное положение с последующим положением, называют *перемещением.* Обозначения: $\vec{S}$, $\vec{r}$, $\Delta\vec{r}$.

Вектор, соединяющий некотрую фиксированную точку пространства с данной движущейся точкой, називается *радиус-вектором*.

$\vec{r}_1+\vec{S}=\vec{r}_2 \Rightarrow \boxed{\vec{S}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=\Delta\vec{r}}$,

перемещение равно изменению радиуса-вектора. Если точку 0 совместить с точкой А, то

$\vec{r}_1=0$, $\vec{r}_2=\vec{r}$, $\boxed{\vec{S}=\vec{r}}$

перемещение равно радиусу-вектору.

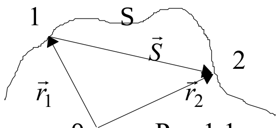

Рис.1.1.

В декартовой системе координат, используемой наиболее часто, положение точки в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами *x, y, z* или радиусом-вектором. При этом проекции радиуса-вектора на оси системы отсчета эквивалентны координатам материальной точки *x, y, z*: $\boxed{\vec{r}=\vec{r}(x,y,z)}$

При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются. Уравнение движения материальной точки может быть задано 3-мя способами:

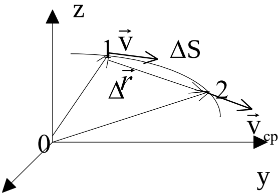

Рис.1.2.

а) координатный $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \\ z=z(t) \end{cases}$

б) векторному: $\vec{r}=\vec{r}(t)$ (эквивалентен координатному);

в) траекторный (естественный) $S=S(t)$.)

3. Кинематика материальной точки. Скорость и ускорение точки.

Кинематика – это раздел механики, изучающий движение тел без учета взаимодействия, то есть без учета причин, вызывающих это движение.

Пусть положение материальной точки задано радиусом-вектором $\vec{r}$, проведенным из некоторой неподвижной точки О выбранной системы отсчета. При движении материальной точки ее радиус-вектор меняется в общем случае как по величине, так и по направлению, то есть радиус-вектор $\vec{r}$ зависит от времени *t*. Геометрическое место концов радиуса-вектора $\vec{r}$ будет траекторией материальной точки.

Введем понятие **скорости** материальной точки. Пусть за промежуток времени Δt материальная точка переместилась из точки 1 в точку 2 (см. рис. 1.2). *Средняя скорость* определяет путь, пройденный в единицу времени. Пусть к моменту t_1 был пройден путь S_1, а к моменту t_2 – S_2. За промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ будет пройден путь $\Delta S = S_2 - S_1$. И средняя скорость, определяемая соотношением $v_{ср} = \Delta S / \Delta t$.Из рисунка видно, что вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ материальной точки представляет собой приращение радиуса-вектора $\vec{r}$ за время: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Вектор средней скорости $\boxed{\vec{v}_{ср} = \Delta\vec{r} / \Delta t}$.

Вектор $\vec{v}_{ср}$ совпадает по направлению с вектором $\Delta\vec{r}$. Определим вектор скорости материальной точки как предел отношения $\Delta\vec{r}$ /Δt при Δt→0, то есть
$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}}.$$

Это значит, что *вектор скорости материальной точки в данный момент времени равен производной от радиуса-вектора* $\vec{r}$ *по времени и направлен по касательной к траектории в данной точке* в сторону движения материальной точки. Модуль вектора $|\vec{v}| = |d\vec{r} / dt|$.

В классической механике состояние частицы или материальной точки в момент времени при координатном способе характеризуется тремя координатами и тремя компонентами скорости, причем предполагается, что все шесть величин в указанный момент можно найти на опыте с любой степенью точности.

Другим понятием, характеризующим движение точки, является **ускорение**. Ускорение – это физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости.

Среднее ускорение – это отношения изменения скорости ко времени, за которое это изменение произошло: $a_{ср} = \Delta v / \Delta t$. Вектор среднего ускорения: $\boxed{\vec{a}_{ср} = \Delta\vec{v} / \Delta t}$, (где $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$)– вектор изменения скорости за промежуток времени Δt. Переходя к пределу, получим вектор мгновенного ускорения:
$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}},$$
т.е. вектор ускорения материальной точки равен производной от скорости по времени. Направление вектора ускорения совпадает с направлением вектора $d\vec{v}$ (приращение вектора $\bar{v}$ за время dt).

При использовании для описания движения прямоугольной декартовой системы координат положение материальной точки задается тремя координатами *x, y, z*. При движении точки эти координаты изменяются во времени и, следовательно ее движение описывается тремя уравнениями *x*(t), *y*(t), *z*(t). В этом случае вектор скорости может быть разложен на три взаимно перпендикулярные компоненты: $\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{x}} = d\vec{x} / dt$; $\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{y}} = d\vec{y} / dt$; $\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{z}} = d\vec{z} / dt$, причем $\boxed{\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_{\mathrm{x}}^2 + \mathrm{v}_{\mathrm{y}}^2 + \mathrm{v}_{\mathrm{z}}^2}}$, а вектор ускорения – на компоненты: $\vec{a}_{\mathrm{x}} = d\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{x}} / dt$; $\vec{a}_{\mathrm{y}} = d\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{y}} / dt$; $\vec{a}_{\mathrm{z}} = d\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{z}} / dt$, причем $\boxed{a = \sqrt{a_{\mathrm{x}}^2 + a_{\mathrm{y}}^2 + a_{\mathrm{z}}^2}}$.

4. Кинематика материальной точки при прямолинейном движении.

Движение, при котором траектория – прямая линия, называется *прямолинейным* движением. При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения равен пройденному пути, если направление движения не изменяется.

1) В случае прямолинейного *равномерного* движения

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{\bar{s}}{t} = const;$$

$$\bar{s} = \bar{\mathrm{v}} t;$$

$$\bar{a} = 0.$$

В проекции на ось OX:

$$\mathrm{v}_{\mathrm{x}} = \frac{x - x_0}{t} = const;$$

$$x = x_0 + \mathrm{v}_{\mathrm{x}} t;$$

$$a_{\mathrm{x}} = 0$$

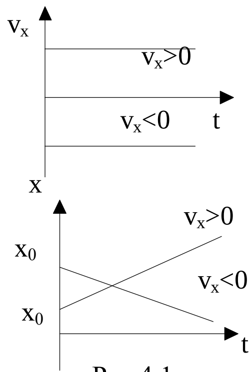

Рис.4.1

2) В случае прямолинейного равнопеременного движения

$$\bar{a} = const;$$

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \bar{a}t$$

$$\bar{s} = \vec{v}_o t + \frac{\bar{a}t^2}{2}.$$

В проекции на ось OX:

$$a_x = const$$

$$v_x = v_{x0} \pm a_x t;$$

$$x = x_0 + v_{x0}t \pm \frac{a_x t^2}{2}$$

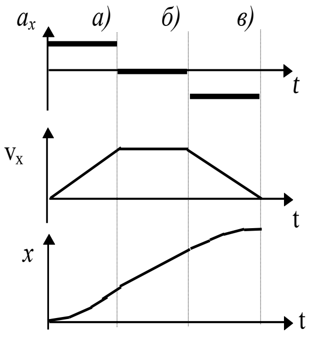

Рис.4.2.

На рис.4.2 изображены графики зависимостей a(t), v(t), s(t) при равноускоренном (a>0, случай $а$)), равномерном (a=0, случай $б$) и равнозамедленном (a<0, случай $в$) движении.

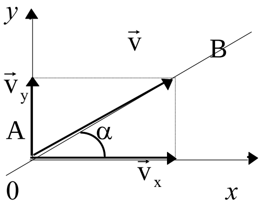

Рис.4.3.

Любое равномерное движение, происходящее с постоянной скоростью $\vec{v}$ вдоль произвольной прямой AB (рис.4.3), можно разложить на два независимых равномерных и прямолинейных движения вдоль осей OX и OY со скоростями v_x и v_y: $x = \pm x_o \pm v_x t$, $y = \pm y_o \pm v_y t$, где $v_x = v\cos\alpha$, $v_y = v\sin\alpha$.

Скорость тела в любой точке траектории $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ и направлена вдоль траектории движения.

5. Криволинейное движении материальной точки.

Криволинейное движение – движение, при котором траектория – кривая линия. Если материальная точка движется по произвольной кривой, то эту кривую надо разбить на малые дуги и каждую из них совместить с дугой некоторой окружности. Каждая такая окружность называется окружностью кривизны, а радиус называется радиусом кривизны траектории в данной точке.

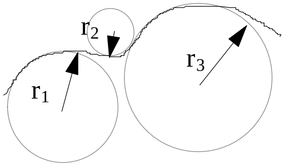

Рис.5.1.

Рассмотрим один из видов криволинейного движения – движение материальной точки по окружности.

1 случай: равномерное движение по окружности, когда скорость по величине является постоянной $|\vec{v}|$=const, но изменяется по направлению (см. рис.5.2). В этом случае $\Delta\vec{v}\neq 0$, поэтому материальная точка движется с ускорением (т.к. $\vec{a}_{ср} = \Delta\vec{v}/\Delta t \neq 0$). Рассмотрим треугольник ΔABC. Он равнобедренный со стороной $|\vec{v}|$=v и основанием Δv, причем $\vec{a}\uparrow\uparrow\Delta\vec{v}$. Если точка D стремится к точке A, то угол в вершине ΔABC $\alpha\to 0$. Но углы при основании ΔABC равны (равнобедренный). Так как сумма всех углов ΔABC равна 180^0, то углы при основании будут стремиться к 90^0 каждый, то есть в пределе $\Delta\vec{v}\perp\vec{v}$, тогда и ускорение будет перпендикулярно вектору скорости ($\vec{a}_n\perp\vec{v}$). Длина вектора $|\Delta\vec{v}|$= $\Delta v = 2v\sin\frac{\alpha}{2}$. Длина дуги ∪DA=$\breve{l} = R\alpha$, а время, за которое точка пройдет этот путь $\Delta t = \breve{l}/v = R\alpha/v$. Тогда модуль среднего ускорения

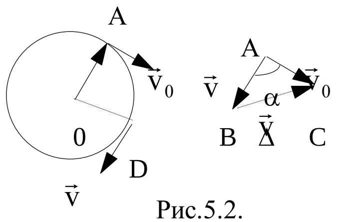

Рис.5.2.

$$a_{nср} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2v^2\sin\frac{\alpha}{2}}{R\alpha} = \frac{v^2}{R}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}.$$

Используя первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = 1$, определим мгновенное ускорение:

$$a_n = \lim_{\alpha\to 0}\frac{v^2}{R}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{v^2}{R}, \text{ то есть } \boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}.$$

Нормальное (центростремительное) ускорение характеризует *изменение скорости по направлению*. Вектор нормального ускорения направлен по радиусу к центру окружности.

2 случай. Скорость движущейся по окружности материальной точки изменяется по величине и направлению: $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$.

$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ – полное изменение скорости; $\Delta v'$ – изменение скорости по направлению, $\Delta v''$ – изменение скорости по величине.

Из $\Delta CED \Rightarrow \Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}' + \vec{v}''$

Поделим обе части этого равенства на Δt перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}'}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}''}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau}.$$

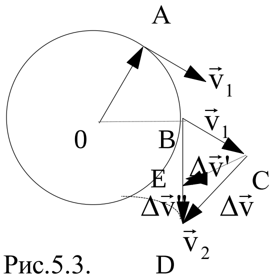

Рис.5.3.

Первое слагаемое является нормальным ускорением, второе $\vec{a}_\tau = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ – тангенциальное ускорение, направленное по касательной к траектории.

$\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{v}$ – если движение ускоренное; $\vec{a}_\tau \uparrow\downarrow \vec{v}$ – если движение замедленное (рис.5.4).

Итак, при криволинейном движении полное ускорение состоит из двух составляющих:

1) нормальное ускорение $\vec{a}_n$ – характеризуется изменением скорости по направлению;
2) тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ характеризуется изменением скорости по величине.

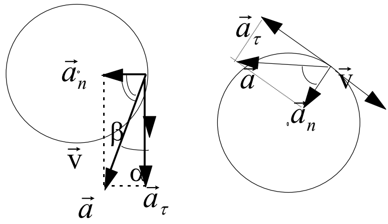

Рис.5.4.

Так как компоненты $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ взаимно перпендикулярны, то

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Найти полное ускорение – это значит найти не только его величину, но и его направление в пространстве: $tg\alpha = \dfrac{|\vec{a}_\tau|}{|\vec{a}_n|}$, или $tg\beta = \dfrac{|\vec{a}_n|}{|\vec{a}_\tau|}$ (см. рис.5.4.).

6. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Связь между линейными и угловыми величинами.

Вращательным движением называется такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

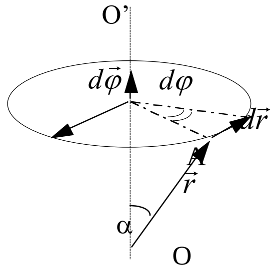

Рис.6.1.

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси OO'. Рассмотрим бесконечно поворот тела вокруг этой оси. Угол поворота будем характеризовать вектором $d\vec{\varphi}$, модуль которого равен углу поворота, а направление совпадает с осью OO' так, что направление поворота отвечает правилу правого винта по отношению к направлению вектора $d\vec{\varphi}$.

Найдем перемещение точи А. Положение точки А зададим радиусом-вектором $\vec{r}$, проведенным из некоторой точки О на оси вращения. Линейное перемещение конца радиуса-вектора связано с углом поворота $d\varphi$ соотношением: $|d\vec{r}| = r\sin\alpha\, d\varphi$ или в векторном виде: $\boxed{d\vec{r} = \left[d\vec{\varphi}\cdot\vec{r}\right]}$

Равенство справедливо для бесконечно малого поворота $d\varphi$.

Векторы, направление которых связывают с направлением вращения, называют *аксиальными*. Вектор $d\vec{\varphi}$ является аксиальным.

Введем векторы *угловой скорости* и *углового ускорения*.

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ определяют как: $\boxed{\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}}$. Вектор $\vec{\omega}$ совпадает по направлению с вектором $d\vec{\varphi}$ и представляет собой аксиальный вектор.

Изменение вектора $\vec{\omega}$ со временем характеризуется вектором углового ускорения $\vec{\varepsilon}$, который определяют как $\boxed{\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}}$. Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением $d\vec{\omega}$ – приращением вектора $\vec{\omega}$. Вектор $\vec{\varepsilon}$ также является аксиальным.

При равномерном вращении $\varepsilon = 0$ и $\vec{\omega} = const$. $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, где φ_o– начальное угловое перемещение.

Вращательное движение характеризуется периодом Т и частотой вращения n.

Частота вращения $n = \dfrac{N}{t}$, или $n = \dfrac{1}{T}$, где N – число оборотов, совершаемых телом за время t; T - период вращения (время одного полного оборота).

Для угловых перемещения и скорости: $\varphi = 2\pi N$; $\omega = 2\pi N$.

При равнопеременном (ε=const) вращении $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$,

$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2$, где ω_0 – начальная угловая скорость.

Установим *связь между линейными и угловыми величинами.*

Найдем скорость $\vec{\text{v}}$ произвольной точки А твердого тела, которое вращается вокруг оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Формулу $d\vec{r} = \left[d\vec{\varphi} \cdot \vec{r}\right]$ поделим на соответствующий промежуток dt: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\text{v}}$ и $\dfrac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega}$,

тогда

$$\boxed{\vec{\text{v}} = \left[\vec{\omega} \cdot \vec{r}\right]} \qquad (*).$$

Т.е. скорость $\vec{\text{v}}$ любой точки А твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$, равна векторному произведению $\vec{\omega}$ на радиус-вектор $\vec{r}$ точки А относительно произвольной точки О оси вращения.

Модуль вектора скорости $\text{v} = \omega r \sin\alpha = \omega R$, где R–радиус окружности, по которой движется точка А. Таким образом, $\boxed{\text{v} = \omega R}$.

Продифференцируем (*) по времени: $\vec{a} = \left[\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt}\right]$.

Так как $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$, $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\text{v}} = \left[\vec{\omega} \cdot \vec{r}\right]$, то $\vec{a} = \left[\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} \cdot \left[\vec{\omega} \cdot \vec{r}\right]\right]$.

Здесь вектор $\vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}\right]$ – тангенциальное ускорение, а вектор $\vec{a}_n = \left[\vec{\omega} \cdot \left[\vec{\omega} \cdot \vec{r}\right]\right]$ – нормальное ускорение. Модули этих ускорений:

$$a_\tau = \varepsilon R, \qquad a_n = \omega^2 R.$$

Модуль полного ускорения $\boxed{a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.}$

Тема 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ
7. Законы Ньютона. Импульс.

Динамика *– раздел механики, в котором изучается механическое движение с учетом причин, вызывающих движение.*

Основные понятия динамики – масса и сила.

Масса – физическая величина, характеризующая инертность тел. *Инертность* – это свойство тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. В классической механике инертная масса считается постоянной и не зависящей от скорости движения.

За единицу массы принят эталон – сплав платины и иридия, хранящийся в палате мер и весов в Париже: $[m]$=кг.

Масса–величина аддитивная $m_{сист} = \sum_{i=1}^{n} m_i$ и скалярная.

Сила – физическая величина, характеризующая действие одного тела на другое, в результате чего у тела изменяется скорость, то есть *появляется ускорение*, или происходит *деформация* тела, либо имеет место и то, и другое. В том случае, когда тело при взаимодействии получает ускорение, говорят о *динамическом* проявлении сил. В том случае, когда тело при взаимодействии деформируется, говорят о *статическом* проявлении сил. $\vec{F}$ – векторная величина . $[F]$ =*Н* (*Ньютон*).

Первый закон Ньютона гласит: *существуют такие системы отсчета, относительно которых тело покоится или движется прямолинейно и равномерно, если на него не действуют другие тела или действие этих тел компенсировано.*

С*истема отсчета*, которая может покоиться или двигаться только равномерно и прямолинейно (по инерции), называется *инерциальной,* а закон называют законом инерции.

Второй закон Ньютона – основной закон динамики поступательного движения – отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил.

Под действием некоторой силы тело приобретает ускорение. Если материальная точка (тело) испытывает действие нескольких сил, то оказывается, что ускорение, приобретенное телом, всегда прямо пропорционально равнодействующей или результирующей приложенных сил, при условии, что $m=const$, т.е.

$$\vec{a} \sim \vec{F} \qquad \text{при} \quad m=const. \qquad (1)$$

где $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ – результирующая сила

При действии одной и той же силы на тела с разными массами их ускорения оказываются различными:

$$\vec{a} \sim 1/m \qquad \text{при } \vec{F} = const. \qquad (2)$$

Используя (1) и (2) и учитывая, что сила и ускорение – векторные величины, можно записать: $\vec{a} = K\dfrac{\vec{F}}{m}$, где К – коэффициент пропорциональности. В системе СИ К=1. Тогда:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}} \qquad (3).$$

Это соотношение и выражает *второй закон Ньютона*: *ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с нею по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела).*

Соотношению (3) можно придать другой вид, представив его в виде:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}. \qquad (4)$$

Пусть масса тела постоянна (не зависит от скорости), поэтому можно внести ее под знак производной:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{\mathrm{v}}). \qquad (5)$$

Векторная величина численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость и имеющая направление скорости, называется ***импульсом*** этой материальной точки: $\boxed{\vec{p} = m\vec{\mathrm{v}}}$.

Подставляя это выражение в (5), получим:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}. \qquad (6)$$

Это выражение – более общая формулировка второго закона Ньютона: скорость изменения импульса материальной точки равно действующей на нее силе. Выражение (6) называется уравнением движения материальной точки.

В общем случае сила, действующая на тело, изменяется со временем и по величине, и по направлению. Но в течение элементарного промежутка времени dt мы можем считать, что $\vec{F} = const$. Векторная величина $d\vec{p}$, равная $\boxed{d\vec{p} = \vec{F}dt}$, называется *элементарным импульсом (силы).*

Второй закон Ньютона в дифференциальной форме:

$$m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\ ,$$

в проекциях на оси: $m\frac{d\mathrm{v}_x}{dt}=\sum F_{ix}$; $m\frac{d\mathrm{v}_y}{dt}=\sum F_{iy}$; $m\frac{d\mathrm{v}_z}{dt}=\sum F_{iz}$.

Из второго закона также получим размерность силы: $1H = 1\text{кг}\cdot 1(\text{м}/\text{с}^2)$.

Третий закон Ньютона определяет взаимодействие между материальными точками (телами).

Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными в противоположные стороны вдоль соединяющей эти точки прямой: $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$, где $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй; $\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой.

Законы Ньютона в классической механике *применимы* для описания движения: а) макротел; б) для тел постоянной массы; в) при скоростях, значительно меньших скорости света.

8. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности.

В механике Ньютона все законы выполняются в инерциальных системах отсчета. Пусть имеем две инерциальные системы отсчета, одну из которых мы будем условно считать неподвижной (система К с осями декартовых координат *x,y,z*). Другая же система (система К’ с осями декартовых координат *x’, y’, z’*) пусть равномерно и прямолинейно движется со скоростью $\vec{u}$ относительно первой (см. рис.8.1.).

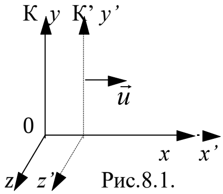

Рис.8.1.

Примем для простоты, что оси *x* и *x*’ совпадают, а скорость относительного движения $\vec{\mathrm{v}}$ направлена вдоль оси *x* или *x*’. Пусть по часам наблюдателя в системе К прошло некоторое время t. В классической физике аксиоматически принимается, что такое же время зарегистрирует и наблюдатель в системе К’, т.е.

$$t = t' \qquad (1)$$

Так как предполагается, что в момент времени, равный t=0, начало координат обеих систем совпадали, то за время t система К’ переместится на расстояние, равное $\vec{u}$t. Пусть теперь в момент t’ в системе К’ в точке с координатами *x’, y’, z’* произошло событие – включение электрической лампочки. Координаты лампочки, измеренные в момент $t = t'$

наблюдателем в системе К, имеют значение *x, y, z*. Видно, что между координатами в системах К и К' легко устанавливается связь:

$$x' = x - ut \quad (2)$$

$$y' = y \quad (3)$$

$$z' = z \quad (4)$$

Соотношения (1)-(4) называются преобразованиями Галилея Преобразования Галилея связывают координаты и время события в указанных двух инерциальных системах отсчета. В векторной форме:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{u}t\,.$$

Дифференцируя формулы (2)-(4) по времени, получим классический *закон сложения скоростей*:

$$\mathrm{v}_x' = \mathrm{v}_\mathrm{x} - u; \qquad \mathrm{v}_y' = \mathrm{v}_\mathrm{y}; \qquad \mathrm{v}_z' = \mathrm{v}_\mathrm{z}\ .$$

Здесь v'_x, v'_y, v'_z – проекции вектора относительной скорости тела $\vec{\mathrm{v}}'$ (по отношению к системе отсчета К'), а $\mathrm{v}_x, \mathrm{v}_y$, v_z – проекции вектора абсолютной скорости $\vec{\mathrm{v}}$ (по отношению к системе отсчета К). В векторной форме закон сложения скоростей примет вид:

$$\boxed{\vec{\mathrm{v}}' = \vec{\mathrm{v}} - \vec{u}}$$

Продифференцируем его по времени и учтем, что $\vec{u} = const$. Получим:

$$\vec{a} = \vec{a}' \qquad (5)$$

В классической механике считается, что масса тела не зависит от системы отсчета, то есть $m = m'$. Умножим обе части равенства (5) на m:

$$m\vec{a} = m\vec{a}' \qquad \text{или} \qquad \vec{F} = \vec{F}'$$

Таким образом, закон Ньютона не изменяется при переходе от системы К в систему К'.

На этом основании можно сформулировать ***механический принцип относительности Галилея***: *во всех инерциальных системах отсчета одни и те же механические явления протекают одинаковым образом, и никакими механическими опытами, проводимыми внутри данной инерциальной системы отсчета, невозможно установить, покоится система отсчета или движется равномерно и прямолинейно.*

Физические величины и физические законы, не изменяющиеся при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, называют ***инвариантными*** (не изменяющимися) к преобразованиям Галилея.

9. Силы в природе.

В природе существует много разных видов сил: тяготения, тяжести, Лоренца, Ампера, взаимодействия неподвижных зарядов и т.д., но все они в конечном счете сводятся к небольшому числу фундаментальных (основных) взаимодействий. Современная физика считает, что существует в природе лишь четыре вида сил или четыре вида взаимодействий:

1) гравитационное взаимодействие (осуществляется через гравитационные поля);

2) электромагнитное взаимодействие (осуществляется через электромагнитные поля);

3) ядерное (или сильное) (обеспечивает связь частиц в ядре);

4) слабое (отвечает за процессы распада элементарных частиц).

В рамках классической механики имеют дело с гравитационными и электромагнитными силами, а также с упругими силами и силами трения.

Гравитационные силы (силы тяготения) – это силы притяжения, которые подчиняются закону всемирного тяготения.

Сила тяжести –сила, с которой тело притягивается Землей. Под действием силы притяжения к Земле все тела падают с одинаковым относительно поверхности Земли ускорением $\vec{g}$, называемым ускорением свободного падения. По второму закону Ньютона, на всякое тело действует сила: $\vec{F} = m\vec{g}$, называемая силой тяжести.

Вес– **с**ила, с которой тело, притягиваясь к Земле, действует на подвес или опору..

Сила тяжести $m\vec{g}$ равна весу только в том случае, когда опора или подвес неподвижны относительно Земли. По модулю вес $\vec{P}$ может быть как больше, так и меньше силы тяжести $\vec{F}$. Эти силы приложены к разным телам: $m\vec{g}$ – приложена к самому телу, $\vec{P}$ – к подвесу или опоре, ограничивающим свободное движение тела в поле земного тяготения.

В случае ускоренного движения опоры (например, лифта, везущего груз) уравнение движения (с учетом того, что сила реакции опоры равна по величине весу, но имеет противоположный знак $\vec{P} = -\vec{N}$): $m\vec{g} - \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \quad \vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$. Если движение происходит вверх $P = m(g + a)$, вниз: $P = m(g - a)$.

При свободном падении тела его вес равен нулю, т.е. оно находится в состоянии *невесомости.*

Силы упругости возникают в результате взаимодействия тел, сопровождающегося их деформацией. Упругая (квазиупругая) сила пропорциональна смещению частицы из положения равновесия и направлена к положению равновесия: $\vec{F} = -k\vec{r}$.

Силы трения являются одним из проявлений контактного взаимодействия тел, в частности сила трения скольжения возникает при скольжении одного тела по поверхности другого: $F_{\text{тр.ск.}} = \mu_{\text{ск}} N$ и направлена по касательной к трущимся поверхностям в сторону, противоположную движению данного тела относительно другого.

Упругие силы и силы трения определяются характером взаимодействия между молекулами вещества, которое имеет электромагнитное происхождение, следовательно они по своей природе имеют электромагнитные происхождения. Гравитационные и электромагнитные силы являются фундаментальными – их нельзя свести к другим, более простым силам. Упругие силы и силы трения не являются фундаментальными. Фундаментальные взаимодействия отличаются простотой и точностью законов.

10. Силы трения.

Трение является одним из проявлений контактного взаимодействия тел. Трение различают двух видов: *внешнее* и *внутреннее*.

Силы *внешнего трения* возникают на поверхности контакта двух тел. *Внутреннее трение* – это тангенциальное взаимодействие между слоями одного и того же тела. Если сила трения возникает при движении твердого тела в жидкой или газообразной среде, то ее относят к силам внутреннего трения.

Трение между поверхностями твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки или смазки называется *сухим*. Трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды называется *вязким* или *жидким*.

Рассмотрим сухое трение. Различают три его вида: трение покоя, трение скольжения и трение качения.

а) Сила трения покоя – это сила, действующая между соприкасающимися телами, находящимися в состоянии покоя, равная по величине и противоположно направленная силе, понуждающей тело к движению.

До возникновения скольжения сила трения покоя может иметь любое направление и принимать любое значение от нуля до некоторого максимального, при котором возникает скольжение: $0 \le \vec{F}_{\text{тр пок}} \le \vec{F}^{\max}_{\text{тр пок}}$.

Силу трения покоя, равную по модулю внешней силе, при которой начинается скольжение данного тела по поверхности другого, называют *максимальной силой трения покоя.*

Французские физики Г.Амонтон и Ш.Кулон установили, что: максимальная сила трения покоя пропорциональна силе реакции опоры (нормального давления) и не зависит от площади соприкосновения трущихся тел:

$$\boxed{\vec{F}^{\,\max}_{\text{тр пок}} = \mu N},$$

где μ – коэффициент трения покоя, зависит от физической природы соприкасающихся тел и обработки их поверхностей,

б) Трение скольжения. Если к телу приложить внешнюю силу, превышающую $|\vec{F}^{\,\max}_{\text{тр пок}}|$, то тело начинает скользить. Сила трения продолжает существовать и называется *силой трения скольжения*.

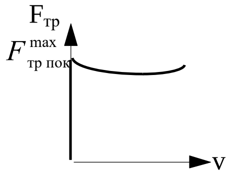

Рис. 10.1.

Силы трения скольжения действуют вдоль поверхности контакта двух тел. Они приложены к обеим трущимся поверхностям в соответствии с третьим законом Ньютона. Модуль силы трения скольжения зависит от материала тел, состояния поверхностей и от относительной скорости движения тел (см. рис.10.1). Уменьшение силы трения скольжения при малых скоростях объясняется тем, что при движении тела, имеющиеся на его поверхности микроскопические выступы не успевают так глубоко западать в углубления поверхности другого тела, как при покое. Деформируются только «верхушки» выступов. Увеличение силы трения скольжения при больших скоростях связано с разрушением выступов и их размельчением. У грубо обработанной поверхности основную роль в возникновении сил трения покоя и скольжения играют зацепления неровностей, а при тщательной обработке – молекулярное или атомное сцепление. При специальной обработке поверхностей сила трения скольжения может практически не зависеть от скорости.

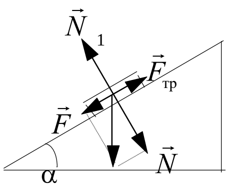

Рис.10.2

Силы трения скольжения также зависят от нормального давления на поверхность соприкосновения. При постоянной скорости движения:

$$F_{\text{тр.ск.}} = \mu_{\text{ск}} N \ .$$

Коэффициент трения скольжения $\mu_{\text{ск}}$ зависит от материала тел, состояния поверхностей и от относительной скорости движения тел. В первом приближении можно считать $\mu_{\text{ск}}$ равным коэффициенту трения покоя μ ($\mu_{\text{ск}} = \mu$). Для определения μ положим тело на наклонную плоскость и начнем увеличивать угол наклона α. Из (1) $\mu = F \,/\, N$. При определенном значении α тело начинает движение вниз.

Тело приходит в движение, когда (рис.10.2)

$F = F_{\text{тр}}$ и $F = mg\sin\alpha$; $N = mg\cos\alpha$, тогда: $\mu = \dfrac{F}{N} = \dfrac{mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Таким образом, коэффициент трения равен тангенсу угла α_0, при котором начинается скольжение тела по наклонной плоскости.

в) Трение качения. При качении тела по поверхности другого возникает особая сила – сила трения качения, которая препятствует качению тела. Сила терния качения при тех же материалах соприкасаемых тел всегда меньше силы терния скольжения. Этим пользуются на практике, заменяя подшипники скольжения шариковыми или роликовыми подшипниками. Кулон опытным путем установил для катящегося цилиндра радиуса R: $\boxed{F_K = \mu_K \dfrac{N}{R}}$, где μ_K – коэффициент трения качения, величина которого уменьшается с увеличением твердости материала и шероховатости его поверхности. Для катящегося обода $\boxed{F_K = \mu_K \dfrac{N}{2R}}$.

На тело, движущееся в вязкой (жидкой или газообразной) среде, действует ***сила жидкого трения***, тормозящая его движение.

Сила жидкого трения. вместе со скоростью обращается в нуль. При небольших скоростях она растет пропорционально скорости:

$$\vec{F}_{\text{ж.тр..}} = -k_1\vec{\text{v}} \qquad (1).$$

Коэффициент k_1 зависит от формы и размеров тела, характера его поверхности, а также от свойства среды, называемого вязкостью.

При увеличении скорости линейная зависимость постепенно переходит в квадратичную:

$$\vec{F}_{\text{ж.тр.}} = -k_2\vec{\text{v}}^2 \qquad (2).$$

k_2 также зависит от формы тела, от площади лобового сопротивления, от вязкости жидкости (ею пренебрегают).

Границы области, в которой происходит переход от закона (1) к закону (2), зависят от тех же факторов, от которых зависит коэффициент k_1.

11. Работа и мощность.

Пусть тело (материальная точка) движение по некоторой произвольной криволинейной траектории. На него все время действует сила, и ее величина и направление могут быть в разных точках траектории разными. Разобьем весь путь на бесконечно малые участки, тогда во всех точках каждого данного участка можно считать силу постоянной и по величине, и по направлению. Определим *работу силы* на таком участке следующим образом:

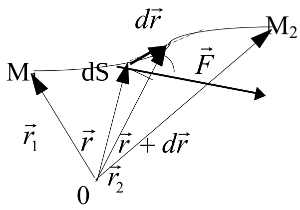

Рис.11.1.

$$dA = (\vec{F}\cdot d\vec{r}) = Fdr\cos\alpha\ ,$$

где α – угол между направлениями элементарного перемещения $d\vec{r}$ и силы $\vec{F}$. В зависимости от значения α A может быть отрицательной, положительной или равной 0. Так как | $d\vec{r}$ |=ds, то формулу для элементарной работы можно записать и в таком виде:

$$dA = F\,dS\cos\alpha = F_S dS\,.$$

Суммируя элементарные работы, можно найти работу на любом протяжении траектории. $A = \int F_S dS$

Единицы работы в СИ: [*A*]=Н.м=Дж.

1 Дж – работа, совершаемая силой 1 Н на 1 м пути.

Консервативная сила *– сила, работа которой определяется только начальным и конечным положениями тела и не зависят от формы пути.* Примеры консервативных сил – силы тяготения, силы упругости. Примером *неконсервативных (*диссипативных*) сил* являются силы трения.

При сравнении различных механизмов, совершающих работу, имеет смысл говорить не только о величине работы, но и величине времени, в течение которого работа совершается (то есть о скорости выполнения работы).

Мощностью *называется физическая величина, равная работе, совершаемой в единицу времени* – это определение средней мощность:

$N_{cp} = \dfrac{A}{t}$. Перейдя к пределу, получим выражение для мощности:

$$N = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} \quad\Rightarrow\quad \boxed{N = \frac{dA}{dt}}.$$

$$dA = F\,dS\cos\alpha = F_S dS \Rightarrow\ A = F_S S \Rightarrow N = \frac{d(F_S S)}{dt}\,.$$

Если F_S=*const*, то $N = F_S\dfrac{dS}{dt} = F_S\mathrm{v} \quad\Rightarrow\quad \boxed{N = F_S\mathrm{v}}$

Мощность в данный момент времени равна произведению проекции силы на перемещение на скорость движение в этот момент.

[N]=Дж.с=Вт.

12. Механическая энергия.

В механике различают два вида энергии: потенциальную и кинетическую.

Потенциальной называется ***энергия****, зависящая от взаимного расположения тел или взаимодействия частей одного и того же тела.*

Пусть в пространстве существует стационарное силовое поле, например, поле тяготения, создаваемое некоторым телом, которое будем считать точечным. Примем, что тело является заодно и телом отсчета. Если в некоторую точку М поля поместить другое тело (материальную точку), то оно испытывает силу, зависящую только от расстояния *r* до источника, то есть $F = F(r)$.

Работа, совершаемая в стационарном силовом поле при перемещении тела из некоторой точки M_1 в точку M_2 равна:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} . \qquad (1)$$

В общем случае работа зависит от формы и длины пути от M_1 до M_2.

Мы будем иметь дело только с *потенциальным полем* (в котором работа по перемещению не зависит ни от формы, ни от длины пути от M_1 до M_2, а зависит только от координат этих точек), следовательно, *работа в потенциальном поле, совершаемая по замкнутому пути, равна нулю*.

Сформулированное свойство потенциальных полей математически означает следующее. Подынтегральное выражение в (1) равно взятому со знаком минус *полному дифференциалу* функции $E_P(r)$, которая называется *потенциальной энергией* системы: $\boxed{dA = -dE_P(r)}$.

Таким образом, *потенциальная энергия – это физическая величина, элементарное изменение которой равно (взятой со знаком минус) элементарной работе, совершаемой силами поля.* Интегрируя последнее соотношение от M_1 до M_2, получим :

$$A_{12} = E_{P1} - E_{P2} = -(E_{P2} - E_{P1}) . \qquad (2)$$

Отсюда вытекает, что физический смысл имеет лишь разность потенциальных энергий. Условимся считать, что когда тело находится на бесконечности ($r = \infty$), то его потенциальная энергия равна нулю. *Тогда под потенциальной энергией* $E_P(r)$ *следует понимать работу, совершаемую силами поля при перемещении тела из данной точки поля в бесконечность.*

Кинетической энергией *называют энергию, зависящую от скорости движения тела.*

Всякое движущееся тело может производить работу. Кинетическая энергия определяется работой, которую может совершать тело вследствие того, что оно обладает определенной скоростью.

Пусть в начальной точке пути скорость стала равной v_1, а в конечной точке пути v_2. Выражение для второго закона Ньютона $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ умножим на $d\vec{r} = \vec{v}dt$: $m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt = \vec{F}d\vec{r}$. Получим

$$(\vec{F}d\vec{r}) = Fdr\cos\alpha = dA,$$

где $\alpha = \angle(\vec{F}, d\vec{r})$, dA – элементарно малая работа на малом участке dr. Так векторы $\vec{v}$ и $d\vec{v}$ сонаправлены, то $d\vec{v}\cdot\vec{v} = dv\cdot v$. Тогда:

$$dA = mv\cdot dv.$$

После интегрирования получим работу A_{12}:

$$A_{12} = \int_{v_1}^{v_2} mv\cdot dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = E_{K2} - E_{K1}. \qquad (3)$$

Отсюда вытекает формула, определяющая кинетическую энергию тела: $E_K = mv^2/2 + C$, где С – произвольная постоянная. В классической механике принято С=0. Тогда: $\boxed{E_K = \frac{mv^2}{2}}$. Приравнивая правые части в соотношениях (2) и (3): $-(E_{P2} - E_{P1}) = E_{K2} - E_{K1}$,

приходим к результату:

$$E_{P1} + E_{K1} = E_{P2} + E_{K2} = const \qquad (5)$$

Назовем *полной механической энергией* величину: $E = E_P + E_K$.

Тогда из (5) вытекает, что *полная механическая энергия тела при его перемещении вдоль любой траектории в потенциальном поле остается постоянной.*

Тема 3. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ.

13. Законы Ньютоны для системы материальных точек. Закон сохранения импульса.

Третий закон Ньютона в соединении с первым и вторым законами позволили перейти от динамики отдельной материальной точки к динамике произвольной механической системы. Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Для i-й материальной точки согласно второму закону Ньютона:

$$\frac{d}{dt}(m_i\vec{\mathrm{v}}_i) = \vec{F}_i . \qquad (1)$$

Все тела, не входящие в рассматриваемую механическую систему , называются внешними, а силы, действующие со стороны этих тел, называются *внешними силами*. Силы взаимодействия частей самой системы называются *внутренними.*

Пусть $\vec{F}_i^{внеш}$ – сумма всех внешних сил, действующих на i-ю точку системы, $\vec{F}_{ik}$ – внутренняя сила, действующая на i-ю точку со стороны k-ой, тогда: $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{внеш} + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik}$. В результате (1) примет вид:

$$\frac{d}{dt}(m_i\vec{\mathrm{v}}_i) = \vec{F}_i^{внеш} + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} \qquad (2)$$

Просуммируем левые и правые части (2) по i для всех материальных точек:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(m_i\vec{\mathrm{v}}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{внеш} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} \qquad (3)$$

По третьему закону Ньютона: $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$. Отсюда $\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} = 0 .$$

Обозначим : $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{внеш} = \vec{F}^{внеш}$ – результирующая всех внешних сил и $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\mathrm{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \vec{p}$ – импульс механической системы. Отсюда (3) примет вид:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{внеш}} \qquad (4)$$

Мы получили закон изменения импульса механической системы: *производная по времени от импульса механической системы равна вектору внешних сил, действующих на систему.*

Рассмотрим замкнутую (или изолированную) систему. Механическая система, на которую не действуют внешние силы, называют *замкнутой системой*.

Итак, если система замкнута, то $\vec{F}_i^{внеш}$ =0. Из закона динамики для системы тел (материальных точек): $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$ (5)

Из (5) следует, что $\boxed{\vec{p} = const}$ или $\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathrm{v}}_i = const}$ (6)

Мы пришли к ***закону сохранения полного импульса изолированной системы***: *при любом характере взаимодействия тел, образующих замкнутую систему, вектор полного импульса этой системы все время остается постоянным.*

Закон сохранения полного импульса изолированной системы – это универсальный закон природы. В более общем случае, когда система незамкнута, из (4) следует, что полный импульс незамкнутой системы не остается постоянным. Его изменение за единицу времени равно геометрической сумме всех внешних сил.

Если система незамкнута, то полный импульс незамкнутой системы не остается постоянным. Его изменение за единицу времени равно геометрической сумме всех внешних сил. Однако в некоторых случаях импульс незамкнутой системы также может сохраняться:

а) Иногда (например, при взрыве, ударе или выстреле) импульсы частей системы претерпевают большие изменения за сравнительно короткие промежутки времени. Это связано с возникновением в системе кратковременных, но весьма значительных по величине внутренних сил взаимодействия частей системы, по сравнению с которыми все постоянно действующие на систему внешние силы оказываются малыми. В этом случае внешними силами мы пренебрегаем и импульс всей системы в целом не изменяется.

б) Если система не замкнута, но $\vec{F}^{внеш}$ =0, то по закону сохранения импульса импульс системы не изменяется с течением времени: $\vec{p} = const$

.

в) Может оказаться, $\vec{F}^{внеш} \neq 0$, и $\vec{p} \neq const$, но $F_x^{внеш} = 0$ или $F_y^{внеш} = 0$. Тогда $p_x = const$ или $p_y = const$. Например, на систему действуют внешние силы, направленные вертикально, тогда $p_x = const$.

14. Центр масс и его движение.

В динамике широко используется понятие центра масс механической системы.

Центром масс или центром инерции системы материальных точек называется воображаемая точка С, радиус-вектор которой равен:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m},$$

где m_i и r_i – соответственно масса и радиус-вектор i-ой материальной точки; n–число материальных точек в системе; $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – масса системы.

Декартовы координаты центра масс равны проекциям $\vec{r}_c$ на координатные оси: $x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}$; $y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}$; $z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}$

В случае непрерывного распределения массы в системе (например, в случае протяженного тела радиус-вектор центра масс системы:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \int_{?m!} \vec{r} dm,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор малого элемента системы массой dm.

Скорость центра масс: $\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{m}$.

Учитывая, что $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, а $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$ – импульс механической системы, можно написать:

$$\vec{p} = m\vec{v}_c, \qquad (7)$$

то есть импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс. Подставим (7) в уравнение (4):

$$\boxed{m\frac{d\vec{\mathrm{v}}_c}{dt} = \vec{F}^{\,внеш}} \qquad (8)$$

получили *закон движения центра масс:* центр масс системы движение как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.

В соответствии с (8) из закона сохранения импульса вытекает:

(т.к. $\vec{F}_i^{\,внеш} = 0 \Rightarrow m\frac{d\vec{\mathrm{v}}_c}{dt} = 0$) $\boxed{\vec{\mathrm{v}}_c = const}$,

то есть центр масс замкнутой системы либо движение прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным.

15. Движение тел переменной массы.

В механике Ньютона считается, что масса тела не зависит от скорости. Однако это не означает, что при движении тела его масса всегда остается постоянной. Она может изменяться вследствие изменения состава движущегося тела (вращающаяся катушка с кабелем, поливная машина, полет ракеты с работающими двигателями, когда выбрасываются продукты сгорания топлива).

Основное уравнение динамики материальной точки переменной массы впервые было получено И.В.Мещерским (1897 г.)

Изменение за малое время dt импульса системы, состоящей из поступательно движущегося тела переменной массы и отделяющихся от него за это время (или присоединяющихся к нему) частиц равно:

$$d\vec{p} = (m + dm)(\vec{\mathrm{v}} + d\vec{\mathrm{v}}) - m\vec{\mathrm{v}} - \vec{\mathrm{v}}_1 dm, \qquad (1)$$

где m и $\vec{\mathrm{v}}$ – масса и скорость тела в момент времени t, dm и $d\vec{\mathrm{v}}$ – их изменение за малое время dt; $\vec{\mathrm{v}}_1$ – скорость отделяющихся частиц.
Преобразуем (1) (пренебрежем $dm\, d\mathrm{v}$ вследствие малости):

$$d\vec{p} = md\vec{\mathrm{v}} + (\vec{\mathrm{v}} - \vec{\mathrm{v}}_1)dm.$$

Обозначим $\vec{u} = \vec{\mathrm{v}}_1 - \vec{\mathrm{v}}$ – скорость отделяющихся частиц после отделения по отношению к телу переменной м4ассы (относительная скорость).

$$d\vec{p} = md\vec{\mathrm{v}} - \vec{u}dm.$$

Воспользуемся законом динамики: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\,внеш}$, получим:

$$\boxed{m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \vec{F}^{\,внеш} + \vec{u}\frac{dm}{dt}}$$

– уравнение Мещерского.

Обозначим : $\vec{F}_p = \vec{u}\,\dfrac{dm}{dt}$ - реактивная сила. Она характеризует механическое действие на тело отделяющихся от него (или присоединяющихся к нему) частиц.

Идея использования реактивной силы для создания летательных аппаратов высказалась еще в 1881 г. революционером Н.И.Кибальчичем. Он перед казнью за участие в убийстве царя Александра II составил проект летательного аппарата, но чертежи затерялись в тюремных архивах. В 1903 г. Циолковский опубликовал основы теории движения ракеты и жидкостного ракетного двигателя (ЖРД). В 1929 г. Стечкин Б.С. разработал теорию воздушно-ракетного двигателя. Циолковский рассчитал максимальную скорость ракеты, которая движется под действием только реактивной силы двигателя, при отсутствии силы тяготения и сопротивления. В уравнении Мещерского $\vec{F}^{внеш} = 0$:

$$m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \vec{u}\,\frac{dm}{dt}$$

где $\vec{u}$ – относительная скорость истечения продуктов сгорания топлива из сопла. В проекции на направление движения ракеты:

$$m\frac{d\mathrm{v}}{dt} = -u\frac{dm}{dt}; \quad \Rightarrow \quad d\mathrm{v} = -u\frac{dm}{m}$$

Пусть m_0 – стартовая масса ракеты;

$m^* = m_0 - m_\tau$ – конечная масса ракеты после выгорания топлива;

m_τ –масса топлива и окислителя до старта.

$$\mathrm{v}_{\max} = -u\int_{m_0}^{m^*}\frac{dm}{m} = u\ln\frac{m_0}{m^*} \qquad \boxed{\mathrm{v}_{\max} = u\ln\frac{m_0}{m_0 - m_\tau}}$$ – формула Циолковского.

$\mathrm{v}_{\max}$ – характеристическая скорость ракеты.

В действительности эта скорость меньше из-за сопротивления атмосферы и тяготения Земли на старте.

16. Энергия системы материальных точек. Закон сохранения механической энергии в консервативной системе.

Пусть имеем систему материальных точек. Относительно системы отсчета координаты точки изменяются вследствие их движения. Кроме того, они взаимодействуют между собой: $E_K+E_P=E$

Сумма потенциальной и кинетической энергии всех точек, входящих в эту систему, называется полной.

Выясним, как изменяется энергия в консервативной системе. Для этого запишем уравнение движения для i-ой точки:

$$m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}=\vec{f}_{i1}+\vec{f}_{i2}+\ldots+\vec{f}_{in}+\vec{F}_i; \qquad i=1,2\ldots,n$$

где $\vec{f}_{i1};\vec{f}_{i2};\ldots;\vec{f}_{in}$ –внутренние силы, действующие на i-ю точку, $\vec{F}_i$ – внешние.

За малое время *dt* точка совершит перемещение $d\vec{r}_i=\vec{v}_i dt$. Умножим это выражение с уравнением движения:

$$m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\vec{v}_i dt=(\vec{f}_{i1}+\vec{f}_{i2}+\ldots+\vec{f}_{in})d\vec{r}_i+\vec{F}_i d\vec{r}_i\ .$$

$m_i\vec{v}_i d\vec{v}_i=dE_{K\,i}$ –изменение кинетической энергии одной точки.

$(\vec{f}_{i1}+\vec{f}_{i2}+\ldots+\vec{f}_{in})d\vec{r}_i=dA_{внутр}=-dE_{Pi}$ – изменение ее потенциальной энергии.

$\vec{F}_i d\vec{r}_i=dA_{i\,внеш}$ –работа внешних сил.

В итоге получаем: $dE_{K\,i}=-dE_{\Pi\,i}+dA_{i\,внеш}$.

Просуммируем левые и правые части по всем точкам:

$$\sum_{i=1}^{n}dE_{K\,i}=-\sum_{i=1}^{n}dE_{\Pi\,i}+\sum_{i=1}^{n}dA_{i\,внеш} \quad\Rightarrow\quad dE_K=-dE_\Pi+dA_{внеш}$$

dE_K–изменение кинетической энергии всех точек,
dE_P– изменение потенциальной энергии всех точек,
$dA_{внеш}$ –работа внешних сил над всей системой за время dt.

$$dE_K+dE_P=dA_{внеш} \quad\Rightarrow d(E_K+E_P)=dA_{внеш}\ .$$

Но $E_K+E_P=E$ –полная механическая энергия системы.

$$dE=dA_{внеш}$$

dE–изменение полной механической энергии за время dt. Проинтегрируем по всему промежутку времени от t_1 до t_2. $\int_1^2 dE = \int_0^A dA_{внеш}$

$$\boxed{E_2 - E_1 = A_{внеш}}$$

Изменение полной механической энергии в незамкнутой консервативной системе равна работе внешних сил.

Если консервативная система замкнута, то внешние силы отсутствуют:

$$A_{внеш} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_2 - E_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_2 = E_1 \qquad E = const.$$

$$\boxed{E_K + E_P = const}$$

закон сохранения замкнутой консервативной системы:

Сумма кинетической и потенциальной энергии всех материальных точек, входящих в замкнутую консервативную систему, остается величиной постоянной, какие бы изменения не происходили.

Если система подвергается действию *неконсервативных* (диссипативных) сил, механическая энергия убывает, переходя в другие виды энергии (например, тепловую при действии сил трения). Но в целом энергия остается постоянной.

Согласно всеобщему закону сохранения и превращения энергии уменьшение или увеличение полной механической энергии системы в точности компенсируется увеличением или уменьшением какого-либо другого вида энергии.

Энергия никуда не исчезает и не появляется вновь, а лишь переходит от одного тела к другому или превращается из одного вида в другой.

17. Соударение двух тел.

Примером применения законов сохранения импульса и энергии при решении реальной физической задачи является удар абсолютно упругих и неупругих тел.

Удар или соударение – это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время. При рассмотрении столкновений необходимо знать форму тел, массы покоя, скорости движения и их упругие свойства. Простейшим видом соударений является *центральный удар тел, при котором тела до удара движутся поступательно вдоль прямой, проходящей через их центры масс.*

Существует два предельных вида удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий. Рассмотрим центральный удар шаров для этих видов удара.

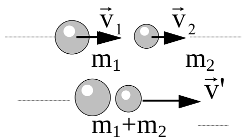

Рис.17.1.

1. ***Абсолютно неупругий удар*** *– это такой удар, после которого скорость соударяющихся тел оказывается одинаковой* (рис.17.1).

При абсолютно неупругом ударе кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию, поэтому здесь неприменим закон сохранения механической энергии, а применим лишь закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}', \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Частным случаем рассматриваемого взаимодействия будет такой, когда первоначальные импульсы $m_1\vec{v}_1$ и $m_2\vec{v}_2$ тел будут равны по модулю, но противоположны по направлению. В этом случае кинетическая энергия взаимодействующих тел полностью переходит во внутреннюю энергию, так как при этом совершается работа по деформации тел.

В общем случае во внутреннюю энергию тел переходит часть кинетической энергии (идет на работу деформации и нагревание тел), величину которой можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара:

$$\Delta E_K = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)v'^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2.$$

Таким образом, для неупругого удара не выполняется закон сохранения механической энергии, но справедлив сохранения закон суммарной энергии различных видов – механической и внутренней.

2. Абсолютно упругий удар **–** это *такой удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие, немеханические, виды энергии,* так как этом случае нет деформации, на которую бы расходовалась часть энергии. Следовательно, для абсолютно упругого удара выполняются законы сохранения механической энергии и импульса:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

Перепишем систему в виде:

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \qquad (1)$$

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2) \qquad (2)$$

Полагая $v_1 - v'_1 \neq 0$ и $v'_2 - v_2 \neq 0$, поделим первое уравнение на второе:

$$v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2 \qquad (3)$$

Решая систему из уравнений (3) и (2), получаем:

$$\boxed{v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}}; \quad \boxed{v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}}.$$

Скорости имеют положительный знак, если они совпадают с положительным направлением оси, выбранной нами, и отрицательный – в противном случае.

Проанализируем полученные выражения для двух шаров различных масс.

1. $m_1 = m_2 . \Rightarrow \quad v'_1 = \dfrac{2m_2 v_2}{2m_2} = v_2$; $v'_2 = \dfrac{2m_1 v_1}{2m_1} = v_1$.

Шары равной массы «обмениваются» скоростями.

2. $m_1 > m_2$, $v_2 = 0$, (рис.17.2).

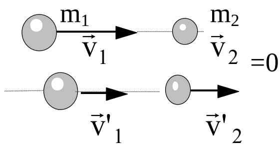

Рис.17.2.

$v'_1 < v_1$, следовательно, первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью;

$v'_2 > v'_1$, следовательно, скорость второго шара после удара больше, чем скорость первого после удара.

3. $m_1 < m_2$, $v_2 = 0$, (рис.17.3)

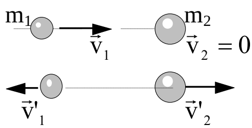

Рис.17.3.

$v'_1 < 0$, следовательно, направление движения первого шара при ударе изменяется – шар отскакивает обратно.

$v'_2 < v_1$, следовательно, второй шар в ту же сторону, в которую двигался первый шар до удара, но с меньшей скоростью.

4. $m_2 >> m_1$ (например, столкновение шара со стенкой)

$v'_1 = -v_1$, $v'_2 \approx \dfrac{2m_1 v_1}{m_2} \approx 0$, следовательно, получившее удар большое тело останется в покое, а ударившее малое тело отскочит с первоначальной скоростью в противоположную сторону.

Тема 4. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.
18. Момент силы. Момент инерции.

Теперь мы будем рассматривать движение такого тела, при котором существенную роль играют его размеры и форма, и поэтому тело нельзя рассматривать как материальную точку.

Введем основные величины применительно к простому случаю вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Пусть эта ось совпадает, например, с осью Oz декартовой системы координат. Пусть внешние силы, приложенные к разным точкам тела. лежат в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Будем считать, что при вращении сила терния пренебрежимо мала.

Разобьем тело на столь малые элементы, чтобы их можно было бы считать материальными точками. Пусть на i-ю материальную точку массой m_i и радиуса-вектора $\vec{r}$, действует внешняя сила $\vec{F}_i$ под углом α_i к направлению радиуса вектора.

Величина, равная векторному произведению радиуса-вектора материальной точки на вектор силы, называется ***моментом силы*** относительно заданной оси вращения:

$$\vec{M}_i = \left[r_i \vec{F}_i \right] \qquad (1).$$

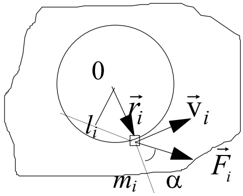

Рис.18.1

$[M]$=Н.м.

Вектор $\vec{M}_i$ направлен вдоль оси вращения. С помощью правила буравчика определяют, в какую именно сторону вдоль оси он направлен.

Определим модуль вектора момента силы. Из (1) вытекает, что $M_i = F_i r_i \sin\alpha_i$, и, следовательно, при $\alpha_i = 0$ и $\alpha_i = \pi$ $M_i = 0$..

Продолжим линию силы и найдем плечо силы $l = r_i \sin\alpha_i$, тогда модуль момента силы: $M_i = l \cdot F_i$. определяется как произведение силы на плечо.

Если *внешние силы* приложены к нескольким точкам тела, то результирующий или полный момент относительно оси вращения равен алгебраической сумме моментов каждой из сил относительной той же оси. $M = \sum\limits_{к} M_к$. Например, на рис.18.2. результирующий момент:

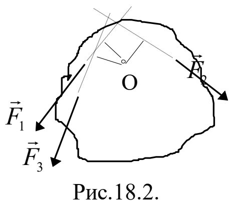

Рис.18.2.

$M = M_1 - M_2 + M_3$.

Что касается полного момента всех внутренних сил (сил взаимодействия между всеми парами частиц) относительно оси вращения, то можно показать, принимая третий закон Ньютона, что он равен нулю.

Момент инерции тела относительно оси вращения определяется как сумма моментов инерции материальных точек, составляющих тело.

Момент инерции материальной точки m_i определяется как величина, численно равная произведению массы на квадрат расстояния точки до оси вращения: $I_i = m_i r_i^2$.

Тогда момент инерции тела: $I = \sum m_i r_i^2$.

В общем случае, если тело сплошное, оно представляет собой множество точек с бесконечно малыми массам dm, и момент инерции тела определяется интегралом. Пределы интегрирования определяются размерами и формой тела: $I = \int_0^m r^2 dm$.

Момент инерции зависит от формы тела, относительно какой оси вращается тело, от распределения массы по объему тела.

Если ось вращения перенести на другое расстояние, то момент инерции изменяется и определяется с помощью ***теоремы Штейнера***: момент инерции тела I относительно произвольной оси равен моменту инерции I_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния *d* между осями: $\boxed{I = I_0 + md^2}$.

19. Определение моментов инерции тел.

1. *Момент инерции тонкостенного цилиндра массы m и радиуса R относительно его оси* (рис.19.1).

Все малые элементы такого цилиндра находятся на одном и том же расстоянии *R* от его оси, проходящей через центр его масс. $I_c = \int_{(m)} R^2 dm = mR^2$, то есть $\boxed{I_c = mR^2}$.

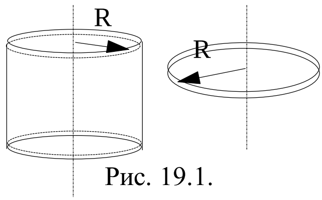

Рис. 19.1.

По этой же формуле вычисляется момент инерции однородного обруча относительно оси, перпендикулярной к плоскости обруча и проходящей через его центр.

2. *Момент инерции сплошного однородного кругового цилиндра массы m и радиуса R относительно его оси* (рис.19.2).

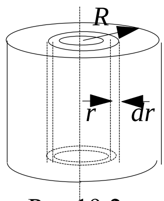

Рис.19.2

Разобьем мысленно цилиндр высотой H на очень большое число соосных тонкостенных цилиндров, выделим один радиуса r. Его момент инерции:
$dI_0 = r^2 dm = r^2 2\pi r\rho H dr = r^3 2\pi\rho H dr$,
так как $dm = \rho dV = \rho H dS = 2\pi r\rho H dr$.

$$I_0 = \int_0^R r^3 2\pi\rho H dr = 2\pi\rho H \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} R^4 \pi\rho H$$

но $m = \rho V = \rho\pi R^2 H$, поэтому: $\boxed{I_0 = mR^2/2}$.

По этой же формуле вычисляется момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр.

3. *Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через центр масс* (рис.19.3.)

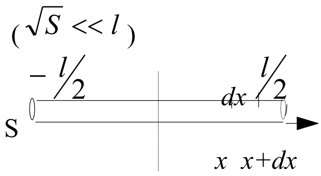

Рис. 19.3.

Разобьем стержень на малые элементы. Пусть x – расстояние до оси, dx– длина элемента. Момент инерции этого элемента: $dI_0 = x^2 dm = x^2 \rho S dx$

$$I_0 = \int_{(m)} x^2 dm = \int_0^{l/2} x^2 \rho S dx + \int_0^{l/2} x^2 \rho S dx = 2\int_0^{l/2} x^2 \rho S dx = \frac{2}{3}\rho S\left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{ml^2}{12}$$

так как $m = \rho V = \rho l S$. Итак, $\boxed{I_0 = ml^2/12}$.

Если ось вращения параллельна данной и проходит через один из концов стержня, то для нахождения момента инерции воспользуемся теоремой Штейнера: $I = I_0 + md^2$.

В данном случае $d = l/2$, а $I_0 = ml^2/12$, тогда

$$I = I_0 + md^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{(3+1)ml^2}{12} = \frac{ml^2}{3}.$$

Следовательно, момент инерции при таком переносе оси вращения увеличился в 4 раза.

Подобные рассуждения приводят к выражению моментов инерции других тел.

4. *Момент инерции шара* относительно его диаметра: $\boxed{I_0 = 0{,}4mR^2}$

Момент инерции шара относительно оси, параллельной диаметру и проходящее на расстоянии *l* от центра масс: $I = 0{,}4\, mR^2 + ml^2$

5. *Момент инерции цилиндра с отверстием (колесе, муфта)*:

$$\boxed{I_0 = 0{,}5m(R_1^2 + R_2^2)}.$$

20. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела устанавливает связь между полным моментом внешних сил и угловым ускорением тела.

Рассмотрим вначале материальную точку массой m, движущуюся по окружности радиуса r (рис. 20.1). Пусть на нее действует постоянная сила F, направленная по касательной к окружности. По второму закону Ньютона эта сила вызывает тангенциальное ускорение:

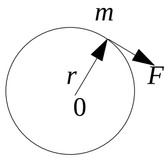

Рис.20.1.

$$a_\tau = F / m \text{ или } F = ma_\tau$$

Используя соотношение $a_\tau = \varepsilon r$, получаем $F = \varepsilon mr$.

Умножим обе части полученного равенства на r:

$$Fr = \varepsilon mr^2 \qquad (1).$$

Левая часть (1) является моментом силы: $M = Fr$. Правая часть (1) представляет собой момент инерции: $I = mr^2$. Таким образом,

$$M = \varepsilon I \text{ или } \varepsilon = M / I$$

Мы получили основное уравнение динамики вращательного движения материальной точки: *угловое ускорение материальной точки при ее вращении вокруг неподвижной оси пропорционально вращающему моменту и обратно пропорционально моменту инерции.*

Так как твердое тело представляет систему жестко связанных друг с другом материальных точек. Все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на оси вращения, поэтому для каждой из них справедливо соотношение: $M_i = \varepsilon_i I_i$

В векторной форме оно примет вид:

$$\vec{M}_i = \vec{\varepsilon}_i I_i$$

Уравнение движения одного элемента (среди совокупности других):

$$I_i \vec{\varepsilon}_i = \vec{M}_i + \vec{M}_i'$$

$\vec{M}_i'$ – моменты внутренних сил, $\vec{M}_i$ – моменты внешних сил. Просуммируем это соотношением по всем элементам:

$$\sum I_i \vec{\varepsilon}_i = \sum \vec{M}_i + \sum \vec{M}_i'$$

Силы взаимодействия между двумя элементами одинаковы и эти силы имеют одинаковое плечо ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$), поэтому $\sum \vec{M}_i' = 0$.

Под влиянием заданного (внешнего) момента силы тело будет вращаться с угловым ускорением ε, постоянным для всех элементов. Тогда:

$$\vec{\varepsilon} \sum I_i = \sum \vec{M}_i .$$

Сумма моментов инерции всех частиц определяет момент инерции твердого тела: $I = \sum m_i r_i^2 = \sum I_i$, а полный момент определяется как $\vec{M} = \sum \vec{M}_i$. Тогда получим следующее уравнение: $\boxed{\vec{M} = I\,\vec{\varepsilon}}$.

Это уравнение описывает *основной закон динамики вращательного движения твердого тела:*

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I} ,$$

угловое ускорение твердого тела прямо пропорционально полному моменту внешних сил и обратно пропорционально моменту инерции тела.

21. Кинетическая энергия вращения тела. Работа внешних сил при вращении твердого тела.

Определим кинетическую энергию вращающегося тела. Эта энергия должна быть равна сумме кинетических энергий отдельных материальных точек: $E_K = \sum \frac{m_1 \text{v}_i^2}{2}$. Учтем, что $\text{v}_i = \omega\, r_i$ и $I = \sum m_i r_i^2$, тогда получим: $E_K = \sum \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \omega^2 \sum \frac{m_i r_i^2}{2} = \omega^2 \frac{I}{2}$, $\boxed{E_K = \frac{I\omega^2}{2}}$.

Если тело катится по поверхности другого тела (например, цилиндр скатывается без трения с наклонной плоскости), то центр масс движется поступательно, а само тело вращается, поэтому энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

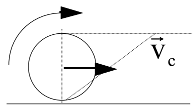

Рис.21.1.

$$E_K = \frac{m \text{v}_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} ,$$

где v_c – скорость центра масс тела; I – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, ω – угловая скорость вращения тела.

Из сопоставления кинетической энергии для поступательного и вращательного движений видно, что *мерой инертности* при вращательном движении служит *момент инерции.*

При вращении твердого тела его потенциальная энергия не изменяется, поэтому элементарная работа внешних сил равна приращению кинетической энергии тела: $dA = dE_K$:

$$dA = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\omega\frac{d\omega}{dt}dt = I\,\omega\,\varepsilon\,dt\,.$$

Учитывая, что $I\varepsilon = M$, $\omega dt = d\varphi$, имеем:

$$dA = M\,\mathrm{d}\,\varphi\,.$$

Работа внешних сил при повороте твердого тела на конечный угол φ равна:

$$A = \int_0^{\varphi_1} M\,\mathrm{d}\,\varphi\,.$$

Если $M = \mathrm{const}$, то формула для работы: $A = \int_0^{\varphi_1} M\,\mathrm{d}\,\varphi = M\varphi$, а если $M = 0$, то внешние силы работу не производят.

22. Закон сохранения момента импульса.

Момент импульса или *момент количества движения* относительно оси вращения для *i*-й материальной точки, имеющей линейную скорость $\vec{\mathrm{v}}_i$ определяется как: $\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i \cdot m_i\,\vec{\mathrm{v}}_i\right]$.

Этот вектор является также направленным вдоль оси вращения и также в сторону, определяемую правилом буравчика. Так как $\vec{r}_i \perp \vec{\mathrm{v}}_i$, то модуль вектора $\vec{L}_i$ равен $L_i = r_i m_i \mathrm{v}_i$. Величина полного момента импульса твердого тела равна арифметической сумме моментов импульса всех его точек, так как при вращении тела все его точки вращаются в одном и том же направлении: $\vec{L} = \vec{\omega}\sum m_i r_i^2 = \vec{\omega}\,I$.

$[L]$=кг.м^2/с.

Момент импульса определяется формулой $\vec{L} = I\vec{\omega}$ и является вектором, совпадающим по направлению с вектором угловой скорости.

Будем считать, что момент инерции *I* остается все время постоянным, а угловая скорость изменяется со временем, так что $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$. Продифференцируем $\vec{L} = I\vec{\omega}$ по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=I\frac{d\vec{\omega}}{dt},\Rightarrow\quad \frac{d\vec{L}}{dt}=I\frac{d\vec{\omega}}{dt}\quad\Rightarrow\quad \frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d(I\vec{\omega})}{dt}.$$

Сопоставляя полученное выражение с основным законом динамики вращательного движения, можно его записать в виде: $\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$.

В замкнутой системе момент внешних сил $\vec{M}=0$ и $\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=0$, откуда:

$$\boxed{\vec{L}=\text{const}},$$

где $\vec{L}$ – векторная сумма моментов тел, входящих в эту систему.

Данное выражение представляет собой закон сохранения момента импульса: *сумма моментов импульса всех тел замкнутой системы сохраняется, то есть не изменяется с течением времени:* $I\vec{\omega}=\text{const}$.

Если в процессе вращения тела его момент инерции изменяется, то при этом должна изменяться и угловая скорость тела, причем согласно закону сохранения момента импульса

$$I_1\vec{\omega}_1=I_2\vec{\omega}_2=\text{const}.$$

Этот закон справедлив не только для одного тела, но и для замкнутой системы тел:

$$I_1\vec{\omega}_1+I_2\vec{\omega}_2+...+I_n\vec{\omega}_n=\text{const}.$$

Закон сохранения момента импульса проявляется как в технике (например, в устройстве вертолета – для изменения ориентации), так и в природе (вращение Земли вокруг своей оси происходит с постоянной угловой скоростью, поскольку не изменяется ее момент инерции).

23. Условия равновесия твердого тела. Виды равновесия.

Состоянием механического равновесия тела (или системы) называется такое состояние, из которого она может быть выведена только в результате внешнего силового воздействия. В состоянии равновесия тело находится в покое, так что его кинетическая энергия равна нулю.

Выясним условия равновесия твердого тела. Тело может находится в состоянии покоя в том случае, если нет причин, приводящих к возникновению поступательного движения или вращения. Для этого необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1) сумма внешних сил, приложенных к телу, должна быть равна нулю:
$\sum\vec{F}_{внеш}=0$

2) результирующий момент внешних сил относительно любой оси должен быть равен нулю: $\sum \vec{M}_{внеш} = 0$.

Равновесие тела в некотором положении называется *устойчивым,* если при любых малых отклонениях тела от этого положения возникают силы или моменты сил, стремящиеся возвратить тело в исходное состояние.

Примеры устойчивого равновесия приведены на рисунках 23.1–23.3.

а) Тело, подвешенное на нити, находится в устойчивом равновесии под действием силы тяжести и силы натяжения нити. При малом отклонении шарика, например, вправо, возникает неуравновешенная сила, возвращающая шарик в исходное состояние.

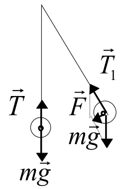

Рис.23.1.

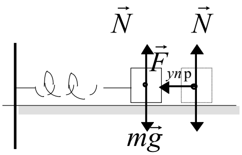

Рис.23.2.

б) Тело, которое может скользить по гладкому горизонтальному столу и прикреплено к недеформированной пружине, находится в устойчивом равновесии под действием силы тяжести и силы реакции стола. При малом смещении возникает сила упругости, направленная к начальному положению тела.

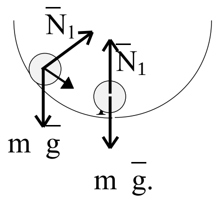

Рис.23.3.

в) Маленький шарик в нижней точке вогнутой сферической поверхности также находится в устойчивом равновесии.)

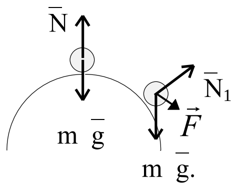

Рис.23.4.

Равновесие называется *неустойчивым*, если хотя бы при некоторых малых тела от этого положения возникают силы или моменты сил, стремящиеся еще больше отклонить тело от начального положения.

Маленький шарик находится в равновесии в верхней точке сферической опорной поверхности (рис.25.4.). При малом отклонении шарика возникает неуравновешенная сила, удаляющая шарик от первоначального положения.

Равновесие тела в некотором положении называется *безразличным*, если при любых малых отклонениях тела от этого положения, не возникает сил или моментов сил, стремящихся возвратить в начальное положение или еще более удалить тело от первоначального положения.

Пример: равновесие бруска будет безразличным (рис.23.5), если при малых смещениях бруска вправо или влево от этого

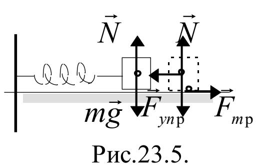

Рис.23.5.

положения сила упругости пружины не будет достигать предельной силы трения покоя ($\vec{F}_{упр} < \vec{F}_{тр.пок.}$).

Закон сохранения механической энергии позволяет указать условия равновесия консервативных систем.

Пусть равновесие тела обусловлено действием только потенциальных сил (тяготения, упругости, электростатических). Тогда положению устойчивого равновесия соответствует минимальное значение потенциальной энергии по сравнению с ее значениями в ближайших соседних положениях. Это так называемый *принцип минимума потенциальной энергии)*. При любых малых отклонениях тела от положения устойчивого равновесия потенциальная энергия возрастает. В состоянии неустойчивого равновесия потенциальная энергия системы имеет максимум.

24. Упругие свойства твердых тел.

До сих пор при рассмотрении твердых тел мы пользовались моделью абсолютно твердого тела. Однако в природе абсолютно твердых тел не существует, так как все реальные тела под действием сил изменяют свою форму и размеры, то есть *деформируются*.

Деформацией твердого тела называется изменение его размеров и объема (и, соответственно, формы).

Деформация тела приводит к смещению его частиц из первоначальных положений равновесия в узлах кристаллической решетки в новые. Силы взаимодействия между частицами этому смещению препятствуют. В деформированном теле возникают внутренние упругие силы, уравновешивающие внешние силы, вызывающие деформацию.

Деформация называется ***упругой***, если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму.

Деформации, которые сохраняются в теле после прекращения действия внешних сил, называются ***пластическими*** (или *остаточными*).

Физическая величина, численно равная упругой силе $F_{упр}$, приходящейся на единицу площади S сечения тела, называется *напряжением*

$$\sigma = F_{упр} / S .$$

Если сила $F_{упр}$ направлена по нормали к поверхности, то напряжение называется ***нормальным***, если же по касательной к поверхности – ***тангенциальным***.

Мерой деформации служит его *относительная деформация*, равная отношению абсолютной деформации Δx к первоначальному значению величины x, характеризующих форму или размеры тела: $\boxed{\varepsilon = \Delta x / x}$.

Закон Гука: *напряжение упруго деформированного тела прямо пропорционально его относительной деформации*:

$$\sigma = K_x \frac{\Delta x}{x} \text{ или } F_x = -k\Delta x .$$

Здесь K_x – модуль упругости, численно равный напряжению, которое возникает при относительной деформации, равной единице. Величина $\alpha_x = 1/K_x$ называется *коэффициентом упругости*. $k = \dfrac{K_x S}{l}$.

Деформация твердых тел подчиняется закону Гука до известного предела, называемого *пределом пропорциональности* $\sigma_п$ (рис.24.1) При больших напряжениях, превышающих так называемый предел упругости $\sigma_у$, начинают возникать остаточные деформации, когда после прекращения действия силы тело не принимает исходные размеры и форму. Напряжение, при котором появляется заметная остаточная деформация, называется пределом текучести $\sigma_т$. При дальнейшем растяжении (за точку D) происходит разрушение тела. Максимальное напряжение, возникающее в теле до разрушения, называется пределом прочности $\sigma_р$.

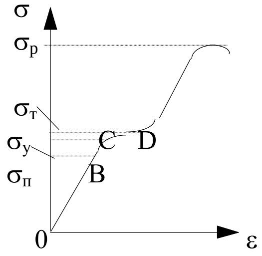

Рис.24.1.

Помимо упругих сил существуют силы, имеющие иную природу, чем упругие, но удовлетворяющие соотношению: $F_x = -k\Delta x$ (или чаще $F_x = -kx$), где F_x –проекция силы на направление, вдоль которого происходит абсолютная линейная деформация Δx (или x), а k=*const*. Подобные силы называются квазиупругими.

25. Виды упругих деформаций.
Потенциальная энергия упруго деформированного тела.

Простейшей деформацией является *продольное (одностороннее) растяжение (сжатие) – увеличение (уменьшение) длины тела под действием внешней растягивающей (сжимающей) силы F*. Деформация прекращается при условии $F=F_{упр}$, где $F_{упр}$ – упругая сила. Относительная деформация: $\varepsilon = \Delta l / l$, где Δl –изменение длины под действием силы F, l –первоначальная длина тела. По закону Гука нормальное напряжение в теле: $\sigma = \dfrac{F}{S} = E\dfrac{\Delta l}{l}$,

где K_x=E называется модулем Юнга. Модуль Юнга равен такому нормальному напряжению, при котором линейный размер тела изменяется в два раза (если бы столь большие упругие деформации были бы возможны): $\Delta l = l$.

Вычислим потенциальную энергию упруго растянутого (сжатого) стержня, которая равна работе, совершаемой внешними силами при деформации $E_n = A = \int\limits_0^{\Delta l} F dx$. Согласно закону Гука: $F = kx = \dfrac{ESx}{l}$. Поэтому

$$E_n = \int\limits_0^{\Delta l} F dx = \int\limits_0^{\Delta l} kx dx = \left.\frac{kx^2}{2}\right|_0^{\Delta l} = \frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{ES}{l}(\Delta l)^2,$$

то есть *потенциальная энергия упруго растянутого стержня пропорциональна квадрату деформации* $(\Delta l)^2$. После некоторых преобразований, учтя, что $\varepsilon = \Delta l / l$ и $Sl = V$, получим:

$$E_n = \frac{1}{2}E\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 Sl = \frac{1}{2}E\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 V = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 V.$$

Существует еще несколько видов упругой деформации: сдвиг, кручение, изгиб. В теории упругости доказывается. что кручение, изгиб могут быть сведены к деформациям: растяжения или сжатия и сдвига.

***Сдвигом** называется деформация тела, при которой его плоские слои, параллельные некоторой плоскости сдвига, не искривляясь и не изменяясь в размерах, смещаются параллельно друг другу* (рис.25.1).

Сдвиг происходит под действием касательной силы F, приложенной к грани BC, параллельной плоскости сдвига. Нижняя грань AD закреплена неподвижно. Если действие силы будет равномерно распределено по всей поверхности грани, то в любом сечении, параллельном этим граням, возникнет тангенциальное напряжение τ: $\boxed{\tau = F / S}$, где S – площадь

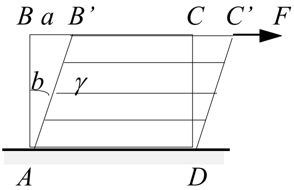

Рис.25.1.

поверхности верхней грани. Если тело мысленно разбить на элементарные параллельные слои, то каждый слой окажется сдвинутым относительно соседних слоев. Относительная деформация сдвига определяется из формулы: $\boxed{\gamma \approx tg\gamma = \frac{CC'}{CD}}$, где CC’=$\Delta x$– абсолютный сдвиг параллельных слоев относительно друг друга, γ – *угол сдвига,* или *относительный сдвиг*, выраженный в радианах. По закону Гука для сдвига касательное («скалывающее») напряжение пропорционально углу сдвига: $\boxed{\tau = G\gamma}$, где G – *модуль сдвига.* Модуль сдвига равен касательному напряжению, которое возникло бы в образце при относительном сдвиге равном единице. Он зависит от материала тела, его температуры, термообработки и некоторых других факторов. [G]=Па.

Кручение. Рассмотрим упругий цилиндрический стержень, один конец которого жестко закреплен (рис.25.2.). На нижнюю грань подействуем силой, направленной по касательной к краю нижнего торца стержня. В результате произойдет закручивание стержня. Пусть φ – угол закручивания – угол, на который поворачивается радиус-вектор основания, l_0 – первоначальная длина стержня.

Относительной деформацией кручения называется величина, численно равная отношению угла закручивания к первоначальной длине тела: $\boxed{\varepsilon_\varphi = \varphi / l_0}$.

Из соотношения для напряжения ($\sigma = \frac{dF_{упр}}{dS}$) получим $F = \sigma S$. По закону Гука напряжение σ прямо пропорционально относительной деформации ε_φ:

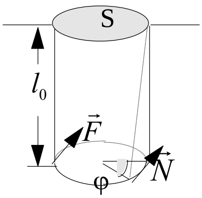

Рис.25.2.

$\boxed{\sigma = \alpha_\varphi \varepsilon_\varphi = \alpha_\varphi \varphi / l_0}$, где коэффициент α_φ называется модулем кручения. При известных значениях α_φ, размеров тела (*S* и l_0) и угла закручивания φ можно определить величину F:

$$F = (\alpha_\varphi S / l_0)\varphi .$$

Тема 5. ПОЛЕ КАК ФОРМА МАТЕРИИ

26. Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная.

Вещество является не единственной формой существования материи. Свойства тел распределены в окружающем тело пространстве, образуя *силовое поле.* Силовое поле обладает всеми свойствами материи: протяженностью в пространстве и во времени, инерцией, энергией, импульсом, действием. В настоящее время известно три вида силовых полей: гравитационное, электромагнитное, ядерное.

Гравитационное поле (поле тяготения) – это форма материи, посредством которой осуществляется взаимодействие тел, обладающих массой. Фундаментальным законом механики является закон всемирного тяготения, установленный Ньютоном. Его формулировке предшествовали ряд открытий и предположений (XVII в.).

Законы Кеплера

1. Планеты обращаются вокруг Солнца по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце (рис.26.1).

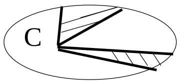

Рис.26.1.

2. Радиус-вектор, проведенный о Солнца к планете за равные промежутки времени описывает одинаковые площади.
3. Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит: $\dfrac{T_1^2}{T_2^2} = \dfrac{R_1^3}{R_2^3}$

В 1666 г. Барелли предположил, что планеты притягиваются к Солнцу, а в 1680 Р.Гук – существует сила притяжения и она обратно пропорциональна квадрату расстояния между планетой и Солнцем. Ньютон обобщил все полученные результаты и установил, что сила притяжения между планетой и Солнцем прямо пропорциональна их массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между планетой и Солнцем:

$$F_{ПС} = \gamma \frac{Mm}{R^2}.$$

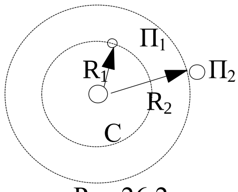

Рис.26.2.

Рассмотрим рассуждения, с помощью которых было получено это соотношение. Для простоты примем, что планеты движутся по круговым орбитам (это частные случаи эллиптических орбит, см.рис.26.2).

Нормальное ускорение, которое возникает при обращении планеты определяется соотношением:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Рассмотрим движение двух планет и определим нормальное ускорение для каждой из планет: $a_{1n} = \dfrac{4\pi^2 R_1}{T_1^2}$; $a_{2n} = \dfrac{4\pi^2 R_2}{T_2^2}$.

Их отношение: $\dfrac{a_{1n}}{a_{2n}} = \dfrac{T_2^2 R_1}{T_1^2 R_1}$. С учетом третьего закона Кеплера $\dfrac{T_1^2}{T_2^2} = \dfrac{R_1^3}{R_2^3}$ получим: $\boxed{\dfrac{a_{1n}}{a_{2n}} = \dfrac{R_2^2}{R_1^2}}$

По второму закону Ньютона: $a = \dfrac{F}{m}$, тогда

$$\frac{\dfrac{F_1}{m_1}}{\dfrac{F_2}{m_2}} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{R_2^2 m_1}{R_1^2 m_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{\dfrac{m_1}{R_1^2}}{\dfrac{m_2}{R_2^2}} \quad \Rightarrow \quad F_{ПС} \sim \frac{m_П}{R^2} \quad \Rightarrow$$

$F_{ПС} = k\dfrac{m_П}{R^2}$. Все планеты притягиваются к одному и тому же телу – Солнцу массой М, поэтому $k = \gamma M$, тогда $F_{ПС} = \gamma\dfrac{Mm}{R^2}$.

Ньютон доказал, что этот вывод справедлив не только для небесных тел, но и для любых двух материальных объектов и сформулировал закон всемирного тяготения:

Между любыми двумя телами действует сила тяготения, прямо пропорциональная массам тел и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними:

$$\vec{F} = -\gamma\frac{m_1 m_2}{R^2}\frac{\vec{R}}{R},$$

где γ – гравитационная постоянная, $\dfrac{\vec{R}}{R}$ – единичный вектор.

В законе тяготения фигурируют гравитационные массы. Во втором же законе Ньютона речь идет об инертной массе. Но из опытов вытекает, что для тела любой природы гравитационная и инертная массы пропорциональны друг другу, а при надлежащем выборе единиц вообще эквивалентны: $m_{и} = m_{г}$.

Пусть $m_1=m_2=1$ кг и $R=1$ м. Тогда $\gamma=F_{тяг}$.

Гравитационная постоянная численно равна силе тяготения, которая действует между телами единичной массы, находящимися на расстоянии 1 м. Она имеет значение: $\gamma=6{,}67.10^{-11}\ \frac{Н.м}{кг^2}\ (\frac{м^3}{кг.с^2})$

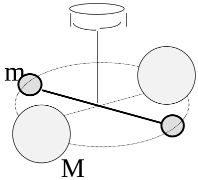

Рис.26.3.

Величина γ была определена в лаборатории Кавендиша с помощью крутильных весов в 1798 г. (рис.26.3.) Она определялась по углу закручивания проволоки, на которой было закреплено коромысло, а на его концах подвешены пробные шары малой массы. Вблизи них располагались два массивных шара, расположенные на тяжелом фундаменте. Поворотом этого фундамента большие шары приближались к малым, в результате маленькие шары притягивались к большим.

Границы применимости закона всемирного тяготения:

а) оба тела материальные точки;

б) взаимодействуют два шара любых размеров;

в) большое тело имеет форму шара, малое – любую форму.

27. Понятие о поле тяготения. Напряженность и потенциал гравитационного поля.

Ньютон не указал причину тяготения, но высказал мысль о посреднике действия между телами. В настоящее время по аналогии с электромагнитным полем посредником принято считать гравитационное поле – особая форма материи, посредством которой осуществляется взаимодействие тел, обладающих массой. Каждая точка поля тяготения характеризуется напряженностью $\vec{G}$ и потенциалом φ.

Напряженность – силовая характеристика поля, величина векторная. Под напряженностью гравитационного поля понимают силу, действующую в данной точке поля на тело единичной массы: $\boxed{\vec{G}=\frac{\vec{F}}{m}}$.

Векторы напряженности и силы совпадают по направлению. С учетом закона всемирного тяготения: $\vec{G}=-\gamma\frac{m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$

В гравитационном поле на тела действуют силы, пропорциональные массе тел: $\vec{F}=m\vec{g}$, или в скалярной форме $F=mg$, откуда: $\boxed{g=\frac{F}{m}}$, т.е. отношение силы, действующей на тело массой m в какой-либо точке поля, к массе тела определяет ускорение свободного падения в данной точке поля. С учетом закона тяготения для тела, находящегося на высоте h от поверхности Земли, получим: $g = \gamma \dfrac{M}{R^2} = \gamma \dfrac{M}{(R_З + h)^2}$.

Из этой формулы вытекает, что, во-первых, ускорение свободного падения не зависит от массы и размеров тела и, во-вторых, изменяется с высотой поднятия тела над поверхностью Земли.

Потенциал поля – энергетическая характеристика, величина скалярная. *Гравитационный потенциал* определяется потенциальной энергией тела единичной массы в данной точке поля: $\boxed{\varphi = \dfrac{E_\text{р}}{m}}$, или *потенциал определяется работой по перемещению тела единичной массы из данной точки поля в бесконечность.*

Найдем работу, совершаемую силами поля тяготения при удалении тела массой m от Земли. При перемещении его на расстояние dR совершается работа $dA = F\,dR$, но $F = \gamma \dfrac{Mm}{R^2}$, поэтому $dA = -\gamma \dfrac{Mm}{R^2} dR$.

Сила и перемещение в данном случае противоположны по направлению, поэтому в данной формуле и появляется знак минус.

При перемещении тела от R_1 до R_2 совершается работа:

$$A = \int_{R_1}^{R_2} dA = -\int_{R_1}^{R_2} \gamma \frac{Mm}{R^2} dR = m\left(\gamma \frac{Mm}{R_1} - \gamma \frac{Mm}{R_2}\right)$$

Но $A = -(E_{p2} - E_{p1})$, поэтому $E_\text{р1} = -\gamma \dfrac{Mm}{R_1}$, $E_\text{р2} = -\gamma \dfrac{Mm}{R_2}$.

Если точка поля находится в бесконечности, $R_2 \to \infty$, то $E_{p2} \to 0$. Тогда выражение для работы можно переписать в виде: $\boxed{A = E_{p1}}$.

Т.к. первая точка была выбрана произвольно, то потенциальная энергия тела массой m в любой точке R: $\boxed{E_\text{р} = -\gamma \dfrac{Mm}{R}}$.

Следовательно, потенциал поля тяготения: $\boxed{\varphi = \dfrac{E_\text{р}}{m} = -\gamma \dfrac{M}{r}}$.

Геометрическое место точек с одинаковым потенциалом называется эквипотенциальной поверхностью. Из полученного выражения для φ следует, что такой поверхностью является сфера (R=*const*).

Между силовой ($\vec{G}$) и энергетической (φ) характеристиками потенциального поля существует связь:

$$\boxed{\vec{G} = -\frac{d\varphi}{dr}\frac{\vec{r}}{r}}.$$

Здесь $\dfrac{d\varphi}{dr}$ – градиент потенциала, показывает, как изменяется потенциал при изменении r. Знак минус указывает на то, что вектор напряженности направлен в сторону убывания потенциала.

Зная потенциалы φ_1 и φ_2 в двух разных точках поля, можно рассчитать работу, которая совершается при перемещении из точки 1 в точку 2:

$$A_{\text{вн}12} = E_{\text{P}2} - E_{\text{P}1} = m\varphi_2 - m\varphi_1 = m(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Работа по перемещению тела из 2 в 1 (по другой траектории):

$$A_{\text{вн}21} = E_{\text{P}1} - E_{\text{P}2} = m\varphi_1 - m\varphi_2 = m(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Результирующая работа по замкнутому участку 121:

$$A_{\text{вн}121} = A_{\text{вн}12} + A_{\text{вн}12} = m(\varphi_2 - \varphi_1) + m(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

Работа при перемещении по замкнутому пути в любом поле тяготения равна нулю. Поэтому поле тяготения является *консервативным полем,* а силы, действующие в нем –*консервативными.*

28. Движение тела в центральном поле тяготения. Космические скорости.

Если в поле действуют силы, зависящие только от расстояния между взаимодействующими частицами, и направлены по прямой, соединяющей центр масс этих частиц, то такие силы называют *центральными.* Гравитационное поле является центральным.

Рассмотрим движущееся тело массой m в центральном поле тяготения тела массой M. Пусть $M \gg m$. Так как тело движется, то, следовательно, оно обладает кинетическую энергию $E_{\text{K}} = \dfrac{m\text{v}^2}{2}$, а так как это тело находится в поле тяготения тела M, то имеет и потенциальную энергию $E_{\text{p}} = -\gamma\dfrac{Mm}{R}$. При движении тела в отсутствии сил кинетическая и потенциальная энергии изменяются, но, согласно закону сохранения энергии, их сумма остается постоянной:

$$\frac{m\text{v}^2}{2} - \gamma\frac{Mm}{r} = \text{const}. \qquad (1)$$

Эта const может быть больше 0, меньше 0 и равна нулю, что зависит от начальных условий.

Рассмотрим движение искусственного спутника Земли по круговой орбите. Будем считать систему Земля-спутник замкнутой, а центр инерции этой системы совпадающей с центром Земли. Пусть для простоты Земля – однородный шар, радиус которого R=6400 км, а атмосфера отсутствует.

Первая космическая скорость – это скорость, которую необходимо сообщить телу для того, чтобы оно могло вращаться вокруг Земли по круговой орбите. Величину этой скорости можно найти, приравняв силу, сообщающую нормальное ускорение силе тяжести,

$$\frac{m\mathrm{v}_1^2}{r} = \gamma\frac{Mm}{r^2},$$

где r – расстоянии спутника от центра Земли: $r = R_З + h$. Если запуск спутника производится вблизи поверхности Земли, то $h << R_З$.

$$\mathrm{v}_1 = \sqrt{\frac{\gamma M_З}{R_З}} \approx 7{,}8 \text{ км,с – первая космическая скорость.}$$

Если скорость спутника в момент запуска $\mathrm{v} << \mathrm{v}_1$, то тело может упасть или двигаться по внутренней эллиптической орбите; если $\mathrm{v} >> \mathrm{v}_1$, то тело движется по внешней эллиптической орбите, причем чем больше скорость в момент запуска, тем более вытянутым будет эллипс. При дальнейшем увеличении скорости может оказаться, что тело покинет поле притяжения Земли.

Под *второй космической скоростью* понимается минимальная скорость, которую надо сообщить телу вблизи поверхности Земли (считая, что земной атмосферы нет), чтобы оно преодолело земное притяжение и стало спутником Солнца.

Найдем эту скорость из следующих соображений. Кинетическая энергия тела в момент запуска должна быть равна работе удаления этого тела с поверхности Земли в бесконечность (т.е. в (1) $\mathrm{const} = 0$):

$$\frac{m\mathrm{v}_{\mathrm{II}}^2}{2} = \gamma\frac{Mm}{r}.$$

Вновь считая $h << R_З$, получим $\mathrm{v}_{\mathrm{II}} = \sqrt{2\frac{\gamma M_З}{R_З}} \approx$7,8.1,4=11,2 км,с – вторая космическая скорость. Ее еще называют *параболической скоростью*. Тело, получившее на поверхности Земли начальную скорость v_{II}, станет спутником Солнца и будет вращаться вокруг Солнца подобно Земле со скоростью $\mathrm{v}_З = 30$ км/с.

Под *третьей космической скоростью* понимается такая минимальная начальная скорость тела на поверхности Земли, при которой оно способно выйти за пределы солнечной системы (считаем, что атмосфера отсутствует и что запуск производится в направлении орбитальной скорости Земли).

Приближенно эту скорость можно найти из энергетических соображений. Если телу сообщить на поверхности Земли кинетическую энергию $\frac{m\mathrm{v}_{\mathrm{II}}^2}{2}$, то оно будет вращаться вокруг Солнца по земной орбите со скоростью v_3. С точки зрения солнечного наблюдателя, для разрыва связей с Солнцем тело должно иметь начальную скорость на орбите $\mathrm{v} = \sqrt{2}\mathrm{v}_3 \approx$ 42 км/с. Таким образом, тело после выхода на земную орбиту должно иметь по отношению к Земле скорость $\mathrm{v}_0 = \mathrm{v} - \mathrm{v}_3$=12 км/с (остаточная скорость). Третью космическую скорость найдем, приравняв кинетическую энергию тела на Земле, то есть $\frac{m\mathrm{v}_{\mathrm{III}}^2}{2}$, сумме кинетических энергий $\frac{m\mathrm{v}_0^2}{2} + \frac{m\mathrm{v}_{\mathrm{II}}^2}{2}$:

$$\frac{m\mathrm{v}_{\mathrm{III}}^2}{2} = \frac{m\mathrm{v}_0^2}{2} + \frac{m\mathrm{v}_{\mathrm{II}}^2}{2} \Rightarrow \mathrm{v}_{\mathrm{III}} = \sqrt{\mathrm{v}_0 + \mathrm{v}_{\mathrm{II}}}$$

Подставляя значения v_{II} и v_0, получим $\mathrm{v}_{\mathrm{III}} \approx 16{,}4$ км/с.

Тема 6. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА.

29. Давление в жидкости и газе.

Гидроаэромеханика – раздел механики, изучающей равновесие и движение жидкостей и газов, их взаимодействие между собой и обтекаемыми ими твердыми телами.

В гидроаэромеханике используется единый подход к изучению жидкостей и газов, так как в ряде механических явлений их поведение определяется одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями.
В механике жидкости и газы рассматриваются как сплошные, непрерывно распределенные тела в занятой ими части пространства. Плотность жидкости мало зависит от давления, плотность же газов от давления зависит существенно. Из опыта известно, что сжимаемостью жидкости и газа во многих задачах можно пренебречь и пользоваться единым понятием несжимаемой жидкости – жидкости, плотность которой всюду одинакова и не изменяется со временем. Следовательно, приближенно можно считать все жидкости невязкими и несжимаемыми: такие жидкости называют *идеальными.*

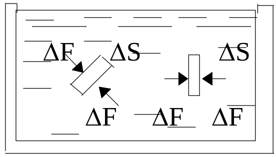

Рис. 29.1.

Если в покоящуюся жидкость поместить тонкую пластинку, то части жидкости, находящиеся по разные стороны от нее, будут действовать на каждый ее элемент ΔS с силами ΔF, которые независимо от того, как пластинка ориентирована, будут равны по модулю и направлены перпендикулярно площадке ΔS, так как наличие касательных сил привело бы частицы жидкости в движение (см. рис.29.1).

Физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади, называется *давлением* жидкости:

$$\boxed{p = \frac{\Delta F}{\Delta S}}.$$

Единица давления — паскаль (Па): 1 Па .равен давлению, создаваемому силой 1 И, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м^2 (1 Па=1 Н/м^2).

Давление при равновесии жидкостей (газов) подчиняется **закону Паскаля** (Блез Паскаль (1623-1662))**:** давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по воем направлениям, причем давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью.

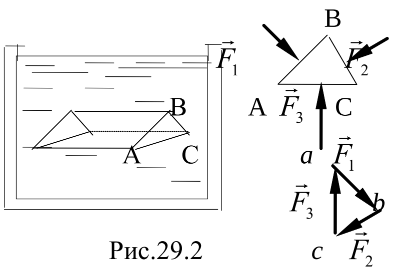

Рис.29.2

Докажем этот закон.. Выделим в жидкости трехгранную призму (рис.29.2). Поскольку жидкость неподвижна, то $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=0$ (см. рис.). $\Delta ABC \sim \Delta abc$. Из этого подобия получим:

$$\frac{F_1}{AB}=\frac{F_2}{BC}=\frac{F_3}{AC}. \quad (1)$$

Но $F_1=p_1S_1=p_1ABh$; $F_2=p_2S_2=p_2BCh$; $F_3=p_3S_3=p_3ACh$. Тогда пропорция (1) примет вид: $\dfrac{p_1ABh}{AB}=\dfrac{p_2BCh}{BC}=\dfrac{p_3AC\ h}{AC}$. После преобразований получим: $p_1=p_2=p_3$. Так мы выбирали призму произвольной величины, то вывод справедлив для любой призмы. Уменьшая размер призмы, придем к очень малым площадкам, ориентированным различно около некоторой точки. Следовательно, давление в данной точке одинаково по всем направлениям и одинаково передается во все стороны.

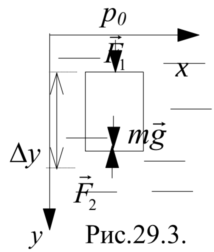

Рис.29.3.

Рассмотрим, как влияет вес жидкости на распределение давления внутри покоящейся несжимаемой жидкости (рис.29.3). При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, иначе не было бы равновесия. Поэтому свободная поверхность покоящейся жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда. Если жидкость несжимаема, то ее плотность не зависит от давления. Действие силы тяжести дает разность давлений в горизонтальных слоях жидкости. Выделим в жидкости прямоугольный параллелепипед высотой Δy и площадью основания S. Для покоящейся жидкости: $\vec{F}_1+\vec{F}_2+m\vec{g}=0$.

$$F_1-F_2+mg=0; \quad F_1=p_1S;\ F_2=p_2S;\ m=\rho S\Delta y;$$

$$p_1S-p_2S+\rho S\Delta yg=0. \qquad \boxed{\Delta p=\rho\Delta yg}.$$

Уменьшим размеры призмы и перейдем к дифференциально малой высоте: $dp=\rho dyg$ и проинтегрируем: $\int\limits_{p_0}^{p}dp=\int\limits_0^h\rho gdy$. В результате получим *закон гидростатического давления:* $\boxed{p=p_0+\rho gh}$.

Таким образом, в любом горизонтальном слое давление будет постоянно и будет зависеть от глубины слоя *h*. При поперечном сечении S столба жидкости, его высоте h и плотности ρ вес $P' = \rho g h S$, а давление на нижнее основание: p= $P'/S = \rho g h$ (2).

Согласно (2) сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, определяемая **законом Архимеда**: на тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны жидкости (газа) направленная вверх выталкивающая сила равная весу вытесненной телом жидкости (газа),

$$F_A = \rho g V,$$

где ρ – плотность жидкости, V – объем погруженного в жидкость тела.

30. Уравнение неразрывности.

Движение жидкости называется **течением,** а совокупность частиц движущейся жидкости – **потоком.**

Графически движение жидкостей изображается с помощью *линий тока*. ***Линия тока*** – линия, в каждой точке которой вектор скорости частиц жидкости направлен по касательной к ней.

Густота линий тока x, характеризуемая отношением числа линий к площади перпендикулярной им площадки, через которую они проходят, больше там, где больше скорость течения жидкости, и меньше там, где жидкость течет медленнее.

Стационарное *(или установившееся)* ***течение*** *– течение жидкости, при котором скорость жидкости в каждой точке потока не изменяются со временем.*

Часть жидкости, ограниченная линиями тока, называется ***трубкой тока***. При установившемся течении форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой ее точке со временем не изменяются.

Линии тока при стационарном течении остаются неизменными и совпадают с траекторией отдельных частиц жидкости. Если стационарное течение идеальной жидкости происходит по какой-либо трубе, то стенки этой трубы могут служить стенкой трубки тока.

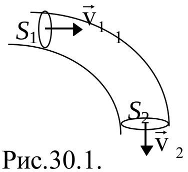

Рис.30.1.

Возьмем трубку тока и выберем два нормальных сечения S_1 и S_2. Обозначим через $\vec{v}_1$ скорость течения жидкости в том месте, где проведено сечение S_1, $\vec{v}_2$ – скорость течения в сечении S_2. Тогда за время Δt через сечение S_1 пройдет объем жидкости $V_1 = v_1 S_1 \Delta t$, через сечение S_2 объем $V_2 = v_2 S_2 \Delta t$. Поскольку жидкость несжимаема, то $V_1 = V_2$, следовательно: $\boxed{v_1 S_1 = v_2 S_2}$. Это соотношение справедливо для любых двух сечений трубки тока. Следовательно:

$$vS = const\ .$$

то есть произведение скорости течения идеальной жидкости на поперечное сечение есть величина постоянная для данной трубки тока. Это уравнение называется ***уравнением неразрывности*** для несжимаемой жидкости. По теореме о неразрывности струи в тех местах, где труба шире, жидкость будет протекать медленнее, а в тех местах, где труба уже, скорость течения жидкости будет больше.

31. Уравнение Бернулли. Формула Торричелли.

Если жидкость покоится, то давление зависит только от ее плотности глубины погружения. Однако в текущей жидкости оно зависит также от скорости потока.

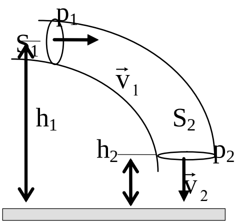

Рис.31.1.

Рассмотрим течение идеальной жидкости по наклонной трубке тока малого сечения (рис.31.1). Выделим в стационарно текущей струе жидкости некоторую определенную массу жидкости Δm, которая протекает первоначально через сечение S_1, а затем через S_2. Пусть скорость течения жидкости в сечении S_1 будет $\vec{v}_1$, а давление p_1. В сечении S_2 будет $\vec{v}_2$, а давление p_2. Высоту, на которой расположено сечение S_1 обозначим h_1, а где сечение S_2 – обозначим h_2.

При протекании некоторой массы жидкости Δm будет совершаться механическая работа, т.к. на эту массу жидкости действует сила, обусловленная наличием давления. Пусть E_1 – полная энергию массы жидкости Δm в сечении S_1, а E_2 – полная энергия жидкости в сечении S_2: $E_1 = \dfrac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta mgh_1$, $E_2 = \dfrac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta mgh_2$. Тогда: $E_2 - E_1 = A$ или

$$\frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta mgh_2 - \frac{\Delta m v_1^2}{2} - \Delta mgh_1 = A \qquad (1)$$

Работа A совпадает с работой, совершаемой при перемещении всего участка жидкости, заключенного между сечениями S_1 и S_2. В месте расположения первого сечения жидкость должна продвинуться на отрезок $l_1 = v_1 \Delta t$, во втором сечении на отрезок $l_2 = v_2 \Delta t$. Силы, действующие, на оба конца выделенного участка жидкости, соответственно равны: $F_1 = p_1 S_1$ и $-F_2 = p_2 S_2$. Сила F_2 имеет знак «минус», так как она направлена против направления течения жидкости. Следовательно, работа внешних сил равна:

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2 = p_1 s_1 l_1 - p_2 s_2 l_2 = p_1 s_1 \mathrm{v}_1 \Delta t - p_2 s_2 \mathrm{v}_2 \Delta t. \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1) и, преобразовав, получим:

$$\frac{\Delta m \mathrm{v}_1^2}{2} + \Delta m g h_1 + p_1 s_1 \mathrm{v}_1 \Delta t = \frac{\Delta m \mathrm{v}_2^2}{2} + \Delta m g h_2 + p_2 s_2 \mathrm{v}_2 \Delta t \qquad (4)$$

Так как $\mathrm{v}_1 S_1 = \mathrm{v}_2 S_2$, а $\mathrm{v}_1 S_1 \Delta t = \mathrm{v}_2 S_2 \Delta t = V$ – объем жидкости, заключенный между сечениями S_1 и S_2. Разделим правую и левую части уравнения (4) на V, и учтем, что $\rho = \dfrac{\Delta m}{V}$:

$$\boxed{\frac{\rho \mathrm{v}_1^2}{2} + \rho g h_1 + \mathrm{p}_1 = \frac{\rho \mathrm{v}_2^2}{2} + \rho g h_2 + \mathrm{p}_2}.$$

Так как сечения выбирались произвольно, то можно записать:

$$\frac{\rho \mathrm{v}^2}{2} + \rho g h + p = \mathrm{const}.$$

Это уравнение называют уравнением Бернулли для наклонной трубки тока. Как видно из его вывода, уравнение Бернулли – выражение закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению жидкости. Величина *p* называется статическим давлением (давление на поверхность обтекаемого ею тела), величина $\rho \mathrm{v}^2 / 2$ – динамическим давлением. Величина $\rho g h$ – это гидростатическое давление.

Следствия из уравнения Бернулли.

а) Трубка расположена горизонтально ($h_1=h_2$), поток неравномерный: $\dfrac{\rho \mathrm{v}_1^2}{2} + p_1 = \dfrac{\rho \mathrm{v}_2^2}{2} + p_2$ (или $\dfrac{\rho \mathrm{v}^2}{2} + \mathrm{p} = \mathrm{const}$). Из этого уравнения получим: $\rho(\mathrm{v}_1^2 - \mathrm{v}_2^2)/2 = \mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_1$. Если $\mathrm{v}_2>\mathrm{v}_1$, то есть

$\rho(\mathrm{v}_1^2 - \mathrm{v}_2^2) < 0$, $\Rightarrow$ $\mathrm{p}_2-\mathrm{p}_1<0$, то есть $\mathrm{p}_2<\mathrm{p}_1$.

При течении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей разное сечение, скорость жидкости больше в местах сужений (из уравнения неразрывности), а давление больше в широких местах.

б) Трубка не расположена горизонтально ($h_1 \neq h_2$), а поток равномерный $\mathrm{v}_2=\mathrm{v}_1$: $\rho g h_1 + \mathrm{p}_1 = \rho g h_2 + \mathrm{p}_2 \Rightarrow \mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2 = \rho g h_2 - \rho g h_1$.

Если принять $h_2 - h_1 = h$, то получим: $\mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 + \rho g h$

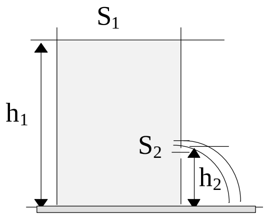

Рис.31.2.

в) Примером применения уравнения Бернулли является расчет скорости истечения жидкости из узкого отверстия. Возьмем цилиндрический сосуд, в боковой стенке которого еа некоторой глубине ниже уровня жидкости имеется маленькое отверстие. Рассмотри два сечения (на уровне h_1 свободной поверхности жидкости и на уровне h_2 выхода ее из отверстия). Напишем для них уравнение Бернулли

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 .$$

Так как давление p_1 и p_2 в жидкости на уровнях первого и второго сечений равны атмосферному, то это уравнение примет вид:

$$\frac{v_1^2}{2} + g h_1 = \frac{v_2^2}{2} + g h_2 .$$

Согласно уравнение неразрывности: $v_2 / v_1 = S_1 / S_2$, где S_1 и S_2 – площади поперечных сечений сосуда и отверстия.

Если $S_1 >> S_2$, то $v_1 << v_2$ и членом $\frac{v_1^2}{2}$ можно пренебречь, тогда

$$v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gh \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

Это выражение получило название *формулы Торричелли.* Скорость истечения жидкости из отверстия (бокового или донного) равна скорости тела при свободном падении его с высоты уровня жидкости. Эта скорость не зависит ни от плотности жидкости, ни от давления.

32. Вязкость.

Вязкость (внутреннее трение) – это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой.

Существует два режима течения жидкостей. Течение называется **ламинарным** (слоистым), если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними.

Течение называется **турбулентным** (вихревым) если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости.

Установившееся течение может быть только ламинарным. При ламинарном течении жидкости по трубе скорость слоев непрерывно изменяется от максимальной (по оси трубы) до нуля (у стенок).

Любой слой тормозит движение соседнего слоя, расположенного ближе к оси трубы, и оказывает ускоряющее действие на слой, расположенный дальше от оси (рис.32.1). Между соприкасающимися слоями жидкости действуют тангенциальные силы внутреннего трения, противодействующие происходящим в них изменениям движения. Сила внутреннего трения $\vec{F}$ тем больше, чем больше рассматриваемая площадь поверхностного слоя S и зависит от $d\text{v}/dx$. Величина $d\text{v}/dx$ показывает, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении x, перпендикулярном направлению движения слоев и называется *градиентом скорости*. Таким образом, модуль силы внутреннего трения

$$F = \eta \frac{d\text{v}}{dx} S,$$

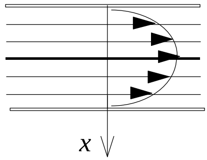

Рис.32.1.

где коэффициент пропорциональности η, зависящий от природы жидкости, называется динамической вязкостью (или коэффициентом вязкости, вязкостью). Динамическая вязкость численно равна силе трения, возникающей между параллельно движущимися слоями жидкости единичной площади при единичном градиенте скорости.

Единица вязкости [η]=Па.с.

С увеличением скорости потока ламинарное течение может перейти в турбулентное, а скорость, при которой происходит этот переход, называется *критической.*

Английский ученый О.Рейнольдс в 1883 экспериментально установил, что характер течения зависит от безразмерной величины, называемой числом Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \bar{\text{v}} d}{\eta} = \frac{\bar{\text{v}} d}{\gamma},$$

где $\gamma = \eta / \rho$ – кинематическая вязкость, $\bar{\text{v}}$ – средняя по течению трубы скорость жидкости, d – характерный линейный размер, например, диаметр трубы.

При малых значениях числа Рейнольдса ($\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$) наблюдается ламинарное течение, при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$ ламинарное течение переходит в турбулентное. Для воды в гладких водопроводных трубах $\mathrm{Re}_{кр} \approx 2300$.

Тема 7. ДВИЖЕНИЕ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА.

33. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции в системах, движущихся поступательно.

Законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета Системы отсчета, движущиеся с ускорением относительно инерциальных, называют ***неинерциальными*** (НИСО) В этих системах законы динамики можно применять, если кроме сил, обусловленных воздействием тел друг на друга, ввести рассмотрение сил особого рода – так называемых ***сил инерции***. Проявление этих сил необходимо учитывать: 1) при ускоренном поступательном движении системы отсчета; 2) при рассмотрении тел, покоящихся во вращающейся системе отсчета; 3) при рассмотрении тел, движущихся во вращающейся системе отсчета.

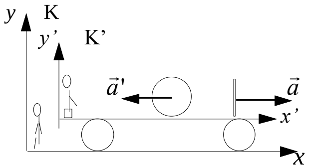

Рис.33.1.

В этом параграфе рассмотрим первый случай. Пусть на горизонтальном прямолинейном участке железнодорожного пути находится платформа, а на полу вагона шар. Трения между шаром и платформой нет. Когда вагон покоится, шар неподвижен в обеих системах отсчета. Оба наблюдателя видят одно и то же. Уравнение движения: $m\vec{g} + \vec{N} = 0; \quad a_ш = 0$. Все происходит в соответствии с законом Ньютона, то есть обе системы отсчета являются инерциальными.

Если вагон движется с ускорением $\vec{a}$, то наблюдатели в разных системах отсчета видят разные явления. Для наблюдателя, находящегося в системе К, шар покоится: $m\vec{g} + \vec{N} = 0; \quad a_ш = 0$. Трения нет, законы Ньютона не нарушаются. Для наблюдателя в системе К' шар движется с ускорением a', направленным против ускорения вагона, причем $\vec{a}' = -\vec{a}$

По второму закону Ньютона наблюдатель в системе К' скажет, что на шар массой m действует сила $m\vec{a}'$, но нет тела, вызывающего действие этой силы, хотя $m\vec{g} + \vec{N} = 0$. То есть, в неинерциальных системах отсчета не «работают» законы Ньютона. Введем силу инерции, которая вызвана не взаимодействием тел, а является результатом ускоренного движения системы отсчета $\vec{F}_{ин}$.Для наблюдателя в системе К' второй закон Ньютона: $m\vec{a}' = \vec{F}_{ин}$.

Уравнение $\vec{a}' = -\vec{a}$ преобразуем, умножив обе его части на массу: Следовательно, $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}$

Таким образом, на все тела, находящиеся в поступательно движущихся системах отсчета кроме обычных сил действуют силы инерции, равные произведению массы тела и ускорения системы, взятому с обратным знаком. Уравнение движения в неинерциальных системах отсчета имеют такой же вид, как в инерциальных системах отсчета, только в сумму действующих на него сил входят наряду с ньютоновскими и силы инерции: $m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}$.

34. Силы инерции во вращающихся системах. Принцип эквивалентности Эйнштейна.

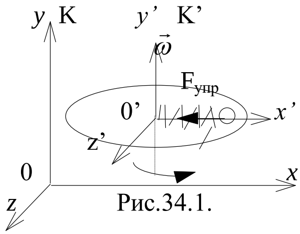

Рис.34.1.

Все вращающиеся системы отсчета является неинерциальными. Рассмотрим следующие два случая.

1. Пусть диск равномерно вращается с угловой скоростью ω (ω=const) вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр (рис.34.1). На диске установлен пружинный маятник, представляющий собой шарик на спице, прикрепленный к пружине. При вращении диска пружина растягивается.

Для наблюдателя в системе К шар движется по окружности радиусом R. Следовательно на него действует сила, равная $F = m\omega^2 R$ и направленная вдоль по спице перпендикулярно к оси вращению диска: . Она равна силе упругости, возникшей в пружине, направленной к центру диска. Поэтому сила упругости и создает нормальное ускорение, то есть $\vec{F}_{\text{упр}} = -m\omega^2 \vec{R}$. Явление происходит в соответствии со вторым законом Ньютона. Для наблюдателя в системе К' шар покоится. Это возможно, если сила упругости уравновешивается равной и противоположно направленной ей силой $\vec{F}_{\text{цб}}$: $\vec{F}_{\text{упр}} = -\vec{F}_{\text{цб}}$. Сила $\vec{F}_{\text{цб}}$ называется центробежной силой инерции, направлена по горизонтали от оси вращения диска и равна: $\vec{F}_{\text{цб}} = m\omega^2 \vec{R}$.

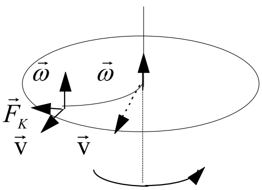

Рис. 34.2.

2. Пусть шарик массой m движется с постоянной скоростью v вдоль радиуса равномерно вращающегося диска (v=const, ω=const, v⊥ω). Если диск не вращается, то шарик, направленный вдоль радиуса, попадает в точку А, если же диск привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик покатися по кривой ОВ (см. рис.), причем его скорость

относительно диска изменяет свое направление. Это возможно, если на шарик действует сила, перпендикулярная скорости v. Эта сила называется ***кориолисовой силой инерции***. Она равна:

$$\vec{F}_K = 2m\left[\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{\omega}\right].$$

Вектор $\vec{F}_K$ перпендикулярен векторам скорости тела и угловой скорости вращения системы отсчета в соответствии с правилом правого винта.

Сила Кориолиса действует только на тела, движущиеся относительно вращающейся системы отсчета, например, относительно Земли. Поэтому действием этих сил объясняется ряд наблюдаемых на Земле явлений. Так, если тело движется в северном полушарии на север, то действующая на него сила Кориолиса будет направлена вправо по отношению к направлению движения, то есть тело несколько отклонится на восток. Если тело движется на юг, о сила Кориолиса также действует вправо, если смотреть по направлению движения, то есть тело отклонится на запад. Поэтому в северном полушарии наблюдается более сильное подмывание правых берегов рек, правые рельсы по движению изнашиваются быстрее и т.д. Аналогично в южном полушарии сила Кориолиса будет направлена влево по отношению к направлению движения. Силы Кориолиса оказывают действие на движущиеся корабли и самолеты, на воздушные течения в атмосфере и водные течения в океанах. Эти силы вызывают поворот плоскости колебаний маятника Фуко.

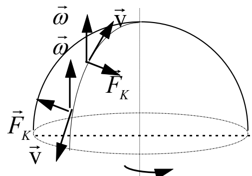

Рис. 34.3.

Итак, во вращающихся системах отсчета на все движущиеся тела действуют две силы инерции – центробежная сила и сила Кориолиса.

Обобщим полученный результат для всех неинерциальных систем отсчета и получим ***основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета***:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}} + \vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_{\text{К}}.$$

Подчеркнем еще раз, что силы инерции вызываются не взаимодействием тел, а ускоренным движением системы отсчета. Поэтому они не подчиняются третьему закону Ньютона, так как если на какое-либо тело теле действует сила инерции, то не существует противодействующей силы, приложенной к данному телу.

Тема 8. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

35. Постулаты специальной теории относительности. Преобразования Лоренца.

Все известные законы механики инвариантны к преобразованиям Галилея. Естественно, возникает вопрос – будут ли *другие* физические законы инвариантны к этим преобразованиям. Когда были проведены эксперименты по определению скорости света и исследованию влияния различных факторов на величину скорости света, то оказалось, что классическая механика Ньютона находится в противоречии с полученными результатами.

Применение элементарного преобразования Галилея к задаче о скорости света относительно движущегося приемника к задаче о скорости света относительно движущегося приемника или источника света приводит к тому, что скорость света относительно движущегося приемника c_R должна определяться как $c_R = c \pm \mathrm{v}$, где v – скорость приемника, который движется навстречу источнику (+) или от источника (–).

Однако во всех экспериментах скорость света оказывалась неизменной в свободном пространстве, то есть имела одно и то же значение во всех системах отсчета, движущихся равномерно и прямолинейно относительно источника света. Скорость света оказалась инвариантной для инерциальных систем отсчета.

Кроме того, в природе не было обнаружено объектов, движущихся со скоростью большей, чем скорость света.

В связи с этим было признано, что механика Ньютона является справедливой лишь для движения больших масс и малых скоростей, где ее выводы совпадают с практикой. В результате возникла необходимость в создании новой, более всеобъемлющей механики, которая включала бы механику Ньютона, как частный предельный случай для малых скоростей.

Такую теорию предложил Эйнштейн. Она получила название специальной (частной) теории относительности. В основу теории Эйнштейн положил два постулата:

1. *Все физические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета.* (Здесь обобщен принцип относительности Галилея на любые физические процессы).

Таким образом, никаким опытом нельзя выделить предпочтительную инерциальную систему отсчета, они все эквивалентны.

2. *Скорость света в вакууме не зависит от движения источника и одинакова во всех направлениях*, то есть скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах и является предельной.

Исходя из этих постулатов должны быть получены такие преобразования, чтобы значение скорости света не зависело от движения источника или приемника света. Такая форма преобразования координат и времени получила название преобразований Лоренца.

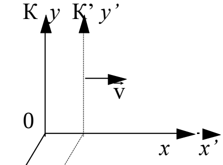

Рис.35.1.

Пусть имеется некоторая система координат К (x, y, z, t), в которой источник неподвижен, и пусть также имеется некоторая движущаяся система координат К', в которой наблюдатель измеряет параметры (x', y', z', t'). Предположим, что начало отсчета времени t' совпадает с началом отсчета t и что в этот нулевой момент времени начала координат систем К и К' также совпадают. Предположим, система к' движется в сторону ($+x$) со скоростью v относительно системы К. Тогда преобразования Лоренца будут выглядеть следующим образом:

$$x' = \frac{x - \mathrm{v}t}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - \frac{\mathrm{v}x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \qquad (1).$$

Из преобразований Лоренца следует, что время относительно, то есть меняется при переходе от одной системы отсчета к другой.

Если изменить направление скорости на противоположное, то вместо (1) можно получить *обратное* преобразование:

$$x = \frac{x' + \mathrm{v}t}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t = \frac{t' + \frac{\mathrm{v}x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \qquad (2).$$

Одинаковый вид (1) и (2) является следствием полного равноправия систем отсчета (относительности движения), то есть любая из систем К и К' может быть принята за неподвижную, при этом будет изменяться только знак относительной скорости.

При малых скоростях, когда можно считать $\mathrm{v} << c$, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Это свидетельствует о том. что теория относительности не отвергает классическую механику, но рассматривает ее как частный случай малых относительных скоростей. Таким образом, СТО указывает на границы применимости классической механики.

СТО называется релятивистской теорией, а явления, описываемы этой теорией – релятивистскими. Механика, описывающая движения с релятивистскими (близкими к c) скоростями, называется *релятивистской механикой*.

36. Следствия из преобразований Лоренца.

Относительность одновременности событий. Одновременными будем считать два события, происходящие в разных точках x_1 и x_2 некоторой системы отсчета, если они происходят в один и тот же момент по часам этой системы отсчета.

Рассмотрим вновь две системы отсчета: неподвижной К и движущейся К'. Пусть в каждой из систем находится неподвижный относительно собственной системы наблюдатель. Предположим, что в системе К в точках с координатами x_1 и x_2 происходят одновременно два события в момент времени t_{x_1} и t_{x_2}. Для наблюдателя в системе К одновременность событий означает, что $t_{x_1} = t_{x_2} = t; \quad t_{x_1} - t_{x_2} = 0$. Для наблюдателя в системе К' этим событиям, как следует из преобразований Лоренца, будут соответствовать координаты: $x_1' = \dfrac{x_1 - \mathrm{v}t}{\sqrt{1 - \dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$; $x_2' = \dfrac{x_2 - \mathrm{v}t}{\sqrt{1 - \dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$

и моменты времени: $t'_{x_1} = \dfrac{t_1 - \dfrac{\mathrm{v}x_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$; $t'_{x_2} = \dfrac{t_2 - \dfrac{\mathrm{v}x_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$.

Для проверки одновременности событий наблюдатель в К' системе должен из t_{x_2}' вычесть t_{x_1}': $\boxed{t'_{x_2} - t'_{x_1} = \dfrac{(x_2 - x_1)\dfrac{\mathrm{v}}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \neq 0}$,

то есть события в неподвижной системе для наблюдателя в движущейся системе К' происходят не одновременно. Из полученной формулы следует, что в системе К' события будут одновременными только при $x_1 = x_2$, то есть события в одной точке.

Таким образом понятие одновременности не абсолютно.

Замедление времени. Пусть в движущейся системе отсчета К' в неподвижной точке x' произошло событие длительностью $\tau' = t_2' - t_1'$, где

t_1' и t_2' моменты начала и конца события по часам, покоящимся в системе К'. Наблюдатель в неподвижной системе К отметит по часам своей системы начало и конец события в моменты t_1 и t_2, которые будут связаны с моментами t_1' и t_2' преобразованиями Лоренца (при учете того, что x неизменно): $t'_1 = \dfrac{t_1 - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$; $t'_2 = \dfrac{t_2 - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$. Тогда:

$$\boxed{\tau' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}} \qquad (1)$$

Итак, продолжительность события в системе К $\tau = t_2 - t_1$ и К' $\tau' = t_2' - t_1'$ не совпадают. Интервал, измеренный часами, неподвижными в данной системе отсчета, называются *собственным* интервалом. Интервал для движущейся системы К' оказывается больше, чем для неподвижной К, то есть процессы в движущейся системе длятся дольше, чем в неподвижной.

Таким образом, ход времени для движущейся системы отсчета ***замедляется*** относительно неподвижной системы.

Сокращение длины. Пусть в системах К и К' рассматривается объект, который неподвижен относительно системы К' и двигается с ней со скоростью v вдоль оси x. Допустим, что размеры объекта определяются координатами в К' системе x_1' и x_2'. Тогда собственные размеры (в К' системе) объекта можно представить в виде: $\boxed{l_0 = x_2' - x_1'}$, причем координаты x_1' и x_2' определятся для одного момента времени t'.

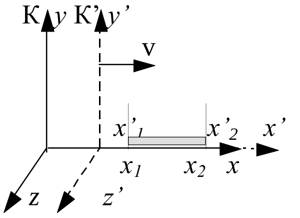

Рис.36.1

Для наблюдателя, покоящегося в неподвижной К системе размеры объекта будут определяться выражениями: $\boxed{l = x_2 - x_1}$.

Из преобразований Лоренца определим связь между l_x и l_x':

$$x_1' = \frac{x_1 - \mathrm{v}t}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}};\ x_2' = \frac{x_2 - \mathrm{v}t}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \Rightarrow x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \quad \text{или} \quad \boxed{l = l_0\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$$

Из полученного выражения следует, что *длина стержня зависит от скорости его движения относительно системы отсчета.* Если $\mathrm{v} << c$, то подкоренное выражение стремится к единице и $l = l_0$, то есть при малых скоростях длина стержня во всех инерциальных системах отсчета одинакова. Если $\mathrm{v} \to c$, то чем больше скорость движение стержня, тем меньше его длина, измеренная в этой системе. Из формулы для Лоренцева сокращения длины следует, что тела не могут двигаться со скоростями $\mathrm{v} \geq c$, так как при $\mathrm{v} = c$ длина $l = 0$, а при $\mathrm{v} > c$ l должна быть мнимой.

37. Преобразование и сложение скоростей.

В классической механике закон сложения скоростей имеет вид

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{\mathrm{v}},$$

где $\vec{u}$ и $\vec{u}'$–соответственно скорость тела в инерциальных системах отсчета К и К’, $\vec{\mathrm{v}}$–относительная скорость движения этих систем. Однако этот закон несправедлив в случае движения со скоростью, близкой к скорости света.

Рассмотрим движение материальной точки, движущейся в системе К’ со скоростью u’. Пусть $\vec{\mathrm{v}}$–скорость системы К’ относительно и К направлена вдоль оси x (x’). В системе К’ проекция вектора скорости на ось x’ определяется соотношением: $u'_{\mathrm{x}} = \dfrac{dx'}{dt'}$. В системе К проекция вектора скорости этой точки на ось x: $u_{\mathrm{x}} = \dfrac{dx}{dt}$.

Используя преобразования Лоренца, получим:

$$dx = \frac{dx' + \mathrm{v}dt'}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}; \qquad dt = \frac{dt' + \frac{\mathrm{v}dx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}; \qquad u_x = \frac{dx' + \mathrm{v}dt'}{dt' + \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}^2}dx'}$$

Разделив числитель и знаменатель правой части этого соотношения на dt', получим релятивистский закон сложения скоростей:

$$u_x = \frac{u'_x + \mathrm{v}}{1 + \frac{\mathrm{v}}{c^2} u'_x}.$$

В случае, когда $\mathrm{v} << c$, эти соотношения переходят в формулы сложения скоростей классической механики:

$$u_\mathrm{x} = u'_x + \mathrm{v}.$$

Пусть скорость u ' равна скорости света c: u '$= c$. Тогда:

$$u = \frac{c + \mathrm{v}}{1 + \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}^2} c} = \frac{(c + \mathrm{v})\mathrm{c}}{c + \mathrm{v}} = c.$$

Положим, что $u' = \mathrm{v} = c$, то $u = \dfrac{c + c}{1 + \frac{c}{c^2} c} = c$.

Таким образом, если складываемые скорости u ' и v не превышают c, то и результирующая скорость не может превысить c. Этот результат находится в соответствии с *принципом постоянства скорости света*: при сложении любых скоростей результат не превышает скорость света в вакууме, а сам свет распространяется с одинаковой скоростью c с точки зрения любого наблюдателя.

38. Основной закон релятивистской динамики материальной точки.

Основными понятиями релятивистской динамики, так же как и классической, являются масса и сила. До Эйнштейна инертная масса рассматривалась как величина постоянная. Но в 1901 г. физиками-экспериментаторами было обнаружено, что масса быстро движущихся электронов возрастает при увеличении скорости. Согласно теории относительности, масса одного и того же тела имеет различные значения в зависимости от скорости его движения и от выбора системы отсчета, в которой производится измерение. Зависимость массы m (движущегося относительно неподвижной системы отсчета) тела от скорости движения выражается соотношением:

$$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{m}_0}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}},$$

где m_0 – *масса покоя*, т.е масса тела в системе отсчета, относительно которой оно покоится. Масса покоя есть инвариантная величина, одинаковая во всех системах отсчета. m называют *релятивистской массой* или *массой движения.*

При $v << c$ релятивистская масса m стремится к m_0 (рис.38.1). Так же, как в классической, масса в релятивистской механике есть мера *инертности*, но инертность возрастает с ростом скорости, то есть чем больше скорость, тем «труднее» изменить эту скорость. При $v \approx c$ инертность возрастает настолько, что дальнейшее увеличение скорости становится невозможным, поэтому скорость света предельна и недостижима.

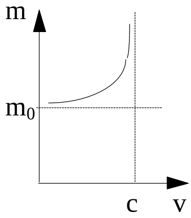

Рис.38.1.

Теория относительности не запрещает существования частиц, движущихся со скоростью света. Такими частицами являются фотоны, у которых масса покоя равна нулю.

В классической физике *импульс* определяется по формуле: $\vec{p} = m\vec{v}$. Но масса движущегося тела зависит от скорости, поэтому релятивистский импульс:

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1)$$

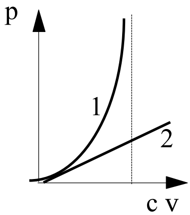

Рис.38.2.

На рис.38.2. кривая 1 показывает зависимость релятивистского импульса от скорости тела, кривая 2 – классического импульса, определяемого по формуле: $\vec{p} = m_0\vec{v}$. При малых скоростях графики совпадают. При скоростях движения, сравнимых со скоростью света, релятивистский и классический импульсы не совпадают. Значение релятивистского импульса стремится к бесконечности.

Для замкнутой системы и в релятивисткой динамике остается справедливым закон сохранения импульса.

Согласно первому постулату СТО все законы природы и их математическое описание должны быть инвариантны относительно инерциальных систем отсчета. Это же касается и законов динамики. Второй закон Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Это уравнение оказывается инвариантным, если относительно преобразований Лоренца, если производная по времени берется от релятивистского импульса (1):

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2)$$

Это *основной закон релятивистской динамики материальной точки*. Можно показать, что в отличие от классической механики, в релятивистской механике ускорение в общем случае не совпадает по направлению с вызывающей его силой. Только в двух случаях вектор ускорения коллинеарен вектору силы:

а) $\vec{F}\perp\vec{v}$ – на материальную точку действует поперечная сила, которая вызывает изменение скорости только по направлению, а модуль скорости и релятивистская масса не изменяются:

б) $\vec{F}||\vec{v}$ – на материальную точку действует продольная сила, которая вызывает изменение модуля скорости и массы материальной точки.

Причем поперечная сила сообщает материальной точке большее ускорение, чем равная по модулю продольная сила.

39. Закон взаимосвязи массы и энергии.

Изменение скорости в релятивистской механике влечет за собой изменение массы, а следовательно, полной энергии. Это означает, что между массой и энергией существует взаимосвязь. Она была установлена Эйнштейном.

Пусть на свободное тело с массой покоя m_0 действует полная сила $\vec{F}$. Из механики Ньютона известно, что приращение энергии тела равно работе действующей на него силы по перемещению тела. Подсчитаем работу этой силы. Если перемещение $d\vec{l}$, то $dA = (\vec{F}d\vec{l})$. Опуская вывод, получим: $A = \int \vec{F}d\vec{l} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + C$.

Постоянную интегрирования С найдем из условия, что при v=0 $E_K=0$. Так как m_0 не изменяется, то можно считать, что $A=E_K$, то есть работа идет на сообщение телу кинетической энергии:

$$A = E_K = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + C.$$

Если $E_K=0$ (v=0), то $C = -m_0c^2$. Тогда кинетическая энергия релятивистской частицы определяется соотношением:

$$E_K = mc^2 - m_0c^2. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия равна разности энергий, которыми обладает тело в состоянии движения и в состоянии покоя (рис.39.1).

Движущееся тело обладает энергией, которая зависит от релятивистской массы. Полная релятивистская энергия определяется (без вывода):

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Но из (2) $mc^2 = E_K + m_0c^2$, то есть

$$\boxed{E = E_K + m_0c^2}.$$

Если v<<c (v=0), то

$E_0 = m_0c^2$ – *энергия покоя.*

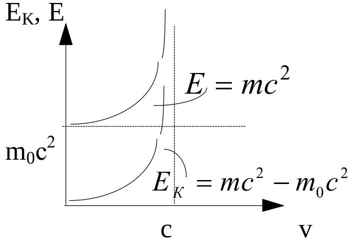

Рис.39.1.

Энергия покоя является внутренней энергией тела. Она складывается из кинетической энергии всех частиц относительно центра масс, потенциальной энергии их взаимодействия и суммы потенциальных энергий покоя всех частиц.

В СТО несправедлив закон сохранения масс покоя, и именно этим объясняется дефект масс ядра. Дефект масс заключается в том, что сумма масс покоя отдельных составных частей ядра атома больше, чем масса покоя самого ядра.

В СТО справедлив закон сохранения релятивистской массы и энергии: изменение полной энергии тела ΔE сопровождается эквивалентным изменением ее массы (Δm):

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}, \qquad \Delta E = \Delta mc^2 \qquad (3).$$

Если в классической механике масса тела выступает мерой инертности или мерой гравитации, то в релятивистской механике она имеет еще смысл энергосодержания.

Соотношение (3) показывает, что *возможен переход материальных объектов, имеющих массу покоя, в электромагнитное излучение, не имеющее массы покоя, и при этом выполняется закон сохранения энергии.* Классическим примером такого перехода является реакция соединения электрона и позитрона, в результате которой две частицы с одинаковыми массами покоя перестают существовать и превращаются в электромагнитное излучение: $\begin{matrix} {}_{-1}e^0 + {}_{+1}e^0 \to 2h\nu \\ E_0 + E_0 = 2E_0 \end{matrix}$. Возможен и обратный переход.

Энергия покоя и его импульс связаны с релятивистской массой соотношениями:

$$E = \mathrm{m}c^2; \qquad \vec{p} = \mathrm{m}\vec{\mathrm{v}}$$

Возведем оба равенства в квадрат, а второе умножим на c^2:

$$E^2 = \mathrm{m}^2c^4 \qquad\qquad p^2c^2 = \mathrm{m}^2\mathrm{v}^2c^4$$

Вычтем из первого второе уравнение: $E^2 - p^2c^2 = \mathrm{m}^2c^4(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2})$

или $$E^2 - p^2c^2 = \frac{\mathrm{m}_0^2c^4(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2})}{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}} \Rightarrow \boxed{E^2 - p^2c^2 = \mathrm{m}_0^2c^4}.$$

Получили связь энергии с импульсом. Масса покоя и скорость света имеют во всех инерциальных системах отсчета неизменные значения. Эти величины инвариантны к преобразованиям Лоренца. Величины энергии и импульса, вообще говоря, изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, но разность $E^2 - P^2c^2$ сохраняется, то есть она инвариантна относительно преобразований Лоренца.

Запишем энергию через импульс: $\boxed{E = \sqrt{p^2c^2 + \mathrm{m}_0^2c^4}}$.

Рассмотрим случай, когда масса покоя тела равна нулю:

$$E^2 - p^2c^2 = 0 \quad \Rightarrow E = \pm cp.$$

Отсюда вытекает, что тело, имея массу покоя, равную нулю, может обладать отличными от нуля энергией и импульсом только в том случае, если оно движется со скоростью света. К таким частицам и относятся фотоны. Следовательно, тело не может двигаться со скоростью света лишь в том случае, если оно имеет массу покоя, отличную от нуля.

Тема 9. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

40. Колебательное движение. Гармонические колебания.

Движения, обладающие той или иной степенью повторяемости, называются ***колебаниями.***

Если значения физических величин, изменяющихся в процессе движения, повторяются через равные промежутки времени, то такое движение называется ***периодическим.*** Примерами периодического движения могут служить движение планет вокруг Солнца, движение поршня в цилиндре двигателя внутреннего сгорания и др. В зависимости от физической природы колебательного процесса и «механизма» его возбуждения различают механические и электромагнитные колебания.

Колебательную систему вне зависимости от ее физической природы называют ***осциллятором.*** Примером осциллятора может служить колеблющийся груз, подвешенный на пружине или нити.

Полным колебанием *называют один законченный цикл колебательного движения, после которого оно повторяется в том же порядке.*

По способу возбуждения колебания делят на:

свободные(собственные), происходящие в представленной самой себе системе около положения равновесия после какого-либо первоначального воздействия;

вынужденные – происходящие при периодическом внешнем воздействии;

параметрические – происходящие при изменении какого-либо параметра колебательной системы;

автоколебания – происходящие в системах, самостоятельно регулирующих поступление внешних воздействий.

Собственные колебания являются не только самыми распространенными, но и самыми важными с точки зрения теории колебаний, так как условия возникновения и характер всех других типов колебаний существенно зависят от характера собственных колебаний.

Любое колебательное движение характеризуется ***амплитудой*** A — *максимальным отклонением колеблющейся точки от положения равновесия.*

Колебания точки, происходящие с постоянной амплитудой, называют ***незатухающими,*** а колебания с постепенно уменьшающейся амплитудой – ***затухающими.***

Время, в течение которого совершается полное колебание, называют ***периодом*** *(T).*

Частотой ν *периодических колебаний называют число полных колебаний, совершаемых за единицу времени:*

Единица частоты колебаний — *герц* (Гц). *Герц – это частота колебаний, период которых равен* 1 с: 1 Гц = 1 с $^{-1}$.

Циклической *или* ***круговой частотой*** *периодических колебаний называется число полных колебаний, совершаемых за время* 2π с:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \qquad [\omega]=\text{рад/с}.$$

Если положение тела в любой момент времени может быть описано единственным параметром, то тело имеет одну степень свободы. Такое колеблющееся тело называют *одномерным осциллятором*.

Несмотря на большое разнообразие колебательных процессов, все они совершаются по некоторым общим закономерностям и могут быть сведены к совокупности простейших периодических колебаний, называемых гармоническими. ***Гармонические*** – это такие колебания, которые описываются периодическим законом:

$$\xi(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) \text{ или } \xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (1)$$

где $\xi(t)$ – периодически изменяющаяся величина (смещение, скорость, сила и т.д.), А – амплитуда. Система, закон движения которой имеет вид (1), называется одномерным (линейным) классическим гармоническим осциллятором или сокращенно ***гармоническим осциллятором***.

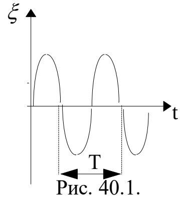

Рис. 40.1.

Аргумент синуса или косинуса $(\omega t + \varphi_0)$ называется *фазой колебаний.* Фаза колебания определяет смещение в момент времени t. Начальная фаза φ_0 определяет смещение тела в момент начала отсчета времени.

Фаза колебаний представляет собой угловую меру времени, прошедшего от начала колебаний.

Гармоническое колебание может быть представлено как движение проекции на некоторую ось конца вектора, длина которого равна амплитуде, отложенного из произвольной точки оси под углом, равным начальной фазе (рис.40.2). Пусть в плоскости рисунка некоторый вектор ОВ вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω. Пусть длина вектора есть А. Проекция вектора ОВ на ось ОХ имеет вид: $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, где $\varphi = \omega t + \varphi_0$ – угол, образованный вектором с осью ОХ.

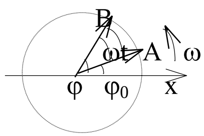

Рис.40.2.

Рассмотрим смещение x колеблющегося тела относительно положения равновесия ($\xi = x$, рис.40.3, *а*).Уравнение гармонического колебания:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Первая производная от x по времени дает выражение для скорости движения тела:

$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)\ ; \qquad (2)$$

Скорость достигает своего максимального значения в момент времени, когда $\cos(\omega t + \varphi_0)$ =1: $\mathrm{v}_{\max} = A\omega$. Смещение же точки в этот момент рано нулю x =0 (рис. 40.3, *б*).

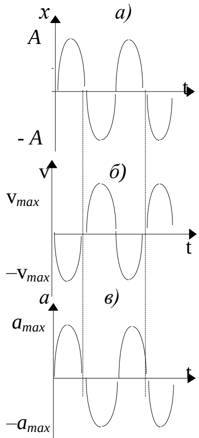

Рис.40.3.

Ускорение изменяется со временем также по гармоническому закону:

$$a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d}{dt}A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = -A\omega^2(\sin\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x\ , \qquad (3)$$

где $A\omega^2$ – максимальное значение ускорения. Знак минус означает, что ускорение направлено в сторону, противоположную смещению, т.е. ускорение и смещение изменяются в противофазе (рис. 40.3, *в*). Из рис. 40.3. видно, что скорость достигает максимального значения, когда колеблющаяся точка проходит положение равновесия. В этот момент смещение и ускорение равны нулю.

41. Дифференциальное уравнение свободных колебаний. Простейшие механические колебательные системы.

Свободными (собственными) называются колебания, которые происходят в отсутствие переменных внешних воздействий на колебательную систему. Они возникают вследствие какого-либо начального отклонения этой системы от состояния ее устойчивого равновесия. Для того, чтобы тело совершало гармоническое колебательное движение, на него должна действовать сила, всегда направленная к положению равновесия, а по величине – прямо пропорциональная смещению от этого положения. Силы, направленные к положению равновесия, называются ***возвращающими.***

Рассмотрим свободные колебания, происходящие в системе с одной степенью свободы. Пусть тело массой m укреплено на пружине, упругость которой k (пружинный маятник, рис.36.1). В отсутствие сил трения на тело, выведенное из положения равновесия, действует упругая сила пружины $F = -kx$. Тогда по второму закону динамики $F = m\frac{d^2x}{dt^2}$ имеем:

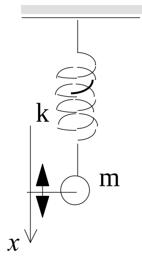

Рис.41.1

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \qquad (1)$$

Если ввести обозначение $\omega = \sqrt{k/m}$, то уравнение (1) можно переписать в следующем виде,:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (2)$$

Это и есть дифференциальное уравнение свободных колебаний с одной степенью свободы. Его решением является функция вида $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$.

Величина $\omega = \sqrt{k/m}$ является циклической частотой колебаний. Период колебаний пружинного маятника: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (3).

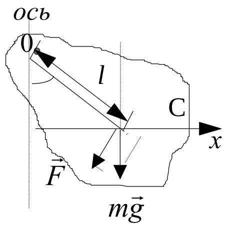

Рис. 41.2.

Физический маятник. Его образует твердое тело, подвешенное в поле тяжести на закрепленной горизонтальной оси. Возвращающим моментом является момент силы тяжести $M = -mgl\sin\alpha$, где l – расстояние от оси до центра тяжести тела.

При малых значениях $\sin\alpha \approx \alpha$, тогда возвращающий момент: $M = -mgl\alpha$.

В соответствии с основным законом динамики вращения: $M = J\varepsilon$, где J – момент инерции маятника относительно оси, ε – угловое ускорение.

Так как $\varepsilon = -\omega^2\alpha$, то $M = -J\omega^2\alpha$. Приравнивая два момента для одного тела, находим:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \qquad (4)$$

где $L = \frac{J}{ml}$ – приведенная длина физического маятника.

Математический маятник. Это модель, в которой вся масса сосредоточена в материальной точке, колеблющейся на невесомой и недеформируемой нити (рис.41.3).

При отклонении материальной точки от положения равновесия на малый угол α, такой, чтобы выполнялось условие $\sin\alpha \approx \alpha$, на тело будет действовать возвращающая сила $F = -mg\sin\alpha = mg\alpha$. Знак минус указывает, что сила направлена в сторону, противоположную смещению. Так как $\sin\alpha \approx \alpha = x / l$, то сила равна $F = -\dfrac{mg}{l}x$. Сила пропорциональна смещению, следовательно, под действием этой силы материальная точка будет совершать гармонические колебания. Обозначим $\dfrac{mg}{l} = k$, где $k = \omega^2 x$, имеем: $\omega^2 = g / l$ или $\omega = \sqrt{g / l}$. Отсюда период колебаний математического маятника: $T = 2\pi\sqrt{l / g}$.

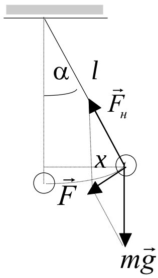

Рис.41.3.

42. Энергия гармонических колебаний.

Характерной чертой гармонического осциллятора является то, что средние значения кинетической и потенциальной энергии осциллятора равны друг другу и каждое из них составляет половину полной энергии. Покажем это.

Кинетическую энергия колеблющегося тела можно определить, если в выражение для кинетической энергии $E_K = m\mathrm{v}^2 / 2$ подставить скорость $\mathrm{v} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$:

$$E_K = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t \qquad (1).$$

Потенциальная энергия, обусловленная упругой силой, определяется как эквивалент работы, необходимой для смещения тела на расстояние x от положения равновесия, и равна:

$$E_P = -\int_0^{\div}(-kx)dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \omega t.$$

Учитывая, что $k = \omega^2 x$, получим:

$$E_P = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t. \qquad (2).$$

Полная механическая энергия осциллятора равна:

$$E = E_K + E_P.$$

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t =$$

$$= \frac{m\omega^2 A^2}{2}(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$$

$$E = \frac{m\omega^2 A^2}{2}.$$

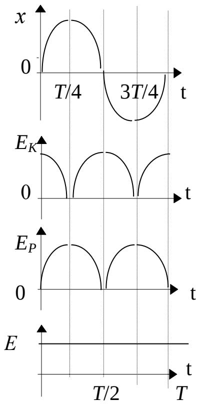

Рис.42.1.

Из выражений (1) и (2) видно, что кинетическая и потенциальная энергии изменяются со временем, причем, когда кинетическая энергия максимальна, потенциальная энергия обращается в нуль, и наоборот (рис.42.1). Период колебания кинетической и потенциальной энергий вдвое меньше периода колебаний системы. Полная механическая энергия гармонического колебания постоянна и пропорциональна квадрату амплитуды и квадрату частоты. Постоянство полной механической энергии обусловлено отсутствием потерь энергии на совершение работы против сил сопротивления.

43. Сложение колебаний одинакового направления.

Пусть имеется два гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты, но различной амплитуда и начальной фазы::

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01})$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02})$$

Воспользуемся векторной диаграммой (рис.43.1). Представим колебания с помощью векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$. Ясно, что $x = x_1 + x_2$. Вектор $\vec{A}$ представляет собой результирующий вектор. Из построения видно, что:

$$A^2 = A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) \quad (1)$$

Начальная фаза результирующего колебания

$$tg\varphi_0 = \frac{A_1 \sin\varphi_{01} + A_2 \sin\varphi_{02}}{A_1 \cos\varphi_{01} + A_2 \cos\varphi_{02}}$$

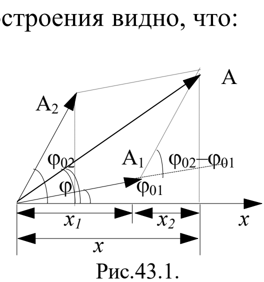

Рис.43.1.

Уравнение результирующего колебания:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Анализ (1) показывает, что если $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 2k\pi$ (колебания в фазе), то результирующая амплитуда: $A = |A_1 + A_2|$ (усиление колебаний). Если $\varphi_{02} - \varphi_{01} = (2k+1)\pi$ (колебания в противофазе), то $A = |A_1 - A_2|$ (колебания гасят друг друга).

Пусть амплитуды одинаковы, начальные фазы равны нулю, а частоты различные: $x_1 = A_0 \sin\omega_1 t$; $x_2 = A_0 \sin\omega_2 t$

$$x = x_1 + x_2 = A_0(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t) = 2A_0 \cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \,\sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\,.$$

Полученное выражение есть произведение двух колебаний. Первый множитель $\cos\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$ обладает малой частотой. Второй множитель $\sin\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$ имеет частоту, среднюю для двух слагаемых колебаний, то есть близкую к их частотам. Это позволяет рассматривать результирующее движение как почти гармоническое колебание со средней угловой частотой $\omega = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ и медленно меняющейся амплитудой: $\boxed{x = A\sin\alpha}$,

где $A = 2A_0 \cos\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$; $\alpha = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$

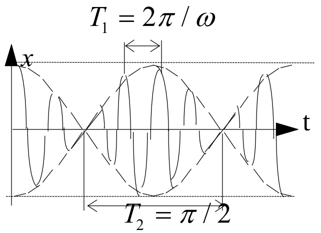

Рис.43.2.

Такие колебания называют ***биениями***. Графически колебания такого рода представлены на рисунке 43.2.

44. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Пусть колебания происходят вдоль осей x и y. Результирующее колебание представляет собой криволинейную траекторию, форма которой зависит от разности фаз и амплитуд обоих колебаний.

Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза одного колебания была равна нулю, для второго колебания начальная фаза определяется как $\varphi_0 = \varphi_{02} - \varphi_{01}$. Тогда:

$$x = A_1 \cos\omega t \qquad (1)$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (2)$$

Из первого уравнения : $\cos\omega t = x / A_1$. (3)

Тогда $\sin\omega t = \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \sqrt{1 - x^2 / A_1^{\,2}}$ (4)

Разложим косинус суммы в (2):

$\cos(\omega t+\varphi_0)=\cos\omega t\cos\varphi_0-\sin\omega t\sin\varphi_0$ и подставим в (2):

$$y=A_2(\cos\omega t\cos\varphi_0-\sin\omega t\sin\varphi_0)\,.$$

С учетом (3) и (4)

$$\frac{y}{A_2}=\frac{x}{A_1}\cos\varphi_0-\sqrt{1-\frac{x^2}{A_1^2}}\sin\varphi_0\text{, или }\sqrt{1-\frac{x^2}{A_1^2}}\sin\varphi_0=\frac{x}{A_1}\cos\varphi_0-\frac{y}{A_2}$$

Возведем в квадрат и преобразуем:

$$\left(1-\frac{x^2}{A_1^2}\right)\sin^2\varphi_0=\frac{x^2}{A_1^2}\cos^2\varphi_0-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos\varphi_0+\frac{y^2}{A_2^2}$$

$$\sin^2\varphi_0=\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos\varphi_0$$

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})=\sin^2(\varphi_{02}-\varphi_{01})}$$

Это уравнение эллипса, характеристики которого определяются значением разности фаз $\varphi_{02}-\varphi_{01}$.

Ограничимся разбором отдельных частных случаев, по которым можно составить представление о полной картине движения.

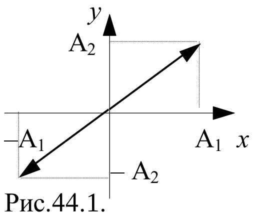

Рис.44.1.

а) Пусть начальные фаза равны: $\varphi_{02}=\varphi_{01}$

$x=A_1\cos\omega t\qquad y=A_2\cos\omega t$.

Тогда

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}=0\Rightarrow\left(\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$

Получим $\boxed{y=\left(A_2\,/\,A_1\right)x}$ –уравнение прямой линии, проходящей через начало координат (рис.44.1). Наклон прямой определяется $tg\alpha=A_2\,/\,A_1$.

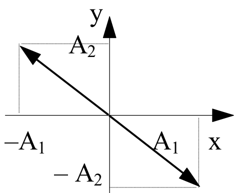

Рис. 44.2.

б) Пусть начальные фазы противоположны $\varphi_{02}-\varphi_{01}=\pm\pi$. Тогда:

$x=A_1\cos\omega t$

$y=A_2\cos(\omega t+\pi)=-A_2\cos\omega t$,

то есть косинусы отличаются знаком.

Разделив их друг на друга, получим: $\dfrac{x}{y} = -\dfrac{A_1}{A_2} \;\Rightarrow\; \boxed{y = -\left(A_2 / A_1\right)x}$ (рис.44.2).

в) Пусть начальные фазы отличаются на 90^0: $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда

$$x = A_1 \cos\omega t \;;$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = A_2 \sin\omega t$$

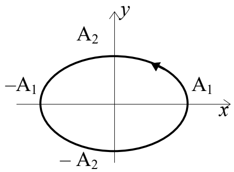

Рис. 44.3.

Фаза колебаний по оси y отличается на π/2 по отношению к фазе колебаний по оси x. Исключим время, возведя уравнения в квадрат и сложим:

$$\frac{x^2}{A_1{}^2} = \cos^2 \omega t \;;\; \frac{y^2}{A_2{}^2} = \sin^2 \omega t \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{A_1{}^2} + \frac{y^2}{A_2{}^2} = 1}$$

Это уравнение эллипса (рис. 44.3).Полуоси эллипса равны A_1 и A_2. При A_1=A_2 траектория превращается в окружность.

Так как колебание по оси y отстает по фазе на 90^0 по отношению к колебанию по оси x, движение происходит против часовой стрелки.

φ_{02}–φ_{02}	0	π/4	π/2	3π/4	π
$\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = 2$					

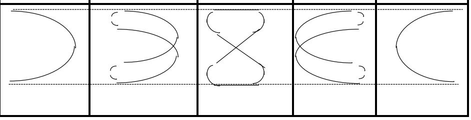

Рис. 44.4.

г) более сложные кривые получаются при неравных частотах и называются ***фигурами Лиссажу***. Если частоты колебаний отличаются в два раза: $\omega_1 / \omega_2 = 2$, то имеем кривые, представленные на рис. 44.4.

45. Затухающие колебания.

Реально свободные колебания под действием сил сопротивления всегда *затухают*. Объясняется это действием сил, тормозящих движение, например, сил трения в месте подвеса при колебаниях маятника, или силой сопротивления среды. В этом случае энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против этих сил. Поэтому свободные колебания под действием сил сопротивления всегда затухают.

Пусть точка совершает линейное гармоническое колебание в вязкой среде. Из опыта известно, что сила сопротивления среды зависит от скорости и направлена в сторону, противоположную скорости. При малых скоростях: $F_{сопр} = -r\text{v} = -r\dfrac{dx}{dt}$, где r – постоянная величина, называемая коэффициентом сопротивления среды. Уравнение колебаний:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}.$$

Введем обозначения: $\dfrac{r}{m} = 2\beta$, $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$, тогда дифференциальное уравнение затухающего колебания:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1)$$

где β – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота колебания. При отсутствии трения β=0, уравнение примет вид уравнения для свободных незатухающих колебаний. В результате решения уравнения (1) получим зависимость смещения x от времени, то есть уравнение затухающего колебательного движения:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (2)$$

Выражение $A_0 e^{-\beta t}$ называется амплитудой затухающего колебания. Амплитуда уменьшается с течением времени и тем быстрее, чем больше коэффициент затухания. Огибающая на графике зависит от β. Чем она больше, тем круче огибающая, то есть колебания быстрее затухают (рис.45.1).

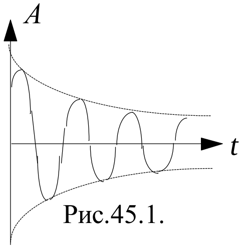

Рис.45.1.

Путем подстановки функции (2) и ее производных по времени в уравнение (1), можно найти значение угловой частоты: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Период затухающих колебаний равен: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$.

Наглядной характеристикой затухания является отношение значений двух амплитуд, соответствующих промежутку времени в один период. Это отношение называют ***декрементом затухания*** θ:

$$\theta = \frac{A_t}{A_{t+T}} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

Его натуральный логарифм есть безразмерная величина, называемая логарифмическим декрементом затухания: $\delta = \ln\dfrac{A_t}{A_{t+T}} = \beta T$.

Промежуток времени $\tau = 1/\beta$, в течение которого амплитуда затухающего колебания убывает в e раз, называют *временем релаксации*.

Тогда выражение для логарифмического декремента затухания примет вид: $\delta = \dfrac{T}{\tau}$ или $\delta = \dfrac{1}{N}$.

Логарифмический декремент затухания – величина, обратная числу колебаний N, по истечении которых амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

46. Вынужденные колебания. Резонанс.

Колебания системы, которые совершаются за счет работы периодически меняющейся внешней силы, называются *вынужденными*.

Пусть на систему действует внешняя сила, меняющаяся со временем по гармоническому закону: $F_{вн} = F_0 \cos\omega t$, где F_0 – амплитуда силы (максимальное значение), ω – угловая частота колебаний вынуждающей силы. Тогда уравнение движения будет иметь вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx + r\frac{dx}{dt} = F_0\cos\omega t\,.$$

Разделим обе части этого уравнения на m и введем вновь обозначения: $\dfrac{r}{m} = 2\beta,\ \dfrac{k}{m} = \omega_0^2$, тогда получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \qquad (1)$$

Решение этого уравнения, как известно из высшей математики, представляет собой сумму свободных и вынужденных колебаний:

$$x(t) = x_{своб}(t) + x_{вын}(t)$$

Таким образом, вынуждающая сила раскачивает систему, сообщая ей запас энергии, и пополняет расходуемую энергию, поддерживая колебательное движение. В первый момент система совершает помимо вынужденных еще свободные колебания. Частота свободных колебаний определяется по известной формуле: $\omega_{своб} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{r^2}{4m^2}}$. Эти колебания затухают, и устанавливаются колебания, частота которых равна частоте вынуждающей силы, то есть вынужденные колебания. Когда работа вынуждающей силы сравнивается с энергией потерь, колебания становятся ***установившимися***. Амплитуда этих колебаний должна быть постоянной, если постоянна амплитуда вынуждающей силы.

Решение дифференциального уравнения при установившемся движении имеет вид:

$$x_{вын}(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (2)$$

где A, φ – величины, которые требуется определить, ω – круговая частота колебаний внешней переменной силы. Подставляя (2) в (1) (без вывода), получаем искомые величины:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \qquad (3)$$

$$\varphi = arctg\frac{2\beta\omega}{({\omega_0}^2 - \omega^2)} \qquad (4)$$

Амплитуда колебаний зависит от амплитуды и частоты внешних сил. При некоторой частоте внешних сил знаменатель в выражении (3) будет иметь минимальное значение, а амплитуда вынужденных колебаний – максимальное значение. Эта частота называется ***резонансной***. Для ее нахождения, приравниваем к нулю производную:

$$\frac{d}{dt}\left[(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + 4\beta^2\omega\right] = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left[{\omega_0}^4 - 2\omega_0^2\omega^2 + \omega^4 + 4\beta^2\omega\right] = 0$$

$$-4\omega_0^2\omega + 4\omega^3 + 8\beta^2\omega = 0$$

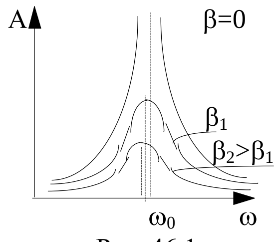

Рис. 46.1.

Сократим на $4\omega : -\omega_0^2 + \omega^2 + 2\beta^2 = 0$, откуда получим:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\ .$$

Резонансная амплитуда: $A_{рез} = \dfrac{F_0/m}{2m\beta\sqrt{{\omega_0}^2 + \beta^2}}$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте ω_0, называется ***резонансом.***

При коэффициенте затухания $\beta=0$, когда отсутствуют силы сопротивления, $\omega_{рез} = \omega_0$, а $A_{рез}$ становится бесконечно большой. На рисунке 46.1.

даны зависимости амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы. Отдельные кривые соответствуют различным значениям коэффициента затухания β. Эти кривые называются резонансными. Чем меньше коэффициент затухания, тем резче изменяется амплитуда вынужденных колебаний. При резонансе наступают наиболее благоприятные условия для поступления энергии в колеблющуюся систему от источника внешней силы. Увеличение амплитуды происходит до тех пор, пока вся работа внешней силы не сравняется с энергией потерь.

47. Волновые процессы. Уравнение бегущей волны. Фазовая и групповая скорость.

Процесс распространения колебаний в среде называется ***волновым*** процессом (или ***волной***).

Все разнообразие волн в природе и технике подразделяют на два типа: волны механические (упругие) и электромагнитные.

Упругими (или ***механическими***) волнами называются механические возмущения, распространяющимися в упругой среде.

Упругие волны бывают продольные и поперечные. В ***продольных*** волнах частицы среды колеблются в направлении распространения волны, в ***поперечных*** – в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения. Поперечные волны возникают при деформациях сдвига. Поэтому в жидкой и газообразной средах возникают только продольные волны.

Скорость распространения продольных волн в тонком стержне $\mathrm{v} = \sqrt{E / \rho}$, где E – модуль Юнга, ρ – плотность среды.

Скорость распространения поперечных волн в изотропном твердом теле $\mathrm{v} = \sqrt{N / \rho}$, где N – модуль сдвига.

Скорость распространения продольных (звуковых) волн в жидкости и в газе $\mathrm{v} = \sqrt{K / \rho}$, где K – модуль объемной упругости среды, ρ – плотность среды. Например, в воздухе: $v = 20{,}1\sqrt{T} м / с \approx (331 + 0{,}6t) м / с$, где T – термодинамическая температура, измеренная по шкале Кельвина, t– температура, измеренная по шкале Цельсия.

При распространении колебаний в среде частицы не перемешаются вместе с волной, а лишь колеблются около своих положений равновесия. Поступательно перемещаются лишь фаза и энергия колебаний.

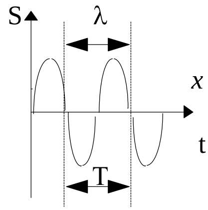

Рис.47.1.

Графически волну изображают так же, как и колебания (рис.47.1).

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковых фазах, называется *волновой поверхностью*. В зависимости от формы волновой поверхности различают сферические, плоские, цилиндрические волны. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания с одинаковой фазой к некоторому моменту времени t, называется *фронтом волны.* Фронт волны является частным случаем волновой поверхности.

Пусть плоская волна распространяется вдоль оси x (рис.41.1). Эта волна характеризуется: длиной волны, периодом, амплитудой, частотой, фазовой скоростью.

Расстояние, на которое определенная фаза распространяется за один период колебания, называется *длиной волны* λ. Из рисунка видно, что λ – это наименьшее расстояние между точками, колеблющимися в одинаковых фазах. Скорость распространения волны (фазовая скорость). *Фазовая скорость* –равна скорости перемещения в пространстве точек поверхности, соответствующей любому фиксированному значению фазы.

$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} = \frac{\lambda}{T}.$$

Волна, распространяющаяся в пространстве от какого-либо источника называется *бегущей волной.*

Уравнением волны называется алгебраическое выражение, которое дает зависимость смещения колеблющейся точки s как функция ее координат (x) и времени t: $s = f(x,\, t)$.

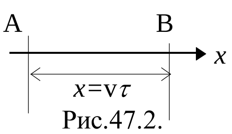

Рис.47.2.

Допустим, что в точке А упругой среды находится источник, который колеблется по закону:

$$s = A\sin\omega t\ .$$

Возьмем на оси 0X произвольную точку В, лежащую на расстоянии x от начала координат (рис.47.2.). Колебания дойдут до точки В через промежуток времени: $\tau = x/\mathrm{v}$. То есть точка В начнет колебаться на время τ позже точки 0. Если считать, что колебания не затухают, то можно определить смещение точки В в некоторый момент времени t:

$$s = A\sin\omega(t - \tau) \quad \text{или} \quad s = A\sin\omega(t - \frac{x}{\mathrm{v}})\ . \qquad (1)$$

Это уравнение *бегущей волны.*

В общем случае уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси 0X имеет вид:

$$s = A\sin\left[\omega(t - \frac{x}{\mathrm{v}}) + \varphi_0\right], \qquad (2)$$

где φ_0 – начальная фаза колебаний;

$\left[\omega(t - \frac{x}{\mathrm{v}}) + \varphi_0\right]$ – фаза плоской бегущей волны.

Для характеристики волн используется волновое число k, характеризующее скорость изменения фазы в пространстве

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\mathrm{v}T} = \frac{\omega}{\mathrm{v}}. \qquad (3)$$

Учитывая (3), уравнение (2) примет вид:

$$s = A\sin(\omega t - kx + \varphi_0) \qquad (4)$$

Уравнение волны, распространяющейся вдоль отрицательного направления оси 0X отличается от (4) знаком члена *kx*.

Из условия $\omega t - kx + \varphi_0 = const$ получаем выражение для фазовой скорости: $\boxed{\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}}$.

Любую несинусоидальную волну можно заменить эквивалентной ей системой синусоидальных волн – *группой волн, или волновым пакетом*. Спектр частот – совокупность значений частот этих синусоидальных волн.

В недиспергирующей среде все синусоидальные волны, образующие волновой пакет, имеют одинаковые фазовые скорости v.. В диспергирующей среде волновой пакет перемещается со скоростью, называемой *групповой. Групповая скорость волны (пакета)* – это скорость переноса энергии этой волной: $u = \frac{d\omega}{dk}$.

Связь между групповой и фазовой скоростями: $u = \mathrm{v} - \lambda\frac{d\mathrm{v}}{d\lambda}$.

В недиспергирующей среде: $\frac{d\mathrm{v}}{d\lambda} = 0$ и групповая скорость совпадает с фазовой.

48. Волновое уравнение.

Выберем ряд точек, принадлежащих сплошной среде и лежащих на одной прямой, вдоль которой распространяется продольная волна.

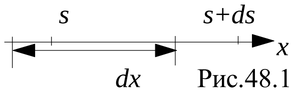

Рис.48.1.

Смещение некоторой точки, лежащей на этой прямой, из положения равновесия – s. Расстояние между точками – dx. Для точек, расположенных на расстоянии dx смещения составляют s и $s+ds$, то есть при перемещении точки на расстояние dx смещение меняется на величину ds.

$\dfrac{ds}{dx} = \varepsilon$ – относительная деформация.

Если ε>0 – расстояние между точками увеличивается – растяжение среды; если ε<0 – сжатие.

Пусть известно уравнение плоской бегущей волны:

$$s = A\sin\omega(t - \frac{x}{\text{v}}),$$

первая производная по времени:

$$\frac{ds}{dt} = A\omega\cos\omega(t - \frac{x}{\text{v}}) \qquad (1)$$

и по координате:

$$\varepsilon = \frac{ds}{dx} = -\frac{A\omega}{\text{v}}\sin\omega(t - \frac{x}{\text{v}}) \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2). получим: $\dfrac{ds}{dt} = -\text{v}\ \dfrac{ds}{dx}$.

Отсюда видно, что деформация среды $\dfrac{ds}{dx}$ имеет по абсолютному значению наибольшую величину в тех точках. где скорость колеблющихся точек $\dfrac{ds}{dt}$ – наибольшая, то есть где точки проходят через положение равновесия. Из (1) и (2) найдем вторые производные:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2\sin\omega(t - \frac{x}{\text{v}})$$

$$\frac{d^2s}{dx^2} = -\frac{A\omega^2}{\text{v}^2}\cos\omega(t - \frac{x}{\text{v}})$$

Отсюда получим дифференциальное уравнение, с помощью которого описывается распространение волны вдоль оси 0X:

$$\boxed{\frac{d^2 s}{dt^2} = \mathrm{v}^2 \ \frac{d^2 s}{dx^2}} \text{ или . } \boxed{\frac{d^2 s}{dx^2} - \frac{1}{\mathrm{v}^2} \ \frac{d^2 s}{dt^2} = 0}$$

Получили дифференциальное уравнение, решением которого является уравнение волны.

В более общем случае распространение волны в среде описывается дифференциальным уравнением в частных производных, которое называется ***волновым уравнением*** и имеет вид:

$$\boxed{\nabla^2 S - \frac{1}{\mathrm{v}^2} \ \frac{\partial^2 S}{dt^2} = 0}$$

где S – физическая величина, которая характеризует возмущение, распространяющееся в среде с скорость v; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{dx^2} + \frac{\partial^2}{dy^2} + \frac{\partial^2}{dz^2}$ – оператор Лапласа.

49. Энергия волны. Вектор Умова.

Волна переносит энергию. Пусть распространяется плоская волна $s = A \sin \omega (t - \frac{x}{\mathrm{v}})$. Мысленно выделим элементарный объем ΔV, настолько малый, что скорость движения $\frac{ds}{dt}$ и деформация во всех его точках можно считать одинаковыми. Выделенный объем обладает кинетической энергией

$$\Delta \ W_K = \frac{m}{2}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \frac{\rho}{2}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 \Delta V,$$

где ρ-плотность среды. Зная, что $\frac{ds}{dt} = A\omega \cos \omega (t - \frac{x}{\mathrm{v}})$, получим:

$$\Delta \ W_K = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega (t - \frac{x}{\mathrm{v}}) \Delta V$$

Видим, что максимумы кинетической энергии приходятся на те точки среды, которые проходят положение равновесия s=0. (Если $\cos^2 \omega (t - \frac{x}{\mathrm{v}}) = 1$, $s = A \sin \omega (t - \frac{x}{\mathrm{v}}) = 0$).

Объем ΔV обладает и потенциальной энергией упругой деформации:

$$\Delta \ W_P = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \Delta V.$$

Зная, что $\varepsilon = \dfrac{ds}{dx} = -\dfrac{A\omega}{\text{v}}\sin\omega(t-\dfrac{x}{\text{v}})$, получим:

$$\Delta\ W_P = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\cos^2\omega(t-\frac{x}{\text{v}})\Delta V$$

Сравнивая полученные выражения, делаем вывод, что максимумы потенциальной и кинетической энергий совпадают.

Полная энергия бегущей волны:

$$\Delta W = \Delta W_R + \Delta W_P = \rho A^2\omega^2\cos^2\omega(t-\frac{x}{\text{v}})\Delta V$$

Плотность энергии – это энергия, приходящаяся на единицу объема:

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \rho A^2\omega^2\cos^2\omega(t-\frac{x}{\text{v}})$$

Отсюда следует, что плотность энергии является функцией координаты x, т.е. в различных точках пространства она имеет различные значения. Максимального значения плотность энергии достигает в тех точках пространства, где смещение равно нулю (s=0).

Среднее значение плотности энергии в каждой точке среды:

$$w_{cp} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2.$$

так как среднее значение $\cos^2\omega(t-\dfrac{x}{\text{v}})$ равно 1/2.

Таким образом, среда, в которой распространяется волна, обладает дополнительным запасом энергии, которая доставляется от источника колебаний в различные области среды.

Перенос энергии в волнах количественно характеризуется векторм плотности потока энергии.

Поток энергии – количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени: $\varPhi = \dfrac{dW}{dt}$.

Плотность потока энергии $\vec{j}$ – величина, численно равная потоку энергии через единичную площадку, помещенную в данной точке, перпендикулярно направлению, в котором переносится энергия. Направление вектора $\vec{j}$ совпадает с направлением переноса энергии:

$$\vec{j} = w\vec{\text{v}}$$

Это вектор Умова, по имени русского ученого Н.А.Умова).

Среднее значение вектора плотности потока энергии

$$\vec{j}_{\text{ср}} = w_{\text{ср}}\vec{\text{v}} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\vec{\text{v}}\ .$$

50. Уравнение стоячей волны.

Когерентные волны – волны, создающие колебания, обладающие в каждой точке среды постоянной разностью фаз. Источники когерентных волн – когерентные источники.

Интерференция – явление наложения волн, полученных от когерентных источников. В результате интерференции колебания в одних точках усиливаются, в других ослабляют друг друга.

Стоячая волна – волна, волна, образующаяся в результате наложения двух бегущих синусоидальных волн, распространяющихся навстречу друг другу и имеющих одинаковые частоты и амплитуды:

$$s_1 = A\sin(\omega t - kx)\ , \qquad s_2 = A\sin(\omega t + kx + \varphi)$$

$s = s_1 + s_2 = 2A\cos(kx + \dfrac{\varphi}{2})\sin(\omega t + \dfrac{\varphi}{2}) \Rightarrow$ уравнение стоячей волны:

$$s = A_{ст}\sin(\omega t + \frac{\varphi}{2})$$

Амплитуда стоячей волны: $A_{ст} = 2A\left|\cos(kx + \dfrac{\varphi}{2})\right|$ является периодической функцией координаты *x*. Точки, в которых амплитуда стоячей волны $A_{ст} = 0$, называются узлами стоячей волны, а точки в которых максимальна ($A_{ст} = 2A$), называются пучностями стоячей волны. Положение узлов и пучностей находится из условий

$$kx + \frac{\varphi}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2} \qquad – \qquad \text{узлы,}$$

$$kx + \frac{\varphi}{2} = \pi m \qquad – \qquad \text{пучности,}$$

где m=0,1,2,...

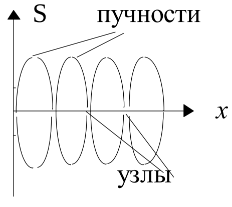

Рис.50.1.

Длина стоячей волны – расстояние между двумя узами или двумя пучностями, $\lambda_{ст} = \lambda / 2$, где λ–длина бегущей волны. При переходе через узел фаза колебаний изменяется скачками на π. Точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе, все точки, находящиеся между соседними узлами, колеблются синфазно.

Энергия стоячей волны периодически (с частотой 2ω) перекачивается от узлов, где сосредоточена потенциальная энергия, к пучностям, где сосредоточена кинетическая, и обратно. Стоячая волна энергии не переносит.

Заключение.

На этом мы завершаем изучение первого раздела, изучаемого в курсе общей физики – механики, в основе которого лежит механика Ньютона. Важность этого раздела определяется тем, что многие величины и понятия введенные здесь, встречаются и широко используются в других разделах физики. С помощью законов механики можно понять, объяснить и даже предсказать любые явления, связанные с движением тел – от небесных тел до мельчайших частиц.

Список литературы.

Александров Л.А., Яшкин А.Я. Курс общей физики. Механика. – М.: Просвещение, 1978. – 416 с.

Дмитриева В.Ф., Прокофьев В.Л. Основы физики. –М.: Высшая школа, 2001.– 527 с.

Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. – М.: Наука, 1989. – 350 с.

Стрелков С.П. Механика. – М.: Наука, 1975. – 550 с.

Хайкин С.Э. Физические основы Механики. – М.: «Наука, 1971. –752 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Сабирова Файруза Мусовна

Лекции по курсу общей физики.
Механика.

Учебно-методическое пособие для студентов физико-математического факультета педвуза и школьных учителей физики.