

С. Р. Насыров(Казань)

snasyrov@ksu.ru

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ И
УРАВНЕНИЕ Ф. Д. ГАХОВА¹**

В докладе дается обзор результатов о разрешимости внешних обратных и смешанных обратных краевых задач, ставятся нерешенные проблемы.

Обратные и смешанные обратные краевые задачи или краевые задачи с неизвестной (свободной) границей являются важным разделом теории функций комплексного переменного (см., напр., [1–3]). Они состоят в определении области D_z с полностью или частично неизвестной границей и голоморфной в ней функции $w = w(z)$ по краевым условиям на границе этой области. При этом, на неизвестных участках границы краевые условия задаются в терминах некоторого геометрического параметра: дуговой абсциссы s , декартовой координаты x или y , полярной координаты r или φ . Если граница области полностью неизвестна, то такая задача называется обратной, если частично неизвестна — то смешанной обратной.

Решение задачи, как правило, сводится к определению функции $z = z(\zeta)$, конформно отображающей каноническую область D_ζ на область D_z . В односвязном случае в качестве D_ζ , как правило, берется единичный круг или верхняя полуплоскость. Поскольку по функции $z = z(\zeta)$ однозначно определяются область D_z и функция $w = w(z)$, то часто именно эту функцию и называют решением задачи.

Если искомая область содержит внутри себя бесконечно удаленную точку, то соответствующая задача называется внешней. В этом случае функция $z = z(\zeta)$ имеет полюс в некоторой точке $\zeta_0 \in D_\zeta$. При этом возникает условие разрешимости задачи, которое можно рассматривать как уравнение для определения точки ζ_0 .

Впервые такое уравнение получил Ф. Д. Гахов для обратной краевой задачи по параметру s (см., напр., [4]). Это уравнение имеет вид

$$\frac{f''(\zeta_0)}{f''(\zeta_0)} = \frac{2\bar{\zeta}_0}{1 - |\zeta_0|^2}. \quad (*)$$

Здесь f — голоморфная функция, однозначно определяемая по краевым условиям, в качестве D_ζ берется единичный круг. Множество

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00762).

решений уравнения (*) — это множество решений некоторой полианалитической функции. Ф. Д. Гахов доказал разрешимость уравнения (*). В дальнейшем уравнение (*) и его обобщения стали называть уравнением Гахова.

Исследование многих известных математиков связаны с изучением множества корней уравнения (*). В этой связи можно упомянуть работы проф. Л. А. Аксентьева и его учеников. В частности, Л. А. Аксентьевым было замечено, что решения уравнения Гахова соответствуют критическим точкам поверхности, которая является графиком отображения — внутреннего радиуса области как функции от ее точки. Основное внимание было уделено вопросам единственности решения уравнения (*). Однако только в 1990 г. в [5] было установлено, что множество корней уравнения (*) конечно. Также в этой статье было описано структура множества корней уравнения Гахова в многосвязном случае (за D_ζ берется n -круговая область). Было показано, что множество решений непусто и состоит из объединения не более чем конечного числа точек и не более чем конечного числа гомологически независимых в D_ζ замкнутых аналитических кривых. До сих пор остается открытым вопрос: *существуют ли примеры, в которых число замкнутых аналитических кривых в множестве корней уравнения Гахова равно заданному значению k , $2 \leq k \leq n-1$?*

Уравнение Гахова для смешанных обратных краевых задач по параметру x было впервые получено в [6]. Далее оно обобщалось в работах [7, 8] на случай, когда смешанная обратная краевая задача рассматривается на полигональной римановой поверхности, которая имеет точку ветвления над бесконечно удаленной точкой. Было показано, что соответствующее уравнение Гахова разрешимо. Однако не решенным остается вопрос *о структуре корней этого уравнения*. Кроме того, разрешимость уравнения Гахова является только необходимым условием разрешимости задачи. Актуальной является *проблема разрешимости внешней обратной краевой задачи по параметру x как на плоскости, так и на римановой поверхности*. Не исследован и вопрос *о разрешимости уравнения Гахова на римановой поверхности с несколькими точками, лежащими над ∞* .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. 333 с.
2. Аксентьев Л. А., Ильинский Н. Б., Нужин М. Т., Салимов Р. Б., Тумашев Г. Г. Теория обратных краевых задач для аналитических функций и ее приложения // Матем. анализ Т. 18. (Итоги науки и техники).

М.: ВИНТИ. 1980. С. 69–126.

3. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск, 1977. 424 с.

4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 2-е изд, 1977. 641 с.

5. *Киселев А. В., Насыров С. Р.* О структуре множества корней уравнения Ф. Д. Гахова для односвязной и многосвязной областей. Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1990, вып. 24. С. 105–115.

6. *Насыров С. Р., Галиуллина Г. Р.* Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру // Известия вузов Математика. – 2002. – № 10. – С. 25–30.

7. *Насыров С. Р., Низамиева Л. Ю.* Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x на полигональной римановой поверхности с простой точкой ветвления на бесконечности // Уч. зап. Казанск. гос. ун-та. 2008. Т. 150. Сер. физ.-мат. Кн. 1. С. 91–101.

8. *Насыров С. Р., Низамиева Л. Ю.* Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи на римановой поверхности с точкой ветвления на бесконечности произвольного порядка // Вестн. Самарского гос. университета. Сер. естественнонаучн. 2009. No 4. С. 28–42.