КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Элементы векторного анализа

Электронное учебное пособие

Казань
Казанский государственный университет
2009

Публикуется по решению учебно-методической комиссии геологического факультета Казанского государственного университета от 20.02.2009 г., протокол № 3.

Элементы векторного анализа. Электронное учебное пособие. Составители: Галеев А. А., Червиков Б. Г. – Казань: Казанский государственный университет, 2009.

Изложенный в данном пособии материал является составной частью курса «Введение в методы математической физики», который читается студентам 3-го курса специальности «Гидрогеология и инженерная геология» на геологическом факультете КГУ. В методическом пособии последовательно вводятся базисные понятия и определения математического аппарата, используемого при исследовании физических полей.

1. ПОЛЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

Если в каждой точке некоторой области пространства однозначно определена скалярная или векторная величина, изменяющаяся в пространстве и времени по физическим законам, то говорят, что в данной области задано **поле физической величины.** Поле в некоторой области пространства называют *однородным*, если эти величины постоянны, и *неоднородным* в противном случае. Поля, не зависящие от времени, называют *стационарными*, в противном случае – *нестационарными*.

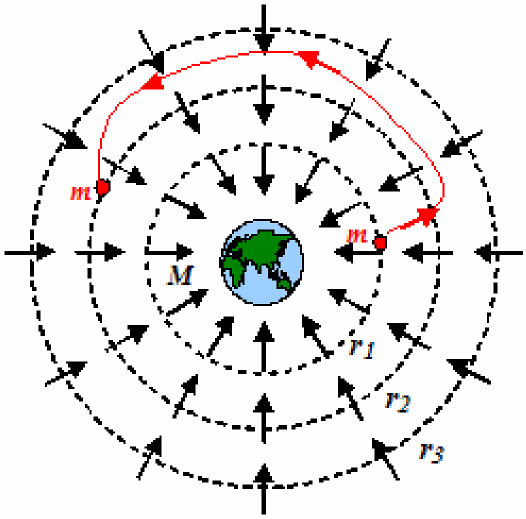
Для описания (моделирования) физических полей используются, как правило, непрерывные математические функции нескольких аргументов (пространственных координат и времени). Требование непрерывности к используемым функциям призвано отразить сплошность проявления физических свойств в выделенной области пространства. Кроме того, значения этих функций, вычисленные в данной точке пространства, не должны изменяться при переходе из одной системы координат к другой. Последнее требование связано с инвариантностью физических процессов, т.е. независимостью от применяемой для их описании системы координат.

Примерами скалярных полей являются атмосферные поля давления, температуры, влажности воздуха, распределение плотности в неоднородном теле, геохимические поля рассеяния и концентрирования того или иного элемента и т.п.

Примерами векторных полей могут служить поле скоростей ветра или движущейся жидкости, силы тяжести, магнитной напряженности и т.д.

Пример.

Пусть данное тело массы *M* расположено в начале координат.



Опытным путем установлено, что любое другое тело массой *m*, помещаемое на разных расстояниях r_i от тела *M*, будет испытывать силу притяжения $\vec{F}_i$, направленную вдоль прямой $\vec{r}_i$, соединяющей эти два тела:

$$\vec{F}_i = -G\frac{Mm}{r_i^2}\frac{\vec{r}_i}{r_i} = -G\frac{Mm}{r_i^2}\vec{n}_i,$$

где G – гравитационная постоянная, $\vec{n}_i = \frac{\vec{r}_i}{r_i}$ - вектор единичной длины, направленный вдоль радиус-вектора $\vec{r}_i$. Поделив обе части равенства на *m*, заметим, что величина $\frac{\vec{F}_i}{m} = -G\frac{M}{r_i^2}\vec{n}_i$ не зависит от F_i и *m*, а определяется только расстоянием $\left(\sim\frac{1}{r_i^2}\right)$. Таким образом, в пространстве вокруг данного тела существует непрерывное векторное поле и его свойства определяются только массой тела *M*.

Кроме векторного поля напряженности вокруг тела массы *M* существует также и скалярное поле гравитационного потенциала $U=U(r)$. Гравитационным потенциалом называется работа, которую нужно совершить, чтобы переместить тело с массой, равной единице, из заданной точки в бесконечность. В нашем случае

$$U_i = \int_{r_i}^{\infty} F_i dr = -GM\int_{r_i}^{\infty}\frac{1}{r^2}dr = -GM\left(-\frac{1}{r}\bigg|_{r_i}^{\infty}\right) = -\frac{GM}{r_i}.$$

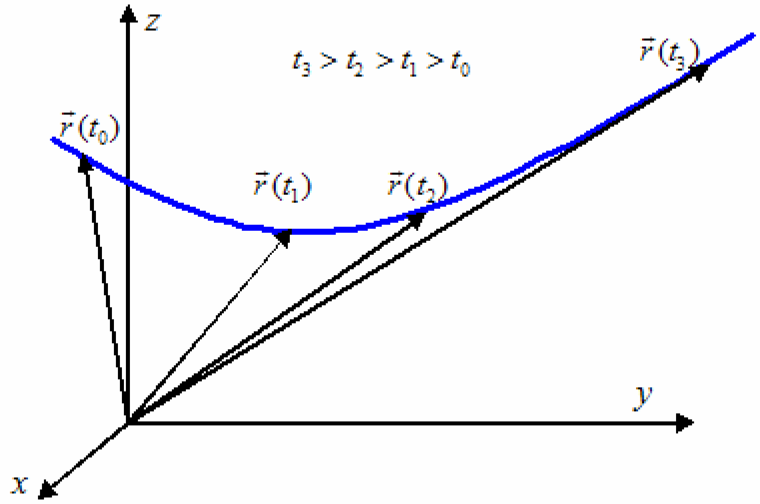
В таком поле работа по перемещению единичной массы из точки r_1 в точку r_2 не зависит от пути, а определяется только координатами начальной и конечной точки пути:

$$A = U_2 - U_1 = -GM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

2. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ.

Говорят, что в некоторой области Ω пространства задано скалярное поле $U = U(M, t)$, если в определенный момент времени t каждой точке M поставлено в соответствие одно определенное число U. Введением декартовой системы координат положение точки M в пространстве определяется тройкой чисел (x,y,z), или соответствующим радиус-вектором $\vec{r}(x,y,z)$ и задание скалярного поля формально совпадает с определением функции $U = U(x,y,z,t) = U(\vec{r},t)$ в некоторой области.

Если поле - стационарное, т.е., не меняется во времени, то $U = U(x, y, z)$.



Часто время t рассматривается как параметр, тогда при задании траектории движения материальной точки в виде $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ последовательное перемещение по траектории соответствует увеличению значений параметра t.

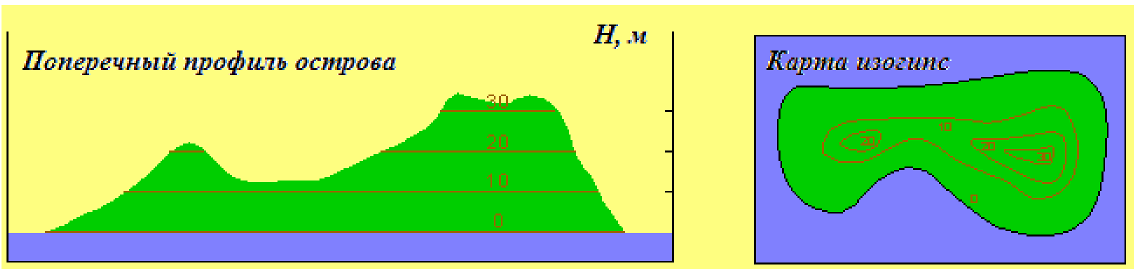
Учитывая, что функция $U(x,y,z,t)$ является моделью конкретной физической реальности, на нее накладываются определенные ограничения. Например, в данный момент времени для малой окрестности каждой точки M газовой или жидкой среды можно поставить в соответствие численные значения таких величин, как температура, плотность, давление, концентрация определенного вещества и т.д. Однако эти величины теряют смысл при уменьшении окрестности точки до размера одной молекулы. Таким образом, непрерывное (кусочно-непрерывное) распределение изучаемых физических полей является моделью, игнорирующей их дискретное строение.

В дальнейшем предполагаем функцию $U(x,y,z,t)$ однозначной и непрерывной вместе со своими частными производными (гладкой или кусочно-гладкой) в некоторой области пространства Ω и во времени, за исключением может быть некоторых особых точек. В случае скалярного поля концентрации некоторого компонента в растворе, эти особые точки могут соответствовать локальным областям растворения (*источники растворенного компонента*) или образования частиц твердой фазы (*стоки растворенного компонента*) в результате химической реакции.

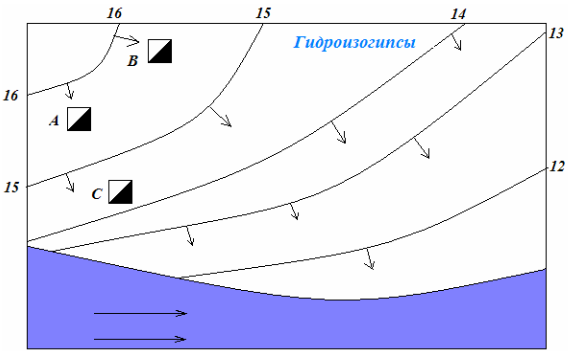
Поверхности и линии уровня.

Рассмотрим точки области Ω, в которой функция $U(x,\ y,\ z)$ принимает постоянные значения: $U(x,\ y,\ z)\ =\ \boldsymbol{C}$, ($\boldsymbol{C} = Const$). Геометрические места точек $M(x,y,z)$, где скалярное поле принимает одно и то же значение $U(x,\ y,\ z)\ =\ \boldsymbol{C_i}$, называются *поверхностями уровня*. Они образуют семейство непересекающихся поверхностей, т.к. в силу однозначности функции $U = U(x,y,z)$ поверхности уровня, соответствующие различным значениям $\boldsymbol{C_i}$, не пересекаются между собой. Совокупность этих поверхностей, различающихся постоянным шагом изменения значений $\boldsymbol{C_i}$, например, $\boldsymbol{C_1}=1$, $\boldsymbol{C_2}=2$, $\boldsymbol{C_3}=3$ и т.д., даёт наглядное представление об изменении поля при переходе от одной точки к другой. Поле меняется быстрее там, где эти поверхности расположены теснее. Очевидно, что изменение поля при любых перемещениях по самой поверхности уровня равно нулю: $dU = 0$.

Скалярное поле называется плоским, если при подходящем выборе системы координат функция поля зависит только от двух переменных. Геометрическое место точек плоскости $M(x,\ y)$, для которых $U(x,\ y)\ =\ \boldsymbol{C}$, называется линией уровня плоского скалярного поля, а их семейство - изолиниями. Например, изобара — изолиния одинакового давления; изобата — линия на карте, или плане, соединяющая точки одинаковых глубин водоёма; изогипса— изолиния одинаковых высот рельефа; гидроизогипса — изолиния высоты зеркала грунтовых вод над уровнем моря и т.д.



По карте гидроизогипс можно определить направление грунтового потока



в любой точке. Грунтовые воды могут передвигаться только от более высоких отметок к более низким, а по линии гидроизогипс движения не происходит, поскольку они соединяют одинаковые отметки. Вода передвигается по кратчайшему пути, следовательно, линии движения грунтовых вод всегда будут перпендикулярны к гидроизогипсам. Зная направление потока, можно правильно расположить эксплуатационные колодцы, т.е. так их разместить, чтобы они не перехватывали друг у друга поступающую к ним воду. Для этого они должны находиться вдоль гидроизогипс (колодцы А и В заложены правильно, а колодцы А и С - неправильно).

Задание.

1. Построить линии уровня скалярного поля, описываемого функцией:

а) $U(x,y) = x^2 + y$; б) $U(x,y) = \dfrac{y}{5x}$.

2. Найти поверхности уровня скалярного поля, описываемого функцией:

а) $U(x,y,z) = x + 2y - z$; б) $U(x,y, z) = x^2+y$

Производная по направлению. Градиент.

Производная по направлению. Производная скалярного поля $U(x,y,z)$ по направлению, заданному вектором $\vec{\ell} = \ell_x \vec{i} + \ell_y \vec{j} + \ell_z \vec{k}$, вычисляется по формуле

$$\frac{dU}{d\ell} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha = \dfrac{\ell_x}{|\vec{\ell}|}$, $\cos\beta = \dfrac{\ell_y}{|\vec{\ell}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{\ell_z}{|\vec{\ell}|}$ - направляющие косинусы вектора $\vec{\ell}$.

Вектор единичной длины $\vec{\ell}_0 = \dfrac{\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|}$, совпадающий по направлению с вектором $\vec{\ell}$ имеет следующие координаты: $\vec{\ell}_0 = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$

Абсолютная величина $\left|\dfrac{dU}{d\ell}\right|$ определяет скорость изменения скалярного поля в точке M, а знак производной - характер его изменения. Если $\dfrac{dU}{d\ell} > 0$ то поле $U(x,y,z)$ возрастает в данном направлении, Если $\dfrac{dU}{d\ell} < 0$ то поле $U(x,y,z)$ убывает в данном направлении.

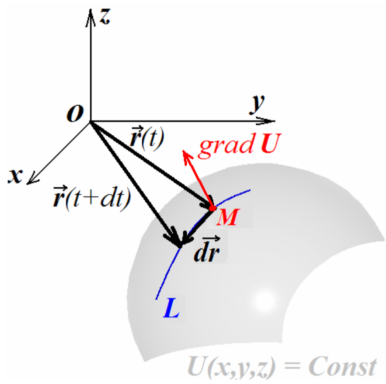
Градиент скалярного поля $U(M)$ есть вектор, направленный по нормали к поверхности уровня поля в сторону максимального возрастания поля и численно равный наибольшей производной по направлению. В таком определении градиент является инвариантной, т.е., не зависящей от выбора системы координат, характеристикой скалярного поля. Координатная формула для вычисления градиента имеет вид:

$$\mathrm{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \ .$$

Градиент. Градиент является обобщением понятия первой производной функции одной переменной на случай функции трех переменных.

Пусть на поверхности уровня задана произвольная кривая L, проходящая через точку M, в параметрическом виде $\vec{r}(t)$ = $x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, а $\overrightarrow{dr}(t)$ =

$\vec{r}(t+dt)-\vec{r}(t)$ (дифференциал радиус-вектора) есть бесконечно малое смещение вдоль данной кривой из точки *M*, в которой вычисляется градиент *gradU*.



Тогда из определения поверхности уровня $dU = 0$ следует $\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=(\mathrm{grad}U,\overrightarrow{dr})=0$ и $\Rightarrow$ $\mathrm{grad}U\perp\overrightarrow{dr}$. Из произвольности выбора кривой *L* следует, что градиент в точке *M* ортогонален к любой кривой, лежащей на поверхности уровня и содержащей эту точку *M*, а значит, к самой поверхности уровня.

С помощью градиента можно записать производную по направлению $\vec{\ell}_0$ ($|\vec{\ell}_0|=1$) в виде скалярного произведения векторов grad$U$ и $\vec{\ell}_0$:

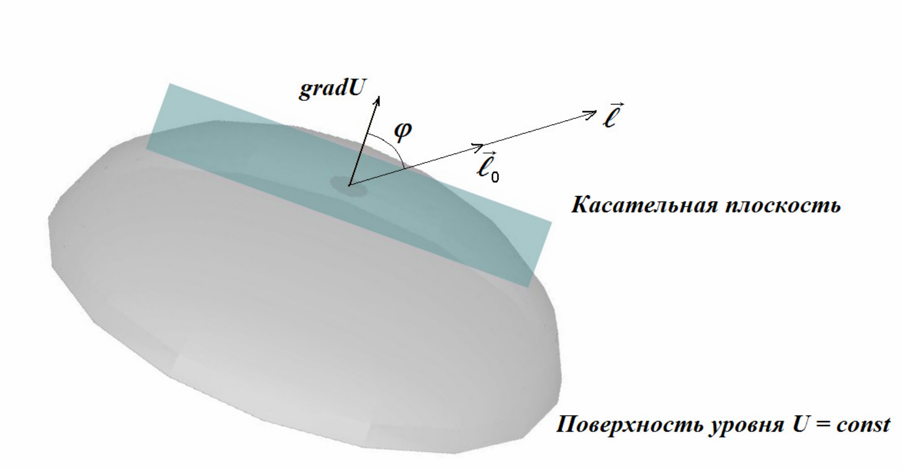
$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\ell_0}=(\mathrm{grad}U,\vec{\ell}_0)=|\mathrm{grad}U|\cdot|\vec{\ell}_0|\cdot\cos\varphi=|\mathrm{grad}U|\cdot\cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами grad$U$ и $\vec{\ell}_0$. Градиент в произвольной точке $M(x_0,y_0,z_0)$ совпадает по направлению ($\varphi = 0$) с нормалью к касательной плоскости, проведенной к поверхности уровня в этой же точке. Уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0,y_0,z_0)$ можно получить из условия перпендикулярности градиента grad$U$ векторам смещений из этой точки $\overrightarrow{r-r_0}=\vec{r}-\vec{r}_0=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}=0$:

$$(\mathrm{grad}U,\overrightarrow{r-r_0})=0,$$

или

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x_0}\cdot(x-x_0)+\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y_0}\cdot(y-y_0)+\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z_0}\cdot(z-z_0)=0.$$



Пример. Найти градиент поля радиального поля $U(x,y,z) = r$, где $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - модуль радиус-вектора $\vec{r}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Решение.

$$\frac{\partial r}{dx} = \frac{\partial\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r},$$

аналогично

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)}{\partial y} = \frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

И окончательно

$$\text{grad}r = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k} = \frac{1}{r}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Оператор Гамильтона. Оператор Лапласа.

Оператор Гамильтона.

В дальнейшем для обозначения градиента мы часто будем применять введённый Гамильтоном оператор ∇ ("набла"). Этот вектор-оператор определяется как

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Если формальное произведение $\frac{\partial}{\partial x}\cdot U$ понимать как $\frac{\partial U}{\partial x}$, тогда

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \text{grad}U,$$

т.е., произведение вектора ∇ на скаляр $U(x, y, z)$ даёт значение градиента поля U в точке $M(x, y, z)$. Иначе говоря, действие оператора Гамильтона на скалярное поле генерирует векторное поле градиентов.

Применяя известные правила дифференцирования можно показать, что градиент поля имеет следующие дифференциальные свойства:

1. <u>Линейность</u> (α и β – произвольные числа, $U = U(x, y, z)$ и $V = V(x, y, z)$ – скалярные поля)
2. $$\mathrm{grad}(\alpha U + \beta V) = \alpha\,\mathrm{grad}U + \beta\,\mathrm{grad}V,$$
   или
   $$\nabla(\alpha U + \beta V) = \alpha\nabla U + \beta\nabla V.$$
3. $$\mathrm{grad}(UV) = V\mathrm{grad}U + U\mathrm{grad}V,$$
   или
   $$\nabla(UV) = V\nabla U + U\nabla V,$$
4. $$\mathrm{grad}\frac{U}{V} = \frac{V\cdot\mathrm{grad}U - U\mathrm{grad}V}{V^2},$$
   или
   $$\nabla\frac{U}{V} = \frac{V\cdot\nabla U - U\nabla V}{V^2}.$$
5. Градиент сложной функции
   $$\mathrm{grad}\big(f(U)\big) = f'(U)\,\mathrm{grad}U,$$
   или
   $$\nabla\big(f(U)\big) = f'(U)\nabla U.$$

Оператор Лапласа.

Дифференциальным оператором Лапласа называется оператор Δ:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

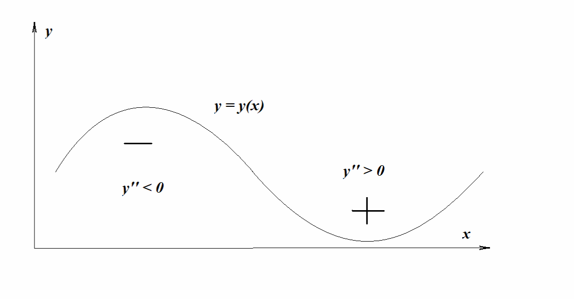
Его можно определить и как скалярный квадрат оператора Гамильтона

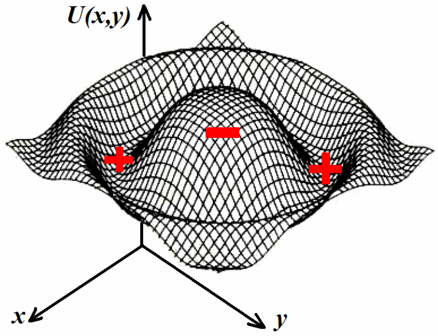
$$\nabla^2 = (\nabla, \nabla) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},\ \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Оператор Лапласа – скалярный оператор, его применение к скалярному полю генерирует скаляр. Пусть для скалярной функции $U(x,y,z)$ определены частные производные второго порядка, тогда результат применения оператора Лапласа к этой функции записывается в следующем виде

$$\Delta U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Также как в случае функции одной переменной $U = U(x)$, геометрический смысл действия оператора Лапласа аналогичен геометрическому смыслу вычисления второй производной, что связано с понятиями выпуклости и кривизны графика функции. Если $\Delta U < 0$, тогда функция имеет выпуклость и поле имеет тенденцию расходиться из этой области (например, жидкость будет растекаться из области с максимальным напором), если $\Delta U > 0$, то график функции имеет вогнутость и поле имеет тенденцию концентрироваться в этой области (например, жидкость будет стекаться к областям понижения рельефа).





Если $\Delta U = 0$, тогда скалярная функция поля не может достигать своих экстремальных значений ни в одной точке этой области. Уравнение $\Delta U = 0$ называется уравнением Лапласа. Оно используется при описании различных установившихся процессов, например установившегося движения несжимаемой жидкости и др. Скалярные поля, $U(x,y,z)$, удовлетворяющие условию $\Delta U = 0$, называются *гармоническими*, к ним относятся различного рода потенциалы – потенциал поля тяготения, напорный потенциал водяного столба и др.

3. ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

Если каждой точке M некоторой области Ω пространства соответствует значение некоторой векторной величины $\vec{a}(M)$, то говорят, что в области Ω задано векторное поле $\vec{a}(M)$. Поле называют потенциальным, если оно образовано векторами градиентов некоторого скалярного поля (потенциала).

Если в декартовой системе координат с базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторное поле $\vec{a}(M)$ задано координатами $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$, тогда

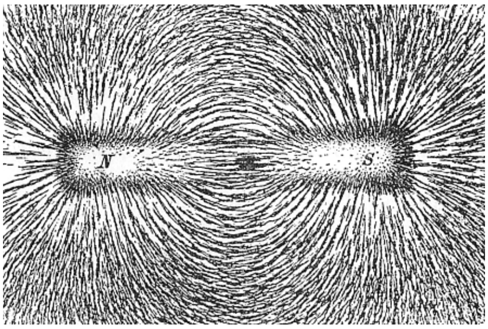
$$\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}\,.$$

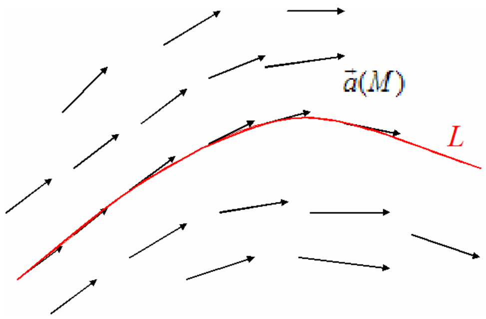
Таким образом, задание векторной функции $\vec{a}(M) = \vec{a}(x,y,z)$ эквивалентно заданию трёх скалярных функций $P(M)=P(x,y,z)$, $Q(M) = Q(x,y,z)$, $R(M) = R(x,y,z)$. Будем называть векторное поле *гладким,* если его координатные функции – гладкие, т.е., имеют непрерывные производные. Кроме того, будем предполагать, что векторное поле не имеет особых точек, т.е. функции P, Q, R не равны нулю одновременно.

В *силовой интерпретации* вектор $\vec{a}(M) = \vec{F}(M)$ трактуется как сила (например сила тяжести, напряжённость), действующая в точке M; в *гидродинамической интерпретации* $\vec{a}(M) = \vec{V}(M)$ рассматривается как поле скоростей текущей в области Ω жидкости.

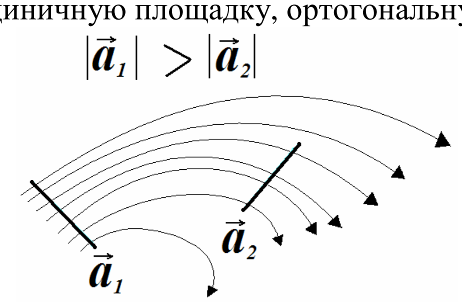
Векторные линии. Векторная трубка.

Для геометрического представления векторных полей вводится понятие векторных линий. Векторной линией данного поля $\vec{a}(M)$ называют такую линию L, в каждой точке которой вектор $\vec{a}(M)$ имеет направление касательной к этой линии. Такое представление аналогично визуализации действия магнитного поля с помощью железных опилок в школьных опытах.





Поскольку всегда предполагается, что вектор $\vec{a}(M)$ определен однозначно в каждой точке выделенной области, то векторные линии нигде не пересекаются в этой области, т.е., через каждую точку векторного поля проходит одна единственная векторная линия. Величину, соответствующую длине вектора $|\vec{a}(M)|$, принято изображать густотой векторных линий, т.е., числом векторных линий пересекающих единичную площадку, ортогональную к линиям поля .



В силовой интерпретации поля векторными линиями являются силовые линии поля. В гидродинамической - векторные линии суть траектории, по которым движутся частицы жидкости (линии тока).

Используя данное определение, найдем уравнения векторных линий. Пусть координаты радиус-векторов точек искомой векторной линии L заданы в параметрическом виде

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

Тогда касательный вектор к этой линии $\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$ в любой точке должен быть коллинеарен полю $\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$, или $\vec{r}\,'(t) = \lambda\vec{a}(M)$ и, соответственно, $x'(t) = \lambda P$, $y'(t) = \lambda Q$ и $z'(t) = \lambda R$. Следовательно, имеем систему из трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)},$$

решения которой и определяют семейство векторных линий. Единственность решения задачи Коши обеспечивается удовлетворением начальных условий, например, в виде:

$$x(t=0)=x_0,\quad y(t=0)=y_0,\quad z(t=0)=z_0$$

В случае плоского векторного поля $\vec{a}(M)=\vec{a}(x,y)$ семейство векторных линий определяется уравнением

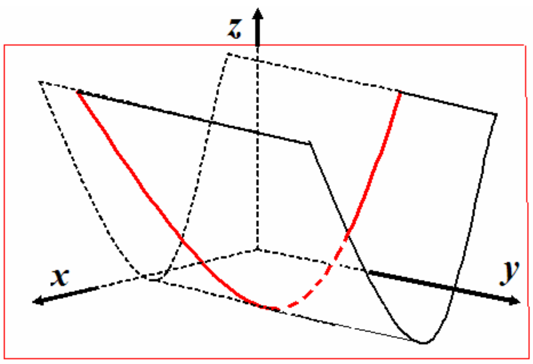
$$\frac{dx}{P(x,y)}=\frac{dy}{Q(x,y)};dz=0.$$

Пример. Пусть в точке M(1,0,0) требуется найти уравнение векторной линии поля $\vec{a}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$, где $P(x,y,z) = x$, $Q(x,y,z) = -x$, $R(x,y,z) = 2x^2$.

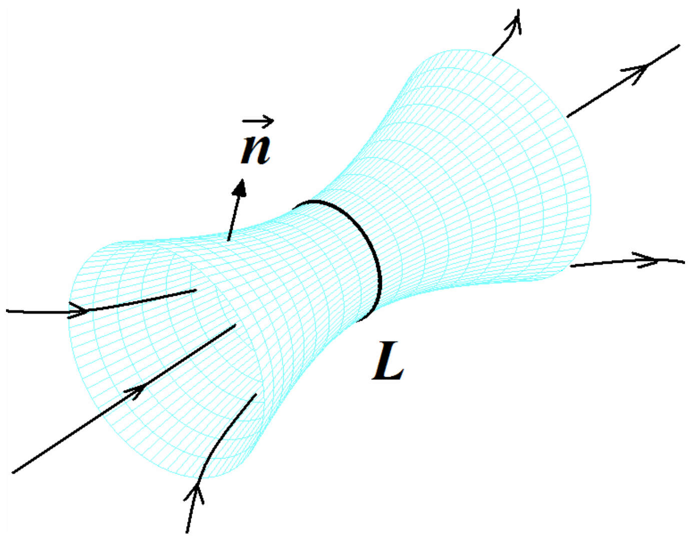
Решение. Составим пропорции $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{2x^2}$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-x}\\ \frac{dx}{x}=\frac{dz}{2x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=-dy\\ 2xdx=dz\end{cases},$$

получим общее решение $\begin{cases}y=-x+C_1\\ z=x^2+C_2\end{cases}$. Подставим в общее решение начальные условия в виде координат точки M(1,0,0) и найдем $\begin{cases}0=-1+C_1\\ 0=1+C_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1\\ C_2=-1\end{cases}$. Таким образом, запишем окончательное решение нашей задачи $\begin{cases}y=1-x\\ z=x^2-1\end{cases}$, которое дает линию пересечения параболического цилиндра $z=x^2-1$ и плоскости $y = 1-x$.



Векторная трубка.

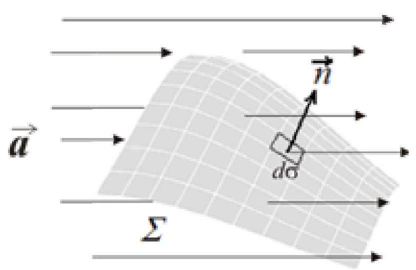


Возьмем в области Ω произвольный замкнутый контур L и через каждую его точку проведем векторную линию. Эти линии образуют векторную трубку. Любая другая векторная линия, не проходящая через точки контура L, либо целиком лежит внутри векторной трубки, либо находится вне трубки.

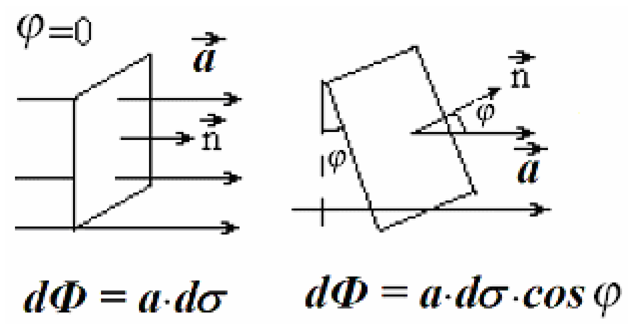
Действительно, если бы векторная линия пересекла боковую поверхность векторной трубки, то через точку пересечения проходило бы две векторные линии, что противоречит однозначности задания векторного поля.

Из определений векторной трубки и общего определения нормали к поверхности следует, что нормаль к поверхности трубки в любой точке M ортогональна к векторной линии, проходящей через эту точку.

Поток векторного поля через поверхность.



Пусть Σ - двусторонняя гладкая поверхность, расположенная в области $\boldsymbol{\Omega}$, в которой задано поле $\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$. Фиксируем одну из двух сторон поверхности Σ и условимся одно из направлений нормали, например, $\vec{n}(M) = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ считать положительным, а другое - отрицательным. Разобьем поверхность на бесконечно малые площадки $d\sigma$. Если поверхность не является плоской, то ее элементарные площадки можно заменить плоскими проекциями на соответствующую касательную плоскость. Выделим мысленно бесконечно малую ориентированную плоскую площадку $d\vec{\sigma} = \vec{n}d\sigma$, в пределах которой вектор $\vec{a}(M)$ может считаться постоянным. Потоком $d\Phi$ вектора $\vec{a}(M)$ через бесконечно малую ориентированную площадку $d\vec{\sigma}$ называется величина $d\Phi = (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = (\vec{a}, \vec{n})d\sigma = (a\cos\varphi)d\sigma$:



Чтобы найти поток Φ вектора $\vec{a}(M)$ через всю поверхность Σ, необходимо сложить потоки через все малые площадки $d\sigma$, т. е. проинтегрировать по поверхности. *Потоком* **Φ** *векторного поля* $\vec{a}(M)$ через поверхность Σ называется поверхностный интеграл первого рода по поверхности Σ от скалярного произведения вектора $\vec{a}(M)$ на единичный вектор нормали $\vec{n}$ к выбранной стороне поверхности:

$$\Phi == \iint_{\Sigma} d\Phi = \iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n})d\sigma .$$

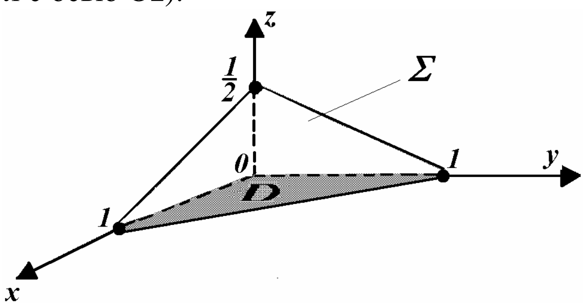
Раскрывая скалярное произведение, мы можем записать правую часть равенства в виде поверхностного интеграла второго рода:

$$\Phi = \iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n})d\sigma = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

Согласно определению, поток есть поверхностный интеграл, поэтому он обладает свойствами линейности по отношению к подынтегральной функции и аддитивности по отношению к разбиению области интегрирования. Поток меняет знак при изменении стороны поверхности вместе с изменением направления вектора нормали с $\vec{n}$ на $-\vec{n}$: $\Phi = \iint\limits_{\Sigma^+} (\vec{a},\vec{n})d\sigma = -\iint\limits_{\Sigma^-} (\vec{a},\vec{n})d\sigma$.

Если $\vec{a}(M)$ есть вектор скорости текущей жидкости, т.е., $\vec{a}(M) = \vec{V}(M)$, тогда $\Phi = \iint\limits_{\Sigma} (\vec{V},\vec{n})d\sigma$ это количество жидкости, протекающей через поверхность Σ в единицу времени. Это следует из смысла подынтегрального выражения $(\vec{V},\vec{n})d\sigma = V_n d\sigma$, где V_n - это компонента скорости жидкости перпендикулярная поверхности $d\sigma$. Рассматривая временной интервал равный единице, мы увидим, что $V_n d\sigma$ - это объем прямого цилиндрического тела с основанием $d\sigma$ и высотой V_n, заполненный жидкостью за единицу времени. После суммирования по всей поверхности мы получим объем того количества жидкости, который протекает через поверхность Σ за единицу времени.

Пример. Найти поток векторного поля $\vec{a}(x,y,z) = 3x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$ через часть плоскости Σ: $x + y + 2z = 1$, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz):



Решение. Найдем направляющие косинусы единичной нормали к заданной поверхности. Нормаль к плоскости, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, имеет следующий вид: $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k})$. В нашем примере имеем $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}(1\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k})$ = $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$. Найдем скалярное произведение $(\vec{a},\vec{n})$ = $\left((3x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}),(\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{k})\right)$ = $\frac{3x}{\sqrt{6}} + \frac{2y}{\sqrt{6}} + \frac{2z}{\sqrt{6}}$.

Подставим результат в формулу для вычисления потока:

$$\Phi = \iint\limits_{\Sigma} (\vec{a},\vec{n})d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{3x}{\sqrt{6}} + \frac{2y}{\sqrt{6}} + \frac{2z}{\sqrt{6}}\right)d\sigma.$$

Как видно из рисунка, данная поверхность Σ однозначно проектируется на плоскость 0xy в виде плоской области D. Сведем вычисление поверхностного интеграла к вычислению двойного интеграла по области D в плоскости $0xy$ по известной формуле: $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D} f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$

Для этого запишем уравнение поверхности в явном виде: $z=\frac{1}{2}(1-x-y)$, найдем $z'_x=-\frac{1}{2}$, $z'_y=-\frac{1}{2}$. Подставим в интеграл:

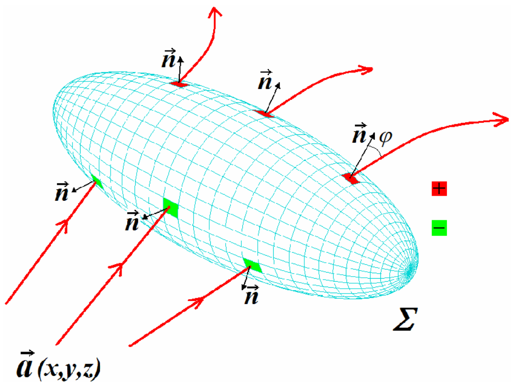
$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}(\vec{a},\vec{n})d\sigma=\iint\limits_{D}\left(\frac{3x}{\sqrt{6}}+\frac{2y}{\sqrt{6}}+\frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{2}(1-x-y)\right)\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy =$$

$$=\iint\limits_{D}\frac{1}{\sqrt{6}}(2x+y+1)\sqrt{\frac{3}{2}}dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(2x+y+1)dy =$$

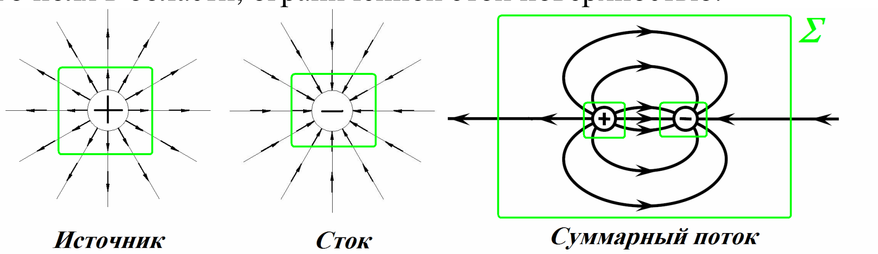
$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left[(2x+1)\Big|_0^{1-x}+\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{1-x}\right]dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\frac{3}{2}x\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\Phi = \frac{1}{2}$

Поток векторного поля через замкнутую поверхность. На рисунке показан случай равного нулю суммарного потока Ф через замкнутую поверхность. Как правило, за положительное направление векторов нормалей принимается направление внешних нормалей. Число векторных линий поля, входящих через данную поверхность внутрь выделенной области (-), равно числу линий поля, выходящих из этой области (+), но они берутся с противоположными знаками ($\cos\varphi_+ >0$, $\cos\varphi_- <0$).



Строго говоря, равенство нулю потока векторного поля через замкнутую поверхность может означать также равенство мощностей источников и стоков векторного поля в области, ограниченной этой поверхностью.



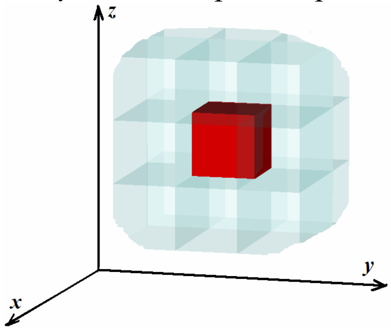
Теорема Остроградского-Гаусса

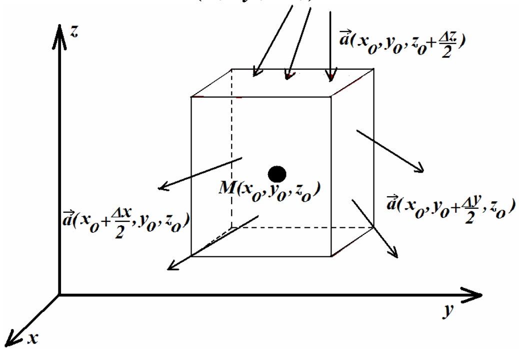
Если в некоторой области Ω трёхмерного пространства, ограниченной замкнутой кусочно-гладкой поверхностью Σ, задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$, то поток векторного поля $\vec{a}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности Σ равен тройному интегралу от функции $\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)$ по области Ω:

$$\Phi=\oiint\limits_{\Sigma}(\vec{a},\vec{n})d\sigma=\oiint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy \;=\; \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

где символ $\oiint\limits_{\Sigma}$ обозначает интеграл по замкнутой поверхности Σ.

Для вывода этой теоремы разобьем область Ω системой взаимно перпендикулярных плоскостей и рассмотрим малый параллелепипед со сторонами Δx, Δy, Δz с центром в произвольной точке $M(x_0, y_0, z_0)$.





Из построения плоскостями параллельными координатным следует, что внешние нормали $\vec{n}$ к граням (σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, σ_5 и σ_6) параллелепипеда будут попарно параллельны ортам выбранной системы координат: $-\vec{i}$ (σ_1) и $+\vec{i}$ (σ_2), $-\vec{j}$ (σ_3) и $+\vec{j}$ (σ_4), $-\vec{k}$ (σ_5) и $+\vec{k}$ (σ_6). Воспользовавшись свойством аддитивности поверхностного интеграла, представим полный поток через замкнутую поверхность $\delta\Sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6$ в виде суммы потоков $\delta\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6$ через каждую из шести граней, заданных уравнениями своих плоскостей:

1) σ_1: $x=x_0-\dfrac{\Delta x}{2}$, $\Phi_1=\iint\limits_{\sigma_1}(\vec{a},-\vec{i})d\sigma=-\iint\limits_{\sigma_1}P(x_0-\dfrac{\Delta x}{2},y_0,z_0)dydz$;

2) σ_2: $x=x_0+\dfrac{\Delta x}{2}$, $\Phi_2=\iint\limits_{\sigma_2}(\vec{a},+\vec{i})d\sigma=\iint\limits_{\sigma_2}P(x_0+\dfrac{\Delta x}{2},y_0,z_0)dydz$;

3) σ_3: $y=y_0-\dfrac{\Delta y}{2}$, $\Phi_3=\iint\limits_{\sigma_3}(\vec{a},-\vec{j})d\sigma=-\iint\limits_{\sigma_3}Q(x_0,y_0-\dfrac{\Delta y}{2},z_0)dzdx$;

4) σ_4: $y=y_0+\dfrac{\Delta y}{2}$, $\Phi_4=\iint\limits_{\sigma_4}(\vec{a},+\vec{j})d\sigma=\iint\limits_{\sigma_4}Q(x_0,y_0+\dfrac{\Delta y}{2},z_0)dzdx$;

5) σ_5: $z=z_0-\dfrac{\Delta z}{2}$, $\Phi_5=\iint\limits_{\sigma_5}(\vec{a},-\vec{k})d\sigma=-\iint\limits_{\sigma_5}R(x_0,y_0,z_0-\dfrac{\Delta z}{2})dxdy$;

5) σ_6: $z=z_0+\dfrac{\Delta z}{2}$, $\Phi_6=\iint\limits_{\sigma_6}(\vec{a},+\vec{k})d\sigma=\iint\limits_{\sigma_5}R(x_0,y_0,z_0+\dfrac{\Delta z}{2})dxdy$;

Сгруппируем попарно потоки через противоположные грани:

$$\Phi_1+\Phi_2=\iint\limits_{\sigma_1,\sigma_2}\left[P(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)-P(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)\right]dydz,$$

$$\Phi_3 + \Phi_4 = \iint\limits_{\sigma_3,\sigma_4} \left[Q(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0) - Q(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0) \right] dzdx,$$

$$\Phi_5 + \Phi_6 = \iint\limits_{\sigma_5,\sigma_6} \left[R(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2}) - R(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2}) \right] dxdy.$$

Для приближенного вычисления разложим подынтегральные функции в окрестности точки $M(x_0, y_0, z_0)$ в ряд Тэйлора по известной формуле:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots.$$

Ограничившись слагаемыми первого порядка малости найдем

$$P(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) \approx P(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial P(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x_0 - \frac{\Delta x}{2} - x_0) + \dots \approx P(M) - \frac{\partial P(M)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2},$$

и

$$P(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) \approx P(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial P(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x_0 + \frac{\Delta x}{2} - x_0) + \dots \approx P(M) + \frac{\partial P(M)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$$

и, подставив в подынтегральное выражение, получим

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \iint\limits_{\sigma_1,\sigma_2} \left[P(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) - P(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) \right] dydz \approx$$

$$\iint\limits_{\sigma_1,\sigma_2} \left[P(M) + \frac{\partial P(M)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} - P(M) + \frac{\partial P(M)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \right] dydz = \iint\limits_{\sigma_1,\sigma_2} \left[\frac{\partial P(M)}{\partial x}\Delta x \right] dydz =$$

$$= \frac{\partial P(M)}{\partial x}\Delta x \iint\limits_{\sigma_1,\sigma_2} dydz = \frac{\partial P(M)}{\partial x}\Delta x \int\limits_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} dy \int\limits_{z_0 - \frac{\Delta z}{2}}^{z_0 + \frac{\Delta z}{2}} dz = \frac{\partial P(M)}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z.$$

Аналогично поступая, получим потоки через другие грани:

$$\Phi_3 + \Phi_4 = \iint\limits_{\sigma_3,\sigma_4} \left[Q(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0) - Q(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0) \right] dzdx \approx \frac{\partial Q(M)}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z,$$

$$\Phi_5 + \Phi_6 = \iint\limits_{\sigma_5,\sigma_6} \left[R(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2}) - R(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2}) \right] dxdy \approx \frac{\partial R(M)}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z.$$

Просуммируем потоки

$$\delta\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 \approx \left(\frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z} \right)\Delta x \Delta y \Delta z$$ и

запишем результат обозначив $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$:

$$\delta\Phi = \oiint\limits_{\delta\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy \approx \left(\frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z} \right)\Delta V.$$

Разделив левую и правую часть на ΔV получим

$$\frac{\delta\Phi}{\Delta V} = \frac{\oiint\limits_{\delta\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy}{\Delta V} \approx \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}.$$

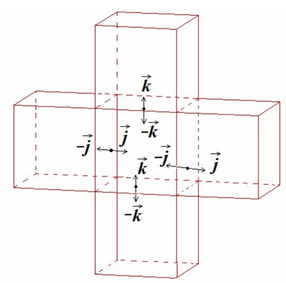
Переходя к пределу $\Delta V \to 0$ и, соответственно, $\delta\Sigma \to 0$, дадим (инвариантное) определение понятия *дивергенции*:

$$div\vec{a}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oiint\limits_{\delta\Sigma \to 0} (\vec{a}, \vec{n})d\sigma}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\delta\Phi}{\Delta V}.$$

Таким образом, дивергенция $div\vec{a}$ векторного поля $\vec{a}$ в точке M есть скалярная величина, численно равная предельной объемной плотности потока векторного поля в этой точке. Если $div\vec{a}(M) > 0$, то точка M называется источником, и векторные линии расходятся из этой области. Если $div\vec{a}(M) < 0$, то точка M называется стоком, и векторные линии сходятся к этой области. Величина $\left|div\vec{a}\right|$ характеризует мощность источника (или стока). Если это поток поля скоростей несжимаемой жидкости и внутри данного элементарного объема отсутствуют источники и стоки, тогда суммарный поток жидкости должен быть равен нулю.

Для получения результирующего потока *Φ* через внешнюю поверхность *Σ*, ограничивающую область *Ω*, просуммируем потоки $\delta\Phi_i$, приходящиеся на все элементарные ячейки нашего разбиения области *Ω*.

При этом учтем, что по каждой смежной грани двух соседних ячеек поверхностный интеграл будет браться дважды – по разным сторонам одной и той же смежной грани. Подобные пары поверхностных интегралов существуют для любой внутренней ячейки разбиения и взаимно уничтожаются при суммировании, т.к., они имеют противоположные знаки. В конечном итоге, при бесконечном уменьшении размеров элементарных ячеек разбиения и, при этом, бесконечного увеличения их общего числа *N*, ненулевыми останутся только интегралы по внешней поверхности, и мы сможем записать в окончательном виде формулу Остроградского-Гаусса в инвариантной и координатной форме:



$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\delta\Phi_i = \Phi_\Sigma = \oiint_\Sigma (\vec{a},\vec{n})d\sigma = \iiint_\Omega div\vec{a}d\Omega \text{, и}$$

$$\oiint_\Sigma Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

Дивергенция.

Дивергенцию можно определить с помощью оператора Гамильтона, как скалярное произведение

$$div\vec{a} = (\nabla,\vec{a}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k},\ P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}\right) = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Таким образом, действуя на векторное поле, дифференциальный оператор дивергенции порождает скалярное поле. Векторный оператор дивергенции удобно вычислять с использованием следующих формул:

1. $div\vec{C} = 0$, где $\vec{C}$ - постоянный вектор.

2. Линейность: для любых двух векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, и постоянных чисел α, β справедливо

$$div(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}) = \alpha div\vec{a}+\beta div\vec{b}.$$

3. Если $U\vec{a}$ – произведение скалярной функции на векторную функцию, тогда

$$div(U\vec{a}) = U\,div\vec{a}+(\vec{a},gradU).$$

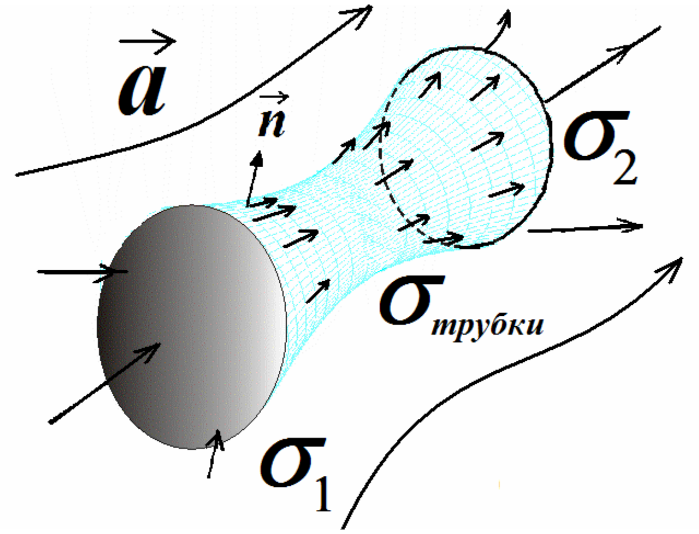
Соленоидальное поле.

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *соленоидальным или трубчатым* в некоторой области Ω, если всюду в этой области его дивергенция равна нулю:

$$div\vec{a}(M) = 0,\ M \in \Omega.$$

Следствием этого определения является следующие свойства соленоидального поля.

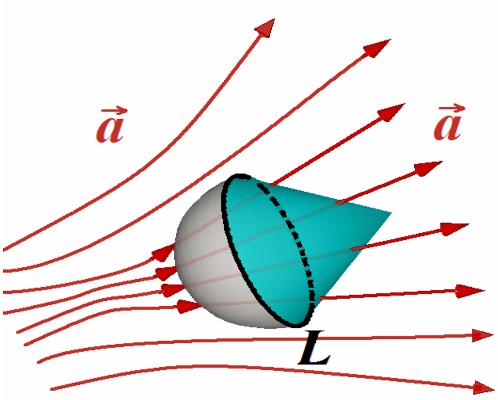
1. В соленоидальном поле поток вектора $\vec{a}$ через любое сечение векторной трубки один и тот же.

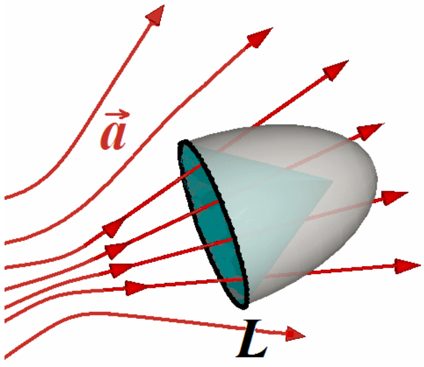


Поверхности σ_1, σ_2 и $\sigma_{трубки}$ образуют замкнутую поверхность Σ и по теореме Остроградского-Гаусса сумма потоков через эти три поверхности равна нулю $\oiint\limits_{\Sigma}(\vec{a},\vec{n})d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1}(\vec{a},\vec{n}_1)d\sigma + \iint\limits_{\sigma_{трубки}}(\vec{a},\vec{n}_{трубки})d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2}(\vec{a},\vec{n}_2)d\sigma = 0.$ Так как $\vec{n}_{трубки} \perp \vec{a}$, тогда $(\vec{a},\vec{n}_{трубки}) = 0$ и второе слагаемое в сумме трех интегралов равно нулю. Следовательно $-\iint\limits_{\sigma_1}(\vec{a},\vec{n}_1)d\sigma = \iint\limits_{\sigma_2}(\vec{a},\vec{n}_2)d\sigma$.

При вычислении потока из замкнутой области всегда полагают, что обе нормали n_1 и n_2 к поверхностям σ_1 и σ_2 ориентированы во внешнюю область. Чтобы сравнить поток через эти две поверхности, сориентируем их одинаково по отношению к направлению потока, тогда интеграл по поверхности σ_1 поменяет знак и мы будем иметь $\iint\limits_{\sigma_1}(\vec{a},-\vec{n}_1)d\sigma = \iint\limits_{\sigma_2}(\vec{a},\vec{n}_2)d\sigma$, ч.т.д.

2. Поток соленоидального векторного поля $\vec{a}$ через любую поверхность, натянутую на заданный контур L не зависит от вида поверхности.





Действительно, любые две поверхности σ_1 (серый полуэллипс) и σ_2 (голубой конус) в этом случае образуют замкнутую поверхность Σ. Используя формулу Остроградского-Гаусса, увидим, что поток $\oiint\limits_{\Sigma}(\vec{a},\vec{n})d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} div\vec{a}d\Omega = 0$. Рассуждая, как и в предыдущем случае, получим равенство потоков $\iint\limits_{\sigma_1}(\vec{a},-\vec{n}_1)d\sigma = \iint\limits_{\sigma_2}(\vec{a},\vec{n}_2)d\sigma$.

Ротор векторного поля. Циркуляция.

Ротор векторного поля.

Пусть в некоторой области Ω трёхмерного пространства задано векторное поле $\vec{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, все координатные функции которого непрерывно дифференцируемы по всем аргументам. Ротором (или вихрем) векторного поля называется вектор $rot\ \vec{a}$, который определяется равенством

$$rot\ \vec{a} = [\nabla, \vec{a}] = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Здесь правая часть – раскрытая форма определителя для векторного произведения оператора Гамильтона ∇ и вектора $\vec{a}$.

Часто ротор записывают просто с помощью определителя

$$rot\ \vec{a} = [\nabla, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Пример. Вычислить ротор векторного поля $\vec{a} = -\frac{y^2}{2}\vec{i} + \frac{x^2}{2}\vec{j}$.

$$rot\ \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y^2}{2} & \frac{x^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + (x+y)\vec{k}.$$

Если векторное поле $\vec{a}$ в каждой точке области Ω является полем градиентов некоторой потенциальной функции *U(x,y,z),* т.е. $\vec{a}$ = grad*U,* тогда $rot\ \vec{a}$ = 0 всюду в этой области. Векторное поле, ротор которого всюду равен 0, называется *безвихревым*.

Покажем это. По условию $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$,т.е. $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$ и $R = \frac{\partial U}{\partial z}$. Убедимся в сказанном, подставив в определение ротора эти выражения:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0, \text{ ч.т.д.}$$

Таким образом,

$$rot\ grad\ U = 0.$$

Покажем также, что если векторное поле $\vec{V}$ в каждой точке некоторой области Ω является ротором некоторого другого поля $\vec{a}$, т.е. $\vec{V} = rot\ \vec{a}$ тогда векторное поле $\vec{V}$ является соленоидальным. Для этого вычислим дивергенцию $div\,\vec{V}$.

$$div\,\vec{V} = div\ rot\ \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

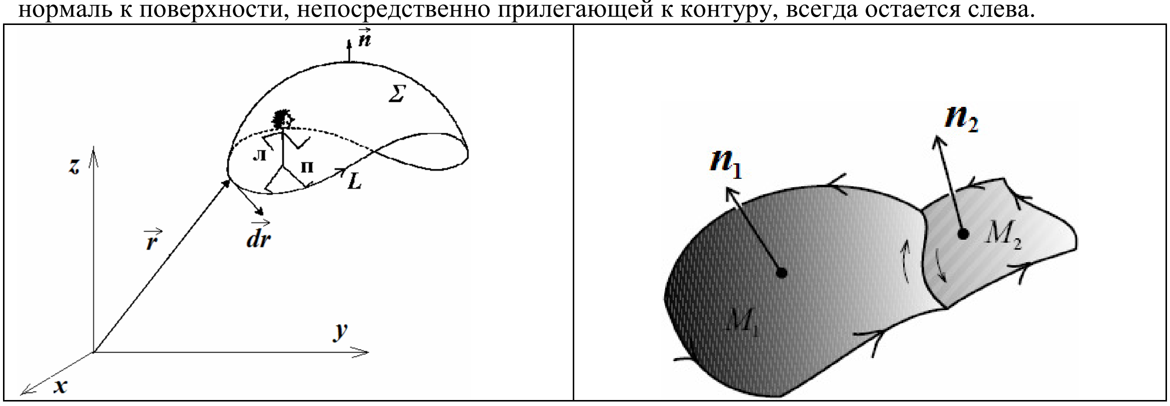
$$\frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = 0.$$

Таким образом, мы показали, что

$$div\ rot\ \vec{a} = 0.$$

Циркуляция.

Пусть поверхность *Σ*, имеет своей границей замкнутый контур *L*, иногда говорят, что поверхность натянута на контур *L*. Взаимосогласованным будем считать такой выбор положительного направления нормали $\vec{n}$ к поверхности *Σ* и положительного направления интегрирования по замкнутому контуру, когда при обходе контура в положительном направлении нормаль к поверхности, непосредственно прилегающей к контуру, всегда остается слева.



Вектор $\overrightarrow{dr}$, показанный на рисунке – векторный дифференциал дуги *L*, и при параметрическом задании кривой *L* в виде $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ его направление совпадает с направлением бесконечно малого перемещения из точки $\vec{r}(t)$ в точку $\vec{r}(t+dt)$ по мере увеличения параметра *t* ($dt > 0$).

Отметим, что применяя это правило к двум смежным участкам поверхности, содержащих точки M_1 и M_2, как показано на рисунке, направления движения вдоль общей границы оказываются взаимно противоположными.

Пусть в некоторой области *Ω*, содержащей ориентированный замкнутый контур *L*, задано непрерывное векторное поле $\vec{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$.

Циркуляцией векторного поля называется криволинейный интеграл векторного поля по замкнутому ориентированному контуру:

$$Ц = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz .$$

Если векторное поле является силовым полем, т.е., $\vec{a} = \vec{F}$, где $\vec{F}$ - вектор силы, тогда циркуляция численно равна работе силового поля по замкнутому контуру

$$A = \oint_L \vec{F} d\vec{r} .$$

Задание. Вычислить ротор векторного поля $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} - x\vec{j}$. Найти работу этого поля при перемещении единичной массы по замкнутым плоским контурам ABCDA (против часовой стрелки). Сопроводить решение нахождением уравнения векторных линий, их графическим изображением и направлениями векторов поля вдоль этих линий.
а) A(0,0); B(1,0), C(1,1) и D(0,1); б) A(1,0); B(2,0), C(2,1) и D(1,1); в) A(0,0); B(1,0), C(1,2) и D(0,2).

Теорема Стокса.

Теорема Стокса. Циркуляция векторного поля $\vec{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ вдоль ориентированного замкнутого контура *L* равна потоку ротора вектора $\vec{a}$ через любую поверхность *Σ*, ограниченную этим контуром.

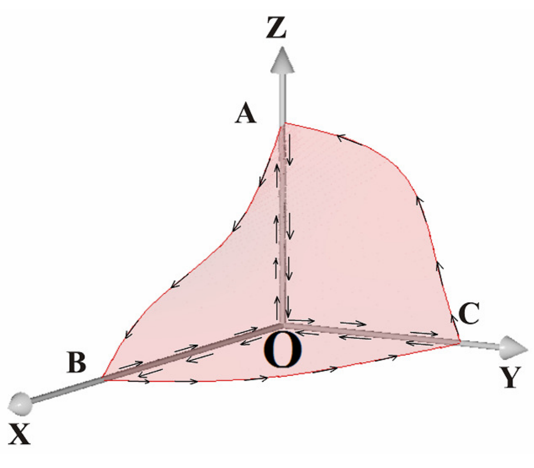
$$\oint_L \vec{a} d\vec{r} = \iint_\Sigma (rot\,\vec{a}, \vec{n}) d\sigma$$

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\Sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] d\sigma =$$

$$= \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Для доказательства разобьем поверхность *Σ* плоскостями параллельными координатным плоскостям. Выберем произвольно, но достаточно близко к поверхности, точку O и рассмотрим бесконечно малый элемент поверхности *ΔΣ*, который однозначно проектируется на координатные плоскости. Границей *ΔΣ* служит замкнутый контур *ΔL* = ABCA. Не теряя общности, поместим начало координат в точке O.

Для вычисления интеграла по контуру ABCA воспользуемся свойством аддитивности криволинейного интеграла второго рода и представим интеграл по замкнутому контуру ABCA в виде суммы интегралов по контурам, лежащим в координатных плоскостях (см. рисунок):



$$\oint\limits_{ABCA} \vec{a}d\vec{r} = \oint\limits_{ABOA} \vec{a}d\vec{r} + \oint\limits_{BCOB} \vec{a}d\vec{r} + \oint\limits_{CAOC} \vec{a}d\vec{r}\,.$$

В этом легко убедиться заметив, что отрезки АО, ВО и СО вносят нулевой вклад, т.к. интегрирование по ним производится дважды, но в противоположных направлениях.

Вычислим интегралы в правой части последнего равенства, воспользовавшись формулой Грина для плоских областей.

$$\oint\limits_{ABOA} \vec{a}d\vec{r} = \oint\limits_{ABOA} Pdx + Qdy + Rdz \overset{dy=0}{=} \oint\limits_{ABOA} Pdx + Rdz \overset{\text{формула Грина}}{=} \iint\limits_{ABO}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx\,,$$

$$\oint\limits_{BCOB} \vec{a}d\vec{r} = \oint\limits_{BCOB} Pdx + Qdy + Rdz \overset{dz=0}{=} \oint\limits_{BCOB} Pdx + Qdy \overset{\text{формула Грина}}{=} \iint\limits_{BCO}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dzdx\,,$$

$$\oint\limits_{CAOC} \vec{a}d\vec{r} = \oint\limits_{CAOC} Pdx + Qdy + Rdz \overset{dx=0}{=} \oint\limits_{CAOC} Qdy + Rdz \overset{\text{формула Грина}}{=} \iint\limits_{BCO}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\,.$$

Просуммируем полученные равенства

$$\oint\limits_{ABOA} \vec{a}d\vec{r} + \oint\limits_{BCOB} \vec{a}d\vec{r} + \oint\limits_{CAOC} \vec{a}d\vec{r} =$$

$$\iint\limits_{ABO}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \iint\limits_{BCO}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dzdx + \iint\limits_{BCO}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\,.$$

Сумма интегралов в левой части равенства, как мы уже показали есть $\oint\limits_{ABCA} \vec{a}d\vec{r}$. Сумма двойных интегралов в правой части равенства по определению является поверхностным интегралом второго рода по поверхности *ΔΣ*, поэтому можем записать

$$\oint\limits_{\Delta L} \vec{a}d\vec{r} = \iint\limits_{\Delta\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\,.$$

Воспользовавшись данным выше определением ротора, перепишем

$$\oint\limits_{\Delta L} \vec{a}d\vec{r} = \iint\limits_{\Delta\Sigma} (rot\vec{a}, \vec{n})d\sigma\,.$$

Полагая элемент поверхности *ΔΣ* достаточно малым, мы можем применить теорему о среднем:

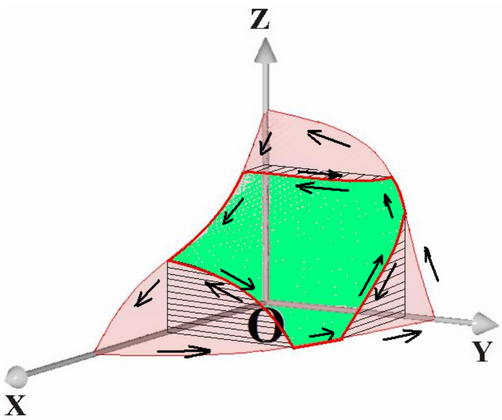
$$\iint\limits_{\Delta\Sigma} (rot\vec{a}, \vec{n})d\sigma \approx (rot\vec{a}, \vec{n})\big|_M \cdot S_{\Delta\Sigma}\,,$$

где М – некоторая точка в пределах элемента поверхности *ΔΣ*, а $S_{\Delta\Sigma}$ - площадь поверхности *ΔΣ*. Поделим обе части равенства на $S_{\Delta\Sigma}$ и запишем

$$(rot\vec{a}, \vec{n})\big|_M = (rot\vec{a})_{\vec{n}}\big|_M \approx \frac{\oint\limits_{\Delta L} \vec{a}d\vec{r}}{S_{\Delta\Sigma}}\,,$$

где $(rot\vec{a})_{\vec{n}}\big|_M$ - проекция ротора на нормаль $\vec{n}$, вычисленная в точке *М*. Знак приближенного равенства мы можем заменить на равенство вместе с бесконечным уменьшением размера элементарной площадки и можем дать тогда инвариантное определение ротора. *Нормальная проекция ротора векторного поля есть предельная поверхностная плотность циркуляции вектора* $\vec{a}$ *по контуру, ограничивающему эту поверхность при стягивании контура в точку М.*

Перейдем к суммированию по всем элементарным площадкам. Отметим, что выбранный нами вид элемента поверхности не нарушает общности рассуждений, что проиллюстрировано на следующем рисунке. Зеленая площадка наиболее общей формы может быть дополнена элементами поверхности уже проанализированного вида, что позволяет распространить полученный результат на всю поверхность *Σ*:



$$\sum \oint_{\Delta L} (\vec{a}, d\vec{r}) = \sum \iint_{\Delta\Sigma} (rot\ \vec{a}, \vec{n}) d\sigma .$$

Учтем, что внутренние границы между смежными элементами поверхности вносят нулевой вклад в суммарный криволинейный интеграл и получим окончательно формулу Стокса

$$\oint_{L} (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_{\Sigma} (rot\ \vec{a}, \vec{n}) d\sigma .$$

Литература

1. М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко, Е.В. Шикин, В.И. Заляпин, С.К. Соболев. Вся высшая математика Т. 4: Кратные и криволинейные интегралы, векторный анализ, функции комплексного переменного, дифференциальные уравнения с частными производными. Едиториал УРСС, 2005 г. – 352 с.
2. Н.И. Дергачев, В.А. Гершанок. Теория поля: Учебное пособие/ Перм. Ун-т. - Пермь, 2003. – 195 с.
3. Ф.М.Морс, Г.Фешбах - Методы теоретической физики. т.1. М., ИЛ, 1958.- 931 стр.
4. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2: Дифференциальное и интегральное исчисление: В 2 тт: Т. 2: Учебник для втузов. М.: Наука , 1985. – 544 с.