ГЛАВА 7. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§1. Евклидовы пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$

Говорят, что на пространстве $\mathbb{R}^n$ задано ***скалярное произведение***, если каждой паре векторов

$$x,\ y \in \mathbb{R}^n$$

поставлено в соответствие вещественное число

$$(x, y) \in \mathbb{R},$$

и при этом выполнены ***аксиомы скалярного произведения***:

1) $(x, x) \geqslant 0$ **для любого** $x \in \mathbb{R}^n$,

равенства $(x, x) = 0$ **и** $x = 0$ **эквивалентны;**

.

2) $(x, y) = (y, x)$ **для любых** $x, y \in \mathbb{R}^n$;

.

3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ **для любых** $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ **и** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

.

Из

2) $(x, y) = (y, x)$,

3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$

вытекает

4) $(x, \alpha y + \beta z) = (\alpha y + \beta z, x) = \alpha(y, x) + \beta(z, x) = \alpha(x, y) + \beta(x, z)$

для любых $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ **и** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

.

Если на пространстве $\mathbb{R}^n$ введено скалярное произведение то его называют *вещественным евклидовым пространством*.

.

Можно указать бесчисленное множество способов введения скалярного произведения на пространстве $\mathbb{R}^n$.

.

<u>Упражнение.</u> Проверить аксиомы 1)–3) для <u>*стандартного*</u> скалярного произведения:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \quad x,\ y \in \mathbb{R}^n.$$

.

Упражнение. Проверить аксиомы 1)–3) для скалярного произведения ***с весами***:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k y_k, \quad x,\, y \in \mathbb{R}^n, \quad \rho_k > 0, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Меняя $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, получаем различные скалярные произведения.

Если определить ***длину*** вектора x при помощи соотношения

$$|x| = \sqrt{(x, x)},$$

то длина вектора из $\mathbb{R}^n$ будет обладать свойствами, аналогичными свойствам длины вектора в трехмерном евклидовом пространстве:

.

1) $|x| \geqslant 0$ **для любого вектора** $x \in \mathbb{R}^n$**,**

равенство $|x| = 0$ **эквивалентно равенству** $x = 0$**;**

.

2) $|\alpha x| = |\alpha||x|$ **для любых** $x \in \mathbb{R}^n$ **и** $\alpha \in \mathbb{R}$**;**

.

3) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Неравенство 3) называют *неравенством треугольника* или *неравенством Минковского*.

.

Герман Минковский (Hermann Minkowski; 1864 — 1909) — немецкий математик.

Определяя различными способами скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$, получаем различные вещественные евклидовы пространства.

Пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением часто называют <u>*n-мерным арифметическим пространством*</u>.

.

Говорят, что на пространстве $\mathbb{C}^n$ задано ***скалярное произведение***, если каждой паре векторов

$$x,\ y \in \mathbb{C}^n$$

поставлено в соответствие комплексное число

$$(x, y) \in \mathbb{C},$$

и при этом выполнены ***аксиомы скалярного произведения***:

.

1) $(x,x) \geqslant 0$ **для любого** $x \in \mathbb{C}^n$,

равенства $(x,x) = 0$ **и** $x = 0$ **эквивалентны;**

.

2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ для любых $x, y \in \mathbb{C}^n$,

в отличие от вещественного евклидова пространства скалярное произведение в комплексном пространстве некоммутативно;

.

3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ **для любых** $x, y, z \in \mathbb{C}^n$ **и** $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$**.**

.

Из

2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,

3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$

вытекает

4) $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{(\alpha y + \beta z, x)} = \overline{\alpha}\overline{(y, x)} + \overline{\beta}\overline{(z, x)} = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z)$

для любых $x, y, z \in \mathbb{C}^n$ **и** $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Если на пространстве $\mathbb{C}^n$ введено скалярное произведение, то его называют *комплексным евклидовым пространством* (часто говорят также: *унитарное пространство*).

Можно указать бесчисленное множество способов введения скалярного произведения на пространстве $\mathbb{C}^n$.

.

<u>Упражнение.</u> Проверить аксиомы 1)–3) для <u>*стандартного*</u> скалярного произведения:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k, \quad x,\ y \in \mathbb{C}^n.$$

<u>Длину</u> (***<u>модуль</u>***) вектора x определяют при помощи соотношения

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

При этом выполняются свойства:

1) $|x| \geqslant 0$ для любого вектора $x \in \mathbb{C}^n$,

равенство $|x| = 0$ эквивалентно равенству $x = 0$;

2) $|\alpha x| = |\alpha||x|$ для любых $x \in \mathbb{C}^n$ и $\alpha \in \mathbb{C}$;

3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ для любых $x, y \in \mathbb{C}^n$.

§2. Общие евклидовы пространства

Будем говорить, что на вещественном линейном пространстве $\mathbf{X}$ введено *скалярное произведение*, если каждой паре элементов

$$x,\ y \in \mathbf{X}$$

поставлено в соответствие вещественное число

$$(x, y) \in \mathbb{R},$$

и при этом выполнены *аксиомы скалярного произведения*:

.

1) $(x,x) \geqslant 0$ **для любого** $x \in \mathbf{X}$,

равенства $(x,x) = 0$ **и** $x = 0$ **эквивалентны;**

2) $(x,y) = (y,x)$ **для любых** $x, y \in \mathbf{X}$;

3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$ **для любых** $x, y, z \in \mathbf{X}$ **и** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Если на линейном вещественном пространстве $\mathbf{X}$ введено скалярное произведение, его называют *вещественным евклидовым пространством*.

Будем говорить, что на комплексном линейном пространстве $\mathbf{X}$ введено ***скалярное произведение***, если каждой паре элементов

$$x,\, y \in \mathbf{X}$$

этого пространства поставлено в соответствие комплексное число

$$(x, y) \in \mathbb{C},$$

и при этом выполнены ***аксиомы скалярного произведения***:

.

1) $(x, x) \geqslant 0$ **для любого** $x \in \mathbf{X}$**,**

равенства $(x, x) = 0$ **и** $x = 0$ **эквивалентны;**

2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ **для любых** $x, y \in \mathbf{X}$**;**

3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ **для любых** $x, y, z \in \mathbf{X}$ **и** $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$**.**

Если на линейном комплексном пространстве $\mathbf{X}$ введено скалярное произведение, его называют ***комплексным евклидовым пространством***.

.

Приведем примеры евклидовых пространств.

Упражнение. Проверить, что в рассматриваемых ниже примерах аксиомы скалярного произведения выполнены.

1) Множество $\mathbf{V}_3$ всех векторов трехмерного пространства с введенными обычным образом линейными операциями и скалярным произведением — вещественное евклидово пространство.

.

2) Пусть p — интегрируемая положительная на интервале (a, b) вещественной оси вещественная функция. Пространство $C[a, b]$ превращается в вещественное евклидово пространство, если определить скалярное произведение элементов f, g пространства $C[a, b]$ по формуле

$$(f, g) = \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx.$$

.

3) Для любой пары

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad Q_n(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n$$

элементов пространства $\mathbf{Q}_n$ определим скалярное произведение:

$$(P_n, Q_n) = \sum_{j=0}^{n} \rho_j a_j \bar{b}_j,$$

где ρ_0, ρ_1, ..., ρ_n — заданные положительные числа. После введения таким образом скалярного произведения пространство $\mathbf{Q}_n$ становится комплексным евклидовым пространством.

.

Любое конечномерное линейное пространство $\mathbf{X}_n$ можно превратить в евклидово пространство.

.

Действительно, пусть $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис пространства $\mathbf{X}_n$,

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k e^k, \quad y = \sum_{k=1}^n \eta_k e^k \in \mathbf{X}_n.$$

Примем за скалярное произведение элементов x, y величину

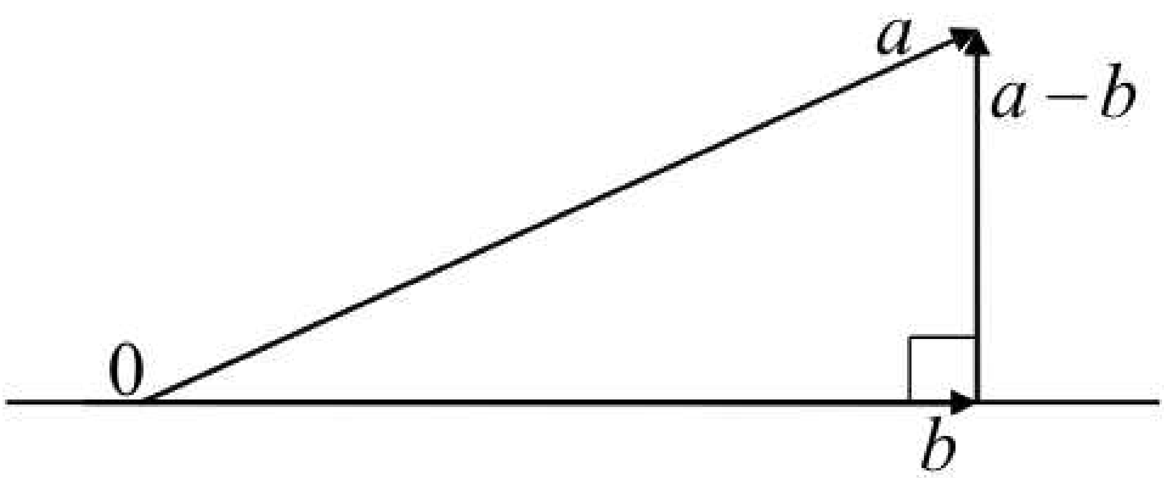
$$(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi_k \overline{\eta}_k.$$

Все аксиомы скалярного произведения при этом будут выполнены.

§3. НЕРАВЕНСТВО КОШИ — БУНЯКОВСКОГО

Тождество Пифагора

Пифагор Самосский (570 — 490 гг. до н. э.) — древнегреческий философ и математик.

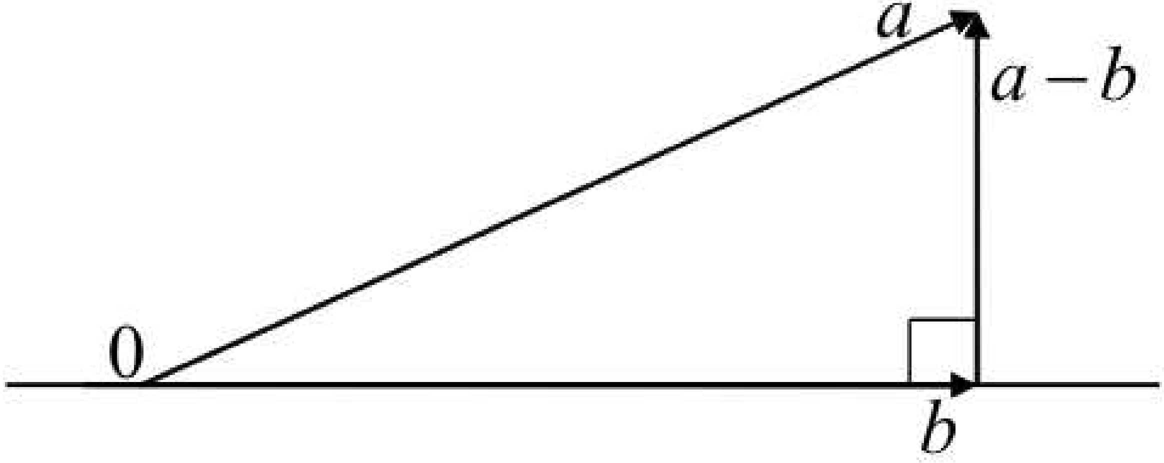


Пусть a, b — векторы трехмерного евклидова пространства $\mathbf{V}_3$, причем векторы $a-b$ и b ортогональны, т. е.

$$(a-b,b)=0.$$

Тогда по теореме Пифагора

$$|a|^2=|a-b|^2+|b|^2.$$



Можно сказать, что вектор b получен проектированием вектора a на прямую, параллельную вектору b.

Пусть теперь a, b **— векторы произвольного евклидова пространства** $\mathbf{X}$ **такие, что**

$$(a-b,b)=0.$$

Покажем, что тождество Пифагора

$$|a|^2=|a-b|^2+|b|^2$$

справедливо и в этом случае, если положить, что

$$|v|=\sqrt{(v,v)}\quad\forall v\in\mathbf{X}.$$

Действительно, проводя элементарные выкладки, будем иметь

$$
\begin{aligned}
|a|^2 = (a, a) = (a - b + b, a - b + b) = \\
&= (a - b, a - b) + (b, b) + (a - b, b) + (b, a - b) = \\
&= (a - b, a - b) + (b, b) + (a - b, b) + \overline{(a - b, b)} = \\
&= (a - b, a - b) + (b, b) = |a - b|^2 + |b|^2.
\end{aligned}
$$

<u>Теорема.</u> Пусть $\mathbf{X}$ — евклидово пространство. Для любых

$$x, y \in \mathbf{X}$$

справедливо неравенство Коши — Буняковского

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y).$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы x, y пропорциональны.

Огюстен Луи Коши (Augustin Louis Cauchy; 1789 — 1857) — французский математик и механик.

Виктор Яковлевич Буняковский (1804 — 1889) — русский математик.

<u>Доказательство.</u> Если $y = 0$, то неравенство

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y).$$

превращается в тривиальное равенство, и при любом $x \in \mathbf{X}$ векторы x и y пропорциональны, так как

$$0x + y = 0.$$

Поэтому в дальнейшем считаем, что $y \neq 0$.

.

Положим

$$e = \frac{y}{|y|}.$$

Очевидно, что

$$(e, e) = \left(\frac{y}{|y|}, \frac{y}{|y|}\right) = \frac{(y, y)}{|y|^2} = \frac{|y|^2}{|y|^2} = 1,$$

а

$$(x - (x, e)e, (x, e)e) =$$

$$= (x, (x, e)e) - ((x, e)e, (x, e)e) =$$

$$= \overline{(x, e)}(x, e) - (x, e)\overline{(x, e)}(e, e) = 0.$$

Итак, векторы $x-(x,e)e$ и $(x,e)e$ ортогональны:

$$(x-(x,e)e,(x,e)e)=0.$$

Значит, в тождестве

$$|a|^2=|a-b|^2+|b|^2$$

можно положить

$$a=x, \quad b=(x,e)e$$

и получить, что

$$|x|^2=|x-(x,e)e|^2+|(x,e)|^2.$$

.

Теперь из

$$|x|^2 = |x - (x,e)e|^2 + |(x,e)|^2$$

следует, что

$$|x|^2 \geqslant |(x,e)|^2.$$

Отсюда имеем

$$|(x,e)|^2 = \left|\left(x, \frac{y}{|y|}\right)\right|^2 = \frac{|(x,y)|^2}{|y|^2} \leqslant |x|^2.$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству Коши — Буняковского

$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y).$$

.

Если неравенство Коши — Буняковского превращается в равенство

$$|(x,y)|^2 = (x,x)(y,y),$$

т. е.

$$|x|^2 = \left|\left(x, \frac{y}{|y|}\right)\right|^2 = |(x,e)|^2,$$

то из

$$|x|^2 = |x-(x,e)e|^2 + |(x,e)|^2$$

следует

$$|x-(x,e)e|^2 = 0.$$

Из равенства

$$|x - (x, e)e|^2 = 0$$

вытекает, что

$$x = (x, e)e,$$

или

$$x = \left(\frac{(x, y)}{|y|^2}\right) y = \gamma y,$$

т. е. x и y пропорциональны.

.

Обратно, если векторы x, y пропорциональны, например,

$$x = \gamma y,$$

то

$$|(x,y)|^2 = |(\gamma y, y)|^2 = |\gamma (y,y)|^2 = |\gamma|^2 |(y,y)|^2 = |\gamma|^2 |y|^4$$

и

$$(x,x)(y,y) = (\gamma y, \gamma y)(y,y) = \gamma\overline{\gamma}(y,y)(y,y) = |\gamma|^2 |y|^4,$$

т. е. обе части неравенства Коши — Буняковского совпадают:

$$|(x,y)|^2 = (x,x)(y,y). \ \square$$

.

Величина

$$|x| = \sqrt{(x, x)}$$

называется ***длиной*** (***модулем***) вектора x.

.

Неравенство

$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y)$$

часто записывают в виде

$$|(x,y)| \leqslant |x||y| \quad \forall\, x,y \in \mathbf{X}.$$

.

Введенное понятие длины, обладает свойствами, аналогичными свойствам длины вектора в пространстве $\mathbf{V}_3$, а именно:

.

1) $|x| \geqslant 0$ **для любого вектора** $x \in \mathbf{X}$**,**

равенство $|x| = 0$ **эквивалентно равенству** $x = 0$**.**

.

Действительно, $|x| = \sqrt{(x, x)}$, а согласно свойству 1) скалярного произведения имеем:

$(x, x) = |x|^2 \geqslant 0$ для любого $x \in \mathbf{X}$,

равенства $(x, x) = 0$ и $x = 0$ эквивалентны.

.

2) $|\alpha x| = |\alpha||x|$ для любых $x \in \mathbf{X}$ и $\alpha \in \mathbb{C}$.

Действительно, по определению

$$|\alpha x| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(x, x)} = \sqrt{|\alpha|^2(x, x)} = |\alpha|\sqrt{(x, x)} = |\alpha||x|.$$

.

3) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ для любых $x, y \in \mathbf{X}$.

Неравенство 3) называют ***неравенством треугольника*** (***неравенством Минковского***).

.

Покажем, что неравенство треугольника вытекает из неравенства Коши — Буняковского. В самом деле,

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) =$$

$$= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) =$$

$$= |x|^2 + (x,y) + \overline{(x,y)} + |y|^2 =$$

$$= |x|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,y) + |y|^2.$$

.

Оценим $|\operatorname{Re}(x,y)|$ **сверху. Имеем**

$$|(x,y)|^2 = (\operatorname{Re}(x,y))^2 + (\operatorname{Im}(x,y))^2\,.$$

Следовательно,

$$(\operatorname{Re}(x,y))^2 \leqslant |(x,y)|^2$$

и

$$|\operatorname{Re}(x,y)| \leqslant |(x,y)|.$$

.

Вследствие

$$|\operatorname{Re}(x,y)| \leqslant |(x,y)| \quad \textbf{и} \quad |(x,y)| \leqslant |x||y|$$

справедливо неравенство

$$|\operatorname{Re}(x,y)| \leqslant |x||y|.$$

Отсюда и

$$|x+y|^2 = |x|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + |y|^2$$

получаем, что

$$|x+y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2.$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству треугольника

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

.

По аналогии с трехмерным евклидовым пространством $\mathbf{V}_3$ векторы x, y естественно называть *ортогональными*, если

$$(x, y) = 0.$$

.

<u>Пример</u>. Векторы $i^k, i^l \in \mathbb{C}^n$ при $k \neq l$ ортогональны относительно стандартного скалярного произведения.

.

Из неравенства

$$|(x,y)| \leqslant |x||y|$$

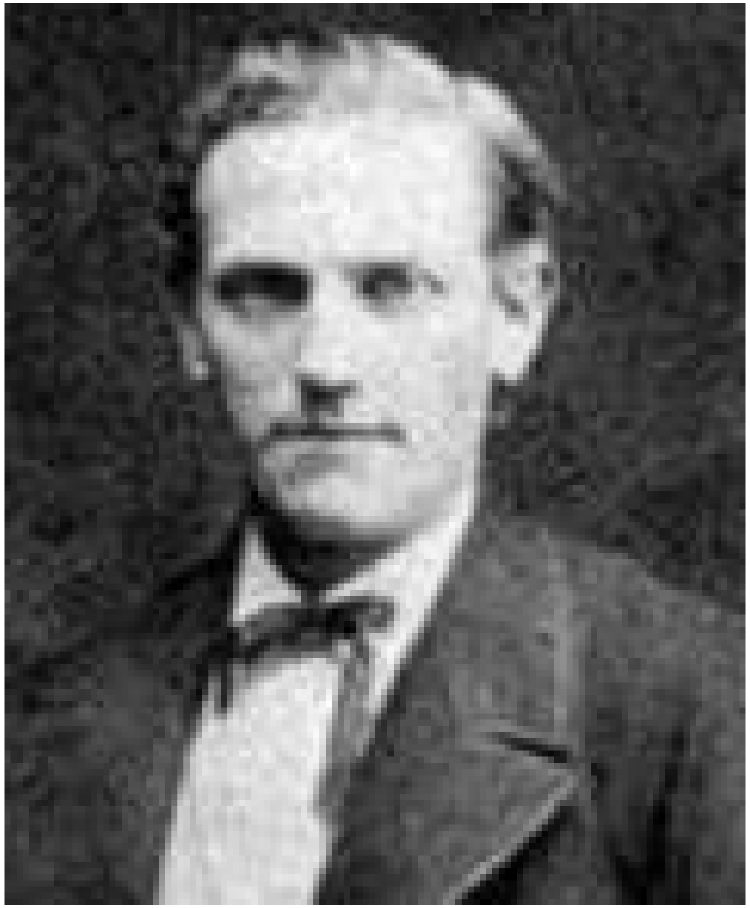
вытекает, что если X — вещественное евклидово пространство, то

$$\frac{(x,y)}{|x||y|} \in [-1,1]$$

для любых не равных нулю векторов $x, y \in$ **X. Это дает возможность ввести понятие *угла между векторами*** x, y**:**

$$\cos(x,y) = \frac{(x,y)}{|x||y|}.$$

§4. МАТРИЦА ГРАМА



Йорген Педерсен Грам (Jorgen Pedersen Gram; 1850 — 1916) —

датский математик.

Пусть $\{a^i\}_{i=1}^m$ — система векторов евклидова пространства $\mathbf{X}$. Построим квадратную матрицу порядка m:

$$G = \begin{pmatrix} (a^1, a^1) & (a^2, a^1) & \dots & (a^m, a^1) \\ (a^1, a^2) & (a^2, a^2) & \dots & (a^m, a^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a^1, a^m) & (a^2, a^m) & \dots & (a^m, a^m) \end{pmatrix}$$

Матрица G называется ***матрицей Грама*** системы векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$.

Отметим, что поскольку

$$(a^k, a^l) = \overline{(a^l, a^k)},$$

то матрица Грама любой системы векторов — эрмитова матрица:

$$G = G^* \equiv (\overline{G})^T,$$

где

$$G = \begin{pmatrix} (a^1, a^1) & (a^2, a^1) & \dots & (a^m, a^1) \\ (a^1, a^2) & (a^2, a^2) & \dots & (a^m, a^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a^1, a^m) & (a^2, a^m) & \dots & (a^m, a^m) \end{pmatrix}.$$

<u>Теорема.</u> Для того, чтобы система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ была линейно независимой необходимо и достаточно, чтобы ее матрица Грама была невырожденной.

.

Доказательство. Пусть матрица Грама G невырождена. Тогда система $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно независима. Действительно, если

$$x_1a^1 + x_2a^2 + \cdots + x_ma^m = 0,$$

то

$$(x_1a^1 + x_2a^2 + \cdots + x_ma^m, a^k) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Записывая равенства

$$(x_1a^1 + x_2a^2 + \cdots + x_ma^m, a^k) = 0, \quad k = 1, \ldots, m,$$

более подробно получаем

$$x_1(a^1, a^k) + x_2(a^2, a^k) + \cdots + x_m(a^m, a^k) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Система

$$x_1(a^1, a^k) + x_2(a^2, a^k) + \cdots + x_m(a^m, a^k) = 0, \quad k = 1, \ldots, m,$$

есть однородная система уравнений относительно неизвестных

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$$

с матрицей G. Поскольку матрица G невырождена, система имеет только тривиальное решение, следовательно,

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m = 0.$$

Итак, из равенства

$$\mathcal{A}_m x = 0,$$

используя невырожденность матрицы Грама, получили, что

$$x = 0,$$

т.е. система векторов

$$\mathcal{A}_m = \{a^i\}_{i=1}^m$$

линейно независима.

Обратно, пусть система

$$\mathcal{A}_m = \{a^i\}_{i=1}^m$$

линейно независима. Составим линейную комбинацию столбцов матрицы G с некоторым коэффициентами

$$x_1, \ x_2, \ \dots, \ x_m.$$

Приравнивая эту линейную комбинацию нулю, получим

$$x_1(a^1, a^k) + x_2(a^2, a^k) + \dots + x_m(a^m, a^k) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

.

Запишем равенства

$$x_1(a^1, a^k) + x_2(a^2, a^k) + \cdots + x_m(a^m, a^k) = 0, \quad k = 1, \ldots, m,$$

в виде

$$\left(\sum_{k=1}^{m} x_k a^k, a^k\right) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Умножим почленно каждое равенство на $\overline{x}_k$:

$$\overline{x}_k \left(\sum_{k=1}^{m} x_k a^k, a^k\right) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Сложим почленно полученные равенства:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} x_k a^k, \sum_{k=1}^{m} x_k a^k\right) = 0.$$

.

Итак,

$$\left(\sum_{k=1}^{m} x_k a^k, \sum_{k=1}^{m} x_k a^k\right) = 0,$$

следовательно,

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_m a^m = 0.$$

Напомним, что мы считаем систему $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно независимой, значит из

$$x_1a^1 + x_2a^2 + \cdots + x_ma^m = 0$$

вытекает, что

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m = 0.$$

.

Таким образом, мы получили, что если линйная комбинация столбцов матрицы G обращается в нуль, то все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю. Это означает, что столбцы матрицы G линейно независимы, т. е. матрица G невырождена. $\square$

.

<u>Пример.</u> Исследуем на линейную зависимость векторы

$$x^1 = (1, 3, 3, 1, -2), \quad x^2 = (3, 3, 1, -3, 2), \quad x^3 = (1, 3, -1, 1, 3)$$

пространства $\mathbb{R}^5$. Введем на этом пространстве стандартное скалярное произведение и составим матрицу Грама третьего порядка $G = \{(x^i, x^j)\}_{i,j=1}^3$. Выполняя элементарные вычисления, получим

$$G = \begin{pmatrix} 24 & 8 & 2 \\ 8 & 32 & 14 \\ 2 & 14 & 21 \end{pmatrix}, \quad \det(G) = 2^4 \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 7 \\ 1 & 7 & 21 \end{vmatrix} = 2^4 \begin{vmatrix} 0 & -40 & -125 \\ 0 & -6 & -35 \\ 1 & 7 & 21 \end{vmatrix} = 2^4 \cdot 650,$$

т. е. векторы x^1, x^2, x^3 линейно независимы.

§5. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ называется ***ортогональной***, если

$$a^i \neq 0, \quad i = 1, \ \ldots, \ m,$$

и

$$(a^i, a^k) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k.$$

Матрица Грама ортогональной системы — диагональная невырожденная матрица. Очевидно, ортогональная система линейно независима.

Система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ называется *ортонормированной*, если

$$(a^i, a^k) = \delta_{ik}, \quad i,\ k = 1,\ \ldots,\ m.$$

Матрица Грама ортонормированной системы — единичная матрица. Все векторы ортонормированной системы имеют длину, равную единице.

.

Матрица T перехода от любого ортонормированного базиса $\mathcal{E}_n$ к другому ортонормированному базису

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

евклидова пространства $\mathbf{X}_n$ является унитарной.

В самом деле, записывая равенство

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T$$

более подробно, получим

$$\widetilde{e}^k = \sum_{j=1}^{n} t_{jk} e^j, \quad k = 1, \ \ldots, \ n.$$

.

Вследствие ортонормированности базиса $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ из

$$\widetilde{e}^k = \sum_{j=1}^{n} t_{jk} e^j, \quad k = 1, \ \ldots, \ n,$$

получаем, что

$$\left(\sum_{j=1}^{n} t_{jk} e^j, \sum_{j=1}^{n} t_{jl} e^j \right) = (\widetilde{e}^k, \widetilde{e}^l) = \delta_{kl}, \quad k, \ l = 1, \ \ldots, \ n.$$

Запишем равенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ik}e^{i}, \sum_{j=1}^{n} t_{jl}e^{j}\right) = \delta_{kl}, \quad k,\ l = 1,\ \ldots,\ n,$$

в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ik}\overline{t_{jl}}\left(e^{i}, e^{j}\right) = \delta_{kl}, \quad k,\ l = 1,\ \ldots,\ n.$$

Отсюда, с учетом ортонормированности базиса $\mathcal{E}_n$, получим, что

$$\sum_{j=1}^{n} t_{jk}\overline{t_{jl}} = \sum_{j=1}^{n} \overline{t_{jl}}t_{jk} = \delta_{kl}, \quad k,\ l = 1,\ \ldots,\ n,$$

а это и означает, что матрица T унитарна:

$$T^{*}T = I.$$

Если выполненные выкладки провести от конца к началу, то будет проверена справедливость обратного утверждения:
если базис $\mathcal{E}_n$ ортонормирован, а матрица T унитарна, то базис

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T$$

также ортонормирован.

§6. ПРОЦЕСС ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ГРАМА — ШМИДТА

Эрхард Шмидт (Erhard Schmidt; 1876 — 1959) — немецкий математик.

<u>Теорема Грама — Шмидта.</u> Всякая линейно независимая система

$$\{a^i\}_{i=1}^m$$

эквивалентна некоторой ортонормированной системе

$$\{b^i\}_{i=1}^m,$$

причем вектор b^1 можно выбрать пропорциональным вектору a^1.

<u>Доказательство.</u> Положим

$$h^1 = a^1, \quad h^2 = x_{2,1}h^1 + a^2.$$

Здесь

$$h^1 \neq 0,$$

т. к. вектор

$$a^1 \neq 0$$

как элемент линейно независимой системы.

.

При любом значении $x_{2,1}$ вектор

$$h^2 = x_{2,1}h^1 + a^2 \neq 0$$

как линейная комбинация линейно независимых векторов, причем один из коэффициентов этой линейной комбинации не равен нулю (он равен единице).

Выберем теперь число $x_{2,1}$ так, чтобы вектор

$$h^2 = x_{2,1}h^1 + a^2$$

был ортогонален вектору h^1:

$$(h^2, h^1) = 0.$$

Записывая это условие, получим

$$x_{2,1}(h^1, h^1) + (a^2, h^1) = 0,$$

откуда

$$x_{2,1} = -\frac{(a^2, h^1)}{(h^1, h^1)}.$$

Итак, построены векторы h^1, h^2 такие, что

$$h^1,\ h^2 \neq 0,$$

$$(h^1, h^2) = 0.$$

Предположим теперь, что построены $h^1,\ h^2,\ \ldots,\ h^k$ **такие, что**

$$h^1,\ h^2,\ \ldots,\ h^k \neq 0,$$

и

$$(h^i, h^j) = 0 \quad \text{для} \quad i \neq j, \quad i,\ j = 1,\ \ldots,\ k.$$

Будем разыскивать вектор h^{k+1} **в виде**

$$h^{k+1} = x_{k+1,1}h^1 + x_{k+1,2}h^2 + \cdots + x_{k+1,k}h^k + a^{k+1}.$$

При любых значениях коэффициентов $x_{k+1,1}, \ \ldots, \ x_{k+1,k}$ вектор

$$h^{k+1} = x_{k+1,1}h^1 + x_{k+1,2}h^2 + \cdots + x_{k+1,k}h^k + a^{k+1} \neq 0.$$

В самом деле, по построению векторы

$$h^1, \ h^2, \ \ldots, \ h^k$$

линейно выражаются через векторы

$$a^1, \ a^2, \ \ldots, \ a^k,$$

причем так, что в выражение для вектора h^j входят векторы системы $\{a^i\}_{i=1}^m$ с номерами, не превосходящими j.

Отсюда вытекает, что вектор

$$h^{k+1} = x_{k+1,1}h^1 + x_{k+1,2}h^2 + \cdots + x_{k+1,k}h^k + a^{k+1} \neq 0$$

как линейная комбинация линейно независимых векторов

$$a^1,\ a^2,\ \ldots,\ a^{k+1},$$

причем вектор a^{k+1} входит в эту линейную комбинацию с коэффициентом, равным единице.

.

Выберем число $x_{k+1,1}$ так, чтобы вектор

$$h^{k+1} = x_{k+1,1}h^1 + x_{k+1,2}h^2 + \cdots + x_{k+1,k}h^k + a^{k+1}$$

был ортогонален вектору h^1 :

$$(h^{k+1}, h^1) = 0.$$

Выполняя это условие, найдем

$$x_{k+1,1}(h^1, h^1) + (a^{k+1}, h^1) = 0,$$

откуда

$$x_{k+1,1} = -\frac{(a^{k+1}, h^1)}{(h^1, h^1)}.$$

Продолжим этот процесс, выбирая числа

$$x_{k+1,2}, \quad \ldots, \quad x_{k+1,k}$$

так, чтобы вектор

$$h^{k+1} = x_{k+1,1}h^1 + x_{k+1,2}h^2 + \cdots + x_{k+1,k}h^k + a^{k+1}$$

был ортогонален уже построенным векторам

$$h^2, \quad \ldots, \quad h^k.$$

Последовательно выполняя эти условия, найдем

$$x_{k+1,2} = -\frac{(a^{k+1}, h^2)}{(h^2, h^2)},$$

$$\ldots$$

$$x_{k+1,k} = -\frac{(a^{k+1}, h^k)}{(h^k, h^k)}.$$

Итак, построен вектор

$$h^{k+1} \neq 0$$

ортогональный векторам

$$h^1, \ h^2, \ \ldots, \ h^k.$$

.

Продолжая описанный процесс, построим ортогональную систему ненулевых векторов $\{h^i\}_{i=1}^m$. Полагая затем

$$b^i = \frac{h^i}{|h^i|}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

получим ортонормированную систему векторов $\{b^i\}_{i=1}^m$.

Как было установлено выше, система векторов

$$\{h^i\}_{i=1}^m$$

линейно выражается через систему векторов

$$\{a^i\}_{i=1}^m.$$

Формула

$$a^{k+1} = -x_{k+1,1}h^1 - x_{k+1,2}h^2 - \cdots - x_{k+1,k}h^k + h^{k+1}$$

показывает, что система векторов

$$\{a^i\}_{i=1}^m$$

линейно выражается через систему векторов

$$\{h^i\}_{i=1}^m.$$

.

Формула

$$b^i = \frac{h^i}{|h^i|}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

показывает, что системы

$$\{b^i\}_{i=1}^m, \quad \{h^i\}_{i=1}^m$$

эквивалентны.

.

Таким образом, все три рассматриваемые системы векторов

$$\{a^i\}_{i=1}^m, \quad \{h^i\}_{i=1}^m, \quad \{b^i\}_{i=1}^m$$

попарно эквивалентны.

.

Заметим, наконец, что векторы a^1, b^1 пропорциональны, так как по построению

$$b^1 = \frac{a^1}{|a^1|}. \ \square$$

.

Доказательство этой теоремы конструктивно. Оно содержит описание способа построения по любой линейно независимой системе эквивалентной ортонормированной системы. Этот метод называется ***процессом ортогонализации Грама — Шмидта.***

<u>Упражнение.</u> Даны полиномы

$$Q_0(x) \equiv 1, \quad Q_1(x) = x, \quad Q_2(x) = x^2$$

вещественной переменой x. Используя метод ортогонализации Грама — Шмидта, построить <u>***полиномы Лежандра***</u>

$$P_0,\ P_1,\ P_2$$

нулевой первой и второй степени, соответственно, ортонормированные в смысле скалярного произведения, определяемого формулой

$$(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

<u>Ответ.</u>

$$P_0(x) = 1/\sqrt{2}, \quad P_1(x) = x\sqrt{3/2}, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1).$$

Адриен Мари Лежандр (Adrien-Marie Legendre; 1752 — 1833) — французский математик (карикатура на Лежандра, 1820 — единственный известный портрет ученого).

.

Пусть

$$e \neq 0$$

есть произвольный вектор евклидова пространства

$$\mathbf{X}_n, \quad n > 1.$$

Тогда существует некоторый вектор f_2, непропорциональный e. Затем можно указать вектор f_3 так, чтобы векторы

$$e, \quad f_2, \quad f_3$$

были линейно независимы.

Продолжая этот процесс, получим базис пространства $\mathbf{X}_n$, включающий в себя вектор e.

.

Применяя затем процесс ортогонализации Грама — Шмидта, можно построить ортонормированный базис пространства $\mathbf{X}_n$, содержащий вектор, пропорциональный вектору e.

§7. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

В евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$ вычисление коэффициентов разложения вектора

$$x \in \mathbf{X}_n$$

по любому базису

$$\{e^k\}_{k=1}^n$$

можно свести к решению крамеровской системы линейных алгебраических уравнений с эрмитовой матрицей.

Действительно, умножим обе части равенства

$$\xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 + \cdots + \xi_n e^n = x$$

скалярно на вектор e^1, затем на вектор e^2 и т. д. и, наконец, на вектор e^n. Получим систему уравнений

$$(e^1, e^1)\xi_1 + (e^2, e^1)\xi_2 + \cdots + (e^n, e^1)\xi_n = (x, e^1),$$

$$(e^1, e^2)\xi_1 + (e^2, e^2)\xi_2 + \cdots + (e^n, e^2)\xi_n = (x, e^2),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(e^1, e^n)\xi_1 + (e^2, e^n)\xi_2 + \cdots + (e^n, e^n)\xi_n = (x, e^n),$$

матрицей которой служит матрица Грама базиса $\{e^k\}_{k=1}^n$.

.

Наиболее просто система

$$
\begin{gathered}
(e^1, e^1)\xi_1 + (e^2, e^1)\xi_2 + \dots + (e^n, e^1)\xi_n = (x, e^1),\\
(e^1, e^2)\xi_1 + (e^2, e^2)\xi_2 + \dots + (e^n, e^2)\xi_n = (x, e^2),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(e^1, e^n)\xi_1 + (e^2, e^n)\xi_2 + \dots + (e^n, e^n)\xi_n = (x, e^n),
\end{gathered}
$$

решается в случае, когда базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ ортогонален, т. е. когда матрица Грама диагональна.

В этом случае из

$$(e^1, e^1)\xi_1 + (e^2, e^1)\xi_2 + \cdots + (e^n, e^1)\xi_n = (x, e^1),$$

$$(e^1, e^2)\xi_1 + (e^2, e^2)\xi_2 + \cdots + (e^n, e^2)\xi_n = (x, e^2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(e^1, e^n)\xi_1 + (e^2, e^n)\xi_2 + \cdots + (e^n, e^n)\xi_n = (x, e^n),$$

получаем

$$(e^1, e^1)\xi_1 = (x, e^1),$$

$$(e^2, e^2)\xi_2 = (x, e^2),$$

$$\ldots$$

$$(e^n, e^n)\xi_n = (x, e^n),$$

и

$$\xi_k = \frac{(x, e^k)}{(e^k, e^k)}, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

.

Коэффициенты

$$\xi_k = \frac{(x, e^k)}{(e^k, e^k)}, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

называются ***коэффициентами Фурье*** разложения вектора x по ортогональной системе $\{e^k\}_{k=1}^{n}$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k = \mathcal{E}_n \xi.$$

Отметим, что если базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ ортонормирован, то

$$\xi_k = \frac{(x, e^k)}{(e^k, e^k)} = (x, e^k), \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

и для любого вектора $x \in \mathbf{X}_n$ справедливо разложение

$$x = \sum_{k=1}^{n} (x, e^k) e^k.$$

Жан Батист Жозеф Фурье (Jean Baptiste Joseph Fourier; 1768 — 1830) — французский математик и физик.

§8. ВЫЧИСЛЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Пусть x, y — векторы евклидова пространства $\mathbf{X}_n$ и пусть известны векторы

$$\xi,\ \eta \in \mathbb{C}^n$$

коэффициентов разложений x, y по базису $\mathcal{E}_n$, т. е.

$$x = \mathcal{E}_n \xi, \quad y = \mathcal{E}_n \eta.$$

Тогда

$$(x, y) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k, \sum_{l=1}^{n} \eta_l e^l \Big) = \sum_{k,l=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_l (e^k, e^l) = \sum_{k,l=1}^{n} g_{lk} \xi_k \overline{\eta}_l = (G\xi, \eta),$$

следовательно, для вычисления скалярного произведения (x, y) достаточно знать коэффициенты разложения векторов x, y по базису и матрицу Грама G этого базиса.

В случае, когда базис ортонормирован, из

$$(x, y) = \sum_{k,l=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_l (e^k, e^l)$$

получаем

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_k.$$

Таким образом, скалярное произведение векторов можно подсчитать как стандартное скалярное произведение коэффициентов разложения этих векторов по любому ортонормированному базису.

§10. ПРИМЕРЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ БАЗИСОВ

Приведем примеры ортогональных базисов в пространстве $\mathbb{C}^n$.

1) Естественный базис $\{i^k\}_{k=1}^n$, подробнее,

$$\begin{array}{ccccccc} i^1 & = & (\ 1, & 0, & \ldots, & 0 &), \\ i^2 & = & (\ 0, & 1, & \ldots, & 0 &), \\ & \ldots & & \ldots & & \ldots & \\ i^n & = & (\ 0, & 0, & \ldots, & 1 &), \end{array}$$

ортонормирован относительно стандартного скалярного произведения (<u>ДОКАЖИТЕ</u>!).

2) ***Базис Фурье.*** Нам удобно будет нумеровать сейчас компоненты вектора и базисные векторы от 0 до $n-1$. Пусть

$$q_k = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, \ \ldots, \ n-1.$$

есть корни степени n из единицы, i — мнимая единица:

$$\sqrt[n]{1} = q_k, \quad k = 0, \ \ldots, \ n-1.$$

.

Введем в рассмотрение систему векторов $\{\varphi^k\}_{k=0}^{n-1}$, компоненты которых вычисляются по формулам

$$\varphi_j^k = q_k^j = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)^j,$$

где $j,\ k = 0,\ \ldots,\ n-1$, подробнее,

$$\begin{array}{lcl} \varphi^0 & = & (\ q_0^0,\quad q_0^1,\quad \ldots,\ q_0^{n-1}\ ), \\ \varphi^1 & = & (\ q_1^0,\quad q_1^1,\quad \ldots,\ q_1^{n-1}\ ), \\ \ldots & & \ldots \qquad\qquad \ldots \\ \varphi^{n-1} & = & (\ q_{n-1}^0,\ q_{n-1}^1,\ \ldots,\ q_{n-1}^{n-1}\ ). \end{array}$$

.

Покажем, что векторы

$$\varphi_j^k = q_k^j = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)^j, \quad k,\ j = 0,\ \ldots,\ n-1,$$

образуют ортогональную систему относительно стандартного скалярного произведения в пространстве $\mathbb{C}^n$.

.

Заметим прежде всего, что

$$q_k = q_1^k.$$

Действительно,

$$q_k = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right),$$

а

$$q_1 = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right).$$

По формуле Муавра имеем

$$q_1^k = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right).$$

Аналогично проверяется, что

$$\overline{q}_k = q_1^{-k}.$$

.

Используем

$$q_k = q_1^k, \quad \overline{q}_l = q_1^{-l},$$

вычисляя скалярное произведение (φ^k, φ^l)**. Получим**

$$(\varphi^k, \varphi^l) = \sum_{j=0}^{n-1} (q_k)^j (\overline{q}_l)^j = \sum_{j=0}^{n-1} q_1^{(k-l)j} = 1 + (q_1^p) + (q_1^p)^2 + \cdots + (q_1^p)^{n-1},$$

где $p = k - l$**.**

.

При $k = l$, т. е. при $p = 0$, справедливо равенство

$$(\varphi^k, \varphi^k) = n.$$

Действительно,

$$(\varphi^k, \varphi^k) = 1 + (q_1^p) + (q_1^p)^2 + \cdots + (q_1^p)^{n-1} =$$

$$= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

.

Если $p \neq 0$**, то сумма**

$$(\varphi^k, \varphi^l) = 1 + (q_1^p) + (q_1^p)^2 + \cdots + (q_1^p)^{n-1}$$

есть геометрическая прогрессия со знаменателем q_1^p**. Причем, поскольку**

$$|p| = |k - l| < n,$$

то

$$q_1^p \neq 1.$$

.

Используя формулу для суммы первых n членов геометрической прогрессии, получим

$$(\varphi^k, \varphi^l) = \sum_{j=0}^{n-1} (q_1^p)^j = \frac{(q_1^p)^n - 1}{q_1^p - 1},$$

но

$$(q_1^p)^n = (q_1^n)^p = 1,$$

следовательно,

$$(\varphi^k, \varphi^l) = 0 \quad \text{при} \quad k \neq l.$$

Коэффициенты Фурье ξ **разложения любого вектора** $x \in \mathbb{C}^n$ **по базису** $\{\varphi^k\}_{k=0}^{n-1}$

$$x_j = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_j^k = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k q_k^j, \quad j = 0, \ \ldots \ n-1,$$

вычисляются, таким образом, по формулам

$$\xi_k = \frac{(x, \varphi^k)}{(\varphi^k, \varphi^k)} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j q_k^{-j}, \quad k = 0, \ \ldots, \ n-1.$$

Базис $\{\varphi^k\}_{k=0}^{n-1}$ принято называть ***базисом Фурье***. Он широко используется, например, при цифровой обработке сигналов (звуковых, видео).