ГЛАВА 4. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ ГЕОМЕТРИЮ

§1. ВЕКТОРЫ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

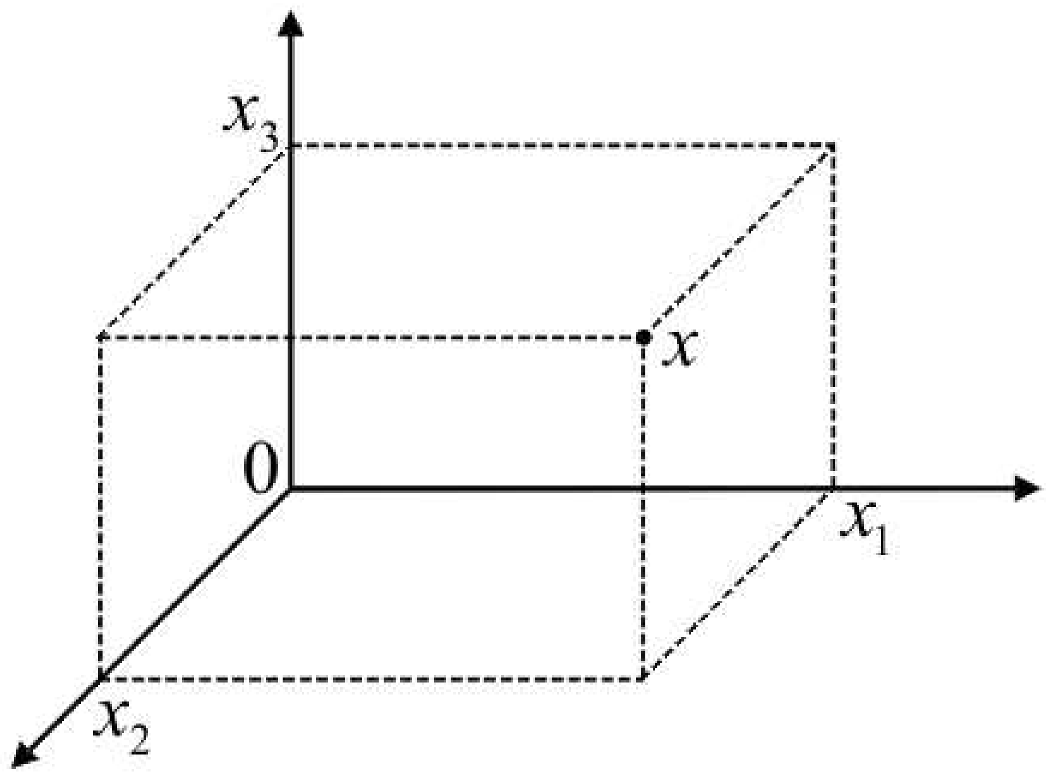
Евклид или Эвклид (ок. 300 г. до н. э.) — древнегреческий математик, автор сочинения по основам математики «Начала».

Рене Декарт (Rene Descartes; 1596 — 1650) — французский математик, философ, физик и физиолог, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики.

В этом параграфе и до конца главы все числа — вещественные. Рассматривается трехмерное евклидово пространство. Вводится *декартова система координат*. Это означает следующее.

Фиксируется некоторая точка пространства (в дальнйшем она всегда будет обозначатся символом 0 (ноль)) и называется ***началом системы координат***. Задаются три попарно ортогональные прямые, проходящие через точку 0. Задается единица длины и направление отсчета от точки 0 на каждой прямой.

Положение точек на этих прямых будем определять вещественными числами x_1, x_2, x_3 (т. е. будем интерпретировать эти прямые как вещественные оси). Будем называть их в дальнейшем *осями координат*.



Понятно, что теперь положение каждой точки в пространстве взаимнооднозначно определяется заданием трех чисел x_1, x_2, x_3, называемых ***координатами точки***

Точки пространства обозначим малыми латинскими буквами:

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots .$$

Будут использоваться и обозначения с явным указанием координат:

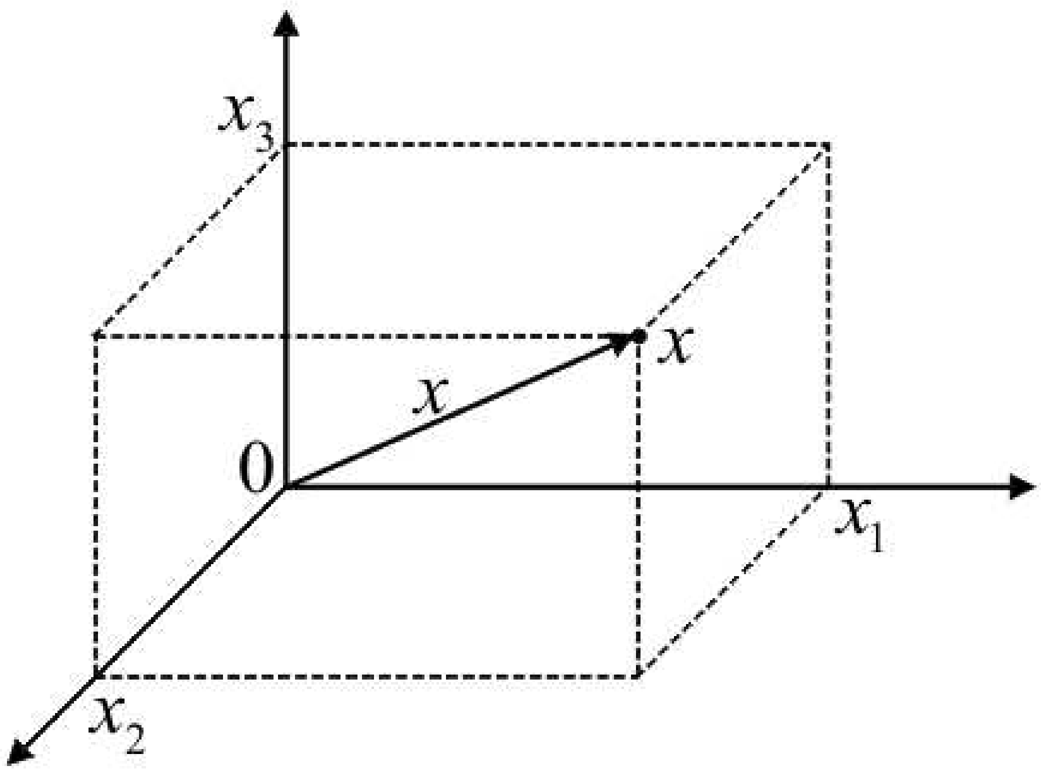
$$x = (x_1, x_2, x_3).$$

.

Иногда нам придется нумеровать различные точки пространства. В этом случае номер (индекс) будем писать сверху, например,

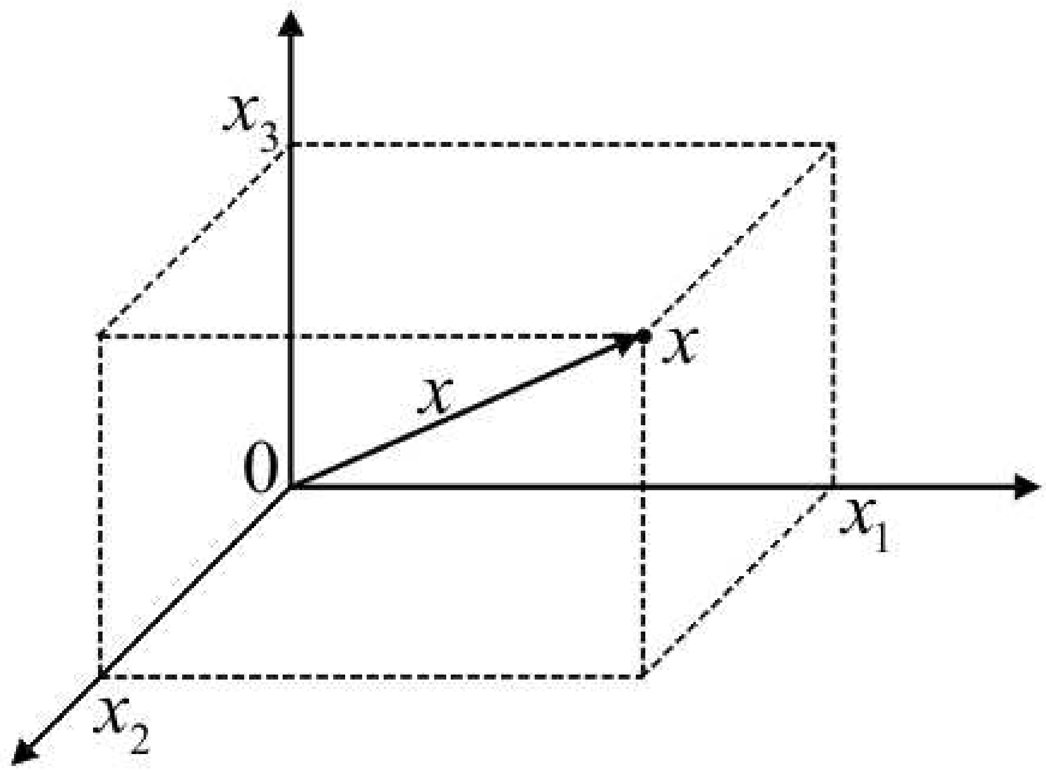
$$x^1 = (x^1_1, x^1_2, x^1_3).$$

.

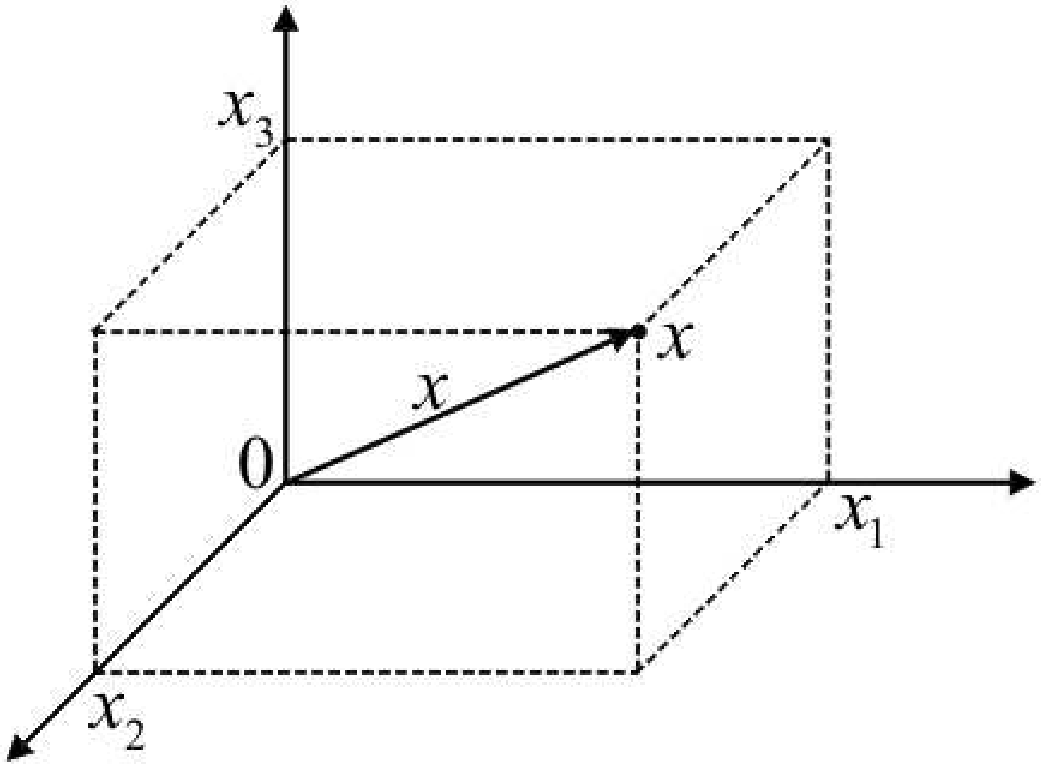


С каждой точкой пространства взаимнооднозначно связан отрезок прямой, соединяющий ее с началом координат. Будем придавать направление этому отрезку, считая его концом точку x.

.

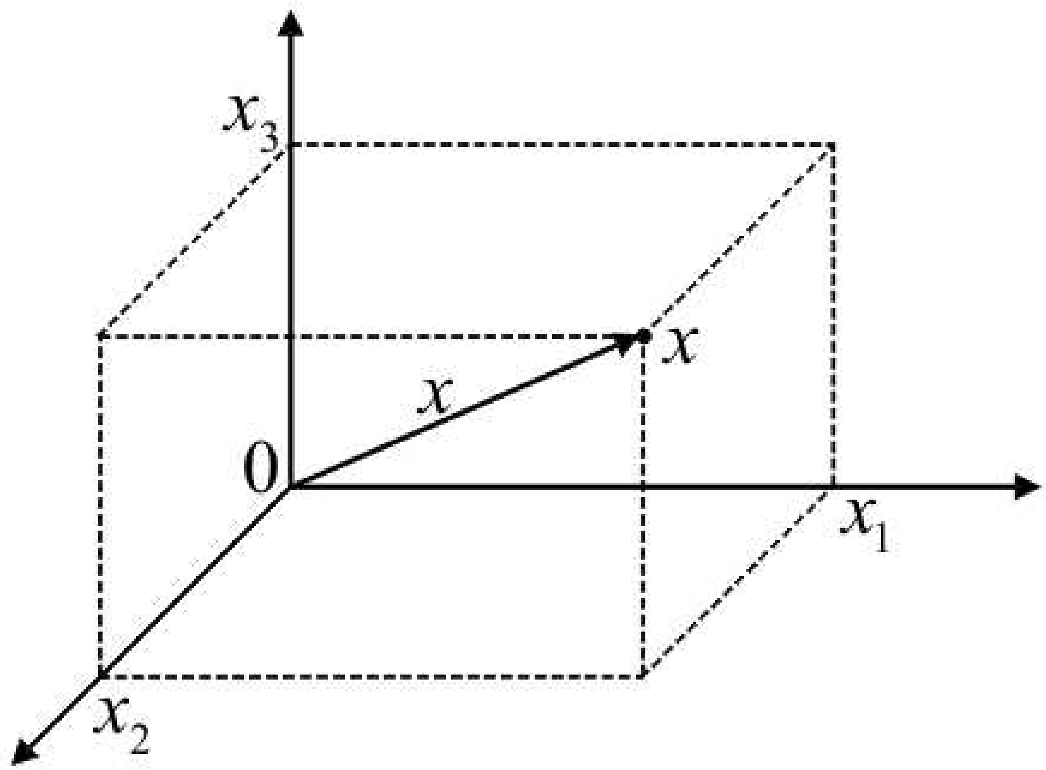


На рисунках (при необходимости) направление будем указывать стрелкой. Такие отрезки будем называть *векторами*.

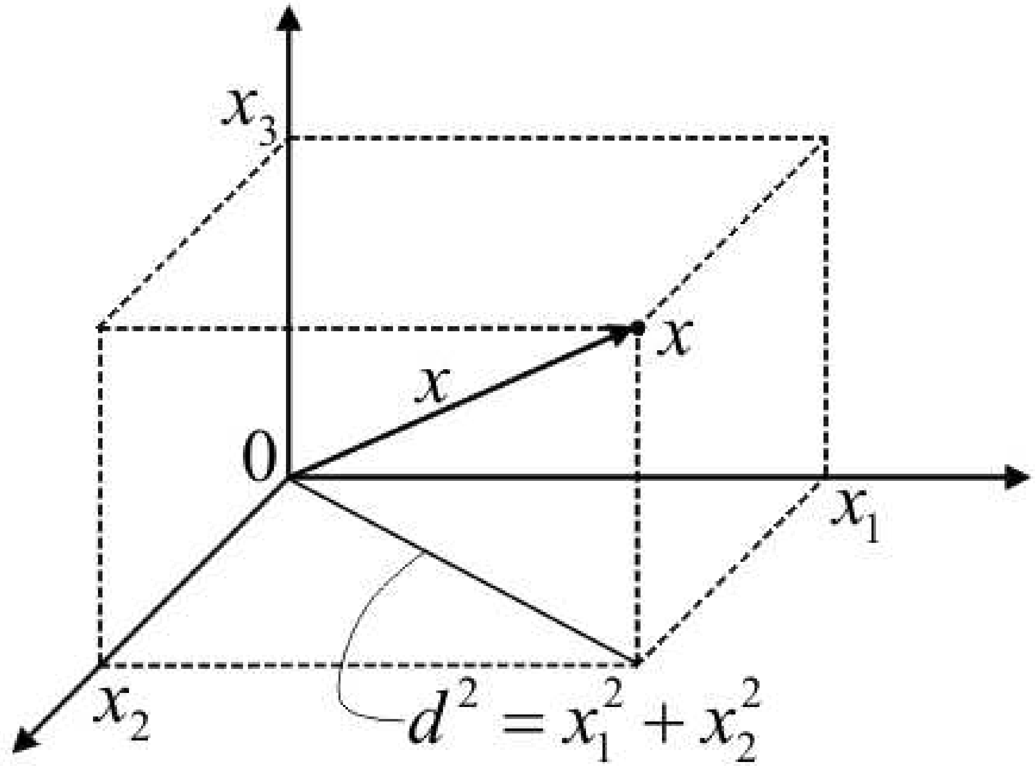


Вектор, соответствующий точке 0, будем называть ***нулевым***. Векторы будем обозначать теми же символами, что и соответствующие им точки пространства.

.



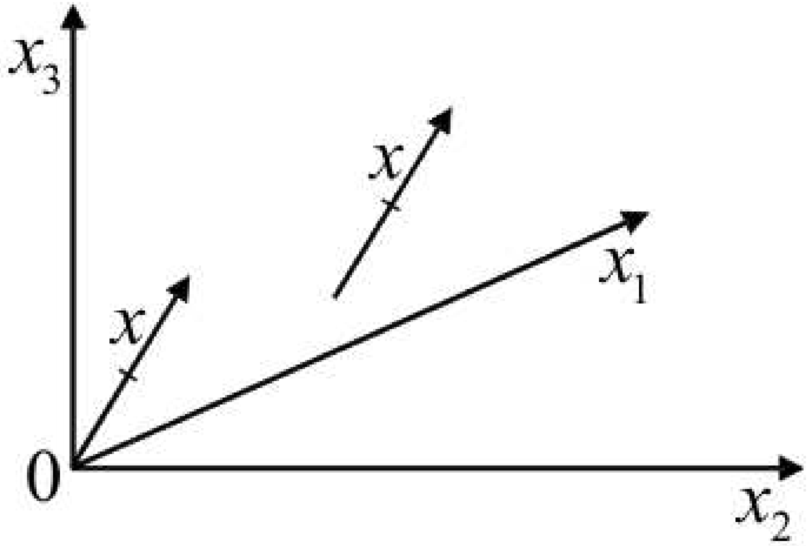
Координаты точки x будем называть ***декартовыми координатами вектора*** x. Геометрический смысл декартовых координат вектора очевиден. Это — длины проекций вектора (с учетом знака) на соответствующие оси координат.



Длину вектора x часто называют ***модулем*** и обозначают через $|x|$. Лишь один вектор имеет нулевую длину. Это — вектор 0. Из теоремы Пифагора сразу же вытекает, что для любого вектора x

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

.



Иногда (например, ради наглядности рисунков) приходится «прикладывать» вектор к точке пространства, отличной от начала координат. В связи с этим принято не различать векторы, имеющие одну и ту же длину и направление.

Определим теперь так называемые *алгебраические операции над векторами*. Будем опираться при этом на знакомые из школьного курса физики правила действия с силами, приложенными к материальной точке.

.

1) ***Умножение вектора на число***. Пусть заданы вещественное число α и вектор x. Вектор y называется произведением α и x,

$$y = \alpha x,$$

если

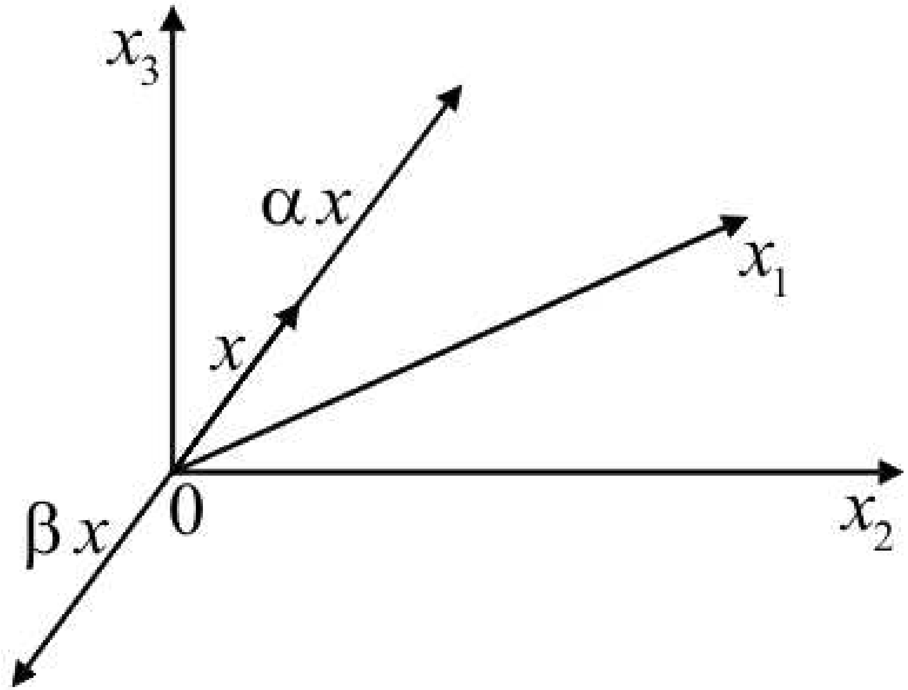
$$|y| = |\alpha||x|,$$

а направление y совпадает с направлением вектора x при положительном α и противоположно направлению x при отрицательном α.

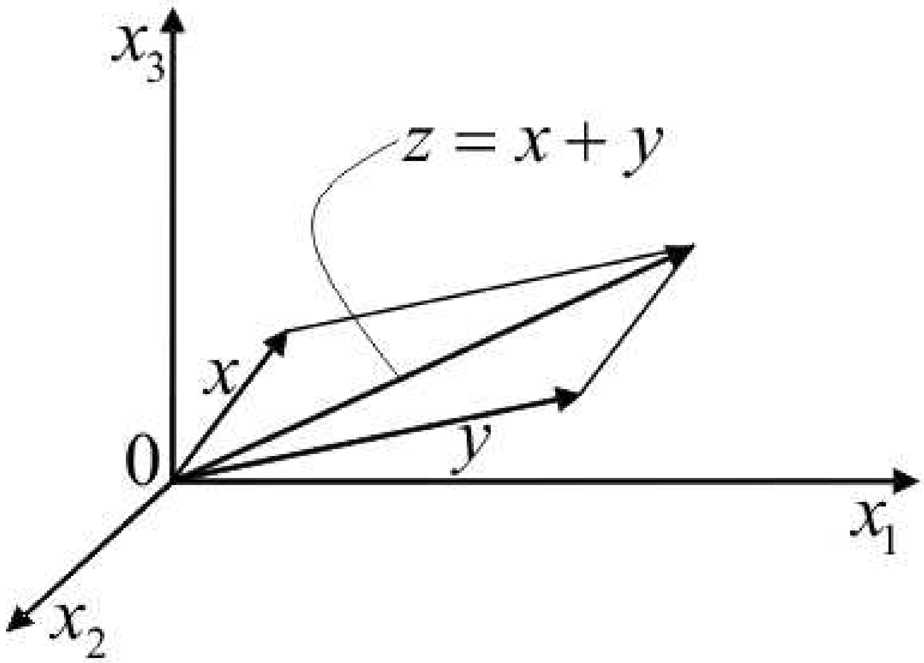
.

Умножение любого вектора на нуль дает нулевой вектор, умножение любого числа на нулевой вектор также дает нулевой вектор.

.



Векторы, лежащие на одной прямой, называют ***коллинеарными***. При любых α и x векторы $\underline{y = \alpha x}$ и x коллинеарны. Наоборот, если векторы x, y коллинеарны, и хотя бы один из них не нуль (например, x), то найдется такое число α, что $y = \alpha x$.

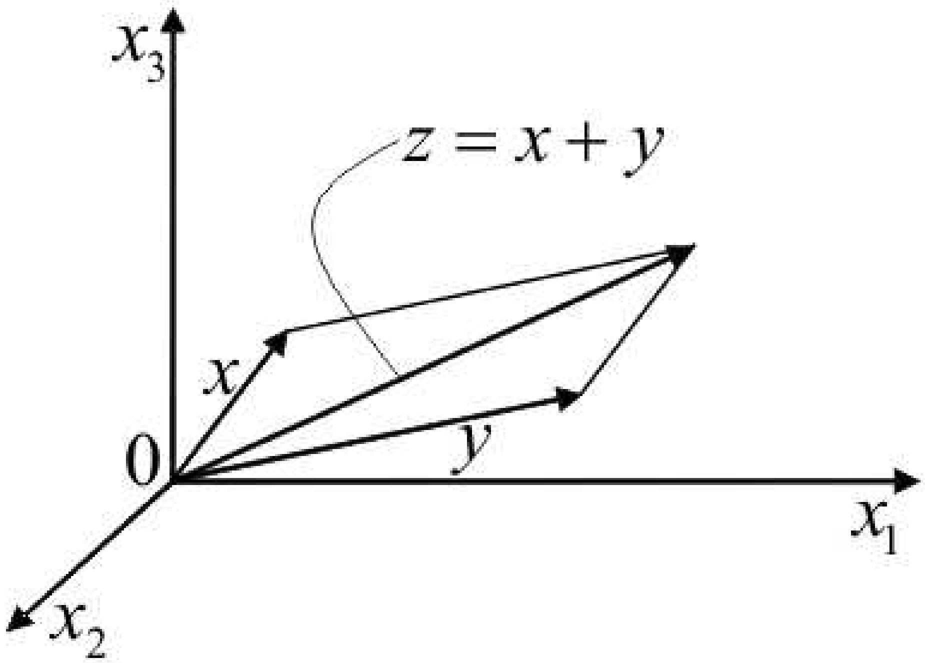


2) ***Сложение векторов***. Вектор z называется суммой x и y,

$$z = x + y,$$

если он образует диагональ параллелограмма, построенного на векторах x, y.

.

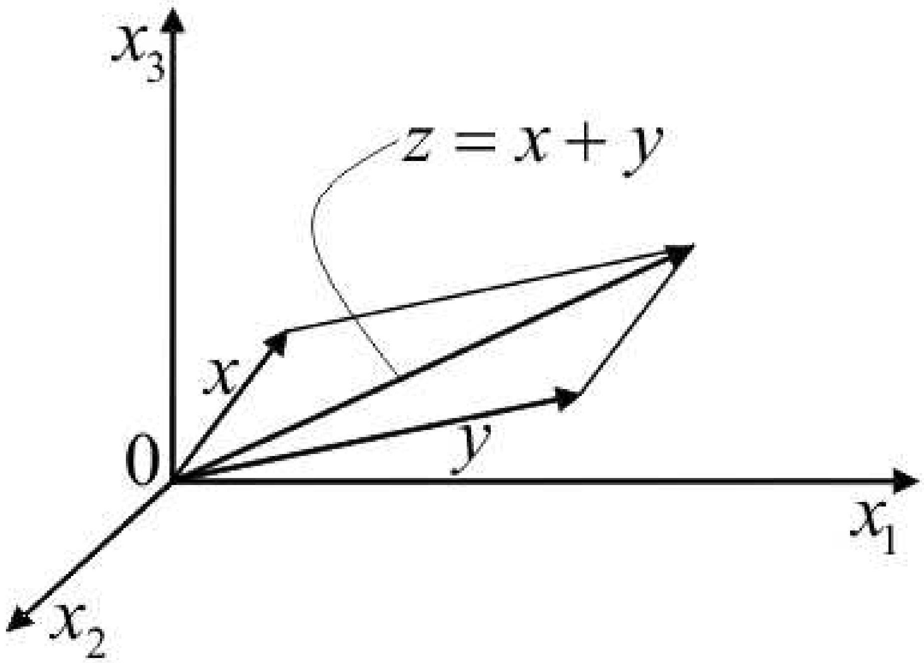


Нетрудно видеть, что

$$x + y = y + x$$

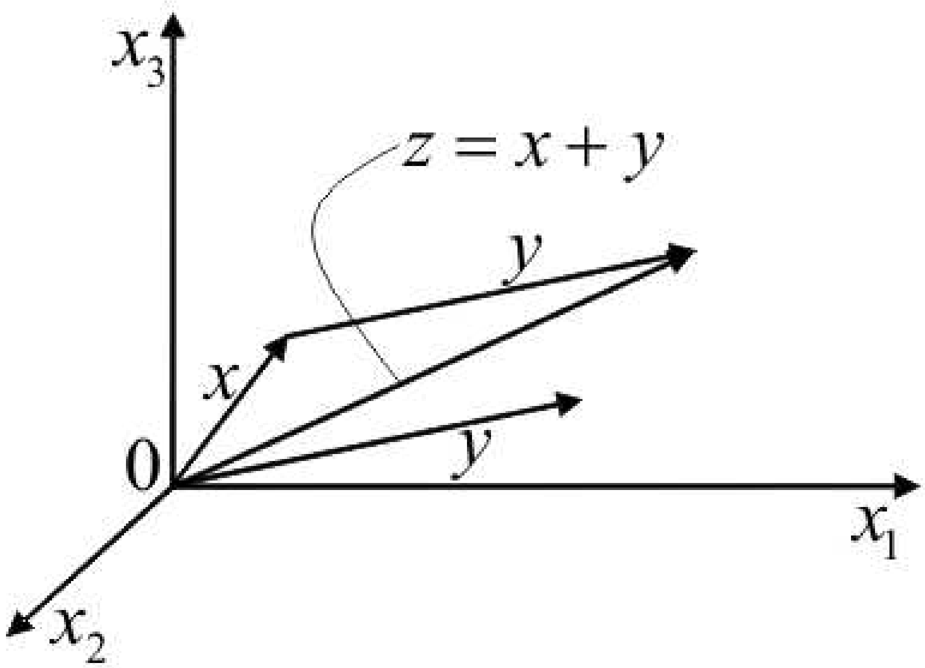
т. е., как говорят, операция сложения векторов <u>*коммутативна*</u> (<u>*перестановочна*</u>).

.



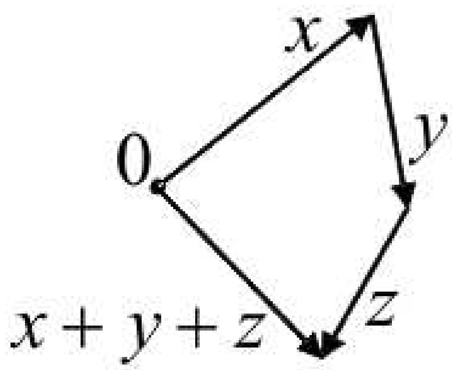
<u>Упражнение.</u> Интерпретируйте правило сложения векторов в предельном случае, когда слагаемые коллинеарны.

.



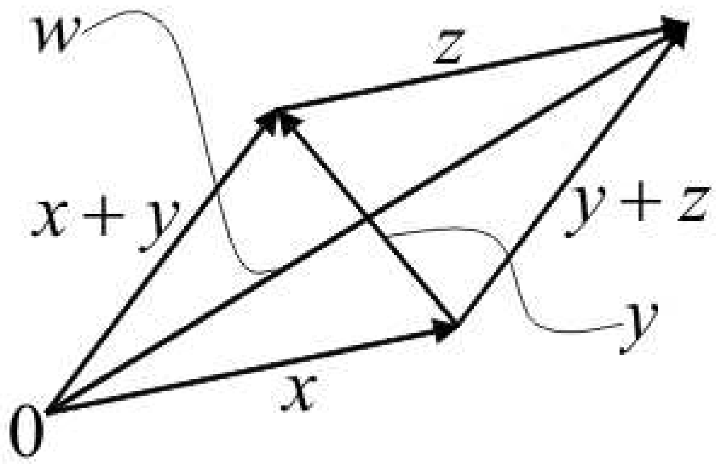
Иногда удобнее описывать то же самое правило сложения векторов иначе: от конца вектора x откладывается вектор y, вектор z замыкает треугольник.

.



Аналогично описывается правило сложения нескольких векторов.

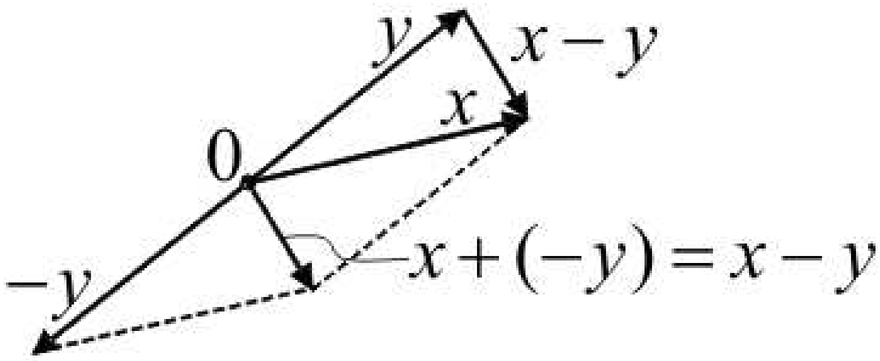
.



Операция сложения векторов *ассоциативна*, т. е.

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

.

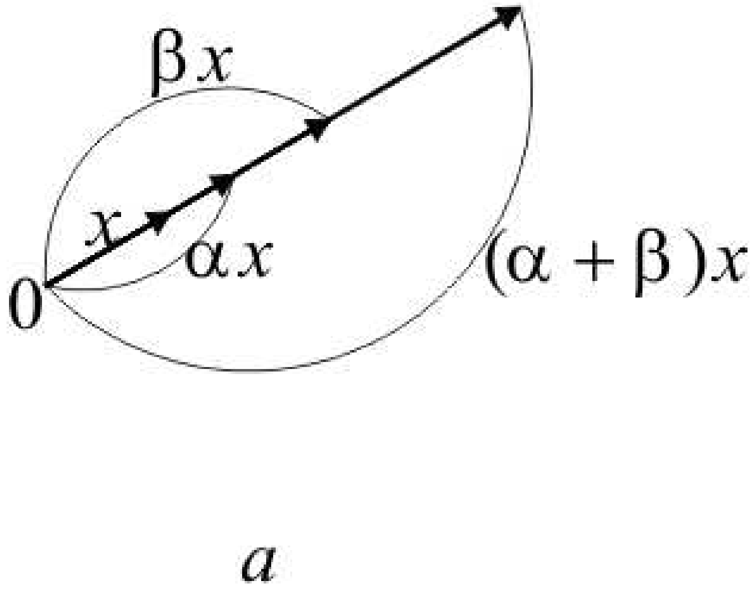


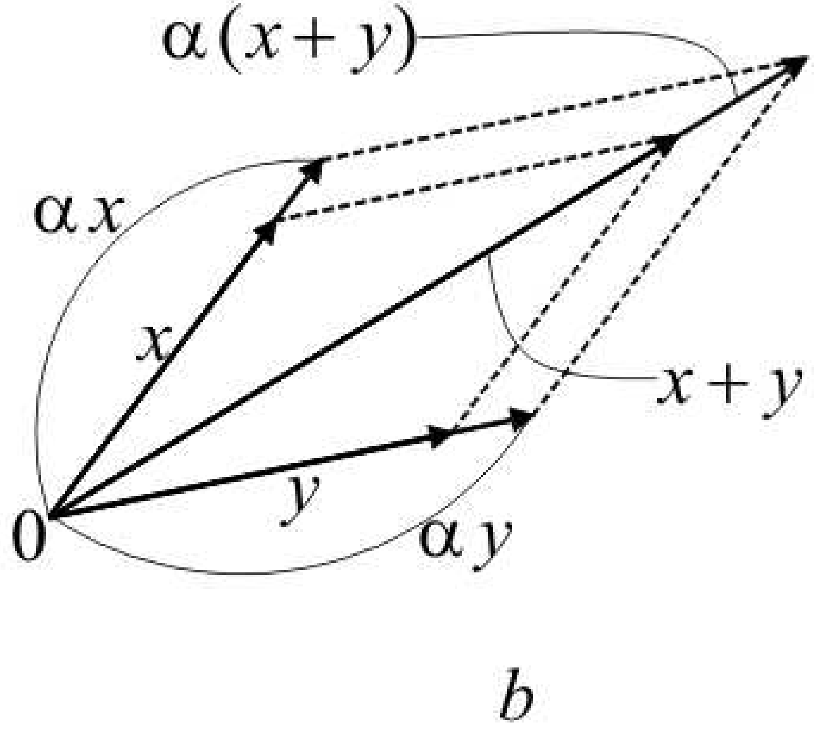
Вектор z называется ***разностью*** векторов x и y, если

$$x = z + y.$$

Понятно, что тогда

$$z = x + (-1)y = x + (-y).$$





Из рисунков сразу усматриваются следующие свойства, связывающие операции сложения векторов и и умножения вектора на число:

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Это свойства *дистрибутивности* (*распределительности*).

.

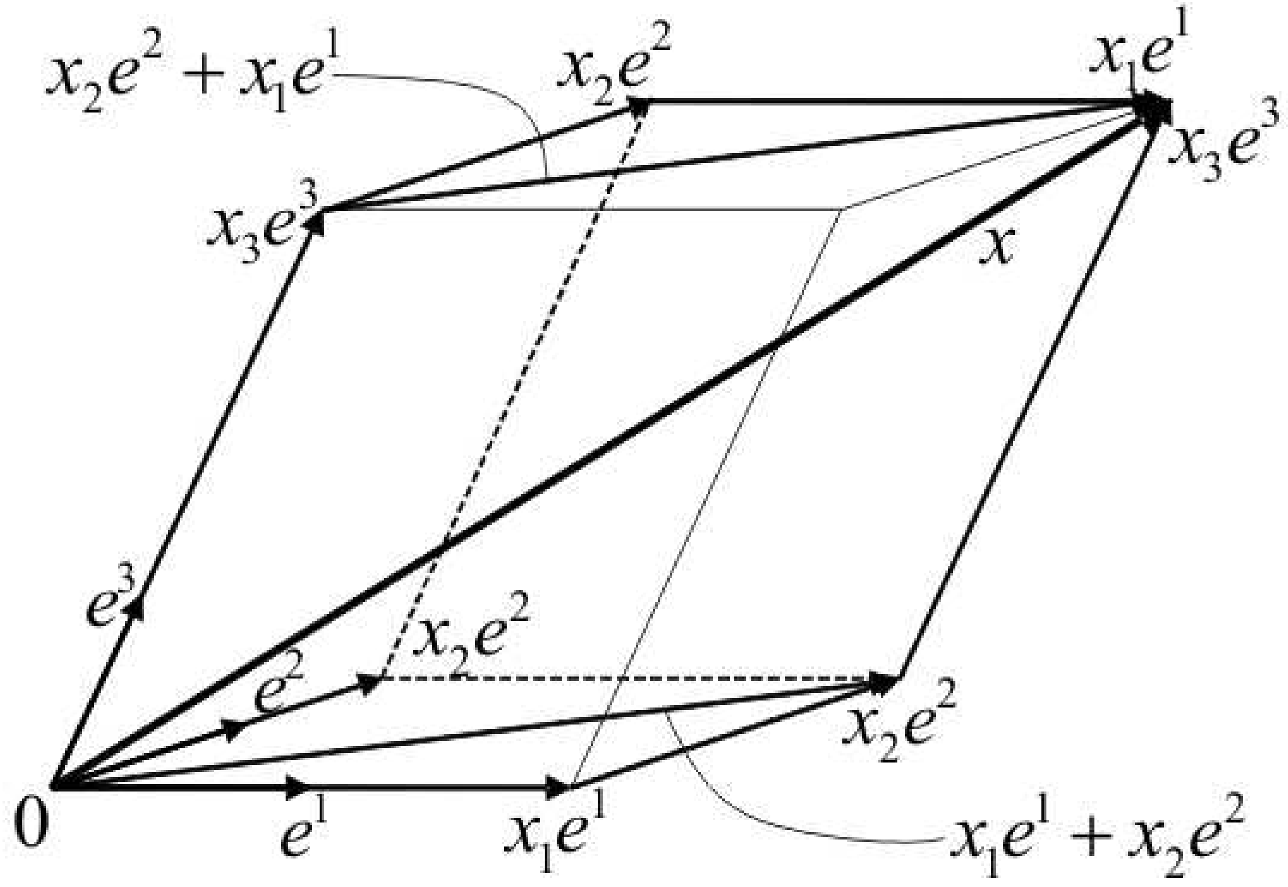
Базис. Разложение вектора по базису.

.

Будем говорить, что векторы ***компланарны***, если они лежат в одной плоскости. Фиксируем произвольным образом три некомпланарных вектора:

$$e^1, \quad e^2, \quad e^3.$$

.

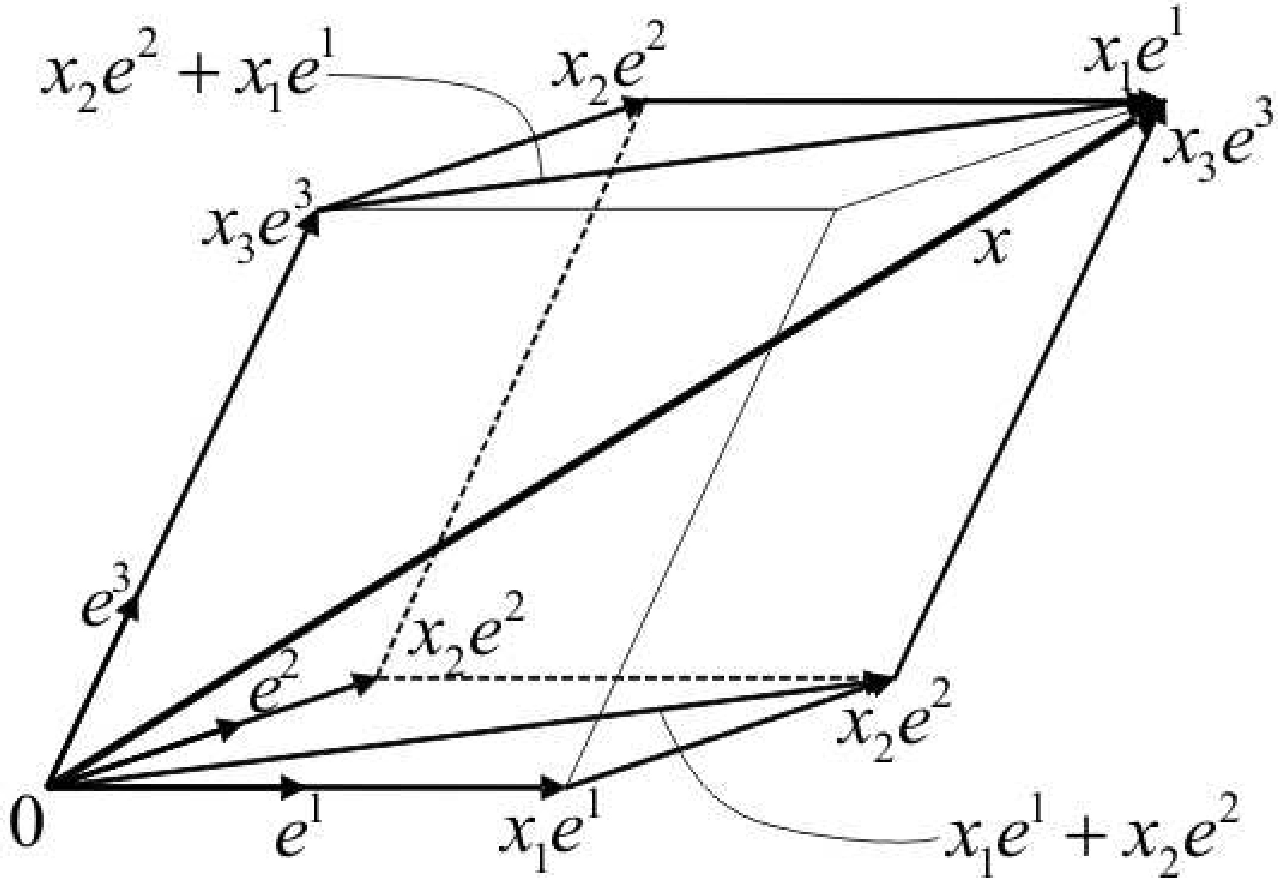


Любой вектор x пространства можно представить в виде

$$x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3.$$

Будем писать также $x = (x_1, x_2, x_3)$.

.



Говорят, что векторы e^1, e^2, e^3 образуют ***базис*** пространства. Числа x_1, x_2, x_3 называют ***координатами вектора в*** этом ***базисе***. Они однозначно определяются вектором x (если базис фиксирован).

Действительно, если предположить, что наряду с

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3$$

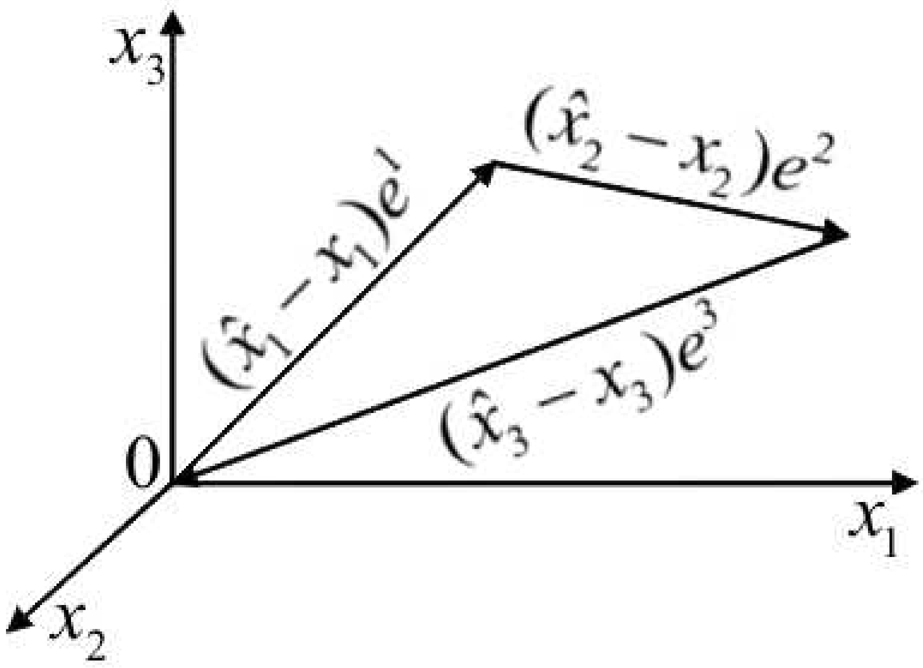
возможно еще одно разложение

$$x = \widehat{x}_1 e^1 + \widehat{x}_2 e^2 + \widehat{x}_3 e^3,$$

то

$$(\widehat{x}_1 - x_1)e^1 + (\widehat{x}_2 - x_2)e^2 + (\widehat{x}_3 - x_3)e^3 = 0.$$

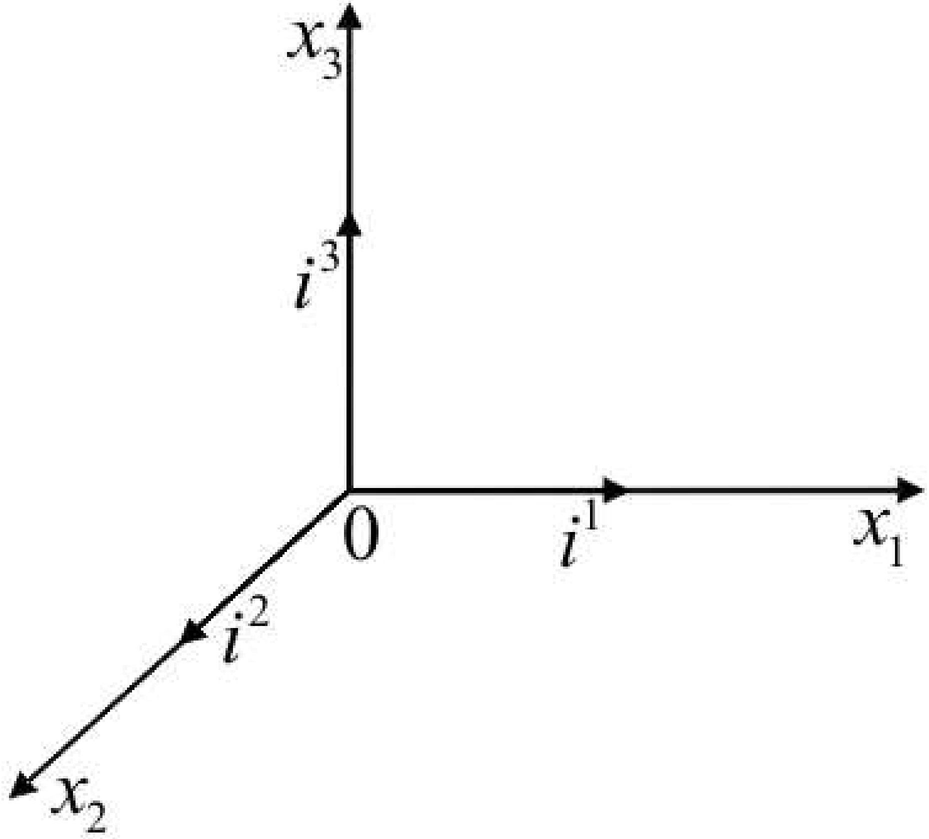
.



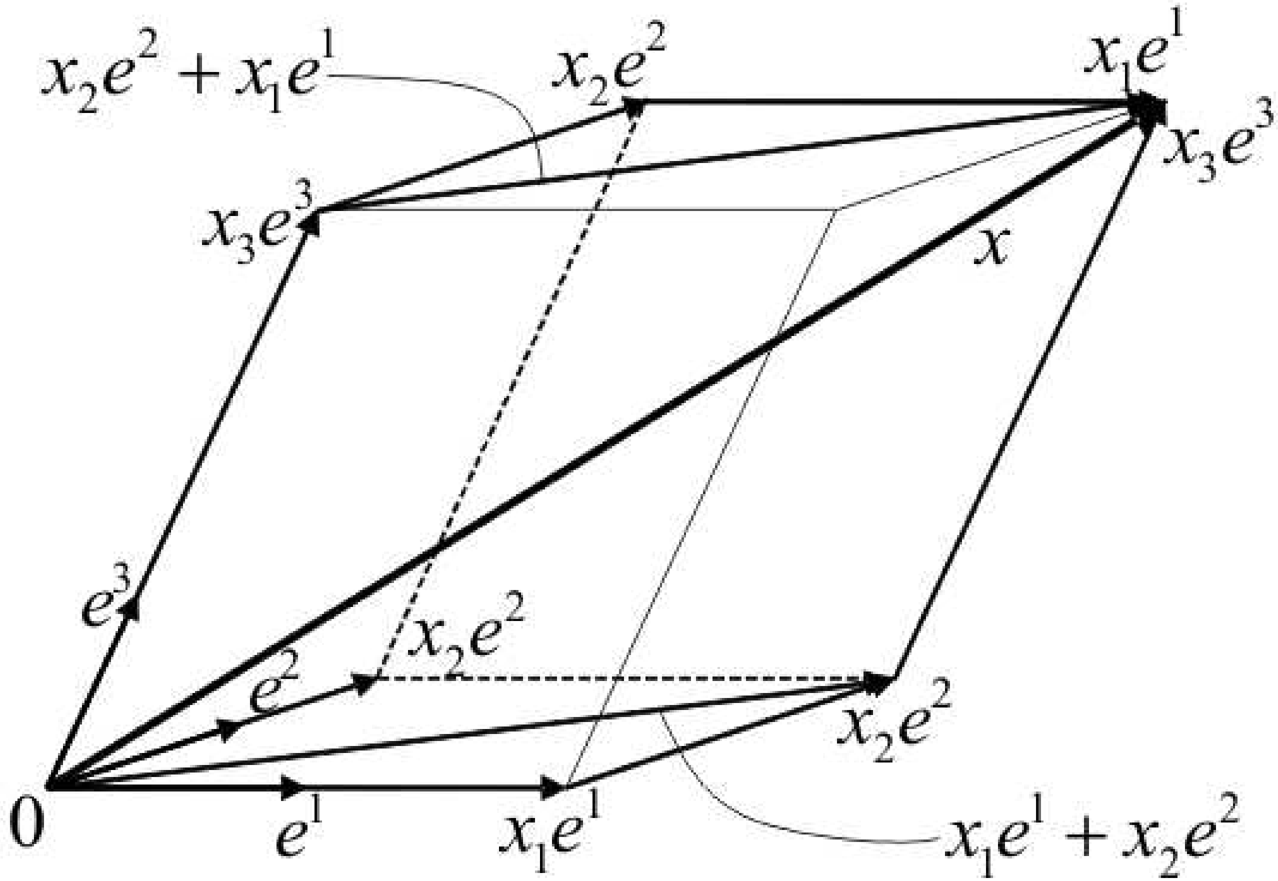
Если

$$(\widehat{x}_1 - x_1)e^1 + (\widehat{x}_2 - x_2)e^2 + (\widehat{x}_3 - x_3)e^3 = 0,$$

то векторы $(\widehat{x}_1 - x_1)e^1,\ (\widehat{x}_2 - x_2)e^2,\ (\widehat{x}_3 - x_3)e^3$ образуют треугольник и, значит, лежат в одной плоскости, чего не может быть, так как по условию векторы e^1, e^2, e^3 некомпланарны.



Особую роль играет базис i^1, i^2, i^3, составленный из трех векторов единичной длины, имеющих направления координатных осей. Эти векторы попарно ортогональны. Они образуют так называемый *декартов базис*. Координаты вектора в этом базисе есть ранее введенные его декартовы координаты.



Базис, составленный из произвольных некомпланарных векторов e^1, e^2, e^3 иногда называют *обобщенным декартовым базисом*.

.

Представление алгебраических операций через координаты.

.

Пусть α — произвольное число. По свойству дистрибутивности

$$\alpha x = \alpha \left(x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3 \right) =$$

$$= (\alpha x_1) e^1 + (\alpha x_2) e^2 + (\alpha x_3) e^3,$$

т. е. при умножении вектора на число координаты вектора умножаются на это же число:

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3).$$

Далее, пусть

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3, \qquad y = y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3.$$

Тогда по свойствам ассоциативности и дистрибутивности имеем

$$x + y = \underline{x_1 e^1} + \underline{\underline{x_2 e^2}} + \underline{\underline{\underline{x_3 e^3}}} + \underline{y_1 e^1} + \underline{\underline{y_2 e^2}} + \underline{\underline{\underline{y_3 e^3}}} =$$
$$= (x_1 + y_1) e^1 + (x_2 + y_2) e^2 + (x_3 + y_3) e^3,$$

т. е. при сложении векторов их компоненты складываются.

.

Будем также писать

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

и, вообще,

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3).$$

.

Например, даны векторы

$$x = (1, 2, 4), \quad y = (5, 6, 7).$$

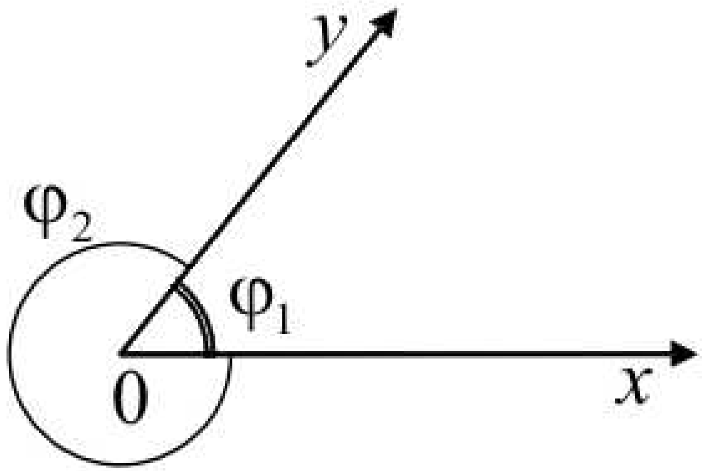
Вычислим координаты вектора

$$z = 2x - y.$$

Ясно, что

$$z = (2 - 5, 4 - 6, 8 - 7) = (-3, -2, 1).$$

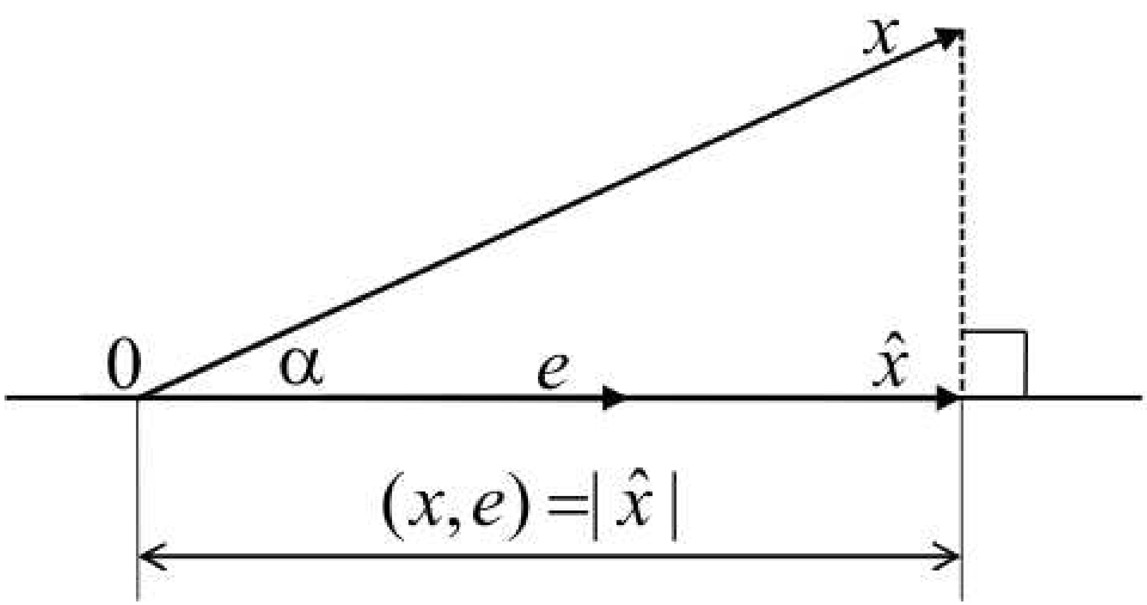
§2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ



Скалярным произведением векторов x и y называется число (x, y), равное произведению длин этих векторов и косинуса угла между ними:

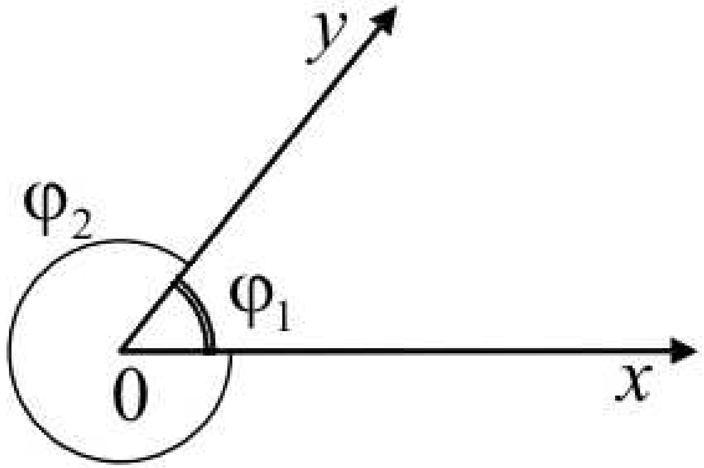
$$(x, y) = |x||y| \cos(x, y).$$

Под углом φ_1 между двумя векторами договоримся подразумевать тот угол, который не превосходит π.



Понятие скалярного произведения векторов возникает, например, в физике при проектировании силы на заданное направление. Длина $|\widehat{x}|$ ***проекции*** вектора x на прямую, параллельную вектору e единичной длинны, равна скалярному произведению (x, e):

$$(x, e) = |x||e|\cos(x, e) = |x||e|\cos\alpha = |x|\cos\alpha = |x|\frac{|\widehat{x}|}{|x|} = |\widehat{x}|.$$



Очевидно, что для *ортогональности* двух ненулевых векторов необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю:

$$(x, y) = |x||y| \cos(x, y) = 0.$$

Если один из сомножителей — нуль, например,

$$x = 0$$

то и скалярное произведение равно нулю:

$$(x, y) = |x||y| \cos(x, y) = 0.$$

.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) $(x, y) = (y, x)$ для любых векторов x, y — ***симметрия***,

2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ для любых векторов x, y и для любого вещественного числа α — ***однородность***,

3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ для любых векторов x, y, z — ***аддитивность***,

4) $(x, x) = |x|^2 \geqslant 0$ для любого вектора x, и если $(x, x) = 0$, то $x = 0$ — ***положительная определенность***.

Заметим, что из однородности и аддитивности,

$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y), \quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z),$$

вытекает, что

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$

для любых векторов x, y, z и для любых вещественных чисел α, β.

Это свойство ***линейности*** скалярного произведения векторов.

.

Убедимся в справедливости свойств 1)–4).

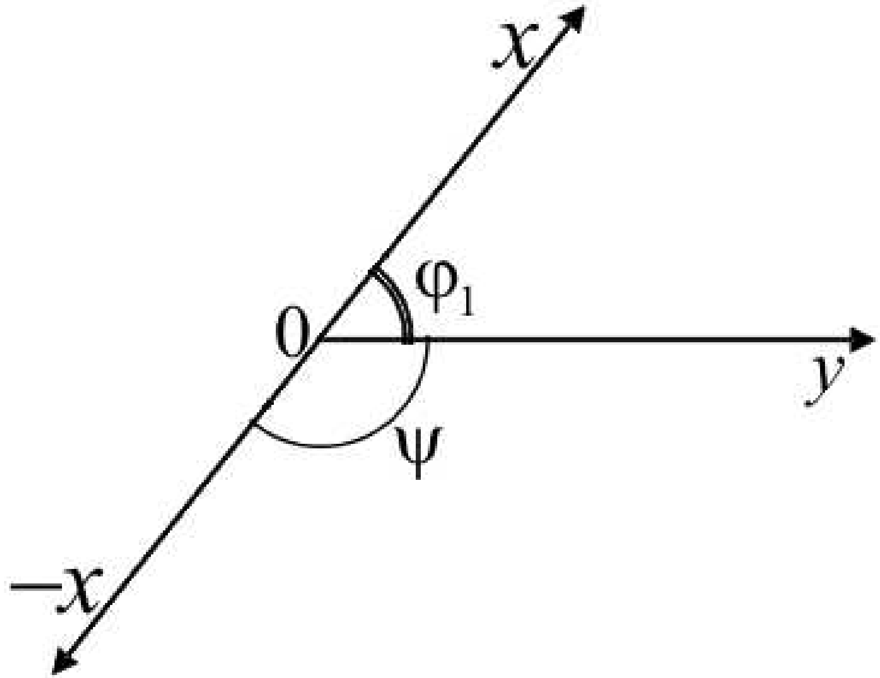
Симметрия является непосредственным следствием определения:

$$(x, y) = |x||y| \cos(x, y) = |y||x| \cos(y, x) = (y, x).$$

.

Однородность при $\alpha \geqslant 0$ очевидна:

$$(\alpha x, y) = |\alpha||x||y| \cos(\alpha x, y) = \alpha|x||y| \cos(x, y) = \alpha(x, y).$$



При $\alpha < 0$ надо заметить, что умножение одного вектора на отрицательное число превращает угол между векторами в дополнительный до π и, стало быть, меняет знак косинуса угла:

$$(\alpha x, y) = |\alpha x||y|\cos(\alpha x, y) = -\alpha|x||y|\cos(-x, y) =$$

$$= \alpha|x||y|\cos(x, y) = \alpha(x, y).$$

.

Если $z = 0$, то свойство аддитивности

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

очевидно, выполняется для любых x, y:

$$0 = 0 + 0.$$

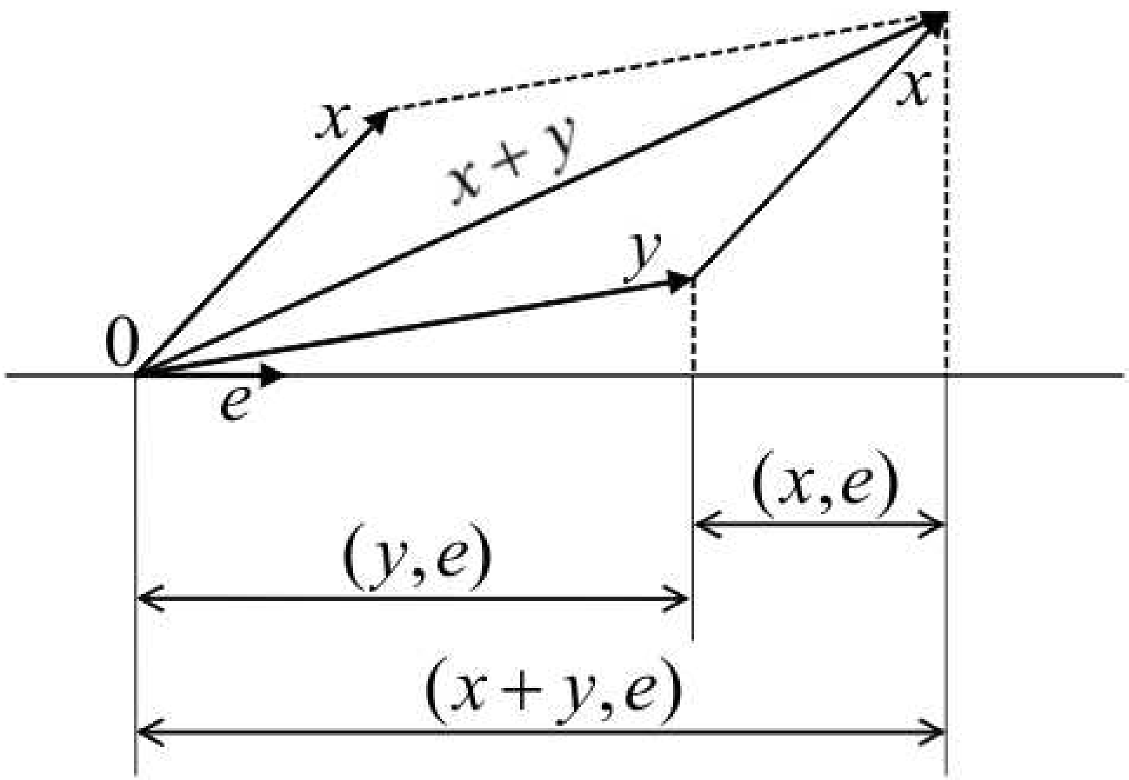
Если $z \neq 0$, то, используя свойство однородности получим

$$(x+y,z) = \left(x+y, |z|\frac{z}{|z|}\right) = |z|(x+y,e), \qquad e = \frac{z}{|z|},$$

где $|e| = 1$. Теперь достаточно доказать равенство

$$(x+y,e) = (x,e) + (y,e).$$

.



$(x+y,e)$ — проекция вектора $x+y$ на прямую, параллельную e,

$(x,e)+(y,e)$ — сумма проекций векторов x и y на эту же прямую.

Понятно, что две эти величины совпадают:

$$(x+y,e)=(x,e)+(y,e).$$

.

Положительная определенность очевидна:

$$(x, x) = |x||x|\cos(x, x) = |x|^2 \geqslant 0$$

для любого вектора x, и

$$(x, x) = 0 \implies |x| = 0 \implies x = 0.$$

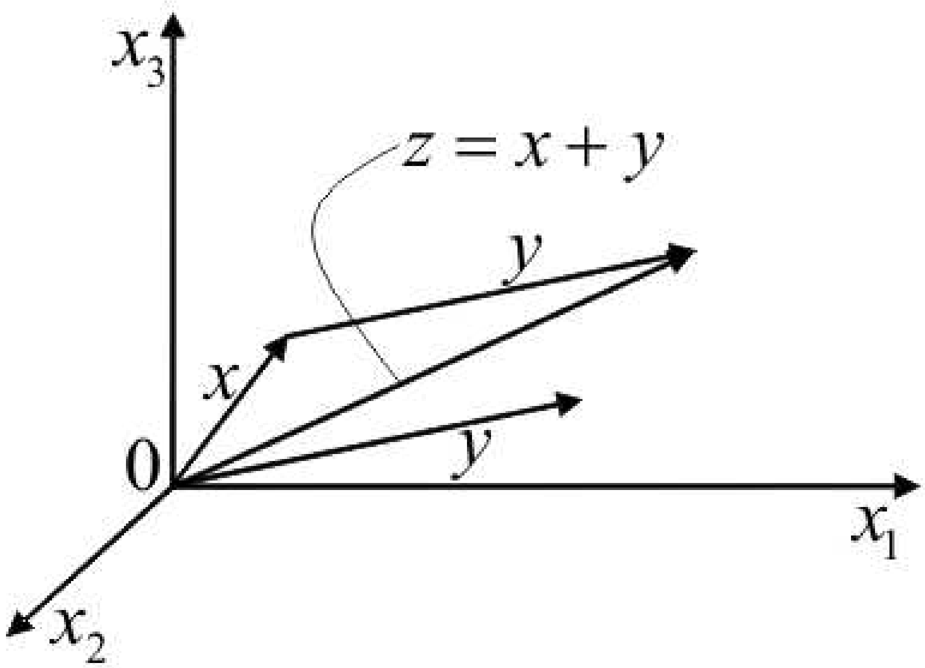
.

Отметим еще, что для любых x, y справедливо неравенство

$$|(x,y)| = |x||y||\cos(x,y)| \leqslant |x||y|,$$

Это неравенство называют ***неравенством Коши***.

.



Очевидно также, что для любых x, y справедливо неравенство

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|,$$

называемое *неравенством треугольника*.

.

Укажем формулу вычисления скалярного произведения векторов

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3)$$

через их координаты.

Воспользовавшись установленными только что свойствами скалярного произведения, получим

$$(x, y) = (x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3, y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3) = \sum_{k,l=1}^{3} x_k y_l (e^k, e^l).$$

Использованный здесь символ означает суммирование по всем значениям индексов $k, l = 1, 2, 3$ (всего — девять слагаемых).

.

Для вычисления скалярного произведения двух любых векторов надо знать скалярные произведения для всех (шести) пар базисных векторов:

$$(x, y) = \sum_{k,l=1}^{3} x_k y_l (e^k, e^l).$$

.

Проще всего вычисляется скалярное произведение векторов по их декартовым координатам. Действительно, в этом случае

$$(i^k, i^l) = \delta_{kl},$$

следовательно,

$$(x, y) = \sum_{k,l=1}^{3} x_k y_l (i^k, i^l) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

.

Приведем в заключение очевидную, но полезную, формулу, выражающую косинус угла между векторами через их декартовы координаты:

$$\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{|x||y|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}\,.$$

<u>Пр.</u> Треугольник xyz задан декартовыми координатами вершин:

$$x = (2, 1, -1), \quad y = (3, 2, -1), \quad z = (3, 1, 0).$$

Требуется найти угол α при вершине x. Сначала находим векторы

$$y - x = (1, 1, 0) \quad \text{и} \quad z - x = (1, 0, 1).$$

Затем вычисляем их длины

$$|y - x| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad |z - x| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

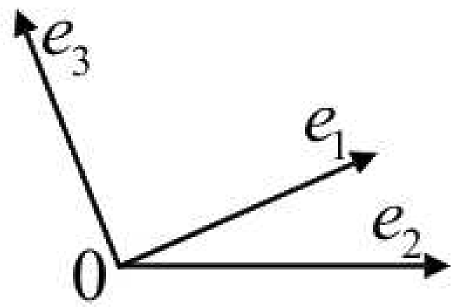
скалярное произведение

$$(y - x, z - x) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1$$

и, наконец, косинус угла при вершине x:

$$\cos\alpha = \frac{(y - x, z - x)}{|y - x||z - x|} = \frac{1}{2}, \quad \text{следовательно,} \quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

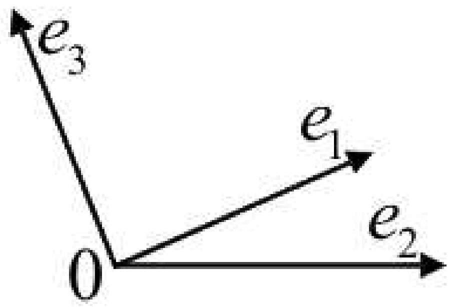
§3. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ



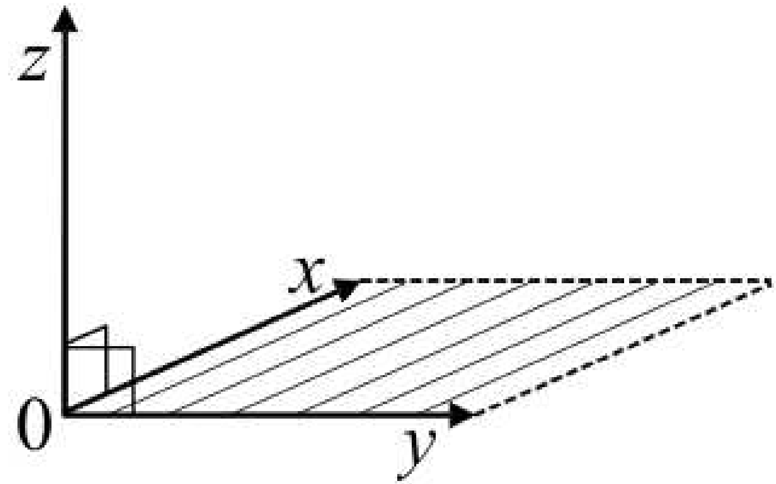
Пусть в пространстве фиксирован некоторый базис

$$e^1, \quad e^2, \quad e^3.$$

Введем понятие *ориентации базиса*.



Будем говорить, что тройка базисных векторов e^1, e^2, e^3 имеет ***правую ориентацию***, если с конца вектора e^3 кратчайший поворот от e^1 к e^2 совершается против часовой стрелки. В противном случае тройка имеет ***левую ориентацию***.



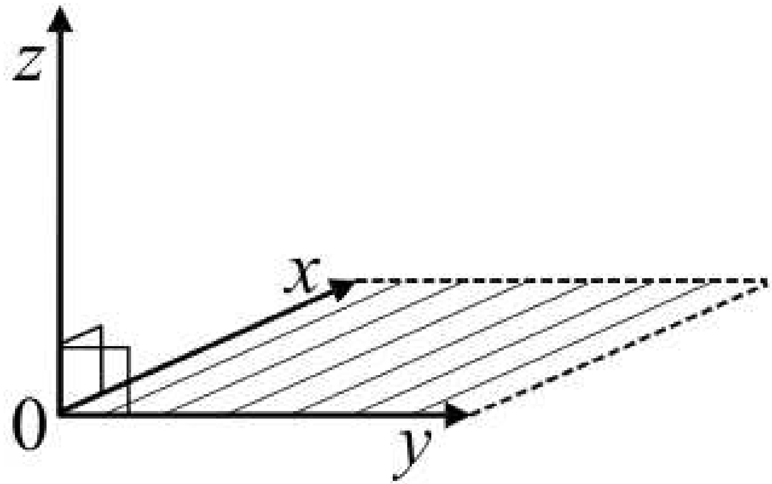
Векторным произведением вектора x на вектор y называется вектор z, удовлетворяющий следующим трем условиям:

1. $|z| = |x||y|\sin(x, y)$,

2. вектор z ортогонален каждому из векторов x и y,

3. вектор z направлен так, что тройка векторов x, y, z имеет ту же ориентацию, что и фиксированный выше базис пространства.

.

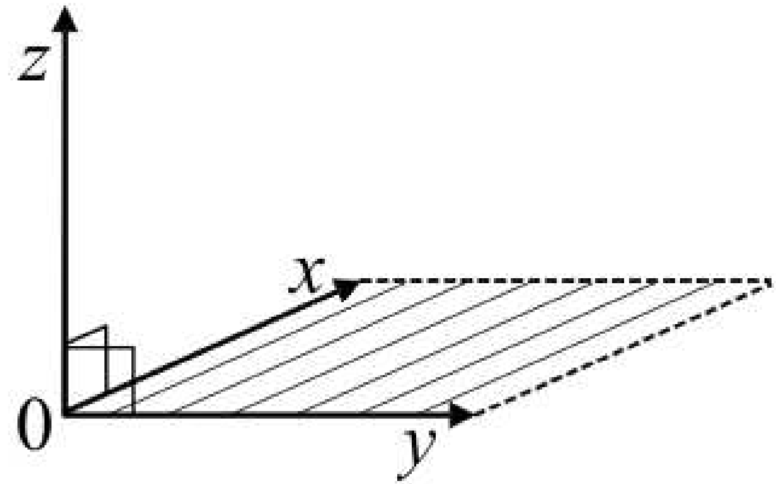


Векторное произведение векторов x, y будем обозначать через $[x, y]$. Отметим, что

$$|[x, y]| = |x||y| \sin(x, y)$$

есть площадь параллелограмма, построенного на векторах x, y.

.



Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения:

$$|[x, y]| = |x||y| \sin(x, y) = 0.$$

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1) $[x, y] = -[y, x]$ для любых векторов x, y — ***антисимметричность*** (***кососимметричность***),

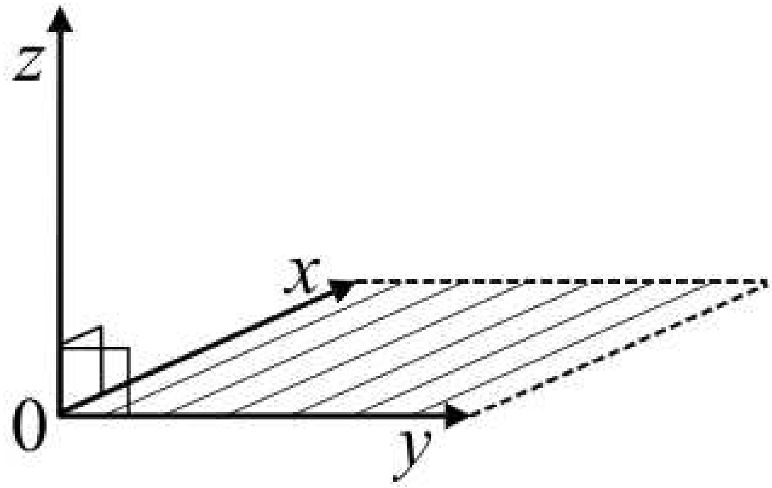
2) $[\alpha x, y] = \alpha[x, y]$ для любых векторов x, y и любого вещественного числа α — ***однородность*** по первому аргументу,

3) $[x+y, z] = [x, z]+[y, z]$ для любых векторов x, y — ***аддитивность*** по первому аргументу.

.

Убедимся в справедливости свойств 1)–3).

.

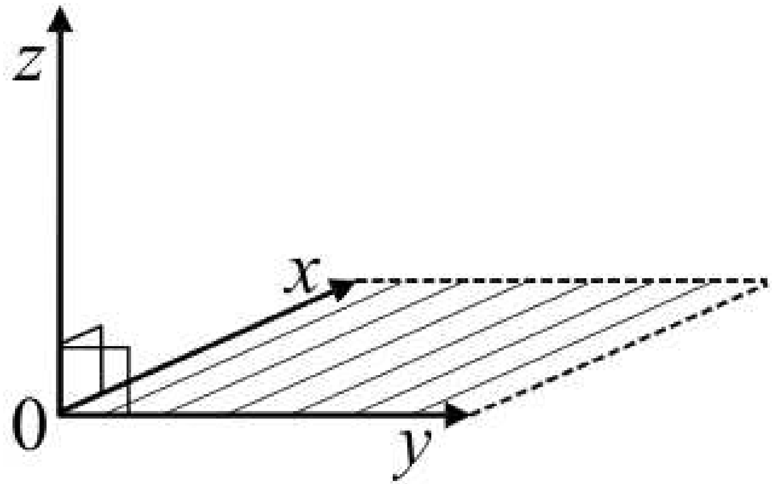


Антисимметричность векторного произведения очевидна:

$$[x, y] = -[y, x].$$

Действительно, если в тройке векторов поменять местами первые два вектора, то тройка меняет ориентацию на противоположную.

.



Однородность векторного произведения также очевидна:

$$[\alpha x, y] = \alpha[x, y].$$

Действительно, если умножить x на $\alpha > 0$, то площадь параллелограмма пропорционально увеличиться, а если — на $\alpha < 0$, то еще и тройка поменяет ориентацию на противоположную.

.

Для проверки аддитивности,

$$[x+y,z]=[x,z]+[y,z],$$

заметим, что при $z=0$ **оно выполняется тривиальным образом:**

$$0=0+0.$$

.

Если $z \neq 0$, то, равенство

$$[x+y, z] = [x, z] + [y, z]$$

можно записать в виде

$$\left[x+y, |z|\frac{z}{|z|}\right] = \left[x, |z|\frac{z}{|z|}\right] + \left[y, |z|\frac{z}{|z|}\right].$$

Следовательно,

$$|z|\left[x+y, \frac{z}{|z|}\right] = |z|\left[x, \frac{z}{|z|}\right] + |z|\left[y, \frac{z}{|z|}\right].$$

и

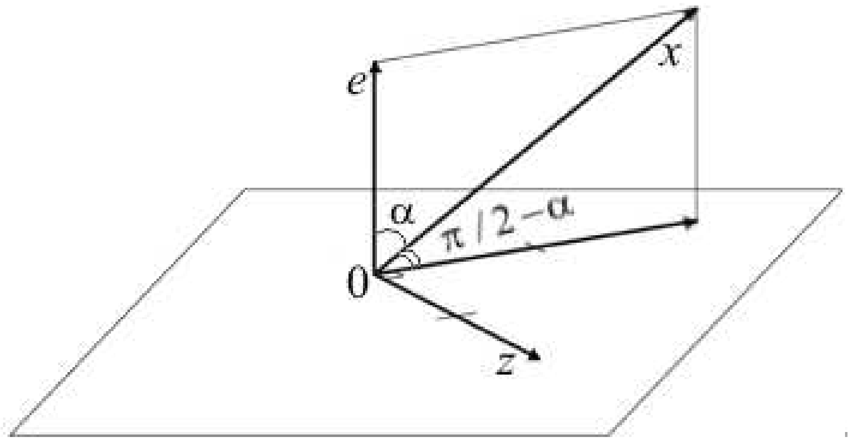
$$[x+y, e] = [x, e] + [y, e], \quad e = \frac{z}{|z|}.$$

Ясно, что $|e| = 1$.

Таким образом, достаточно доказать справедливость равенства

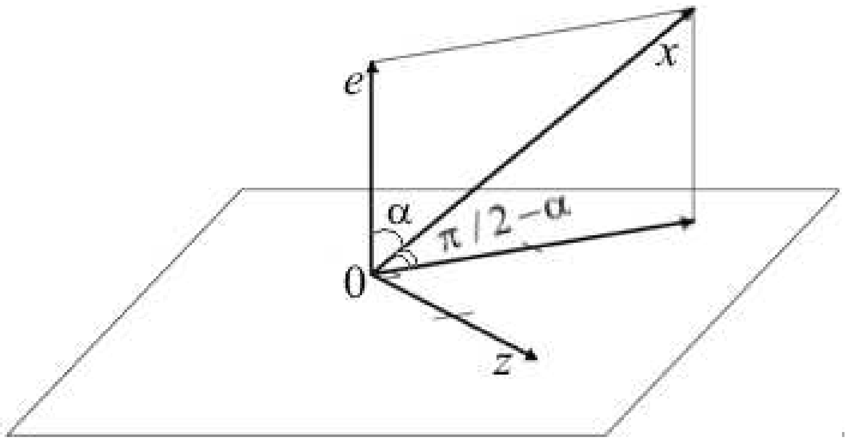
$$[x + y, e] = [x, e] + [y, e],$$

где e — произвольный вектор единичной длины.



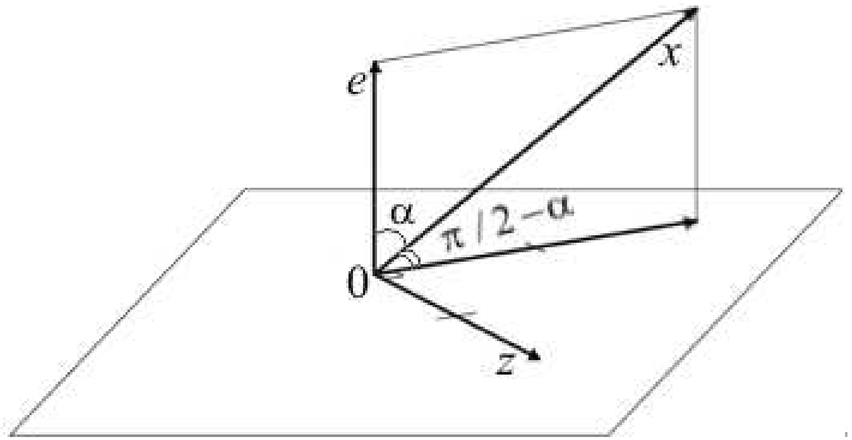
Построение векторного произведения $[x, e]$ можно описать следующим образом. Сначала вектор x проектируется на плоскость, ортогональную вектору e.

.



Затем полученный вектор поворачивается в этой плоскости так, чтобы он стал ортогональным вектору x и при этом получилась тройка нужной ориентации.

.



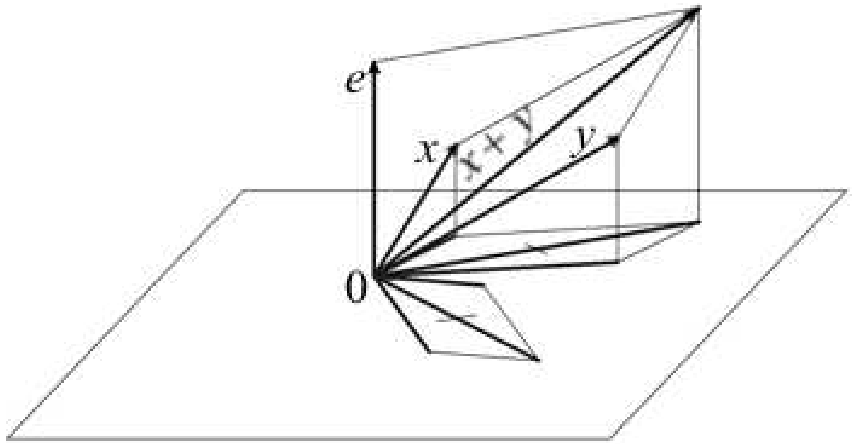
Заметим, что возможность такого описания построения векторного произведения обеспечивается хорошо известным равенством

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Действительно,

$$|z| = |x||e|\sin(x, e) = |x|\sin\alpha = |x|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

.



После выполнения этих геометрических построений равенство

$$[x + y, e] = [x, e] + [y, e],$$

становится очевидным.

.

Получим выражение для векторного произведения векторов

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3, \quad y = y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3$$

через их координаты.

.

Имеем

$$[x, y] = [x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3, y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3] =$$

$$= x_1[e^1, y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3] + x_2[e^2, y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3] + x_3[e^3, y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3] =$$

$$= -x_1[y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3, e^1] - x_2[y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3, e^2] - x_3[y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3, e^3].$$

.

Будем учитывать, что для любого вектора z

$$[z, z] = 0.$$

.

Теперь

$$[x,y] =$$

$$= -x_1[y_1e^1+\underline{y_2}e^2+\underline{\underline{y_3}}e^3, e^1]-x_2[\underline{y_1}e^1+y_2e^2+\underline{\underline{\underline{y_3}}}e^3, e^2]-x_3[\underline{\underline{y_1}}e^1+\underline{\underline{\underline{y_2}}}e^2+y_3e^3, e^3] =$$

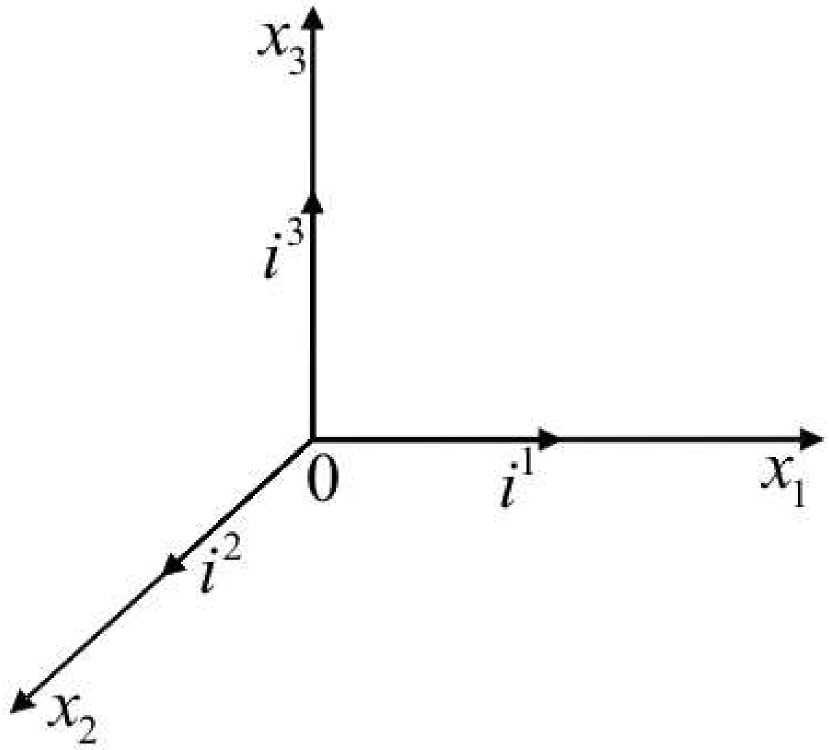
$$= (x_1\underline{y_2} - x_2\underline{y_1})[e^1, e^2] + (x_1\underline{\underline{y_3}} - x_3\underline{\underline{y_1}})[e^1, e^3] + (x_2\underline{\underline{\underline{y_3}}} - x_3\underline{\underline{\underline{y_2}}})[e^2, e^3].$$

.

Таким образом, нужно уметь строить векторные произведения базисных векторов, чтобы вычислять векторное произведение произвольных векторов по их координатам:

$$[x, y] = (x_1 y_2 - x_2 y_1)[e^1, e^2] + (x_1 y_3 - x_3 y_1)[e^1, e^3] + (x_2 y_3 - x_3 y_2)[e^2, e^3].$$

.



Для векторов декартова базиса имеем

$$[i^1, i^2] = i^3, \quad [i^1, i^3] = -i^2, \quad [i^2, i^3] = i^1.$$

.

Следовательно, в декартовых координатах

$$[x, y] = (x_1 y_2 - x_2 y_1)[i^1, i^2] + (x_1 y_3 - x_3 y_1)[i^1, e^3] + (x_2 y_3 - x_3 y_2)[i^2, i^3] =$$

$$= (x_1 y_2 - x_2 y_1) i^3 + (x_1 y_3 - x_3 y_1)(-i^2) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) i^1 =$$

$$= (x_2 y_3 - x_3 y_2) i^1 - (x_1 y_3 - x_3 y_1) i^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) i^3.$$

.

Для запоминания этого результата полезна следующая запись:

$$[x, y] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Формально разложим этот определитель по первой строке:

$$[x, y] = (x_2 y_3 - x_3 y_2) i^1 - (x_1 y_3 - x_3 y_1) i^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) i^3.$$

Пример. Декартовы координаты векторов x, y, z заданы равенствами

$$x = (2, 1, -1), \quad y = (3, 2, -1), \quad z = (3, 1, 0).$$

Найдем векторное произведение векторов $y - x$, $z - x$:

$$[y - x, z - x] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ (y-x)_1 & (y-x)_2 & (y-x)_3 \\ (z-x)_1 & (z-x)_2 & (z-x)_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i^1 - i^2 - i^3,$$

или

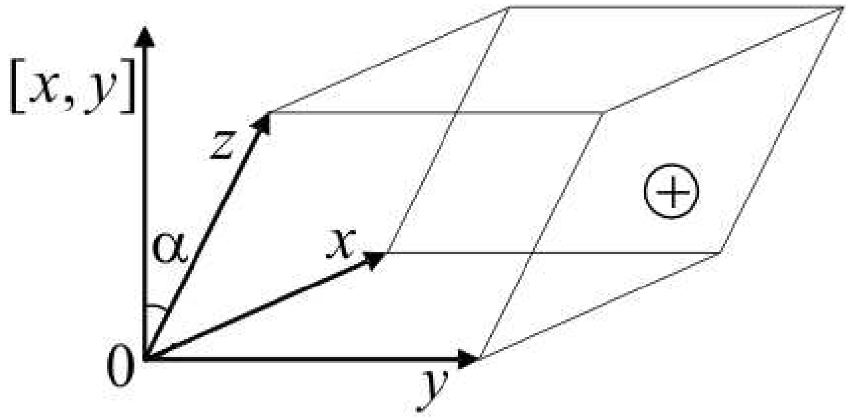
$$[y - x, z - x] = (1, -1, -1).$$

§4. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

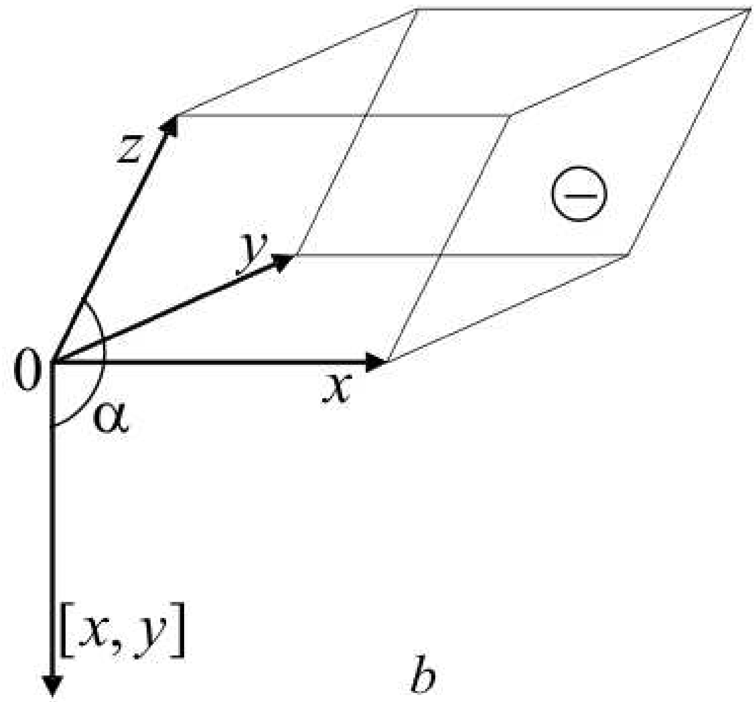
Смешанным произведением векторов x, y, z называется число

$$(x, y, z) = ([x, y], z).$$

Поясним, что сначала составляется вектор $[x, y]$, затем этот вектор скалярно умножается на вектор z.



a

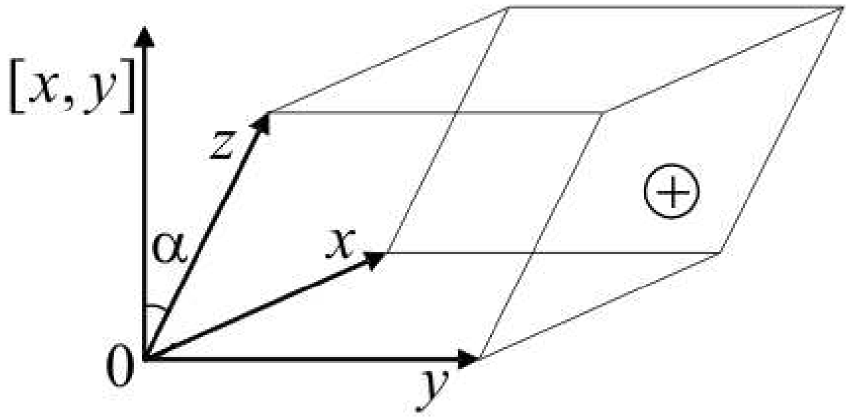


b

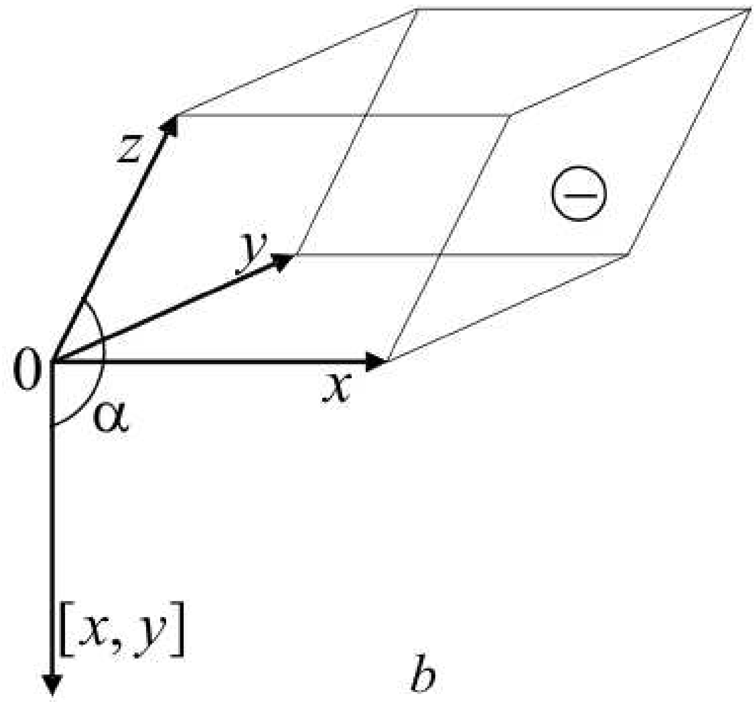
Смешанное произведение векторов

$$(x, y, z) = ([x, y], z) = |[x, y]||z| \cos([x, y], z)$$

имеет отчетливый геометрический смысл. Если векторы $[x, y]$ и z образуют острый угол, это — объем параллелепипеда, построенного на векторах x, y, z. В противном случае — это объем параллелепипеда, построенного на векторах x, y, z, взятый со знаком минус.



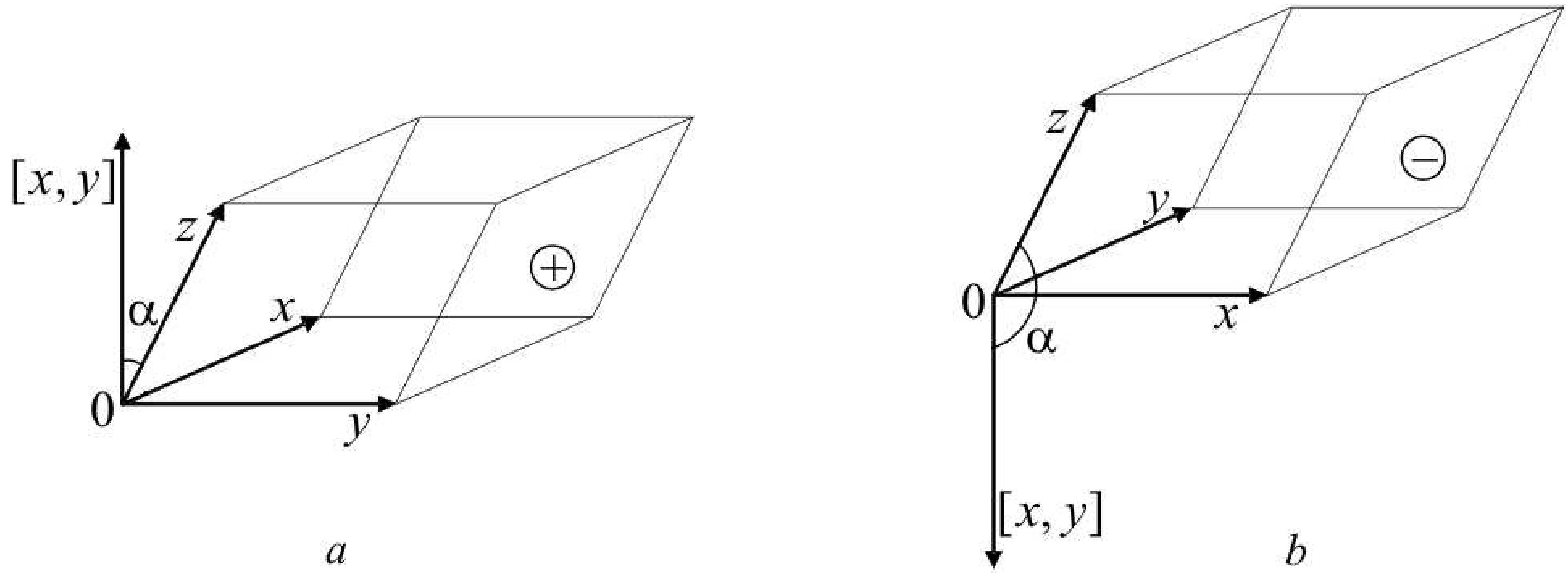
a



b

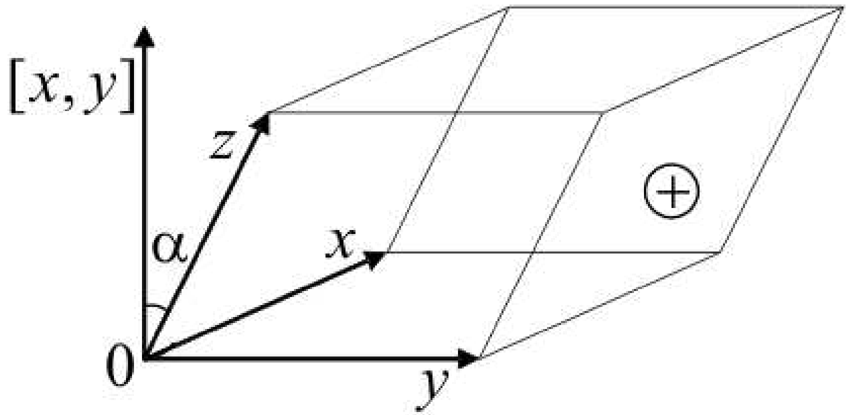
Отсюда сразу вытекает, что при перестановке любых двух сомножителей в смешанном произведении абсолютная величина его не меняется, а знак меняется на противоположный, например,

$$(x, y, z) = -(y, x, z).$$

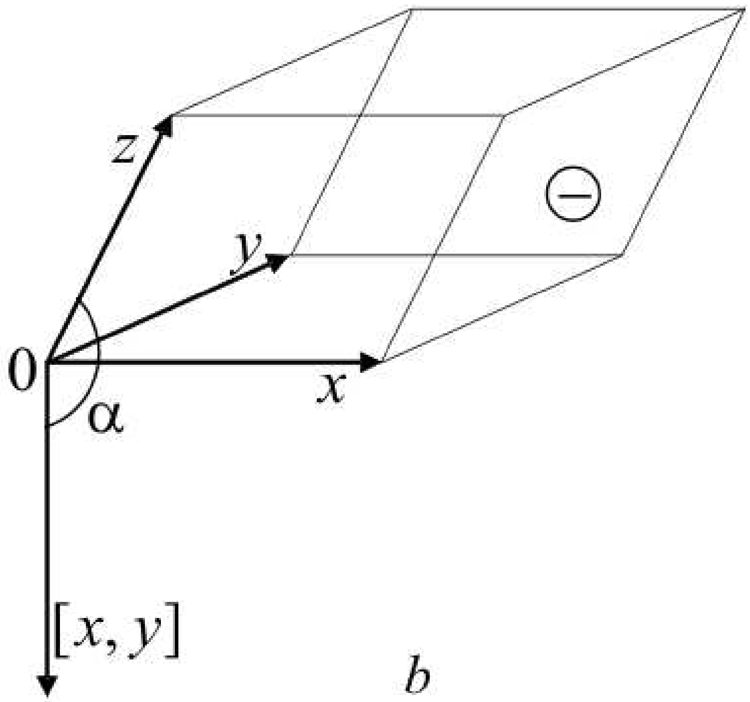


Ясно, что необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения:

$$(x, y, z) = ([x, y], z) = 0.$$



a



b

Если в смешанном произведении два сомножителя совпадают, например, $x = y$, то оно обращается в нуль:

$$(x, x, z) = ([x, x], z) = 0.$$

.

Получим выражение для смешанного произведения векторов

$$x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3,$$

$$y = y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3,$$

$$z = z_1e^1 + z_2e^2 + z_3e^3$$

через их координаты.

Используя формулу

$$[x, y] = (x_1y_2 - x_2y_1)[e^1, e^2] + (x_1y_3 - x_3y_1)[e^1, e^3] + (x_2y_3 - x_3y_2)[e^2, e^3],$$

можем написать

$$(x, y, z) = ((x_1y_2 - x_2y_1)[e^1, e^2] + (x_1y_3 - x_3y_1)[e^1, e^3] + \\ + (x_2y_3 - x_3y_2)[e^2, e^3], z_1e^1 + z_2e^2 + z_3e^3).$$

<u>Упражнение.</u> **Из представления**

$$(x, y, z) = ((x_1y_2 - x_2y_1)[e^1, e^2] + (x_1y_3 - x_3y_1)[e^1, e^3] + \\ + (x_2y_3 - x_3y_2)[e^2, e^3], z_1e^1 + z_2e^2 + z_3e^3)$$

вывести формулу

$$(x, y, z) = \{(x_1y_2 - x_2y_1)z_3 - (x_1y_3 - x_3y_1)z_2 + (x_2y_3 - x_3y_2)z_1\}(e^1, e^2, e^3).$$

.

В равенстве

$$(x, y, z) = \{(x_1y_2 - x_2y_1)z_3 - (x_1y_3 - x_3y_1)z_2 + (x_2y_3 - x_3y_2)z_1\}(e^1, e^2, e^3)$$

выражение в фигурных скобках — разложение определителя третьего порядка по последней строке. Поэтому

$$(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} (e^1, e^2, e^3).$$

Поскольку $(e^1, e^2, e^3) \neq 0$ (векторы базиса некомпланарны), то из

$$(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} (e^1, e^2, e^3)$$

сразу вытекает, что необходимое и достаточное условие компланарности векторов:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

для определителя, составленного из компонент векторов относительно любого базиса.

.

Если базис декартов, то, очевидно,

$$(i^1, i^2, i^3) = 1,$$

т. е. в декартовых координатах

$$(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

.

Вычислим, например, смешанное произведение векторов x, y, z, декартовы кооординаты которых заданы равенствами

$$x = (2, 1, -1), \quad y = (3, 2, -1), \quad z = (3, 1, 0).$$

Имеем

$$(x, y, z) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

.

<u>Упражнение.</u> **Пусть векторы** e^1, e^2, e^3 **некомпланарны, Положим**

$$e_1 = Q^{-1}[e^2, e^3], \quad e_2 = -Q^{-1}[e^1, e^3], \quad e_3 = Q^{-1}[e^1, e^2].$$

где

$$Q = (e^1, e^2, e^3).$$

Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 **некомпланарны, причем**

$$(e_k, e^l) = \delta_{kl}.$$

.

Говорят, что векторы

$$e_1 = Q^{-1}[e^2, e^3], \quad e_2 = -Q^{-1}[e^1, e^3], \quad e_3 = Q^{-1}[e^1, e^2],$$

где

$$Q = (e^1, e^2, e^3),$$

образуют ***взаимный базис***. Базис e^1, e^2, e^3 называют при этом ***основным***. Равенство

$$[x, y] = (x_1y_2 - x_2y_1)[e^1, e^2] + (x_1y_3 - x_3y_1)[e^1, e^3] + (x_2y_3 - x_3y_2)[e^2, e^3].$$

дает правило вычисления компонент вектора $[x, y]$ при разложении его по взаимному базису, если известны компоненты векторов при разложении по основному базису.

Упражнение. Вычислить скалярное произведение (x, y), разлагая вектор x по основному базису, а y — по взаимному.

§5. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ, РЕШАЕМЫХ МЕТОДАМИ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1) ***Расстояние между двумя точками***. Даны точки

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad \textbf{и} \quad y = (y_1, y_2, y_3).$$

Найти расстояние между ними.

Ясно, что искомое расстояние равно длине вектора $x - y$. Но, как мы знаем,

$$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3),$$

и по формуле

$$(a, b) = \sum_{k,l=1}^{3} a_k b_l (e^k, e^l)$$

получаем

$$|x - y| = \sqrt{(x - y, x - y)} = \sqrt{\sum_{k,l=1}^{3} (x_k - y_k)(x_l - y_l)(e^k, e^l)}.$$

Равенство

$$|x-y| = \sqrt{(x-y, x-y)} = \sqrt{\sum_{k,l=1}^{3} (x_k - y_k)(x_l - y_l)(e^k, e^l)}$$

в декартовых координатах имеет вид

$$|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}.$$

.

2) ***Уравнение сферы***. Написать уравнение сферы радиуса R с центром в точке $x^0 = (x_1^0, x_3^0, x_3^0)$.

По определению сфера — это множество всех точек x пространства, равноудаленных от данной:

$$|x - x^0| = R,$$

или

$$|x - x^0|^2 = R^2.$$

Это и есть уравнение сферы.

.

Запишем уравнение

$$|x - x^0|^2 = R^2$$

в координатной форме. Используя формулу

$$|x - y|^2 = \sum_{k,l=1}^{3} (x_k - y_k)(x_l - y_l)(e^k, e^l),$$

получаем

$$\sum_{k,l=1}^{3} (x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0)(e^k, e^l) = R^2.$$

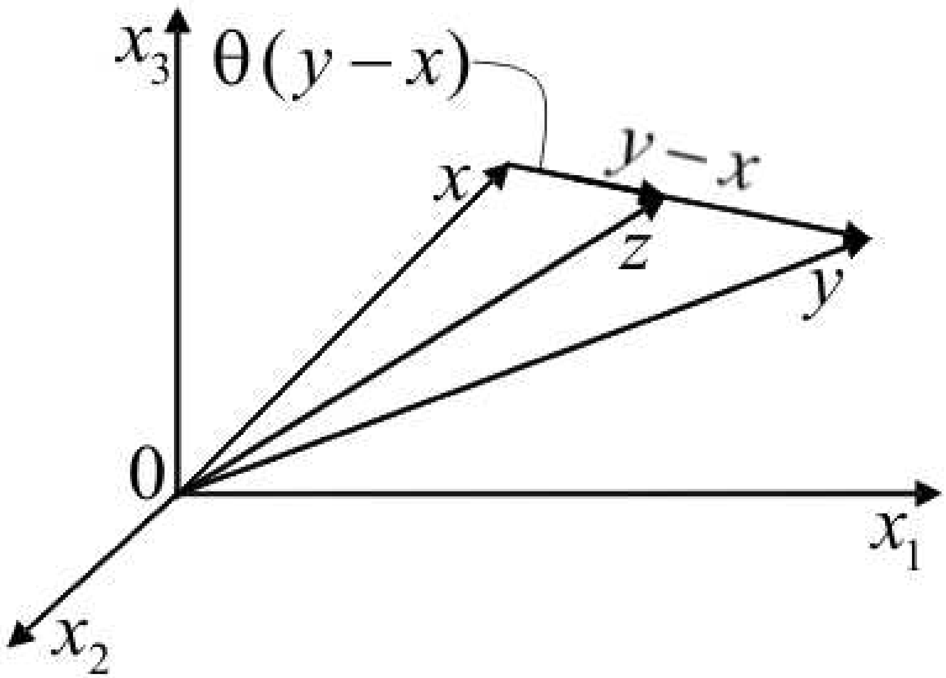
.

Уравнение

$$\sum_{k,l=1}^{3}(x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0)(e^k, e^l) = R^2$$

в декартовых координатах имеет вид

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 = R^2.$$



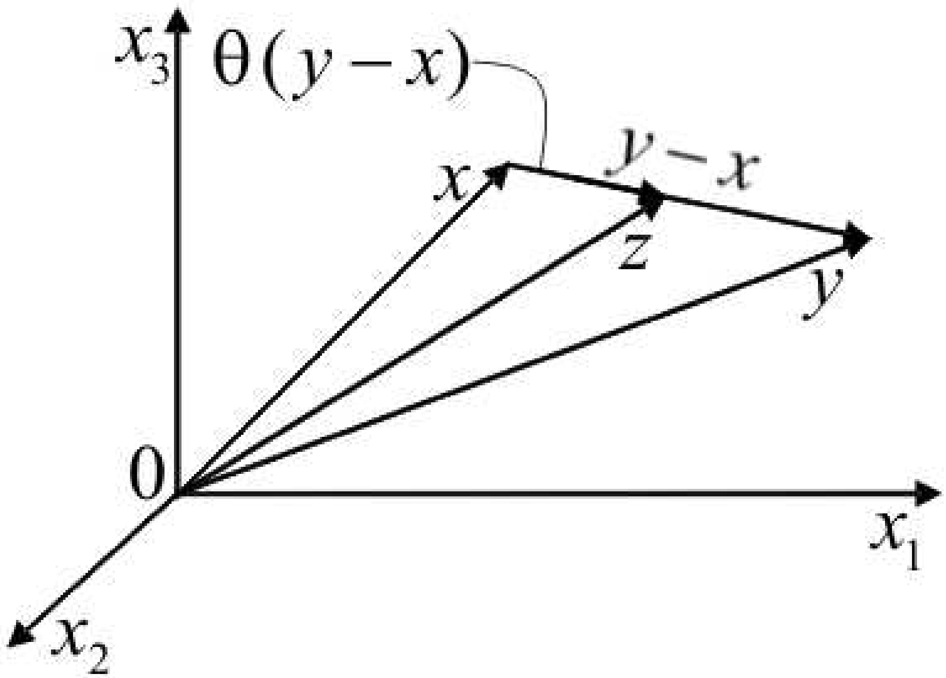
3) ***Уравнение отрезка прямой***. Рассмотрим две точки

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3).$$

Уравнение отрезка прямой (в пространстве) имеет вид

$$z = x + \theta(y - x), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Действительно, при изменении θ от нуля до единицы, точка z пробегает отрезок прямой, соединяющий точки x и y.



**Деление отрезка в данном отношении.** Ясно, что из

$$z = x + \theta(y - x), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

следует

$$|z - x| = \theta|y - x|,$$

т. е. точка z (при данном θ) делит отрезок в отношении $\theta : (1 - \theta)$.

В частности, при $\theta = 1/2$ отрезок делится пополам.

.

Запишем, наконец, уравнение

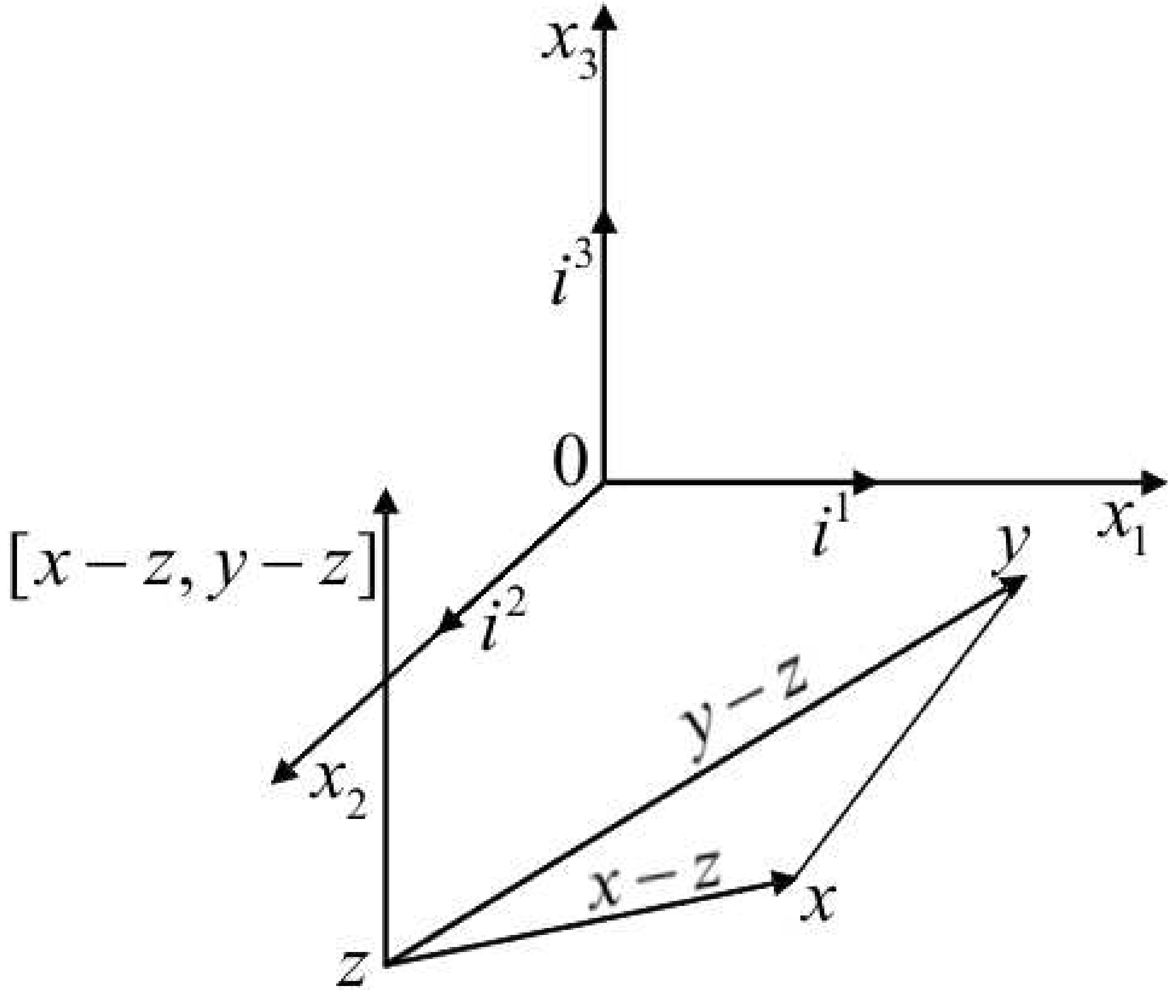
$$z = x + \theta(y - x), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

в координатной форме

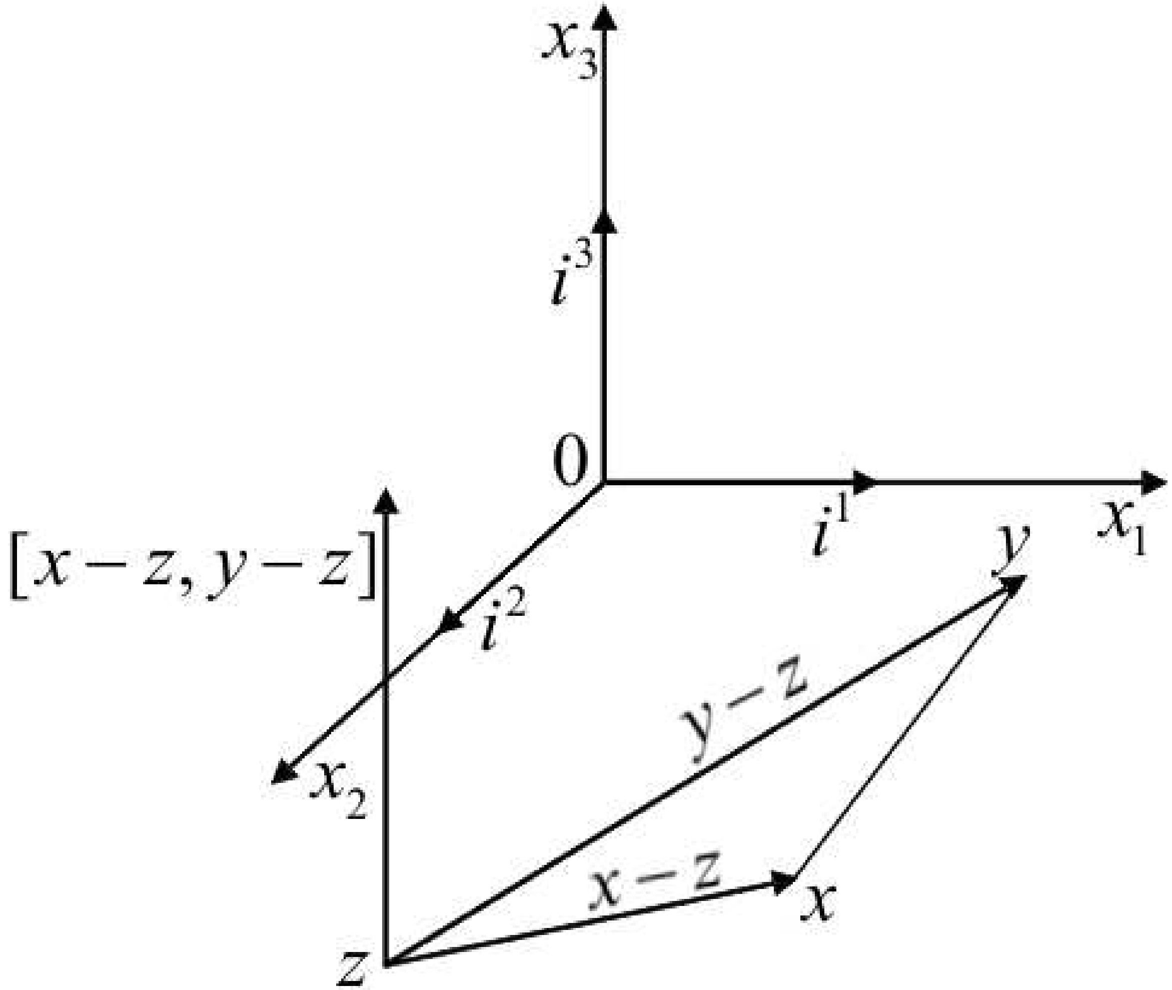
$$z_i = x_i + \theta(y_i - x_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

При $\theta = 1/2$ получаем координаты середины отрезка

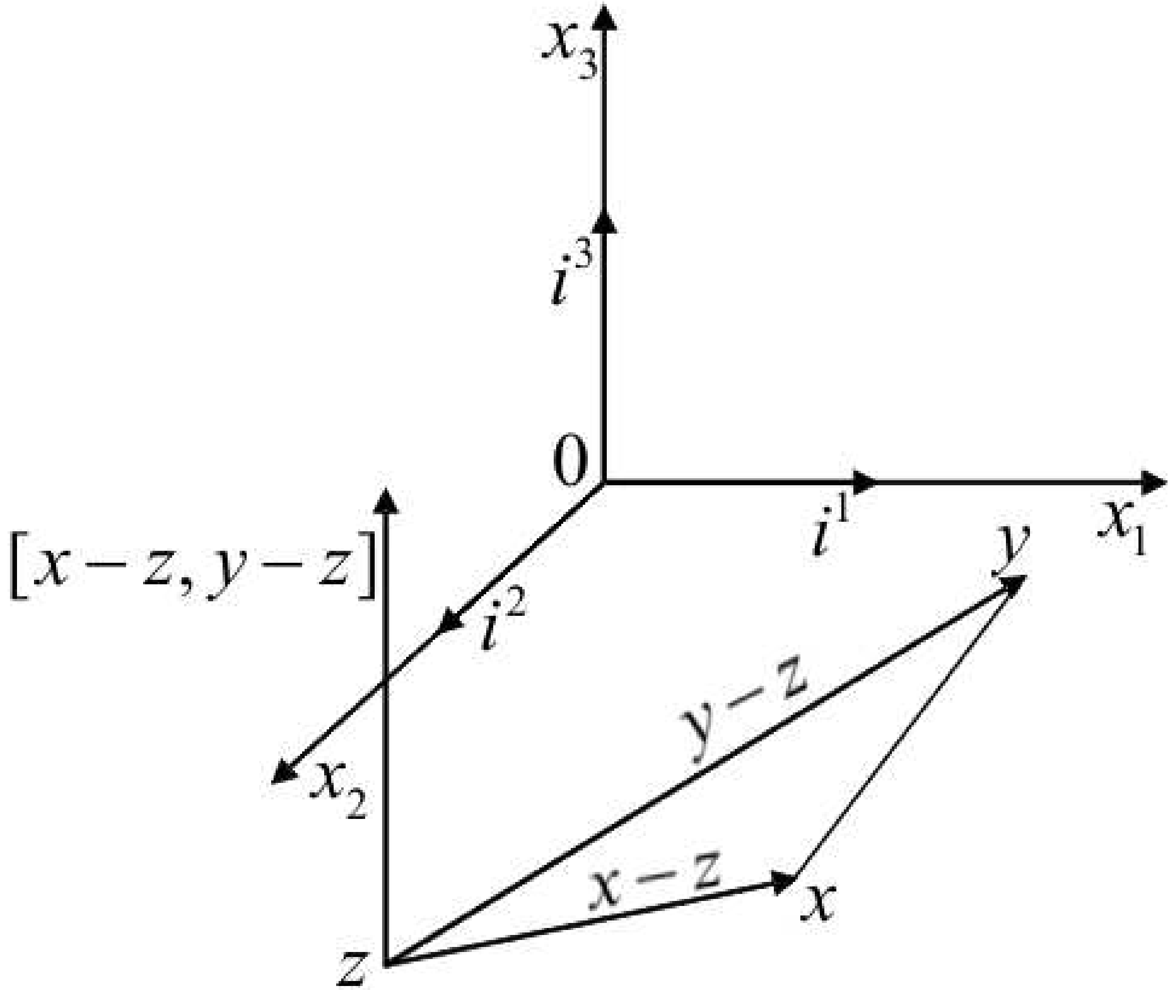
$$z_i = (x_i + y_i)/2, \quad i = 1, 2, 3.$$



4) ***Площадь треугольника.*** Рассмотрим плоскость, отнесенную к декартовой системе координат x_1, x_2 и на этой плоскости треугольник с вершинами $x = (x_1, x_1)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$.



Выразим площадь S треугольника через координаты его вершин. Будем трактовать плоскость x_1, x_2 как координатную плоскость $x_3 = 0$ трехмерной декартовой системы координат x_1, x_2, x_3.



Построим векторы $x - z$, $y - z$ и составим их векторное произведение $[x - z, y - z]$ — вектор, направленный вдоль оси x_3, причем

$$S = \frac{1}{2}|[x - z, y - z]|.$$

.

Вектор $[x-z, y-z]$ параллелен оси x_3 поэтому только 3-я его координата отлична от нуля:

$$[x-z, y-z] = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ x_1-z_1 & x_2-z_2 & x_3-z_3 \\ y_1-z_1 & y_2-z_2 & y_3-z_3 \end{vmatrix} = i^3\begin{vmatrix} x_1-z_1 & x_2-z_2 \\ y_1-z_1 & y_2-z_2 \end{vmatrix}.$$

Отсюда и из

$$S = \frac{1}{2}|[x-z, y-z]|$$

вытекает, что с точностью до знака площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-z_1 & x_2-z_2 \\ y_1-z_1 & y_2-z_2 \end{vmatrix}.$$

.

<u>Упражнение</u>. Покажите, что эти определители совпадают:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $x = (1, 1)$, $y = (2, 2)$, $z = (-1, 3)$. Используем формулу

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix},$$

а затем выполним очевидные элементарные преобразования определителя:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{4}{2} = 2.$$

.

Для любых векторов x, y положим

$$G(x,y) = \begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{vmatrix}.$$

Упражнение. Докажите, что

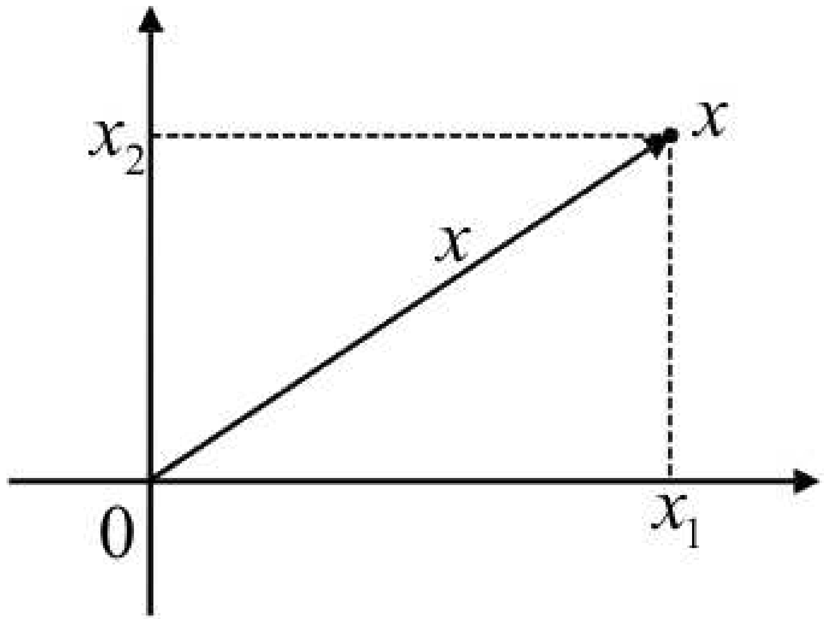
$$G(x,y) = S^2,$$

где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах x, y. И, следовательно,

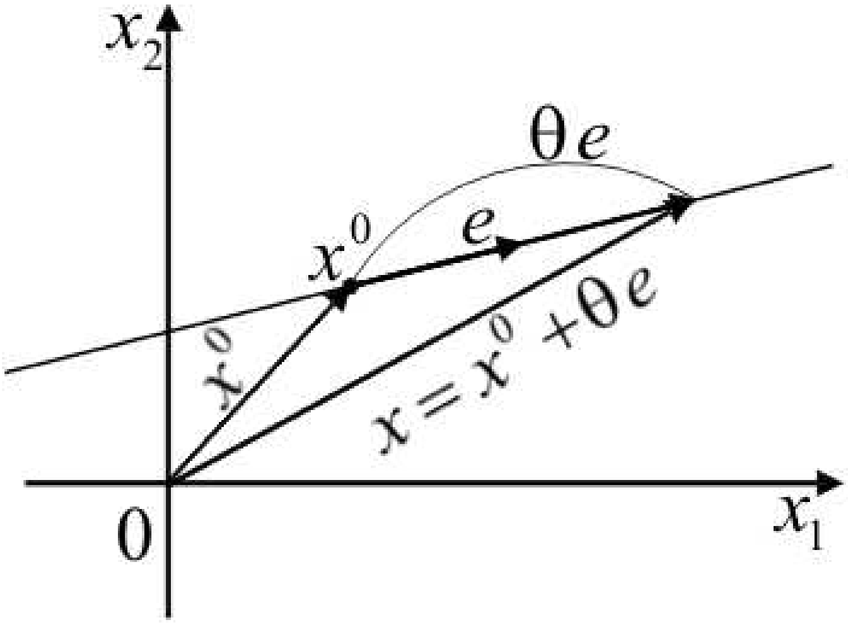
$$G(x,y) \geqslant 0 \quad \forall\ x,\ y;$$

$$G(x,y) = 0 \iff \text{векторы } x,\ y \text{ коллинеарны.}$$

§6. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

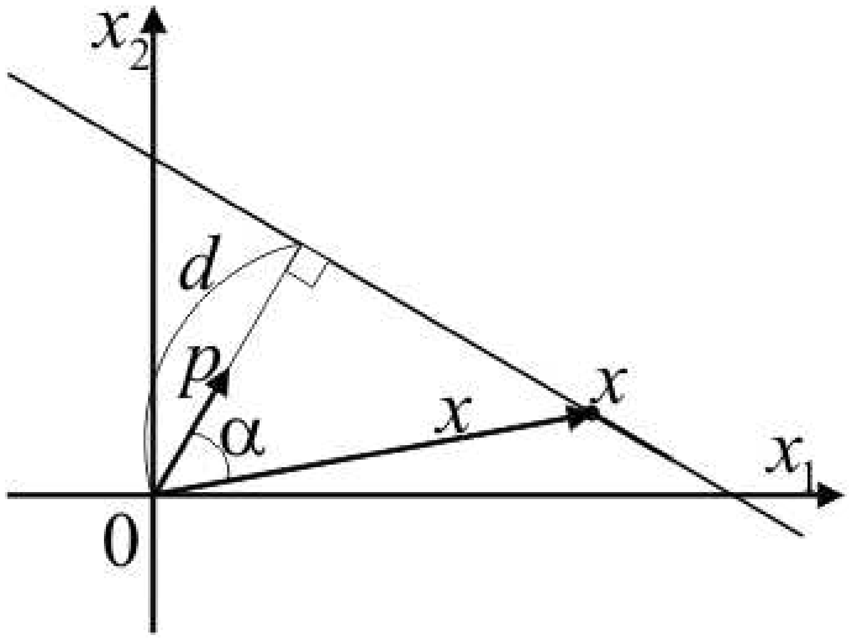


Отнесем плоскость к декартовой системе координат x_1, x_2. Как и ранее, точки $x = (x_1, x_2)$ будут отождествляться с векторами.

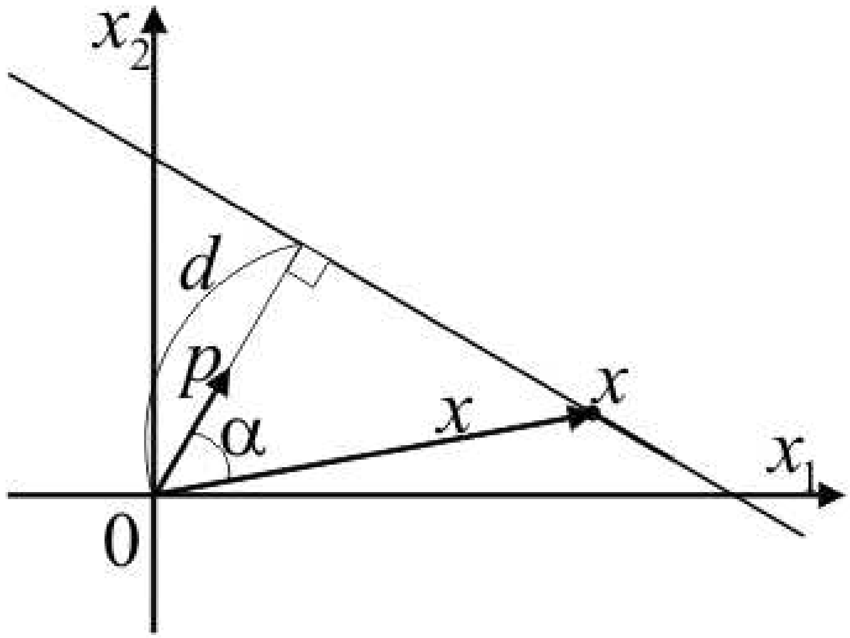


Прямую, проходящую через точку $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ ***параллельно вектору*** $e = (e_1, e_2)$, зададим уравнением

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty.$$



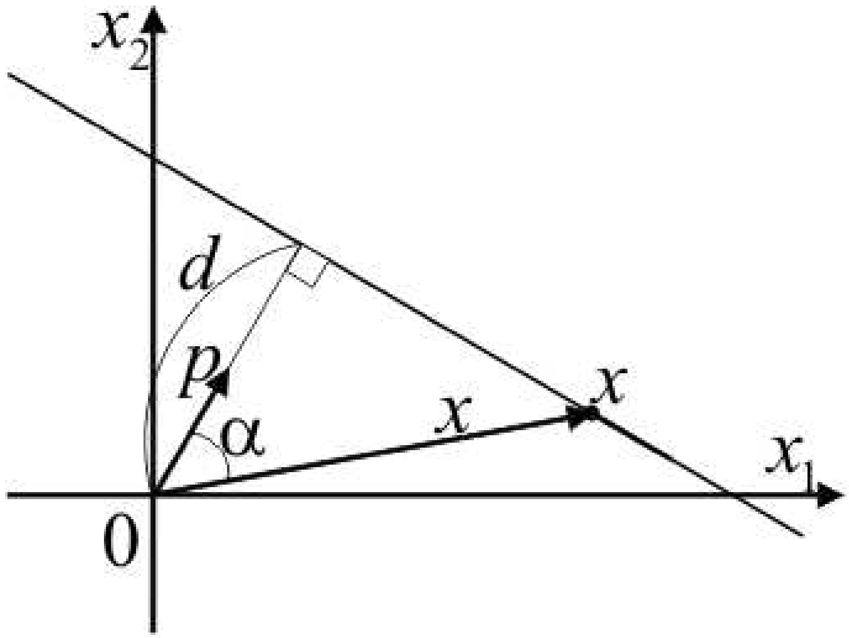
Прямая — это также множество всех векторов, ортогональных данному вектору p, сдвинутое параллельно p на расстояние d от начала координат.



Тогда для точек прямой выполнено уравнение

$$(x, p) - d = 0,$$

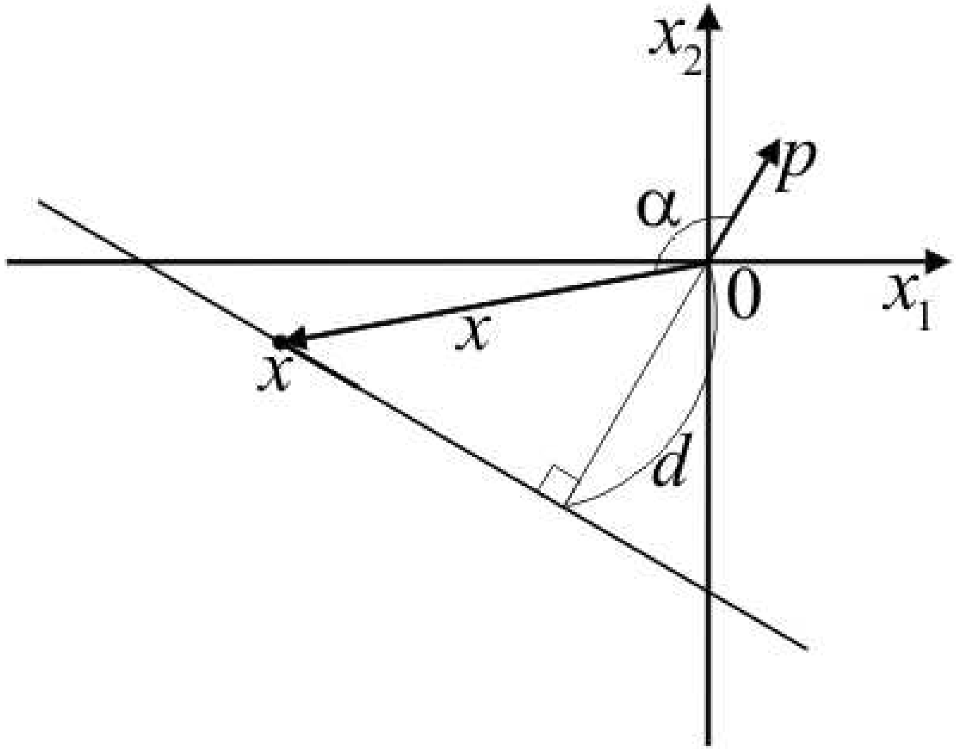
где $p = (p_1, p_2)$ — заданный вектор единичной длины, d — проекция вектора x на направление p, одна и та же для всех точек прямой.



Знак d показывает, в какую сторону (по отношению к p) выполняется сдвиг. Обозначим α угол между векторами p и x. Тогда

$$(x, p) - d = 0 \quad \Longrightarrow \quad d = (x, p) = |x| \cos \alpha.$$

Здесь коэффициент $\underline{d > 0}$, угол $\underline{\alpha < \pi/2}$.



Здесь

$$d = (x, p) = |x| \cos \alpha < 0, \qquad \alpha > \pi/2.$$

Что означает условие $d = 0$?

.

Уравнение

$$(x, p) - d = 0$$

называют *нормальной формой уравнения прямой*.

Получим уравнения прямой в формах, знакомых из школьной математики.

.

Запишем уравнение

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

в координатах:

$$x_1 - x_1^0 = \theta e_1, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

$$x_2 - x_2^0 = \theta e_2, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Следовательно,

$$\frac{x_2 - x_2^0}{x_1 - x_1^0} = \frac{e_2}{e_1}.$$

.

Из

$$\frac{x_2 - x_2^0}{x_1 - x_1^0} = \frac{e_2}{e_1}$$

получаем

$$(x_2 - x_2^0) = k(x_1 - x_1^0).$$

Здесь

$$k = \frac{e_2}{e_1}$$

есть тангенс угла наклона прямой к оси x_1.

Запишем уравнение

$$(x, p) - d = 0$$

в координатах:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 - d = 0.$$

Получаем уравнение прямой в так называемой ***общей форме***:

$$a x_1 + b x_2 + c = 0.$$

.

Разрешим уравнение

$$ax_1 + bx_2 + c = 0$$

относительно x_2. Получим:

$$x_2 = kx_1 + b.$$

Здесь k — тангенс угла наклона прямой к оси x_1.

Наоборот, из уравнения прямой, записанного в формах

$$(x_2 - x_2^0) = k(x_1 - x_1^0),$$

$$ax_1 + bx_2 + c = 0,$$

$$x_2 = kx_1 + b,$$

нетрудно получить уравнение в форме

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

или

$$(x, p) - d = 0.$$

.

Поделим, например, обе части уравнения в общей форме

$$ax_1 + bx_2 + c = 0$$

на

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Получим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,x_1 + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,x_2 + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$$

.

В уравнении

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x_1+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x_2+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

положим

$$p_1=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad p_2=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad d=-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Тогда

$$p_1x_1+p_2x_2-d=0.$$

Поскольку

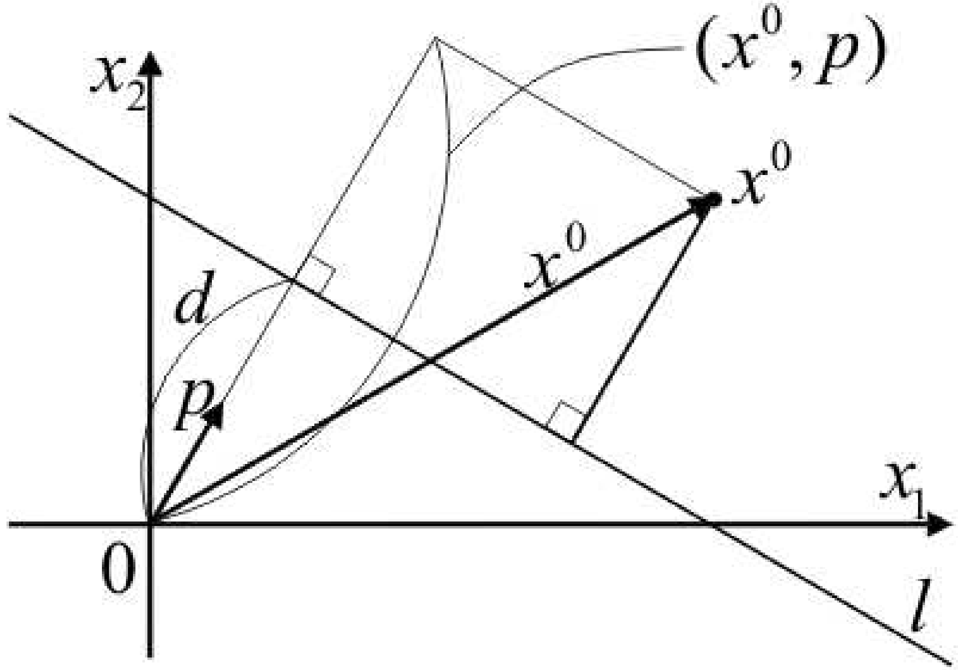
$$p_1^2+p_2^2=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1,$$

полученная форма записи уравнения прямой будет нормальной.

§7. ЗАДАЧИ О ВЗАИМНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ПРЯМЫХ И ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ

1. Определить ***расстояние от точки*** $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ ***до прямой*** l.

.



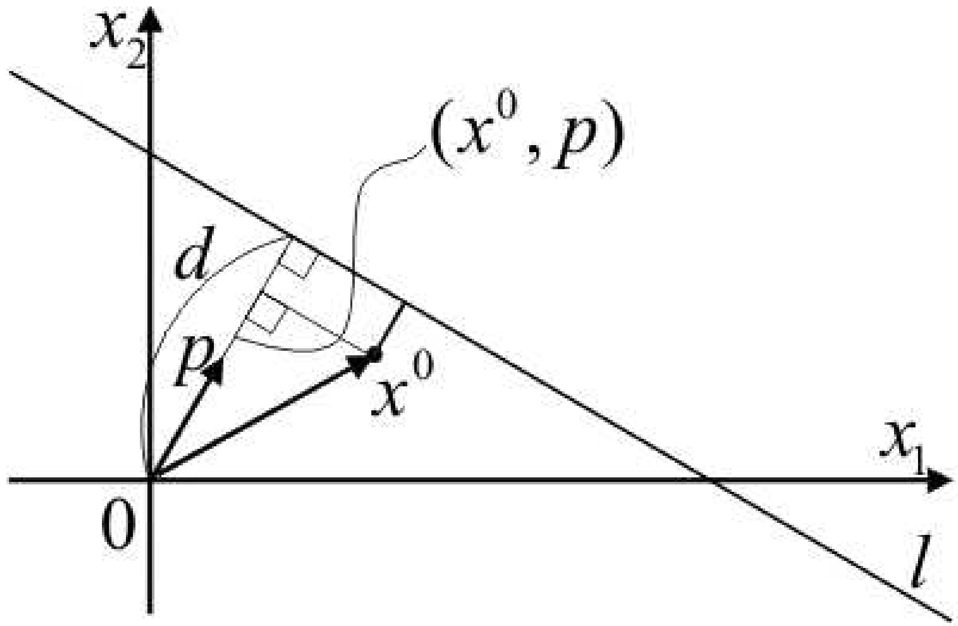
Если прямая l задана нормальным уравнением

$$(x, p) - d = 0,$$

то (x^0, p) — величина проекции вектора x^0 на прямую, параллельную p. Следовательно, отклонение точки x^0 от прямой l равно

$$\delta = (x^0, p) - d.$$

.



Знак

$$\delta = (x^0, p) - d$$

показывает по какую сторону от прямой l расположена точка x^0. Расстояние от точки x^0 до прямой l равно

$$|\delta| = |(x^0, p) - d|.$$

Пример. Найти расстояние от точки $x^0 = (1, -2)$ до прямой

$$3x_1 - 4x_2 - 26 = 0.$$

Сначала приведем прямую к нормальному виду:

$$\frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_2 - \frac{26}{5} = 0,$$

т. е.

$$p = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \quad d = \frac{26}{5}.$$

Вычислим отклонение

$$\delta = (x^0, p) - d = \frac{3}{5} + \frac{8}{5} - \frac{26}{5} = -3.$$

Расстояние от точки до прямой равно

$$|\delta| = 3.$$

.

2. Даны две прямые l_1 и l_2, определяемые уравнениями

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2.$$

Требуется исследовать ***взаимное расположение*** этих ***прямых***, т. е. выяснить, пересекаются ли они и указать точку их пересечения.

Эта задача была нами полностью решена. Действительно, фактически, поставленная задача эквивалентна исследованию условий разрешимости системы линейных уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2.$$

Здесь надо различать три случая.

1) Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда система уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

имеет единственное решение x_1, x_2 при любых b_1, b_2. Точка

$$x = (x_1, x_2)$$

есть <u>точка пересечения прямых</u>.

.

2) Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда система

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

не имеет решений, т. е. <u>прямые l_1, l_2 параллельны</u>.

.

3) Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Это условие эквивалентно существованию числа $\alpha \neq 0$ такого, что

$$a_{21} = \alpha a_{11}, \quad a_{22} = \alpha a_{12}, \quad b_2 = \alpha b_1.$$

Система

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

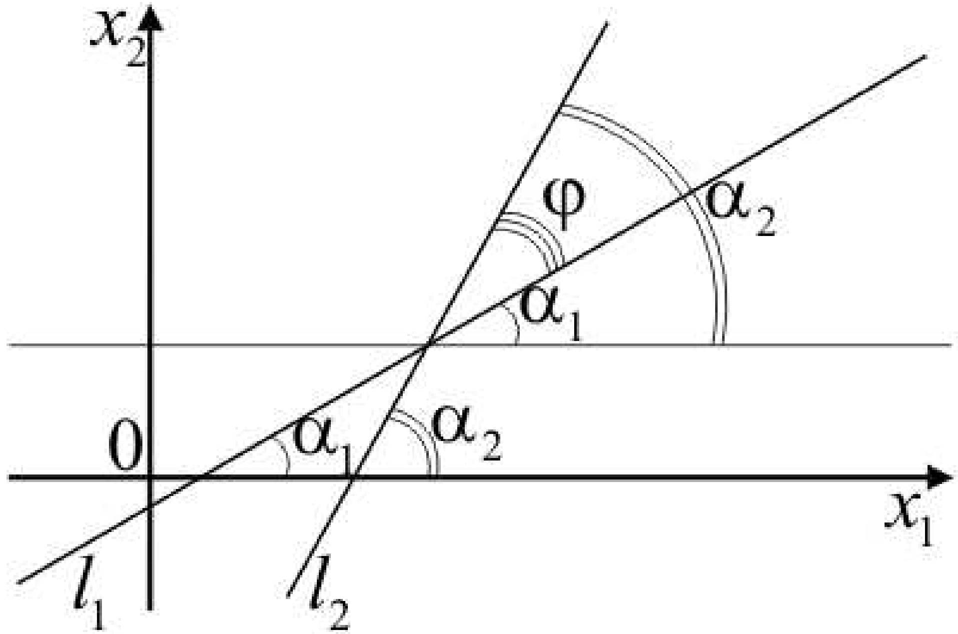
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

имеет бесконечное множество решений (фактически, уравнения системы совпадают). <u>Прямые l_1, l_2 совпадают.</u>

3. Найти ***<u>угол между двумя прямыми</u>***

$$y = k_1 x + b_1,$$

$$y = k_2 x + b_2.$$



3. **Найдем тангенс угла между прямыми**

$$y = k_1 x + b_1, \quad y = k_2 x + b_2.$$

Так как

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1, \quad \mathrm{tg}\alpha_1 = k_1, \quad \mathrm{tg}\alpha_2 = k_2,$$

то

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_2\,\mathrm{tg}\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

.

<u>Упражнения</u>

1) Найдите косинус угла между двумя прямыми:

$$x = x^1 + \theta e^1, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

$$x = x^2 + \theta e^2, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

.

2) Найдите косинус угла между двумя прямыми:

$$(x, p^1) - d_1 = 0,$$

$$(x, p^2) - d_2 = 0.$$

.

3) Используя выражение для тангенса угла между прямыми

$$\text{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

покажите, что при

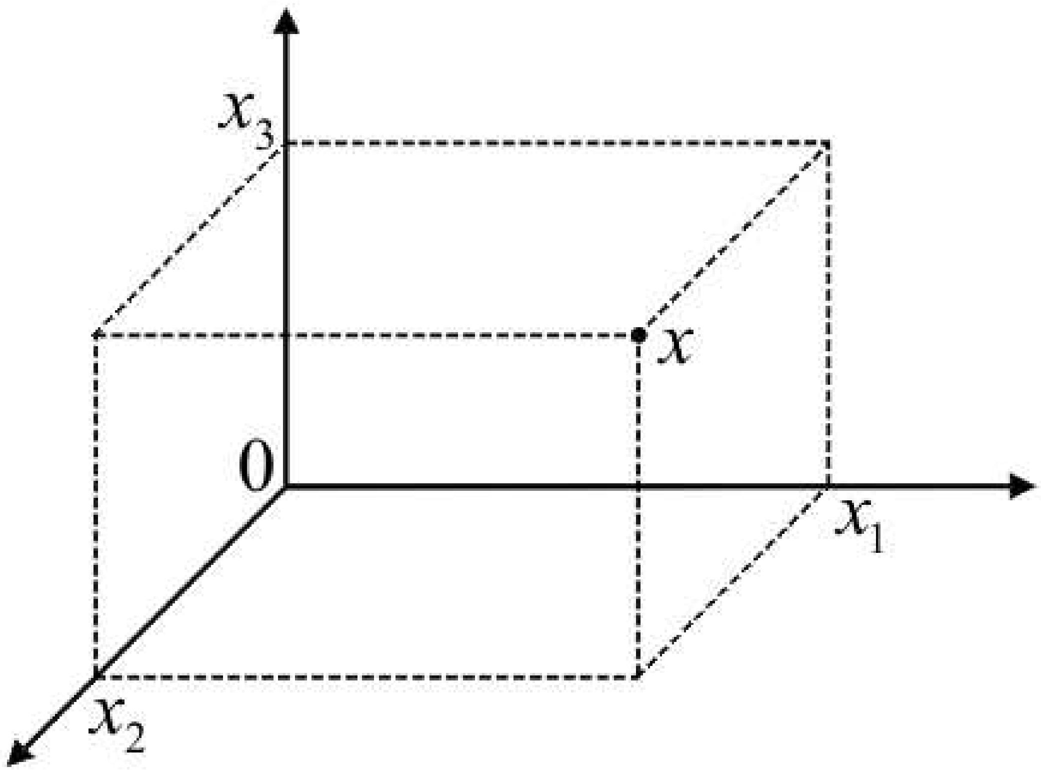
$$k_1 = k_2$$

прямые параллельны, при

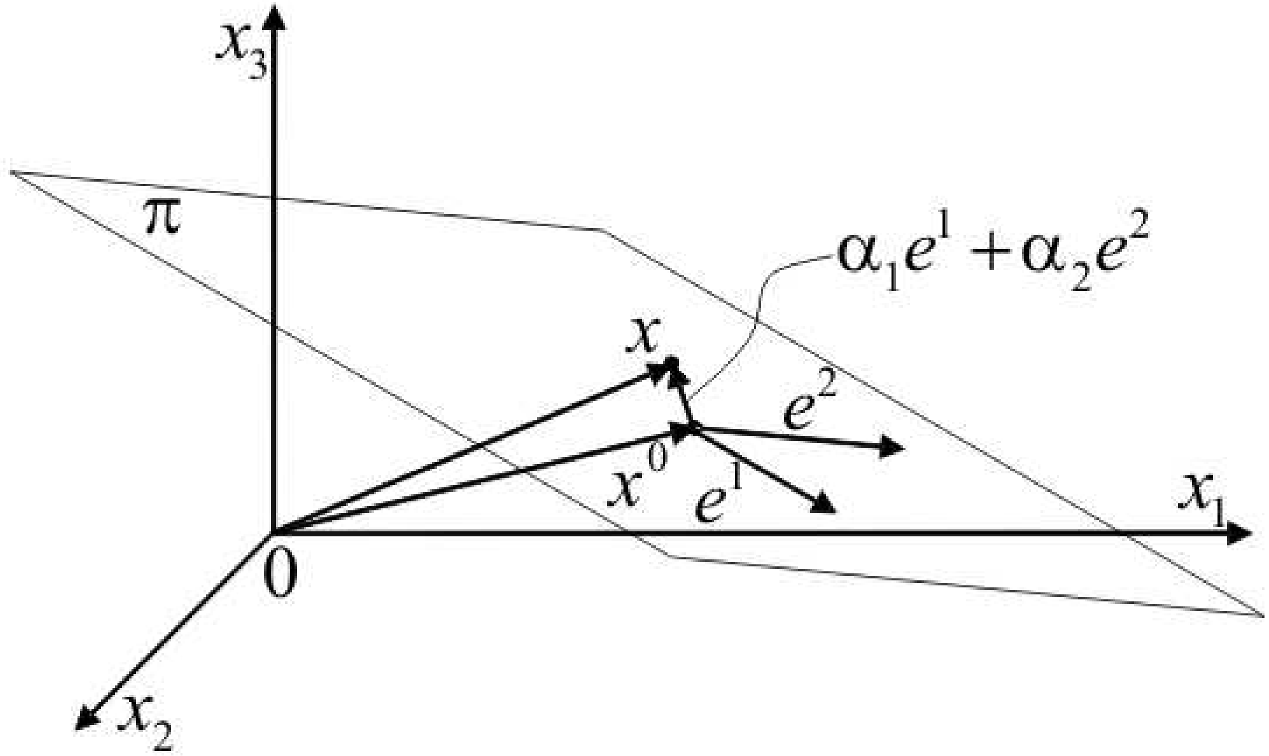
$$k_1 k_2 = -1$$

прямые ортогональны.

§8. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ



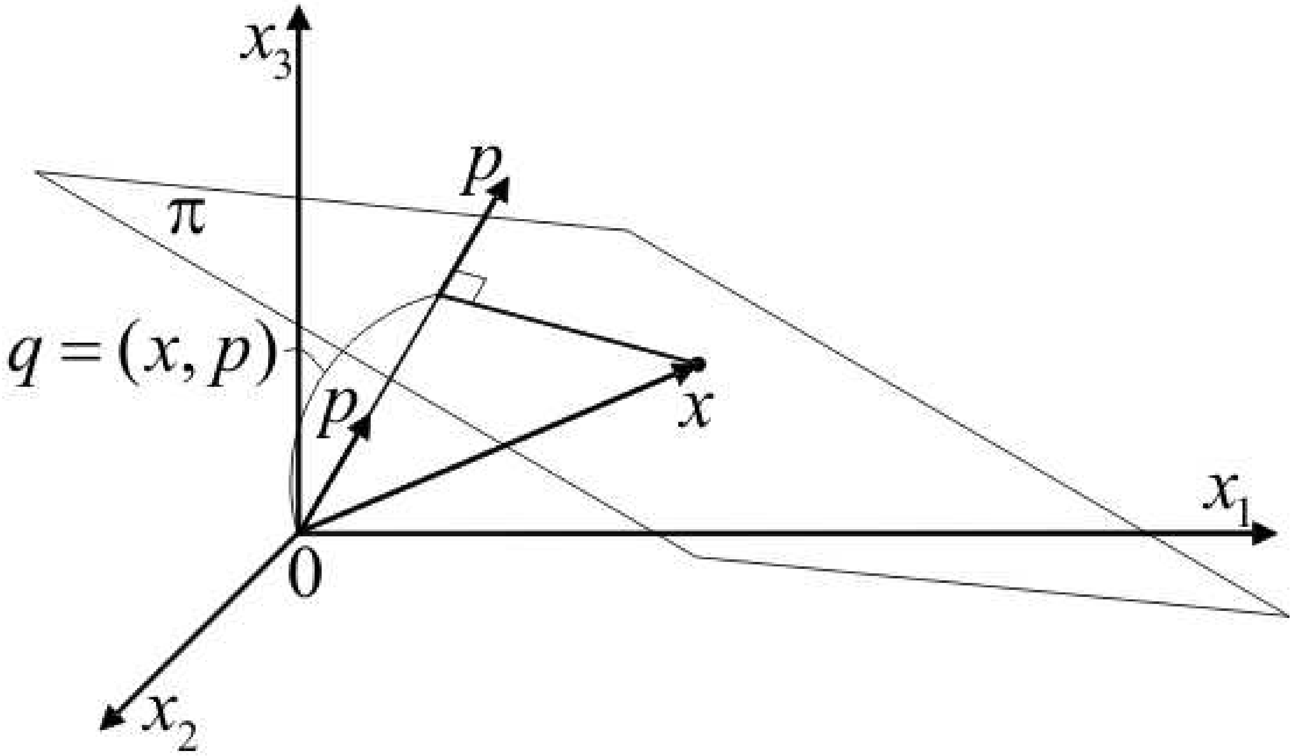
Рассматривается трехмерное евклидово пространство.



Пусть e^1 и e^2 — неколлинеарные векторы, а x^0 — произвольный вектор. Уравнение

$$x = x^0 + \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2, \quad -\infty < \alpha_1,\, \alpha_2 < \infty,$$

определяет ***плоскость*** π, ***проходящую через точку*** x_0. Говорят, что эта плоскость ***натянута на векторы*** e^1, e^2.



Нормальное уравнение плоскости определяет векторы, концы которых, принадлежат плоскости, ортогональной единичному вектору p и отстоящей от начала координат на расстояние q:

$$(x, p) - q = 0.$$

Знак q определяет направление сдвига плоскости параллельно p.

.

Запишем уравнение

$$x = x^0 + \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2, \qquad -\infty < \alpha_1,\ \alpha_2 < \infty,$$

в координатной форме:

$$x_1 - x_1^0 = \alpha_1 e_1^1 + \alpha_2 e_1^2,$$
$$x_2 - x_2^0 = \alpha_1 e_2^1 + \alpha_2 e_2^2,$$
$$x_3 - x_3^0 = \alpha_1 e_3^1 + \alpha_2 e_3^2.$$

Полагая, что $x \neq x^0$, рассмотрим определитель

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & e_1^1 & e_1^2 \\ x_2 - x_2^0 & e_2^1 & e_2^2 \\ x_3 - x_3^0 & e_3^1 & e_3^2 \end{vmatrix}.$$

Равенства

$$x_1 - x_1^0 = \alpha_1 e_1^1 + \alpha_2 e_1^2,$$
$$x_2 - x_2^0 = \alpha_1 e_2^1 + \alpha_2 e_2^2,$$
$$x_3 - x_3^0 = \alpha_1 e_3^1 + \alpha_2 e_3^2$$

означают, что если $x \in \pi$, то

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & e_1^1 & e_1^2 \\ x_2 - x_2^0 & e_2^1 & e_2^2 \\ x_3 - x_3^0 & e_3^1 & e_3^2 \end{vmatrix} = 0,$$

т. к. столбцы определителя линейно зависимы.

Наоборот, равенство

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & e_1^1 & e_1^2 \\ x_2 - x_2^0 & e_2^1 & e_2^2 \\ x_3 - x_3^0 & e_3^1 & e_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

означает, что столбцы определителя линейно зависимы и, поскольку векторы e^1, e^2 линейно независимы, то выполнены равенства

$$x_1 - x_1^0 = \alpha_1 e_1^1 + \alpha_2 e_1^2,$$

$$x_2 - x_2^0 = \alpha_1 e_2^1 + \alpha_2 e_2^2,$$

$$x_3 - x_3^0 = \alpha_1 e_3^1 + \alpha_2 e_3^2.$$

.

Таким образом, уравнение

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & e_1^1 & e_1^2 \\ x_2 - x_2^0 & e_2^1 & e_2^2 \\ x_3 - x_3^0 & e_3^1 & e_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

есть ***уравнение плоскости*** (в координатной форме), ***проходящей через точку*** x^0 ***и натянутой на векторы*** e^1, e^2.

Раскрывая определитель $\Delta(x)$ (например, по первому столбцу) запишем уравнение плоскости

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & e_1^1 & e_1^2 \\ x_2 - x_2^0 & e_2^1 & e_2^2 \\ x_3 - x_3^0 & e_3^1 & e_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

в виде

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0.$$

Здесь числа a, b, c, d очевидным образом выражаются через координаты векторов e^1, e^2, x^0. Это ***общее уравнение плоскости***.

Аналогично уравнению прямой уравнения

$$x = x^0 + \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2, \quad -\infty < \alpha_1,\, \alpha_2 < \infty,$$

$$(x, p) - q = 0,$$

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

можно эквивалентно преобразовывать из одной формы в другую.

<u>Упражнения.</u>

1) Преобразовать уравнение

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

к нормальному виду.

Ответ:

$$p = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c), \qquad q = -\frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,.$$

.

2) Показать, анализируя общее уравнение плоскости

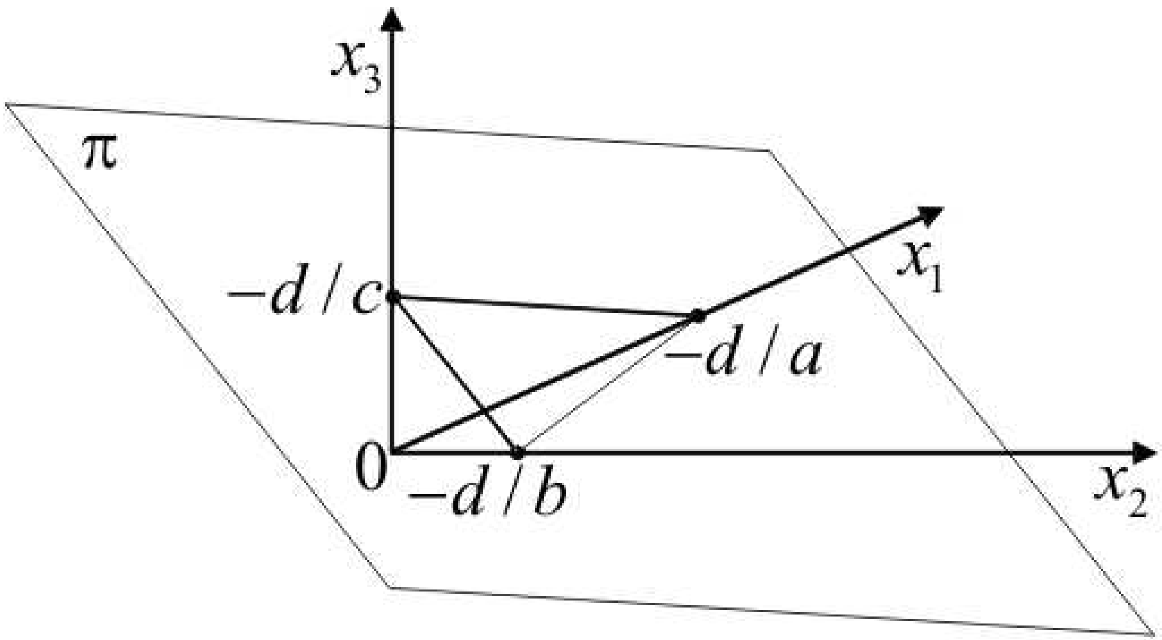
$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0,$$

что:

если $a = 0$, $b = 0$, то плоскость параллельна плоскости x_1x_2,

если $a = 0$, то плоскость параллельна оси x_1,

если $d = 0$, то плоскость проходит через начало координат.



3) Показать, что

$$\alpha = -\frac{d}{a}, \quad \beta = -\frac{d}{b}, \quad \gamma = -\frac{d}{c}$$

есть координаты точек пересечения плоскости

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0,$$

с осями x_1, x_2, x_3, проанализировать случаи, когда соответствующие знаменатели — нули.

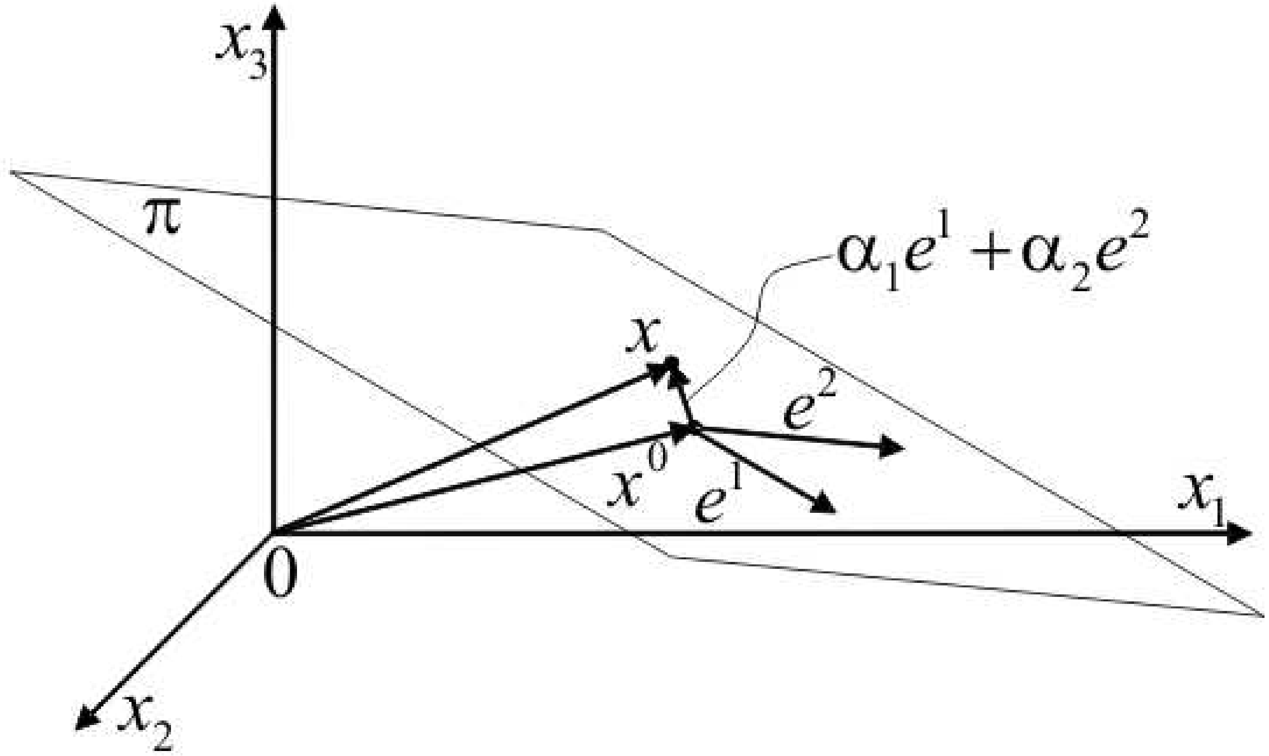
.

4) Показать, что косинус угла φ между плоскостями, задаваемыми уравнениями

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0, \quad a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0,$$

можно вычислить по формуле

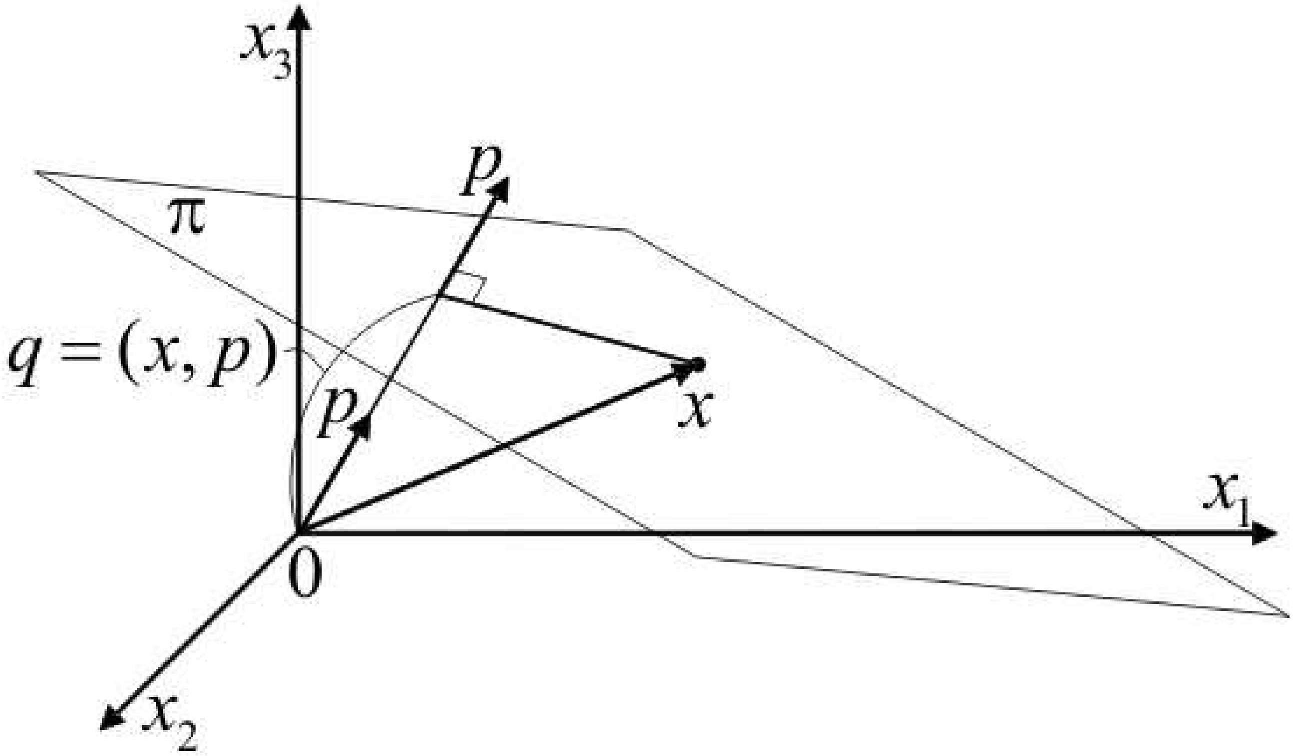
$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$



5) Используя уравнение

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & e_1^1 & e_1^2 \\ x_2 - x_2^0 & e_2^1 & e_2^2 \\ x_3 - x_3^0 & e_3^1 & e_3^2 \end{vmatrix} = 0,$$

написать уравнение плоскости, проходящей через три точки. Проанализировать случай, когда эти точки лежат на одной прямой.

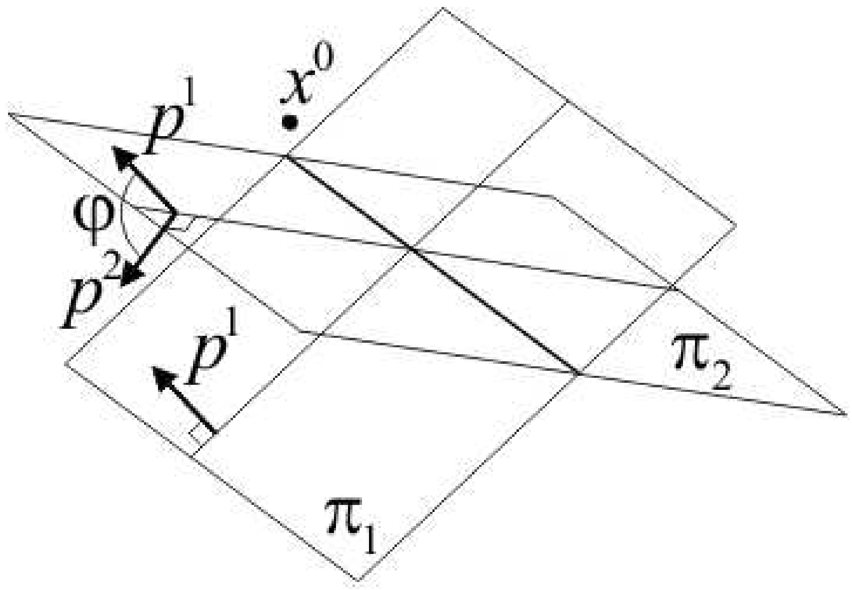


6) Показать, что отклонение точки x^0 от плоскости $(x, p) - q = 0$ равно

$$\delta = (x^0, p) - q,$$

и если $\delta > 0$, то конец вектора p и точка x^0 лежат по одну сторону от плоскости π, если $\delta < 0$, то — по разные.

.



<u>Пример.</u> **Даны плоскости π_1 и π_2, описываемые уравнениями**

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0,$$

$$6x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 8 = 0,$$

и точка $x^0 = (1, 1, 8)$. Определить величину того угла между плоскостями π_1, π_2, которому принадлежит точка x^0.

.

Приведем уравнение плоскости π_1

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$$

к нормальному виду. Имеем

$$\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3,$$

следовательно, нормальный вид этого уравнения есть

$$(p^1, x) - q_1 = 0, \quad p^1 = \frac{1}{3}(2, -1, 2), \quad q_1 = 1.$$

Вычислим отклонение точки

$$x^0 = (1, 1, 8)$$

от плоскости π_1:

$$\delta_1 = (p^1, x^0) - q_1 = \frac{1}{3}(2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 8) - 1 = \frac{17}{3} - \frac{3}{3} = \frac{14}{3} > 0.$$

.

Теперь приведем уравнение

$$6x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 8 = 0$$

к нормальному виду. Имеем

$$\sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7,$$

следовательно, нормальный вид этого уравнения есть

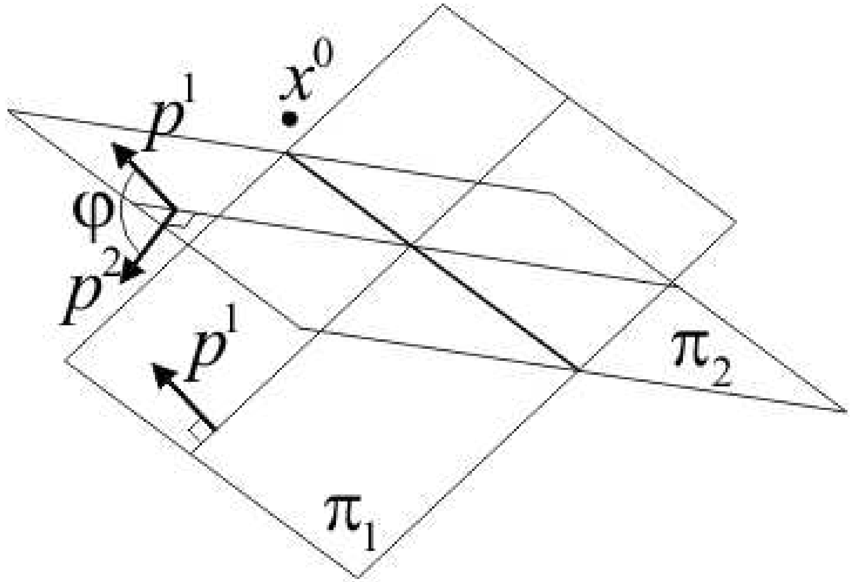
$$(p^2, x) - q_2 = 0, \quad p^2 = \frac{1}{7}(6, 2, -3), \quad q_2 = -\frac{8}{7}.$$

Вычислим отклонение точки

$$x^0 = (1, 1, 8)$$

от плоскости π_2:

$$\delta_2 = (p^2, x^0) - q_2 = \frac{1}{7}(6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 8) + \frac{8}{7} = -\frac{8}{7} < 0.$$



Итак

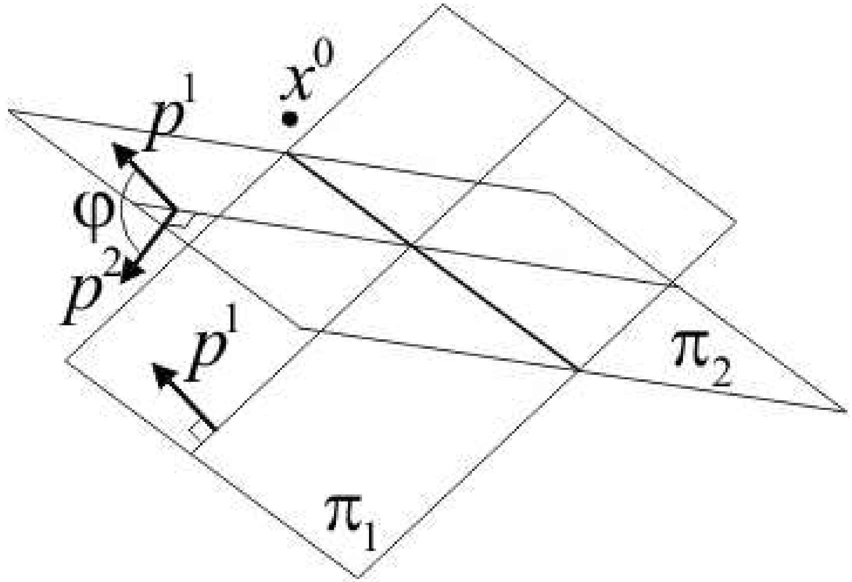
$$\delta_1 = (p^1, x^0) - q_1 > 0,$$

поэтому конец вектора p^1 и точка x^0 лежат <u>по одну сторону</u> от π_1,

$$\delta_2 = (p^2, x^0) - q_2 < 0,$$

поэтому конец вектора p^2 и точка x^0 лежат <u>по разные стороны</u> от π_2.

Следовательно, точка x^0 принадлежит углу φ.



Угол φ равен углу между векторами p^1, p^2. Используя формулу

$$\cos\varphi = p_1^1 p_1^2 + p_2^1 p_2^2 + p_3^1 p_3^2$$

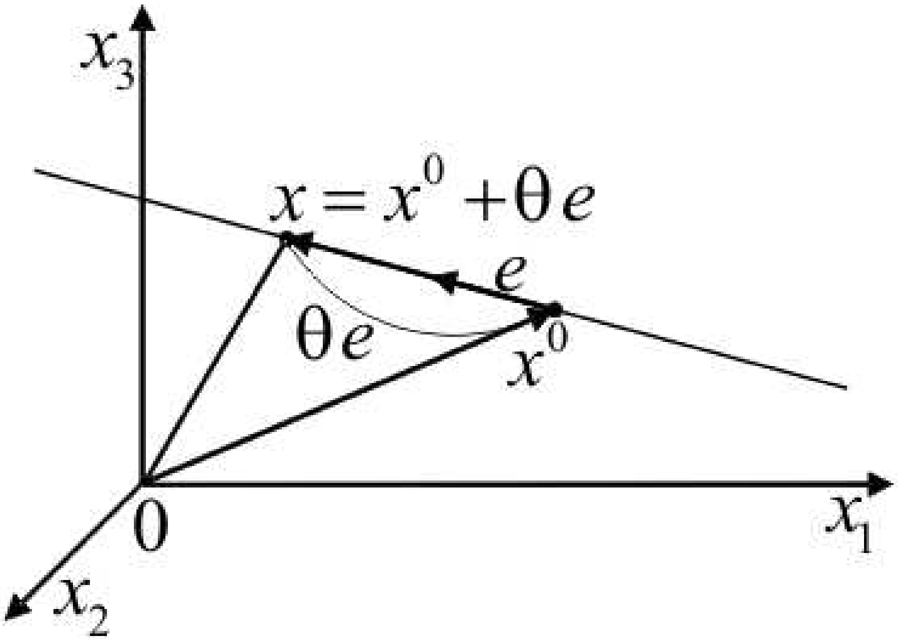
для единичных векторов

$$p^1 = \frac{1}{3}(2, -1, 2), \quad p^2 = \frac{1}{7}(6, 2, -3),$$

получим

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 6 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{4}{21}, \quad \varphi \approx 0.44\pi.$$

§9. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ



Уравнение

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

определяет ***прямую, проходящую через точку*** x^0 ***параллельно вектору*** $e = (e_1, e_2, e_3)$.

Запишем уравнение

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

в координатах:

$$x_1 - x_1^0 = \theta e_1,$$

$$x_2 - x_2^0 = \theta e_2,$$

$$x_3 - x_3^0 = \theta e_3.$$

Исключая из уравнений

$$x_1 - x_1^0 = \theta e_1,$$

$$x_2 - x_2^0 = \theta e_2,$$

$$x_3 - x_3^0 = \theta e_3$$

параметр θ, получим *канонические уравнения прямой*:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{e_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{e_2} = \frac{x_3 - x_3^0}{e_3}.$$

.

Множество всех точек x, координаты которых удовлетворяют уравнениям

$$\frac{x_1 - x_1^0}{e_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{e_2} = \frac{x_3 - x_3^0}{e_3},$$

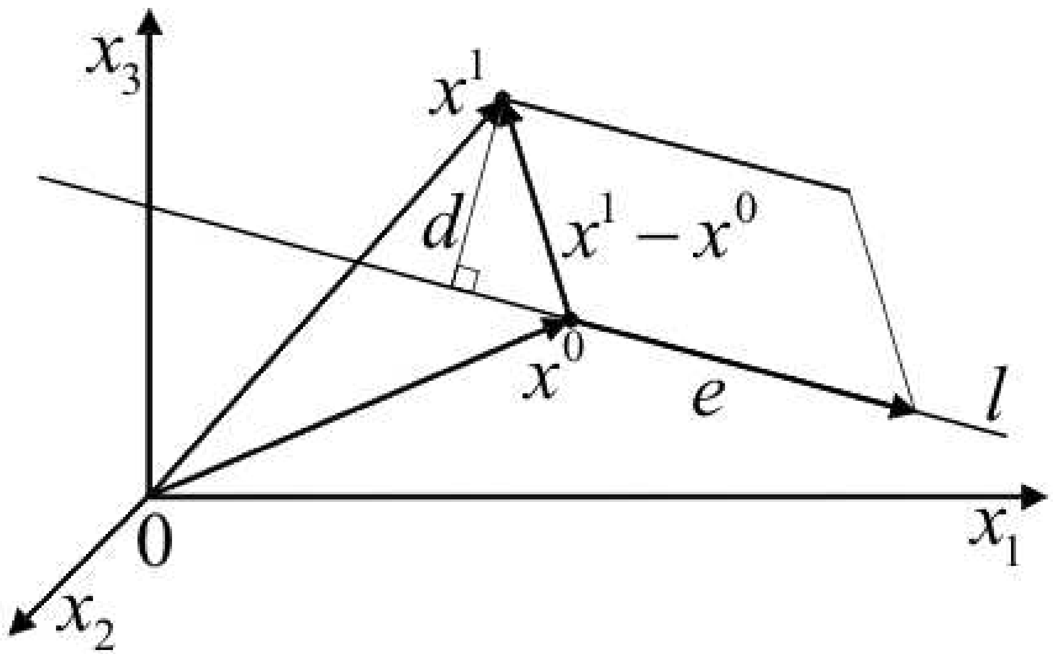
есть прямая, проходящая через точку x^0 параллельно вектору e.

<u>Упражнение.</u> Интерпретируйте случай, когда какой-либо знаменатель в уравнении

$$\frac{x_1 - x_1^0}{e_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{e_2} = \frac{x_3 - x_3^0}{e_3}$$

обращается в нуль.

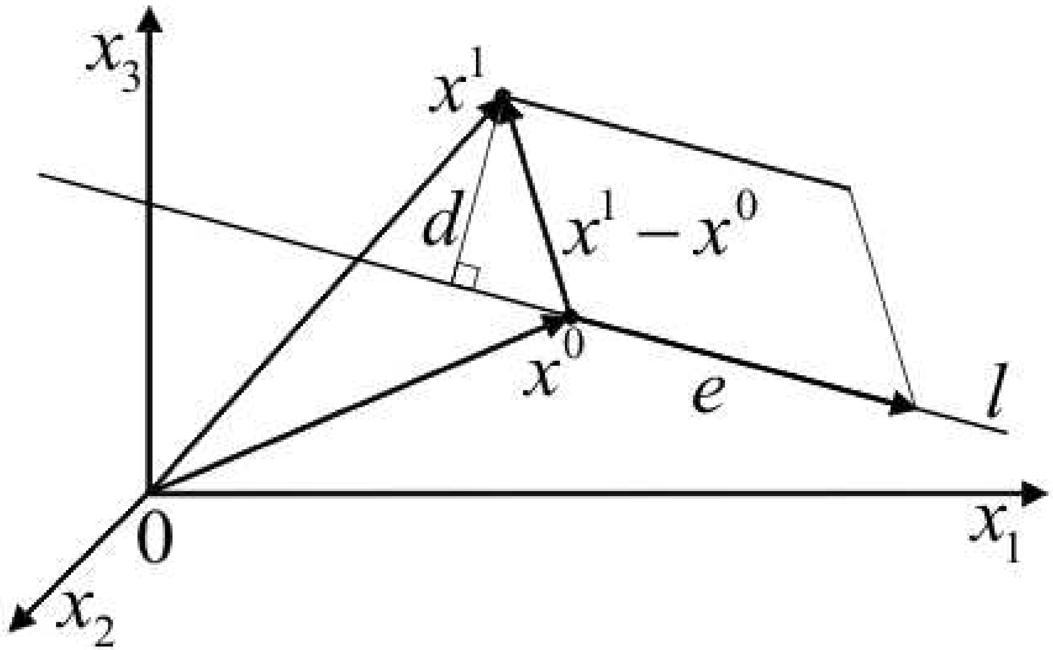
§10. ЗАДАЧИ О ВЗАИМНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ТОЧЕК, ПРЯМЫХ, ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ



1. Найти расстояние d от прямой l, заданной уравнением

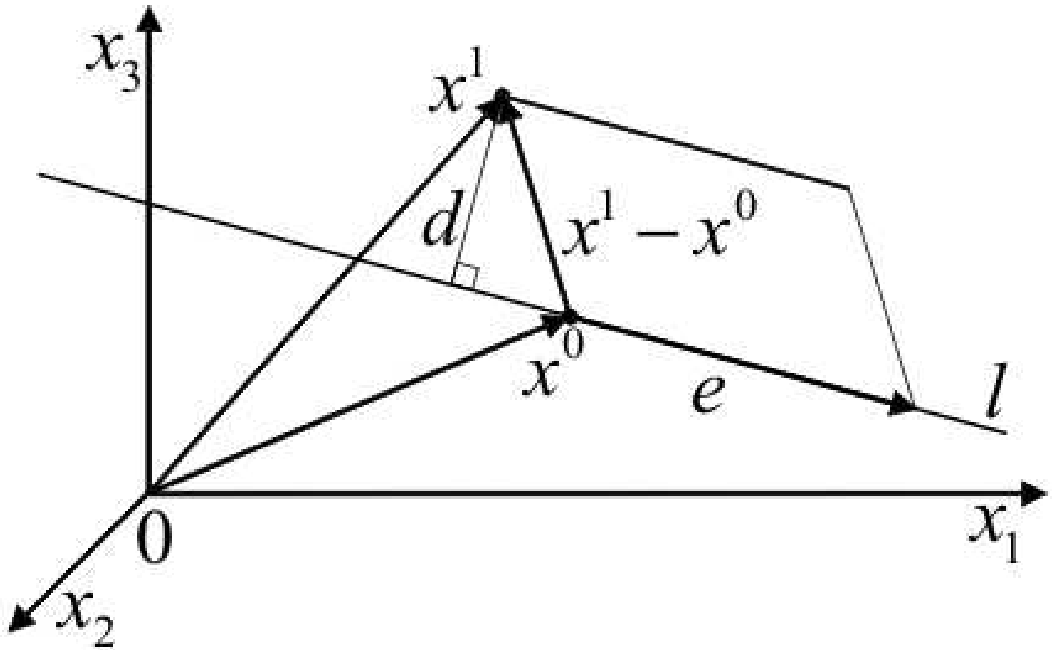
$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

до точки $x^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$.



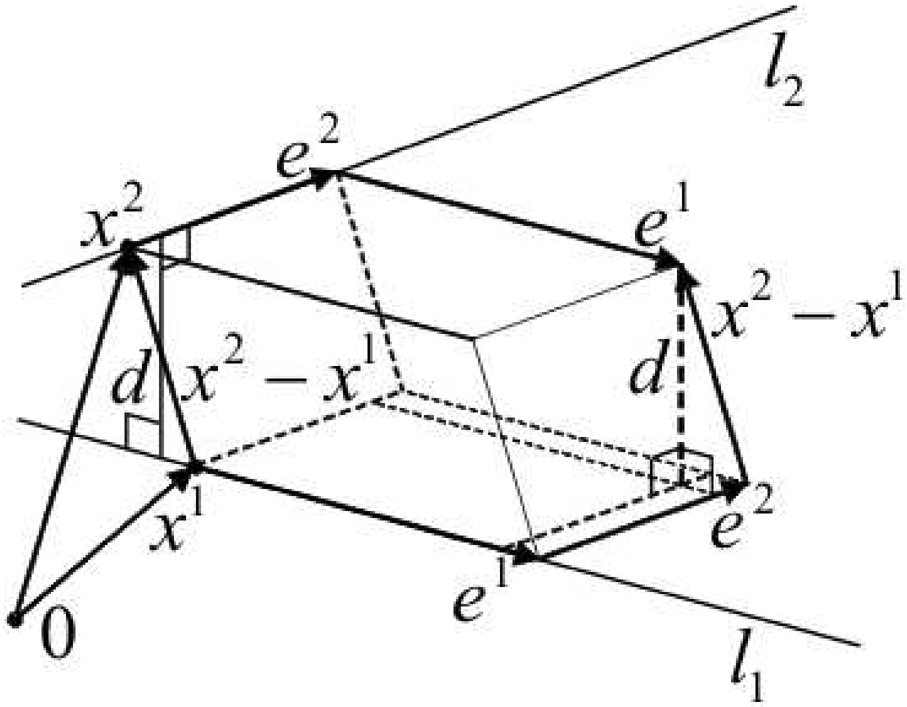
Искомым расстоянием является длина d перпендикуляра, опущенного из точки x^1 на прямую l.

.



Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах e и $x^1 - x^0$. Площадь этого параллелограмма равна $|[e, x^1 - x^0]|$, следовательно,

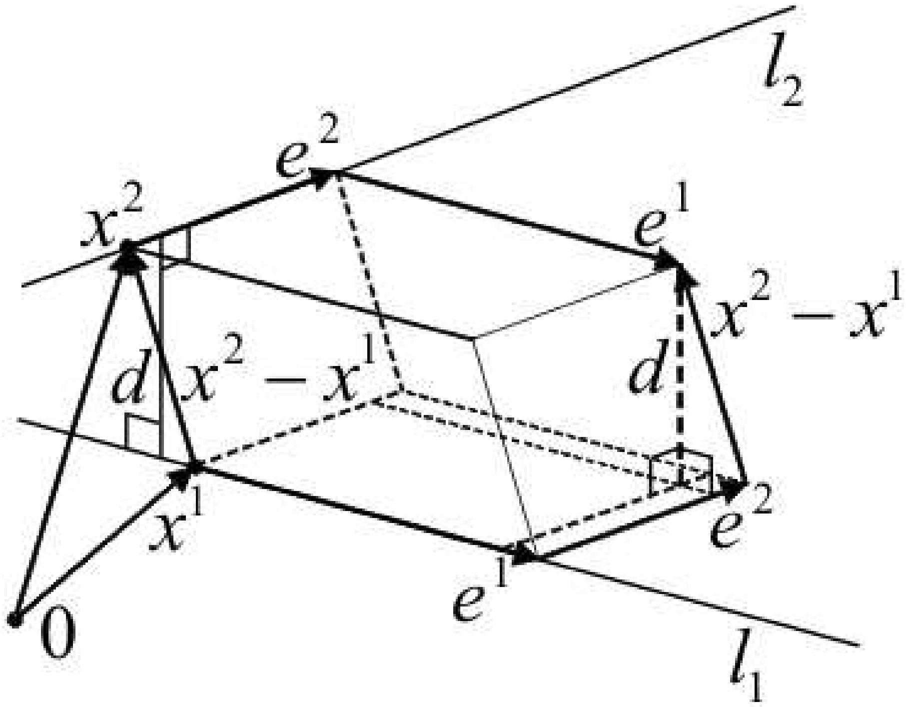
$$d = \frac{|[e, x^1 - x^0]|}{|e|}.$$



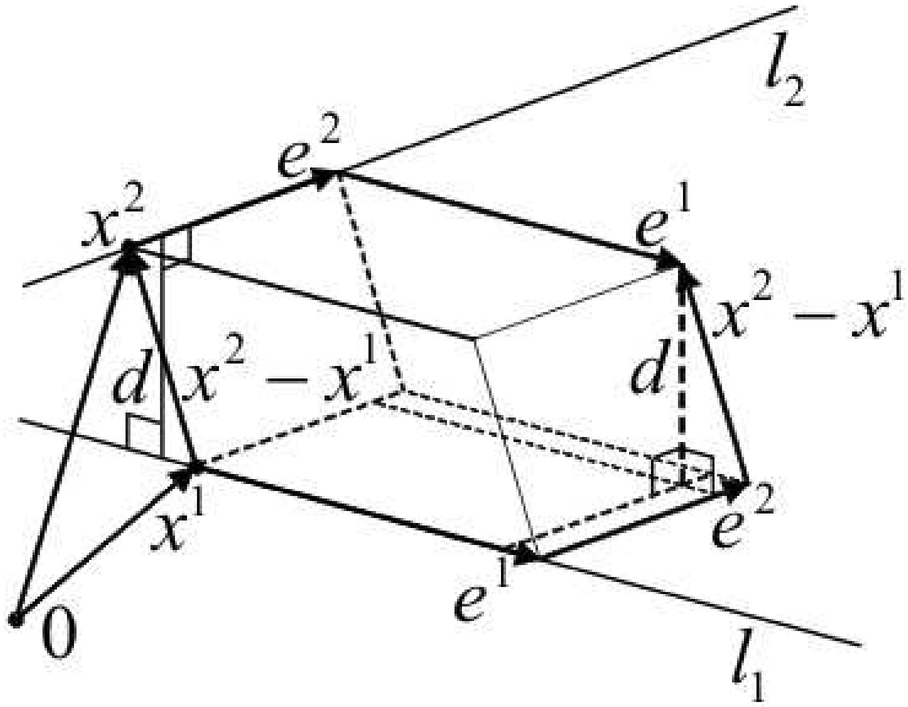
2. **Найти расстояние** d **между (не параллельными) прямыми** l_1 **и** l_2**, заданными уравнениями**

$$x = x^1 + \theta e^1, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

$$x = x^2 + \theta e^2, \quad -\infty < \theta < \infty.$$



Искомое расстояние, очевидно, есть длина d отрезка прямой. Этот отрезок ортогонален l_1 и l_2, концы его лежат на l_1 и l_2.



Построим параллелепипед на векторах e^1, e^2 и $x^2 - x^1$. Понятно, что d — высота этого параллелепипеда и, следовательно, d есть отношение объема к площади основания:

$$d = \frac{|(e^1, e^2, x^2 - x^1)|}{|[e^1, e^2]|}.$$

.

3. Найти угол φ между прямой

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

и плоскостью

$$(x, p) - q = 0.$$

.

Угол φ между прямой и плоскостью является дополнительным к углу ψ между направляющим вектором прямой e и нормальным вектором плоскости p, причем $|p| = 1$, следовательно,

$$\sin\varphi = \cos\psi = \cos(e,p) = \frac{(e,p)}{|e||p|} = \frac{e_1p_1 + e_2p_2 + e_3p_3}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}}.$$

.

4. Определить общие точки прямой l, заданной уравнением

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

и плоскости π, заданной уравнением

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0.$$

.

Подставим значения x_1, x_2, x_3 из

$$x_1 - x_1^0 = \theta e_1,$$

$$x_2 - x_2^0 = \theta e_2,$$

$$x_3 - x_3^0 = \theta e_3$$

в уравнение плоскости

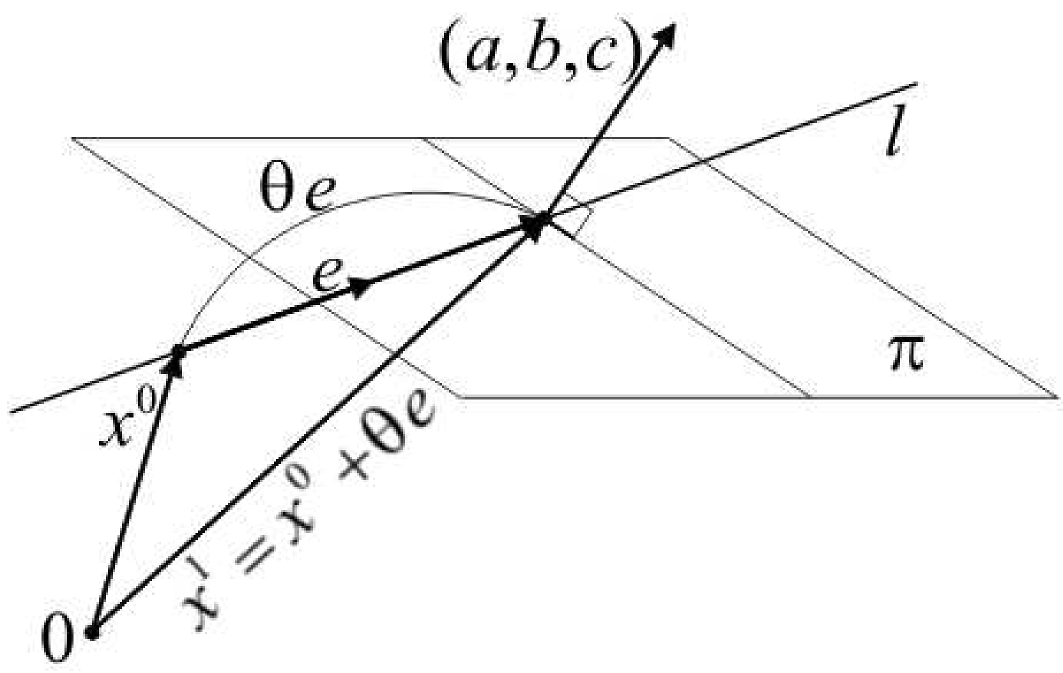
$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0.$$

Получим

$$ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d + \theta(ae_1 + be_2 + ce_3) = 0.$$

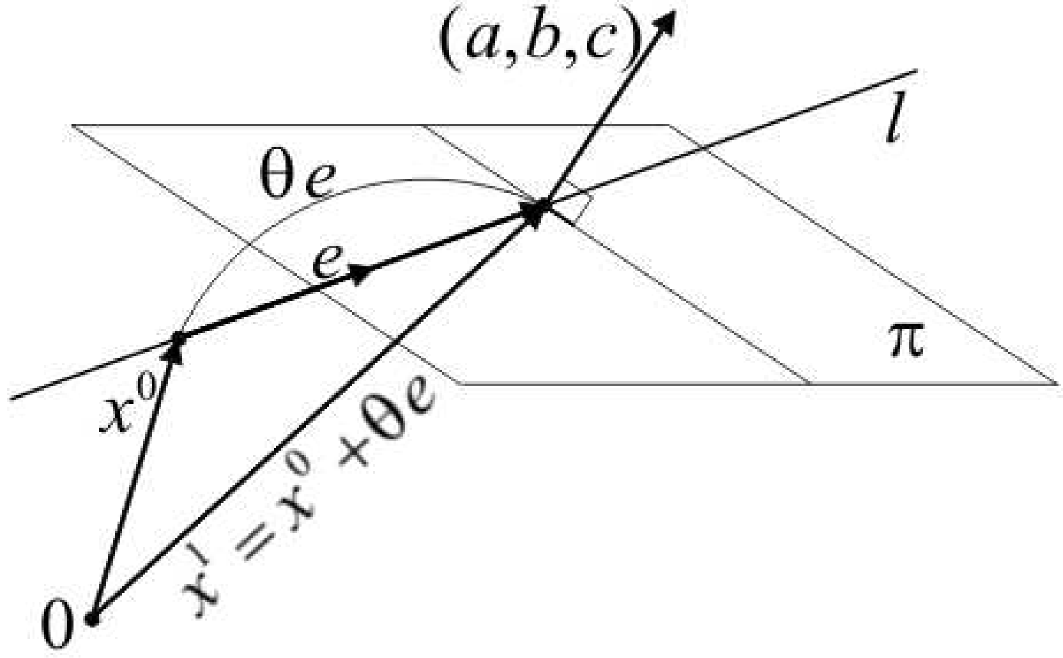
Возможны три случая.

.



1) $ae_1 + be_2 + ce_3 \neq 0.$

Это означает, что прямая l не параллельна плоскости π, т. к. вектор (a, b, c) не ортогонален e.



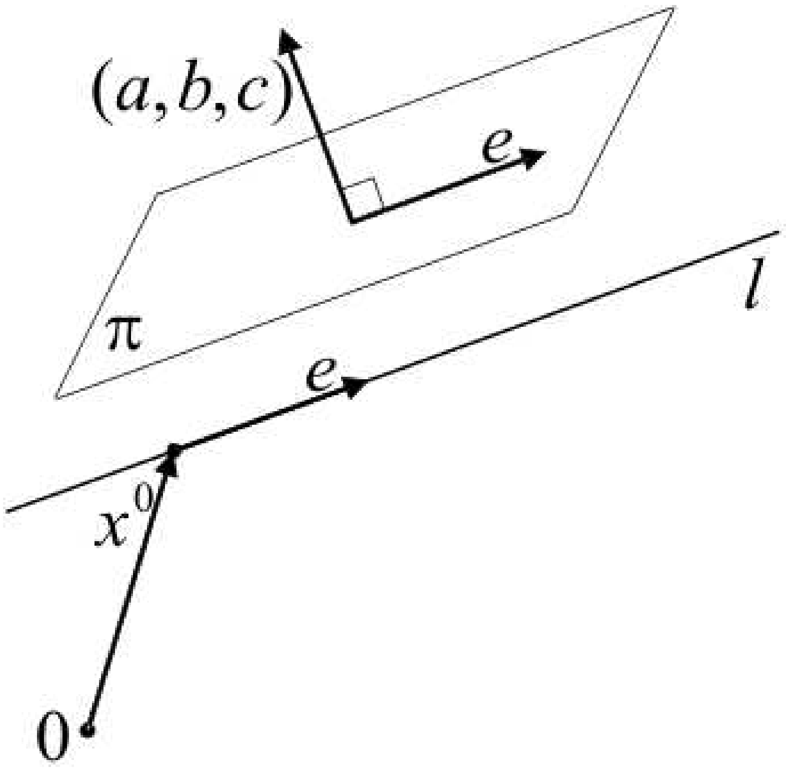
Из уравнения $ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d + \theta(ae_1 + be_2 + ce_3) = 0$ находим

$$\theta = -\frac{ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d}{ae_1 + be_2 + ce_3}.$$

Точка

$$x^1 = x^0 + \theta e$$

есть точка пересечения прямой l и плоскости π.

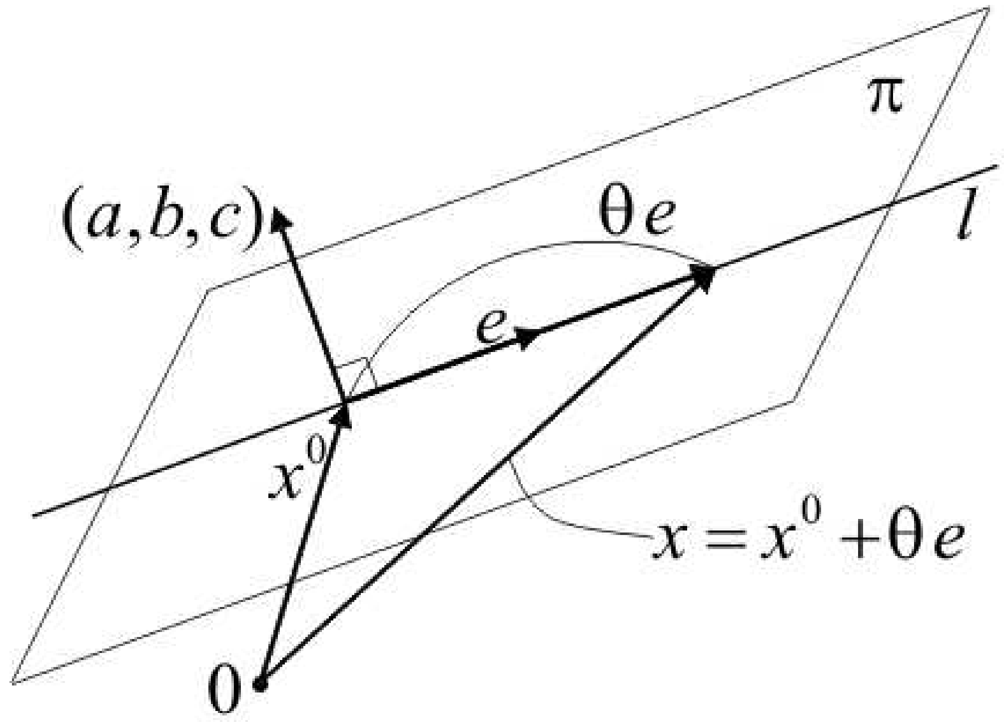


2) $\underline{ae_1 + be_2 + ce_3} = 0$, **но** $\underline{\underline{ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d}} \neq 0$.

Уравнение

$$\underline{\underline{ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d}} + \theta(\underline{ae_1 + be_2 + ce_3}) = 0$$

не имеет решений θ. **Прямая** l **проходит через точку** x^0, **не принадлежащую плоскости** π, **параллельно плоскости.**



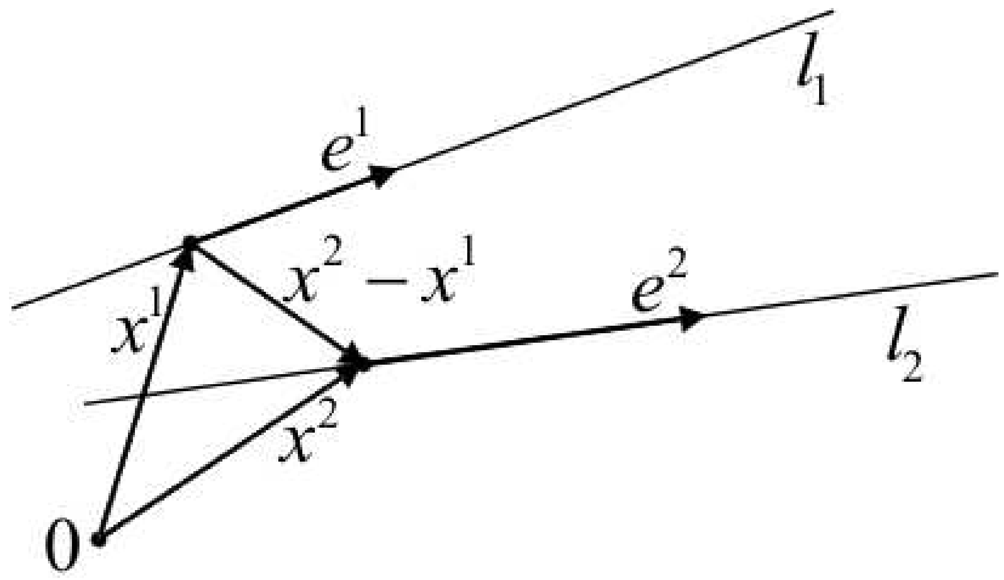
3) $\underline{ae_1 + be_2 + ce_3} = 0$ **и** $\underline{\underline{ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d}} = 0$.

Любое $\theta \in (-\infty, \infty)$ **есть решение уравнения**

$$\underline{\underline{ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d}} + \theta(\underline{ae_1 + be_2 + ce_3}) = 0.$$

Прямая l **лежит в плоскости** π.

.

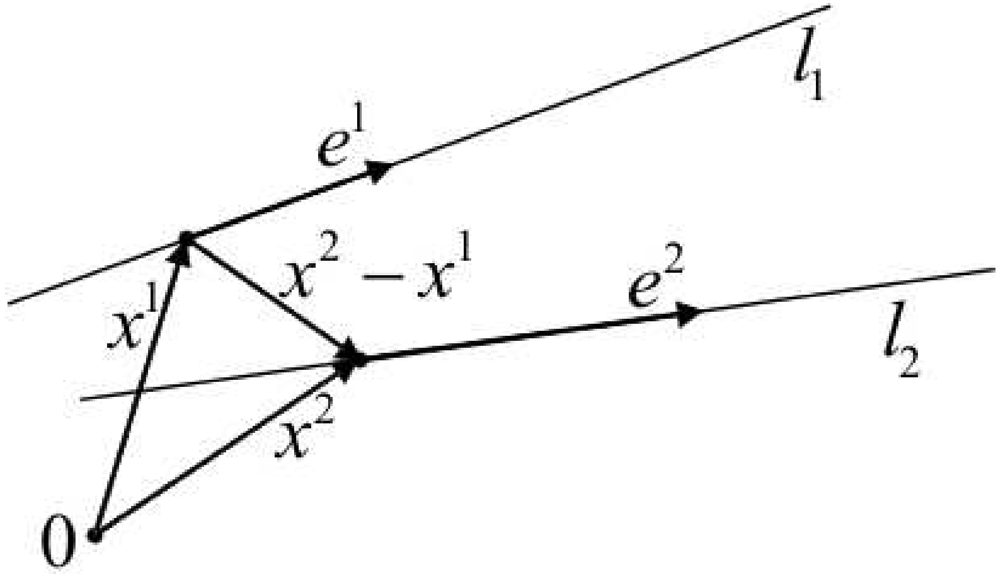


5. Выяснить условия, при которых две прямые l_1 и l_2, задаваемые уравнениями

$$x = x^1 + \theta e^1, \quad \theta \in (-\infty, \infty),$$

$$x = x^2 + \theta e^2, \quad \theta \in (-\infty, \infty),$$

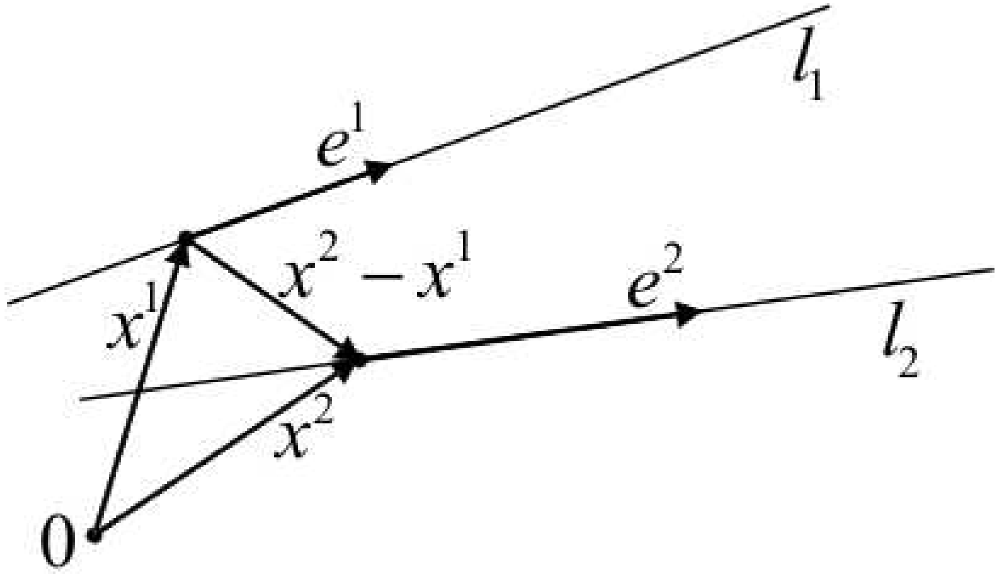
лежат в одной плоскости.



Если прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости, то векторы

$$x^2 - x^1, \quad e^1, \quad e^2$$

лежат в одной плоскости, иначе говоря, компланарны.

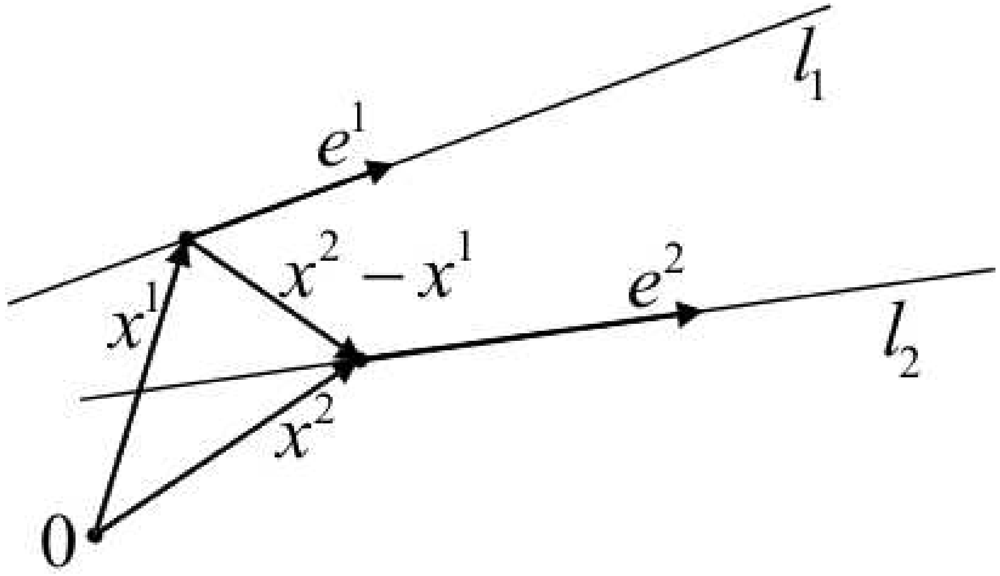


Обратно, если векторы

$$x^2 - x^1, \quad e^1, \quad e^2$$

компланарны, то прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости.

.



Для того чтобы векторы были компланарны необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю:

$$(x^2 - x^1, e^1, e^2) = 0.$$

.

6. Написать уравнение прямой l, являющейся пересечением двух различных и не параллельных плоскостей π_1, π_2, задаваемых уравнениями

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0,$$

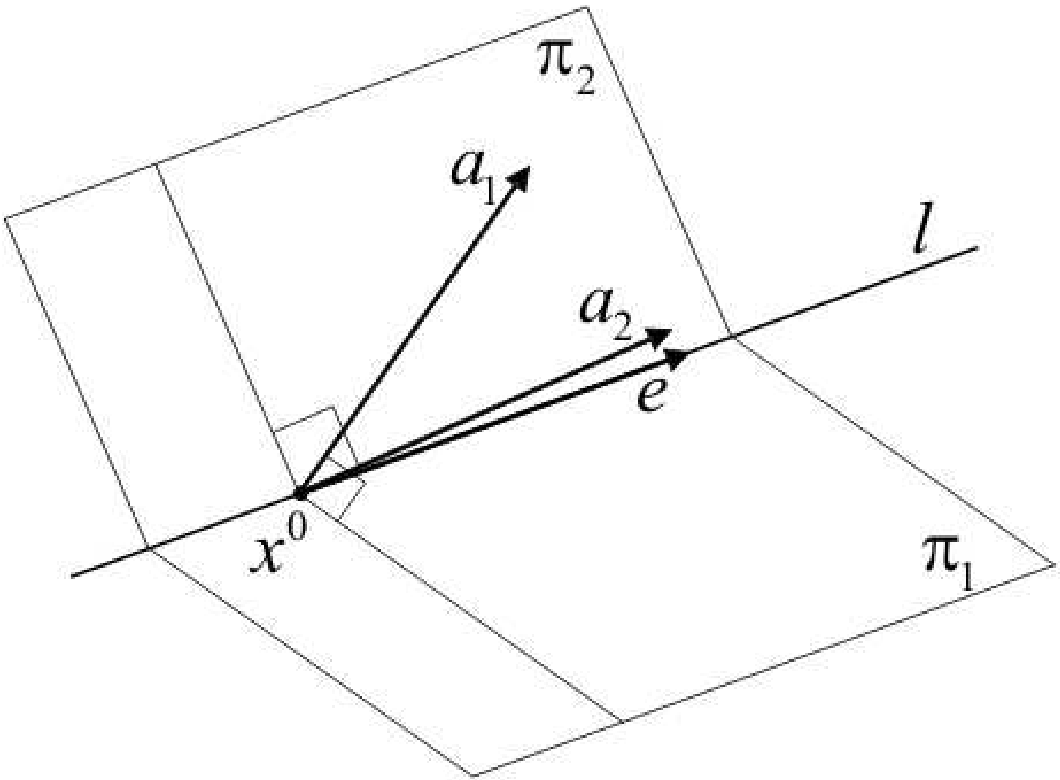
$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0.$$

.

Найдем сначала какую-либо точку, принадлежащую обеим плоскостям. Иными словами, надо найти какое-то решение x_1, x_2, x_3 системы уравнений

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0,$$

$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0.$$



Плоскости π_1 и π_2 не параллельны, т. е. нормальные к ним векторы

$$a^1 = (a_1, b_1, c_1) \quad \text{и} \quad a^2 = (a_2, b_2, c_2),$$

не коллинеарны. Значит не выполняется хотя бы одно из равенств

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Примем для определенности, что

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \quad \text{т. е.} \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0.$$

Положим $x_3 = 0$, тогда из

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + d_1 = 0,$$

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + d_2 = 0$$

получаем

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 = -d_1,$$

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 = -d_2.$$

.

Решая при $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ **систему**

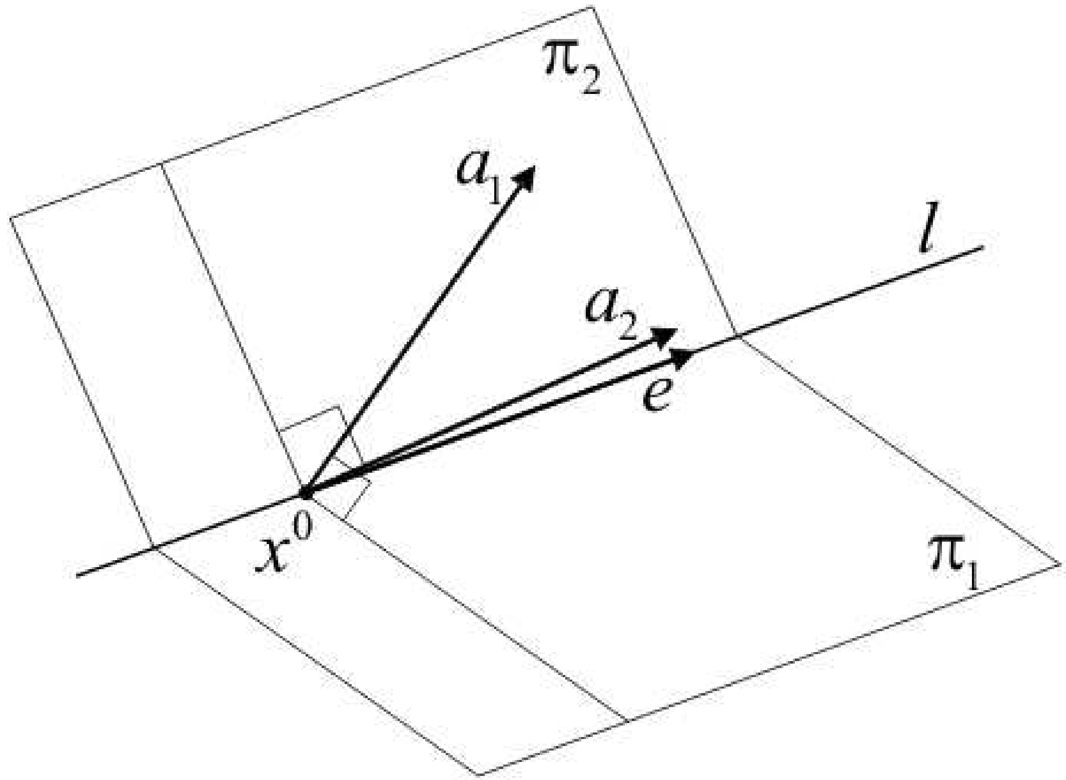
$$a_1x_1 + b_1x_2 = -d_1,$$

$$a_2x_1 + b_2x_2 = -d_2,$$

приходим к выводу, что точка

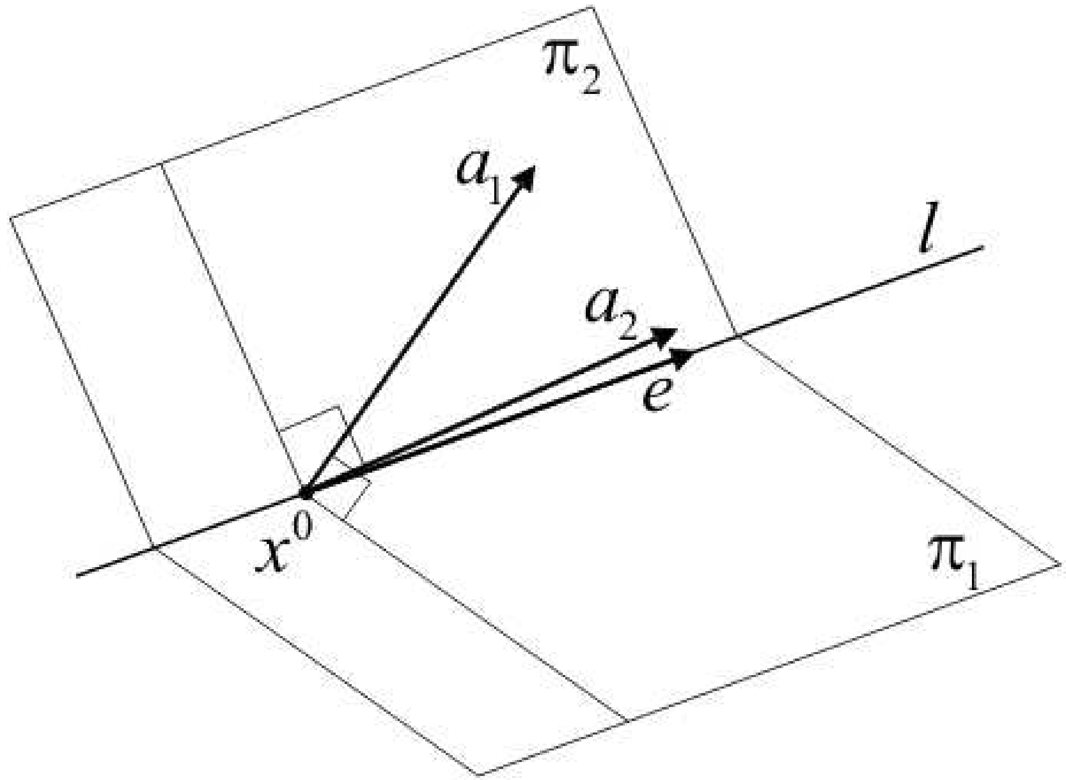
$$x^0 = \left(\frac{b_1d_2 - b_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ \frac{a_2d_1 - a_1d_2}{a_1b_2 - a_2b_1},\ 0\right)$$

принадлежит прямой l**, по которой пересекаются плоскости** π_1**,** π_2**.**



Направляющий вектор e прямой l ортогонален векторам a^1 и a^2, значит, можно взять его равным их векторному произведению

$$e = [a^1, a^2] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$



Таким образом, найдены точка x^0, принадлежащая прямой l и вектор e, параллельный этой прямой, следовательно уравнение прямой l можно записать в виде

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

.

<u>Пример.</u> Найдем уравнение прямой, по которой пересекаются плоскости π_1, π_2, определяемые уравнениями

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0,$$

$$6x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 8 = 0.$$

.

Положим $x_3 = 0$ в уравнениях

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0,$$

$$6x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 8 = 0.$$

Получим систему уравнений для отыскания первых двух координат точки, принадлежащей пересечению плоскостей π_1, π_2:

$$2x_1 - x_2 = 3,$$

$$6x_1 + 2x_2 = -8.$$

.

Решение системы

$$2x_1 - x_2 = 3,$$

$$6x_1 + 2x_2 = -8.$$

есть

$$x_1 = -\frac{1}{5}, \quad x_2 = -\frac{17}{5},$$

т. е. искомая точка

$$x^1 = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{17}{5}, 0\right).$$

Вектор, параллельный прямой, по которой пересекаются плоскости

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0,$$

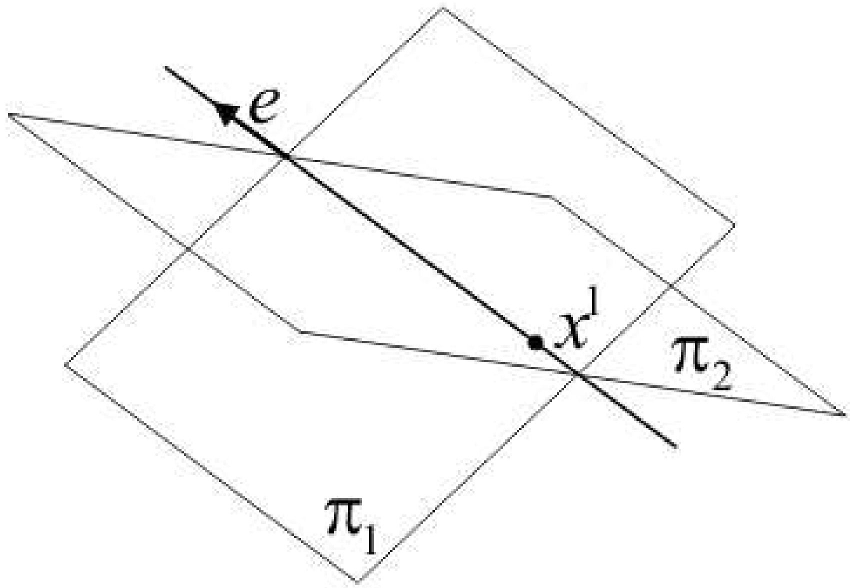
$$6x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 8 = 0,$$

определим по формуле

$$e = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -i^1 + 18i^2 + 10i^3,$$

или

$$e = (-1, 18, 10).$$



Множество точек искомой прямой описывается уравнением

$$x = x^1 + \theta e = (-1/5, -17/5, 0) + \theta(-1, 18, 10), \quad \theta \in (-\infty, \infty).$$

Более подробно,

$$x_1 = -1/5 - \theta, \quad x_2 = -17/5 + 18\theta, \quad x_3 = 10\theta, \quad \theta \in (-\infty, \infty).$$