А. Н. Абызов, А. А. Туганбаев, Д. Т. Тапкин, Ч. К. Куинь, Прямо проективные модули, прямо инъективные модули и их обобщения, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 164, 125–139

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 164 (2019). С. 125–139

УДК 512.553

ПРЯМО ПРОЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ, ПРЯМО ИНЪЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

© 2019 г. А. Н. АБЫЗОВ, А. А. ТУГАНБАЕВ, Д. Т. ТАПКИН, Ч. К. КУИНЬ

Аннотация. Работа содержит как новые, так и ранее известные результаты о модулях, близких к прямо проективным и прямо инъективным. Основные результаты приведены с доказательствами.

Ключевые слова: прямо инъективный модуль, прямо проективный модуль, просто прямо инъективный модуль, просто прямо проективный модуль, SSP-модуль, SIP-модуль, кольцо формальных матриц.

DIRECT PROJECTIVE MODULES, DIRECT INJECTIVE MODULES, AND THEIR GENERALIZATIONS

© 2019 A. N. ABYZOV, A. A. TUGANBAEV, D. T. TAPKIN, QUYNH TRUONG CONG

Abstract. This paper contains new and previously known results on modules that are close to direct projective and direct injective modules. The main results are presented with proofs.

Keywords and phrases: direct injective module, direct projective module, simple-direct-injective module, simple-direct-projective module, SSP-module, SIP-module, ring of formal matrices.

AMS Subject Classification: 16D10

СОДЕРЖАНИЕ

Работа А. Н. Абызова и Д. Т. Тапкина выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Республики Татарстан (проект № 18-41-160024).

Работа А. А. Туганбаева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10013).

ISSN 0233–6723

1. Введение

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули — унитарными.

В работе [20] о непрерывных кольцах Утуми рассмотрел три условия для колец, которым удовлетворяют самоинъективные кольца. Эти условия были обобщены на модули в [12, 16, 19]. Модуль M называется $C1$-*модулем* (или CS-*модулем*), если каждый подмодуль модуля M является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом M. Модуль M называется C2-*модулем*, если каждый подмодуль модуля M, изоморфный некоторому прямому слагаемому модуля M, сам является прямым слагаемым модуля M. В [14] Никольсон назвал C2-модули прямо инъективными. Модуль M называется C3-*модулем,* если для каждых прямых слагаемых M_1 и M_2 модуля M, для которых выполнено условие $M_1 \cap M_2 = 0$, сумма $M_1 + M_2$ является прямым слагаемым модуля M.

Модуль M называется *прямо проективным* (или D2-*модулем*), если каждый подмодуль модуля M, фактор-модуль по которому изоморфен некоторому прямому слагаемому модуля M, сам является прямым слагаемым модуля M. Модуль M называется D3-*модулем,* если для каждых прямых слагаемых M_1 и M_2 модуля M, для которых выполнено условие $M_1 + M_2 = M$, пересечение $M_1 \cap M_2$ является прямым слагаемым модуля M. Прямо проективные модули был введены Никольсоном в [14]. Понятие D3-модуля было введено в [8].

Важными частными случаями понятий C3-модуля и D3-модуля являются соответственно понятия SSP-модуля и SIP-модуля. Модуль M называется SSP-*модулем*, если сумма двух прямых слагаемых модуля M является прямым слагаемым модуля M. Модуль M называется SIP-*модулем*, если пересечение двух прямых слагаемых модуля M является прямым слагаемым модуля M.

Тот факт, что N является подмодулем (соответственно, прямым слагаемым) модуля M будем обозначать через $N \leqslant M$ (соответственно, $N \leqslant^{\oplus} M$). Радикал Джекобсона правого R-модуля M обозначается через $J(M)$.

В работе используются стандартные понятия и факты теории колец и модулей (см., например, [3, 9, 22]).

2. D3- и C3-модули

Теорема 1. *Для правого R-модуля M следующие условия эквивалентны*:

(1) *M является* C3-*модулем*;

(2) *если $A, B \leqslant^{\oplus} M$ и $A \cap B = 0$, то $M = A_1 \oplus B = A \oplus B_1$, где $A \leqslant A_1$, $B \leqslant B_1$*;

(3) *если $A, B \leqslant^{\oplus} M$ и $A \cap B \leqslant^{\oplus} M$, то $A + B \leqslant^{\oplus} M$*;

(4) *если $A, B \leqslant^{\oplus} M$, $A \cap B = 0$, то для любого гомоморфизма $f : A \oplus B \to M$ существует гомоморфизм $\varphi : M \to M$, для которого коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} A \oplus B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, "\varphi"'] \\ M & \end{tikzcd}$$

где $i : A \oplus B \to M$ — вложение;

(5) *если для идемпотентов $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{End}(M)$ выполнено условие $\mathrm{Ker}(\pi_1\pi_2) \leqslant^{\oplus} M$, то выполнено также и условие $\mathrm{Im}(\pi_1\pi_2) \leqslant^{\oplus} M$.*

Доказательство. Эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) проверяются непосредственно (см. [6, предложение 2.2]). Импликация (1) $\Rightarrow$ (4) очевидна.

(4) $\Rightarrow$ (1). Пусть $M = A \oplus A' = B \oplus B'$, $A \cap B = 0$, $\pi_1 : A \oplus B \to A$, $\pi : A \oplus A' \to A$ — естественные проекции, а $i_A : A \to M$, $i_{A\oplus B} : A \oplus B \to M$ — вложения. По предположению существует такой гомоморфизм $\varphi : M \to M$, что $\varphi i_{A\oplus B} = i_A \pi_1$. Тогда $\pi\varphi i_A = 1_A$, и, следовательно, $\mathrm{Im}(i_A) \oplus \mathrm{Ker}(\pi\varphi) = M$. А так как $B \leqslant \mathrm{Ker}(\pi\varphi)$, то $A \oplus B \leqslant^{\oplus} A \oplus \mathrm{Ker}(\pi\varphi) = M$.

(1) $\Rightarrow$ (5). Пусть $M = \mathrm{Ker}(\pi_1) \oplus \mathrm{Im}(\pi_1) = \mathrm{Ker}(\pi_2) \oplus \mathrm{Im}(\pi_2)$. Согласно [1, lemma 2.2] должно выполняться равенство

$$\mathrm{Ker}(\pi_1\pi_2) = \mathrm{Ker}(\pi_1) \cap \mathrm{Im}(\pi_2) + \mathrm{Ker}(\pi_2) \leqslant^{\oplus} M.$$

Следовательно, $\mathrm{Ker}(\pi_1) \cap \mathrm{Im}(\pi_2) \leqslant^{\oplus} M$, и для некоторого подмодуля N получаем разложение в прямую сумму $\mathrm{Ker}(\pi_1) \cap \mathrm{Im}(\pi_2) \oplus N = \mathrm{Ker}(\pi_1)$. По предположению $N \oplus \mathrm{Im}(\pi_2) \leqslant^{\oplus} M$. Так как $\mathrm{Ker}(\pi_1) \leqslant N \oplus \mathrm{Im}(\pi_2)$, то

$$N \oplus \mathrm{Im}(\pi_2) = \mathrm{Ker}(\pi_1) \oplus (N \oplus \mathrm{Im}(\pi_2)) \cap \mathrm{Im}(\pi_1) = \mathrm{Ker}(\pi_1) \oplus (\mathrm{Ker}(\pi_1) + \mathrm{Im}(\pi_2)) \cap \mathrm{Im}(\pi_1).$$

Таким образом, $\mathrm{Im}(\pi_1\pi_2) = (\mathrm{Ker}(\pi_1) + \mathrm{Im}(\pi_2)) \cap \mathrm{Im}(\pi_1) \leqslant^{\oplus} M$.

(5) $\Rightarrow$ (1). Пусть $M = A \oplus A' = B \oplus B'$, $A \cap B = 0$. Рассмотрим проекции $\pi_1 : A \oplus A' \to A$, $\pi_2 : B \oplus B' \to B'$. Из [1, Lemma 2.2] следует, что $\mathrm{Ker}(\pi_2\pi_1) = A' \leqslant^{\oplus} M$. Тогда прямым слагаемым в M является и $\mathrm{Im}(\pi_2\pi_1) = (A + B) \cap B'$. В частности, $(A + B) \cap B' \leqslant^{\oplus} B'$. А тогда из равенства $A + B = B \oplus (A + B) \cap B'$ получаем, что $A + B \leqslant^{\oplus} M$. □

Для D3-модулей имеет место утверждение, двойственное предыдущей теореме.

Теорема 2. *Для правого R-модуля M следующие условия эквивалентны*:

(1) *M является* D3*-модулем*;

(2) *если $A, B \leqslant^{\oplus} M$ и $M = A + B$, то $M = A_1 \oplus B = A \oplus B_1$, где $A_1 \leqslant A$, $B_1 \leqslant B$*;

(3) *если $A, B \leqslant^{\oplus} M$ и $A + B \leqslant^{\oplus} M$, то $A \cap B \leqslant^{\oplus} M$*;

(4) *если $A, B \leqslant^{\oplus} M$, $A+B = M$, то для любого гомоморфизма $f : M \to M/(A\cap B)$ существует гомоморфизм $\psi : M \to M$, для которого коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "e"'] & M/(A \cap B) \end{tikzcd}$$

где $e : M \to M/(A \cap B)$ — естественный эпиморфизм;

(5) *если для идемпотентов $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{End}(M)$ выполнено условие $\mathrm{Im}(\pi_1\pi_2) \leqslant^{\oplus} M$, то выполняется также условие $\mathrm{Ker}(\pi_1\pi_2) \leqslant^{\oplus} M$.*

Доказательство. Эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) проверяются непосредственно с помощью [21, предложение 3]. Импликация (1) $\Rightarrow$ (4) очевидна.

(4) $\Rightarrow$ (1). Пусть $M = A \oplus A' = B \oplus B'$, $A + B = M$, $\pi_1 : A \oplus B \to A$ — проекция и $e : M \to M/(A \cap B)$ — естественный эпиморфизм. Зададим отображение $f : M \to M/(A \cap B)$ по правилу $f(a + b) = a + A \cap B$ для всех $a \in A$, $b \in B$. Несложно заметить, что это корректно определенный гомоморфизм. В силу предположения существует такой гомоморфизм $\psi : M \to M$, что $e\psi = f$. Так как $\mathrm{Ker}(f) = B$, то

$$e\psi(B') = f(B') = f(B \oplus B') = f(M) = A/(A \cap B).$$

Таким образом, $\psi(B') + (A \cap B) = A$. Покажем, что $\psi(B') \cap (A \cap B) = 0$. Допустим, что $x \in \psi(B') \cap (A \cap B)$. Тогда для некоторого $b \in B'$ имеют место равенства $0 = ex = f(b')$. Но тогда $b' \in B \cap B'$, а значит $b' = 0$. Таким образом, получаем разложение $A = \psi(B') \oplus (A \cap B)$ и, следовательно, $(A \cap B) \leqslant^{\oplus} M$.

(1) $\Rightarrow$ (5) Пусть $M = \mathrm{Ker}(\pi_1) \oplus \mathrm{Im}(\pi_1) = \mathrm{Ker}(\pi_2) \oplus \mathrm{Im}(\pi_2)$. Согласно [1, Lemma 2.2] должно выполняться равенство

$$\mathrm{Im}(\pi_1\pi_2) = (\mathrm{Im}(\pi_2) + \mathrm{Ker}(\pi_1)) \cap \mathrm{Im}(\pi_1) \leqslant^{\oplus} M.$$

Тогда для некоторого подмодуля $N \leqslant M$ получаем разложение

$$\mathrm{Im}(\pi_1) = N \oplus (\mathrm{Im}(\pi_2) + \mathrm{Ker}(\pi_1)) \cap \mathrm{Im}(\pi_1).$$

Следовательно, выполняется равенство $N + \mathrm{Ker}(\pi_1) + \mathrm{Im}(\pi_2) = M$. В силу условия (D3) прямым слагаемым M также является и подмодуль $(N + \mathrm{Ker}(\pi_1)) \cap \mathrm{Im}(\pi_2) = \mathrm{Ker}(\pi_1) \cap \mathrm{Im}(\pi_2)$. Таким образом, в силу [1, Lemma 2.2] имеем

$$\mathrm{Ker}(\pi_1\pi_2) = \mathrm{Ker}(\pi_1) \cap \mathrm{Im}(\pi_2) + \mathrm{Ker}(\pi_2) \leqslant^{\oplus} M.$$

(5) $\Rightarrow$ (1). Пусть $M = A \oplus A' = B \oplus B'$, $A + B = M$. Рассмотрим проекции $\pi_1 : A \oplus A' \to A$, $\pi_2 : B \oplus B' \to B'$. Из [1, Lemma 2.2] следует, что $\mathrm{Im}(\pi_2\pi_1) = B' \leqslant^{\oplus} M$. Тогда прямым слагаемым в M является и $\mathrm{Ker}(\pi_2\pi_1) = A \cap B + A'$. Следовательно, $A \cap B \leqslant^{\oplus} M$. □

Предложение 3. *Следующие условия эквивалентны для модуля* M:

(1) M *является* SSP-*модулем*;
(2) *для любого разложения* $M = A \oplus B$ *и для любого гомоморфизма* $f : A \to B$, $\mathrm{Im}(f)$ *является прямым слагаемым модуля* M;
(3) *для любого расщепляющего мономорфизма* $f : A \to M$ *такого, что* A *— прямое слагаемое модуля* M, $A + f(A)$ *является прямым слагаемым модуля* M;
(4) *для любого расщепляющего эпиморфизма* $f : M \to M/A$ *такого, что* A *— прямое слагаемое модуля* M, $A + \mathrm{Ker}(f)$ *является прямым слагаемым модуля* M.

Доказательство. Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) следует из [10, теорема 2.3]. Импликации (1) $\Rightarrow$ (3), (4) очевидны.

(3) $\Rightarrow$ (1) Предположим, что $M = A_1 \oplus A_2$ и $f : A_1 \to A_2$ — R-гомоморфизм. Пусть $T := \{a_1 + f(a_1) \mid a_1 \in A_1\}$ — подмодуль модуля M. Тогда $M = T \oplus A_2$. Рассмотрим такой гомоморфизм $\psi : A_1 \to M$, что $\psi(x) = x + f(x)$. Легко видеть, что ψ — расщепляющий мономорфизм. Из предположения следует, что $A_1 + \psi(A_1) = A_1 + T$ — прямое слагаемое модуля M. Так как $A_1 + T = A_1 \oplus \mathrm{Im}(f)$, то $\mathrm{Im}(f)$ — прямое слагаемое модуля A_2. Тогда согласно (2) $\Rightarrow$ (1) заключаем, что M — SSP-модуль.

(4) $\Rightarrow$ (1) Предположим, что $M = A_1 \oplus A_2$ и $f : A_1 \to A_2$ — R-гомоморфизм. Пусть $T := \{a_1 + f(a_1) \mid a_1 \in A_1\}$ — подмодуль модуля M. Тогда $M = T \oplus A_2$. Рассмотрим такой гомоморфизм $\psi : M \to M/T$, что $\psi(a_1 + a_2) = a_2 + T$ для всех $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$. Очевидно, ψ — расщепляющий эпиморфизм, и $\mathrm{Ker}(\psi) = A_1$. Из предположения следует, что $A_1 + T$ — прямое слагаемое модуля M. Так как $A_1 + T = A_1 \oplus \mathrm{Im}(f)$, то $\mathrm{Im}(f)$ — прямое слагаемое модуля A_2. Тогда согласно (2) $\Rightarrow$ (1) заключаем, что M является SSP-модулем. □

Следствие 4. *Следующие условия эквивалентны для модуля* M:

(1) M *является* SSP-*модулем*;
(2) *для любых двух прямых слагаемых* A_1 *и* A_2 *модуля* M, *удовлетворяющих условию* $A_1 \simeq A_2$, *сумма* $A_1 + A_2$ *является прямым слагаемым модуля* M.

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству предложения 3.

Предложение 5. *Следующие условия эквивалентны для модуля* M:

(1) M *является* SIP-*модулем*;
(2) *для любого разложения* $M = A \oplus B$ *и для любого гомоморфизма* $f : A \to B$, $\mathrm{Ker}(f)$ *является прямым слагаемым модуля* M;
(3) *для любого расщепляющего мономорфизма* $f : A \to M$ *такого, что* A *— прямое слагаемое модуля* M, $A \cap f(A)$ *является прямым слагаемым модуля* M;
(4) *для любого расщепляющего эпиморфизма* $f : M \to M/A$ *такого, что* A *— прямое слагаемое модуля* M, $A \cap \mathrm{Ker}(f)$ *является прямым слагаемым модуля* M.

Следствие 6. *Следующие условия эквивалентны для модуля* M:

(1) M *является* SIP-*модулем;*
(2) *для любых таких двух прямых слагаемых* A_1 *и* A_2 *модуля* M, *что* $A_1 \simeq A_2$, *пересечение* $A_1 \cap A_2$ *является прямым слагаемым модуля* M.

Пусть R — кольцо и Ω — некоторый класс правых R-модулей, который замкнут относительно изоморфизмов и прямых слагаемых. Гомоморфизм $g : M \to E$ правых R-модулей называется Ω-*оболочкой* правого R-модуля M, если $E \in \Omega$ и любая диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g'"'] & E \\ E' & \end{tikzcd}$$

где $E' \in \Omega$, может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g'"'] & E \arrow[dl, "h"] \\ E' & \end{tikzcd}$$

и если диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & E \arrow[dl, "h"] \\ E & \end{tikzcd}$$

коммутативна, то h — автоморфизм.

Гомоморфизм $g : E \to M$ правых R-модулей называется *Ω-накрытием* правого R-модуля M, если $E \in \Omega$ и любая диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] & M \\ & E' \arrow[u, "g'"'] \end{tikzcd}$$

где $E' \in \Omega$, может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] & M \\ & E' \arrow[u, "g'"'] \arrow[ul, dotted, "h"] \end{tikzcd}$$

и если диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] & M \\ & E \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dotted, "h"] \end{tikzcd}$$

коммутативна, то h — автоморфизм.

Предложение 7. *Следующие условия эквивалентны для кольца R:*
(1) *R — классически полупростое кольцо;*
(2) *каждый правый R-модуль имеет* D3*-накрытие;*
(3) *каждый* 2*-порожденный правый R-модуль имеет* D3*-накрытие;*
(4) *каждый правый R-модуль имеет* D3*-оболочку;*
(5) *каждый* 2*-порожденный правый R-модуль имеет* D3*-оболочку.*

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) очевидны.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть S — простой правый R-модуль. Пусть $\varphi : R_R \to S$ — эпиморфизм. Согласно (3), $M = R_R \oplus S$ имеет D3-накрытие. Рассмотрим гомоморфизм $\alpha : C \to M$, где C — D3-модуль, который является D3-накрытием модуля M. Пусть $\iota_1 : S \to M$ и $\iota_2 : R_R \to M$ — включения для всех $i = 1, 2$. Заметим, что S и R_R — D3-модули, и существуют такие гомоморфизмы $\beta_1 : S \to C, \beta_2 : R_R \to C$, что $\alpha\beta_i = \iota_i$. Ясно, что $\mathrm{id}_M = \iota_1 \oplus \iota_2 = \alpha(\beta_1 \oplus \beta_2)$. Из этого следует, что M изоморфен прямому слагаемому в C; следовательно, M — D3-модуль. Тогда $\mathrm{Ker}(\varphi)$ — прямое слагаемое модуля R_R, согласно [21, предложение 4]. Таким образом, S — проективный модуль. Следовательно, R — полупростое кольцо.

Импликации (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) очевидны.

(5) $\Rightarrow$ (1). Пусть S — простой правый R-модуль. Пусть $\varphi : R_R \to S$ — эпиморфизм. Согласно (5), $M = R_R \oplus S$ имеет D3-оболочку $\iota : M \to E$, где E — D3-модуль. Поскольку S и R — D3-модули, существуют такие гомоморфизмы $f_1 : E \to S$, $f_2 : E \to R$, что $f_i\iota = \pi_i$, где $\pi_1 : M \to S$ и $\pi_2 : M \to R$ — естественные проекции. Существует такой $\phi : E \to M$, что $\pi_i\phi = f_i$ для всех $i = 1, 2$. Тогда $\phi\iota = \mathrm{id}_M$; следовательно, ι — расщепляющий мономорфизм. Таким образом, M изоморфен

прямому слагаемому в E. Значит, $S \oplus R$ — также D3-модуль. Мы заключаем, что $\operatorname{Ker}(\varphi)$ — прямое слагаемое в R_R. Тогда S — проективный модуль. Таким образом, R — классически полупростое кольцо. □

Следствие 8. *Следующие условия эквивалентны для кольца R:*

(1) *R — классически полупростое кольцо;*
(2) *R_R является* SIP-*модулем и каждый R-модуль имеет* SIP-*накрытие;*
(3) *R_R является* SIP-*модулем и каждый* 2-*порожденный правый R-модуль имеет* SIP-*накрытие;*
(4) *R_R является* SIP-*модулем и каждый R-модуль имеет* SIP-*оболочку;*
(5) *R_R является* SIP-*модулем и каждый* 2-*порожденный правый R-модуль имеет* SIP-*оболочку.*

Предложение 9. *Следующие условия эквивалентны для кольца R:*

(1) *R — правое V-кольцо;*
(2) *каждый конечно копорожденный правый R-модуль имеет* C3-*оболочку;*
(3) *каждый конечно копорожденный правый R-модуль имеет* C3-*накрытие.*

Доказательство. Импликации $(1) \Rightarrow (2), (3)$ очевидны.

$(2) \Rightarrow (1)$. Пусть N — произвольный простой модуль. Предположим, что $\iota : M = N \oplus E(N) \to E$ — C3-оболочка, где E — C3-модуль. Поскольку N и $E(N)$ — C3-модули, то существуют такие $f_1 : E \to N$, $f_2 : E \to E(N)$, что $f_i\iota = \pi_i$, где $\pi_1 : M \to N_i$ и $\pi_2 : M \to E(N)$ — проекции. Существует такой гомоморфизм $\phi : E \to M$, что $\pi_i\phi = f_i$ для всех $i = 1, 2$. Тогда $\phi\iota = \mathrm{id}_M$; следовательно, ι — расщепляющий мономорфизм. Таким образом, $N \oplus E(N)$ изоморфен прямому слагаемому в E. Значит, $N \oplus E(N)$ — также C3-модуль. Тогда несложно заметить, что N — прямое слагаемое в $E(N)$. Тогда модуль N инъективен. Таким образом, R — правое V-кольцо.

$(3) \Rightarrow (1)$. Доказательство аналогично импликации $(3) \Rightarrow (1)$ из доказательства предложения 7. □

Аналогичным образом получаем также следующий результат.

Предложение 10. *Следующие условия эквивалентны для кольца R:*

(1) *R — нетерово справа правое V-кольцо;*
(2) *каждый правый R-модуль с существенным цоколем имеет* C3-*оболочку;*
(3) *каждый правый R-модуль с существенным цоколем имеет* C3-*накрытие.*

3. $\mathcal{A}$-C2- и $\mathcal{A}$-D2-модули

Пусть M — правый R-модуль и $\mathcal{A}$ — класс правых R-модулей, который замкнут относительно изоморфных образов. Следуя [13, 18], для модуля M введем следующие условия:

$\mathcal{A}$-C2: для каждого $N \in \mathcal{A}$, если $X \leqslant^{\oplus} M$, $N \leqslant M$ и $N \cong X$, то $N \leqslant^{\oplus} M$;
$\mathcal{A}$-C3: для каждых $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$, если $M_1, M_2 \leqslant^{\oplus} M$ и $M_1 \cap M_2 = 0$, то $M_1 + M_2 \leqslant^{\oplus} M$.

Также рассмотрим следующие условия:

$\mathcal{A}$-SSP: для каждых $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$, если $M_1, M_2 \leqslant^{\oplus} M$, то $M_1 + M_2 \leqslant^{\oplus} M$;
$\mathcal{A}$-SIP: для каждых прямых слагаемых M_1, M_2 модуля M, если M/M_1, $M/M_2 \in \mathcal{A}$, то $M_1 \cap M_2 \leqslant^{\oplus} M$;
$\mathcal{A}$-D2: для каждого подмодуля N модуля M, если фактор-модуль M/N изоморфен прямому слагаемому модуля M и $M/N \in \mathcal{A}$, то $N \leqslant^{\oplus} M$;
$\mathcal{A}$-D3: для каждых прямых слагаемых M_1, M_2 модуля M, если M/M_1, $M/M_2 \in \mathcal{A}$ и $M_1 + M_2 = M$, то $M_1 \cap M_2 \leqslant^{\oplus} M$.

Модуль M называется $\mathcal{A}$-SIP-модулем (соответственно, $\mathcal{A}$-SSP, $\mathcal{A}$-C2, $\mathcal{A}$-C3, $\mathcal{A}$-D2, $\mathcal{A}$-D3-модулем), если он удовлетворяет условию $\mathcal{A}$-SIP (соответственно, $\mathcal{A}$-SSP, $\mathcal{A}$-C2, $\mathcal{A}$-C3, $\mathcal{A}$-D2, $\mathcal{A}$-D3).

Следующие два утверждения доказываются непосредственно.

Лемма 11. *Пусть $\mathcal{A}$ — класс правых R-модулей, который замкнут относительно изоморфных образов. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) *каждый $\mathcal{A}$-C2-модуль является $\mathcal{A}$-C3-модулем;*
(2) *каждый $\mathcal{A}$-D2-модуль является $\mathcal{A}$-D3-модулем;*
(3) *каждое прямое слагаемое в $\mathcal{A}$-SIP-модуле (соответственно, $\mathcal{A}$-SSP, $\mathcal{A}$-C2, $\mathcal{A}$-C3, $\mathcal{A}$-D2 и $\mathcal{A}$-D3-модуле) также является $\mathcal{A}$-SIP-модулем (соответственно, $\mathcal{A}$-SSP, $\mathcal{A}$-C2, $\mathcal{A}$-C3, $\mathcal{A}$-D2 и $\mathcal{A}$-D3).*

Если M, N — правые R-модули и $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, то через $\langle f\rangle$ будем обозначать подмодуль модуля $M \oplus N$ вида $\{m + f(m) \mid m \in M\}$.

Лемма 12. *Пусть $M = X \oplus Y$ — разложение правого R-модуля M и $f : A \to Y$ — гомоморфизм правых R-модулей, где $A \leqslant X$. Тогда $A \oplus Y = \langle f\rangle \oplus Y$ и $\mathrm{Ker}(f) = X \cap \langle f\rangle$.*

Предложение 13. *Пусть M — правый R-модуль, который является $\mathcal{A}$-D3-модулем, и $\mathcal{A}$ — класс правых R-модулей, замкнутый относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Если $M = M_1 \oplus M_2$ и $f : M_1 \to M_2$ — гомоморфизм, у которого $\mathrm{im}(f) \leqslant^{\oplus} M_2$ и $\mathrm{im}(f) \in \mathcal{A}$, то $\mathrm{Ker}(f)$ — прямое слагаемое модуля M_1.*

Доказательство. Пусть $M' := M_1 \oplus \mathrm{im}(f)$. Тогда M' — прямое слагаемое M и, следовательно, M' — $\mathcal{A}$-D3-модуль. Тогда согласно лемме 12 имеет место равенство $M' = M_1 \oplus \mathrm{im}(f) = \langle f\rangle \oplus \mathrm{im}(f)$. Несложно заметить, что $M'/M_1, M'/\langle f\rangle \in \mathcal{A}$ и $M' = M_1 + \langle f\rangle$. Так как M' — $\mathcal{A}$-D3-модуль, то $\langle f\rangle \cap M_1 = \mathrm{Ker}(f)$ — прямое слагаемое M'. □

Теорема 14 (см. [4, предложение 2.7])**.** *Пусть M — правый R-модуль и $\mathcal{A}$ — класс правых R-модулей, который замкнут относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Если каждый фактор-модуль модуля M является $\mathcal{A}$-инъективным, то следующие условия эквивалентны:*

(1) *M — $\mathcal{A}$-SIP-модуль;*
(2) *M — $\mathcal{A}$-D3-модуль;*
(3) *M — $\mathcal{A}$-D2-модуль;*
(4) *для любого разложения $M = M_1 \oplus M_2$ из условия $M_2 \in \mathcal{A}$ следует, что у каждого гомоморфизма $f : M_1 \to M_2$ ядро является прямым слагаемым модуля M_1;*
(5) *если $X_1, \ldots, X_n$ — прямые слагаемые модуля M и $M/X_1, M/X_2, \ldots, M/X_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i$ — прямое слагаемое модуля M.*

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть M_1, M_2 — такие прямые слагаемые модуля M, что $M/M_1, M/M_2 \in \mathcal{A}$. Тогда $M = M_1 \oplus M_1'$. Без ограничения общности можно считать, что $M_2 \nsubseteq M_1$, $M_2 \nsubseteq M_1'$. Из предположения следует, что $\pi(M_2)$ — прямое слагаемое M_1'. Тогда $M_1' = \pi(M_2) \oplus M_1''$. Так как класс $\mathcal{A}$ замкнут относительно прямых слагаемых, то $M_1'' \in \mathcal{A}$. Легко видеть, что $M_1 + M_1''$ — прямое слагаемое модуля M, $M/(M_1 + M_1'') \in \mathcal{A}$ и $M_1 + M_1'' + M_2 = M$. Тогда $M_1 \cap M_2 = (M_1 + M_1'') \cap M_2$ — прямое слагаемое M.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (2) следует из леммы 11.

(1) $\Rightarrow$ (4). Предположим, что $M = M_1 \oplus M_2$, где $M_2 \in \mathcal{A}$, и задан гомоморфизм $f : M_1 \to M_2$. Отсюда следует, что $M = M_1 \oplus M_2 = \langle f\rangle \oplus M_2$. Отметим, что $M/M_1, M/\langle f\rangle \in \mathcal{A}$. Согласно (1), $\langle f\rangle \cap M_1 = \mathrm{Ker}(f)$ — прямое слагаемое модуля M. Таким образом, $\mathrm{Ker}(f)$ — прямое слагаемое M_1.

(4) $\Rightarrow$ (3). Пусть M_1, M_2 — такие подмодули в M, что $M = M_1 \oplus A$, $M/M_2 \cong A$ и $A \in \mathcal{A}$. Рассмотрим проекции $\pi_1 : M_1 \oplus A \to M_1$ и $\pi_2 : M_1 \oplus A \to A$. Согласно предположению $\pi_2(M_2)$ — прямое слагаемое модуля A. Следовательно, $A = \pi_2(M_2) \oplus B$ для некоторого подмодуля B модуля A. Пусть $p : M \to M/M_2$ — канонический гомоморфизм и $\phi : M/M_2 \to A$ — изоморфизм. Рассмотрим гомоморфизм $f = \phi \circ (p|_{M_1}) : M_1 \to A$. Ясно, что $\mathrm{Ker}(f) = M_1 \cap M_2$. В силу (4), $\mathrm{Ker}(f) = M_1 \cap M_2$ — прямое слагаемое модуля M_1. Для некоторого подмодуля N_1 модуля M_1 имеет место разложение $M_1 = N_1 \oplus (M_1 \cap M_2)$. Так как $M_1 + M_2 = M_1 \oplus \pi_2(M_2)$ и $N_1 \cap M_2 = 0$,

то

$$M = M_1 \oplus \pi_2(M_2) \oplus B = (M_1 + M_2) \oplus B = \\ = [N_1 \oplus (M_1 \cap M_2) + M_2] \oplus B = (N_1 + M_2) \oplus B = (N_1 \oplus M_2) \oplus B.$$

(1) $\Rightarrow$ (5). Докажем индукцией по n. При $n = 2$ справедливость утверждения следует из определения $\mathcal{A}$-SIP-модулей. Предположим, что утверждение верно при $n = k$. Пусть $X_1, \ldots, X_{k+1}$ — прямые слагаемые модуля M и $M/X_1, \ldots, M/X_{k+1} \in \mathcal{A}$. Можно представить M в виде $M = \bigcap\limits_{i=1}^{k} X_i \oplus N$ для некоторого подмодуля N в M. Без ограничения общности можно считать что $\bigcap\limits_{i=1}^{k} X_i \nsubseteq X_{k+1}$. Пусть $f : M \to M/X_{k+1}$ — естественный гомоморфизм. Тогда модуль $\bigcap\limits_{i=1}^{k} X_i/\Big(\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{k} X_i\Big) \cap X_{k+1}\Big)$ является $\mathcal{A}$-инъективным и, следовательно, изоморфен прямому слагаемому в $M/X_{k+1} \in \mathcal{A}$. Следовательно, $\bigcap\limits_{i=1}^{k} X_i/\bigcap\limits_{i=1}^{k+1} X_i$ изоморфен прямому слагаемому в M и

$$M/\Big(\bigcap_{i=1}^{k+1} X_i \oplus N\Big) = \Big(\bigcap_{i=1}^{k} X_i \oplus N\Big)/\Big(\bigcap_{i=1}^{k+1} X_i \oplus N\Big) \in \mathcal{A}.$$

Так как (1) и (3) эквивалентны, то $\bigcap\limits_{i=1}^{k+1} X_i \oplus N$ является прямым слагаемым модуля M и, следовательно, $\bigcap\limits_{i=1}^{k+1} X_i$ также является прямым слагаемым модуля M. □

Следствие 15. *Пусть M — инъективный правый R-модуль над наследственным справа кольцом R. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M является* D2-*модулем*;
(2) *M является* D3-*модулем*;
(3) *M является* SIP-*модулем.*

Следствие 16. *Пусть P — квазипроективный модуль. Если $X_1, \ldots, X_n$ — прямые слагаемые модуля P и $P/X_1, \ldots, P/X_n$ — полупростые модули, то $\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i$ — прямое слагаемое модуля P.*

Теорема 17 (см. [4, предложение 2.13])**.** *Пусть M — правый R-модуль и $\mathcal{A}$ — множество подмодулей модуля M, которое замкнуто относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Если каждый подмодуль модуля M является $\mathcal{A}$-проективным, то следующие условия эквивалентны*:

(1) *M является $\mathcal{A}$*-SSP-*модулем*;
(2) *M является $\mathcal{A}$*-C3-*модулем*;
(3) *для любого разложения $M = A_1 \oplus A_2$ из условия $A_1 \in \mathcal{A}$ следует, что у каждого гомоморфизма $f : A_1 \to A_2$ образ является прямым слагаемым модуля A_2.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $f : A_1 \to A_2$ — R-гомоморфизм и $A_1 \in \mathcal{A}$. Согласно предположению для некоторого подмодуля B модуля A_1 существует разложение $A_1 = \mathrm{Ker}(f) \oplus B$. Тогда $B \oplus A_2$ — прямое слагаемое в M. Поскольку каждое прямое слагаемое в $\mathcal{A}$-C3-модуле также является $\mathcal{A}$-C3-модулем, то $B \oplus A_2$ — $\mathcal{A}$-C3-модуль. Пусть $g = f|_B : B \to A_2$. Тогда g является мономорфизмом и $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Нетрудно видеть, что $B \oplus A_2 = \langle g \rangle \oplus A_2$, $\langle g \rangle \cap B = 0$ и $\langle g \rangle \simeq B$. Заметим, что $B, \langle g \rangle \in \mathcal{A}$. Так как $B \oplus A_2$ удовлетворяет условию п. (2), то $B \oplus \langle g \rangle$ — прямое слагаемое в $B \oplus A_2$. Поскольку $B \oplus \langle g \rangle = B \oplus \mathrm{Im}(g)$, то $\mathrm{Im}(f)$ является прямым слагаемым в A_2.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть N и K — такие прямые слагаемые модуля M, что $N, K \in \mathcal{A}$. Тогда $M = N \oplus N'$ и $M = K \oplus K'$ для некоторых $N', K' \leqslant M$. Рассмотрим канонические проекции $\pi_K : K \oplus K' \to K$

и $\pi_{N'} : N \oplus N' \to N'$. Пусть $A = \pi_{N'}(\pi_K(N))$. Тогда $A = (N + K) \cap (N + K') \cap N'$ и A — прямое слагаемое в M в силу (3). Следовательно, имеет место разложение $M = A \oplus L$ для некоторого подмодуля $L \leqslant M$. Очевидно, что

$$(N + K) \cap \big[(N + K') \cap (N' \cap L)\big] = 0.$$

Следовательно, $N' = A \oplus (N' \cap L)$ и $M = (N \oplus A) \oplus (N' \cap L)$. Так как $A \leqslant N + K$ и $A \leqslant N + K'$, то имеют место равенства

$$N + K = (N \oplus A) + \big[(N + K) \cap (N' \cap L)\big], \quad N + K' = (N \oplus A) + \big[(N + K') \cap (N' \cap L)\big].$$

Тогда

$$M = N + K' + K = (N \oplus A) + \big[(N + K) \cap (N' \cap L)\big] + \big[(N + K') \cap (N' \cap L)\big] \leqslant \\ \leqslant (N + K) + \big[(N + K') \cap (N' \cap L)\big].$$

Таким образом, $M = (N + K) \oplus \big[(N + K') \cap (N' \cap L)\big]$. □

Теорема 18 (см. [4, предложение 2.14]). *Пусть M — правый R-модуль и $\mathcal{A}$ — класс артиновых правых R-модулей, который замкнут относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Если каждый подмодуль модуля M является $\mathcal{A}$-проективным, то следующие условия равносильны*:

(i) *M является $\mathcal{A}$-C3-модулем*;
(ii) *M является $\mathcal{A}$-C2-модулем*;
(iii) *если $X_1, \ldots, X_n$ — прямые слагаемые модуля M и $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{A}$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ — прямое слагаемое модуля M.*

Доказательство. (1) ⇒ (2). Пусть M_1 — подмодуль модуля M, изоморфный прямому слагаемому M_2 модуля M, и $M_1 \in \mathcal{A}$. Тогда $M = M_2 \oplus M_2'$. Если $M_1 \subset M_2$, то из артиновости модуля M_2 и изоморфизма $M_1 \cong M_2$ следует, что $M_1 = M_2$. Пусть $M_1 \nsubseteq M_2$ и $\pi : M_2 \oplus M_2' \to M_2'$ — проекция. Согласно предположению $\mathrm{Ker}(\pi_{|M_1})$ — прямое слагаемое в M_1. Тогда $M_1 = M_1 \cap M_2 \oplus N_1$. Так как $N_1 \cong \pi(M_1)$ и $M_1 \cong M_2$, то существует изоморфизм $\phi : N' \to \pi(M_1)$, где N' — прямое слагаемое модуля M_2. Так как $\langle \phi \rangle \in \mathcal{A}$ и $\langle \phi \rangle \cap M_2 = 0$, то $M_2 + \langle \phi \rangle = M_2 \oplus \pi(M_1) = M_2 \oplus N_1$ — прямое слагаемое модуля M. Следовательно, N_1 — ненулевое прямое слагаемое в M. Ясно, что $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{A}$ и $M_1 \cap M_2$ изоморфен прямому слагаемому M. Если $M_1 \cap M_2$ не является прямым слагаемым модуля M, то, используя рассуждения, аналогичные рассуждениям, приведенным выше, можно показать, что $M_1 \cap M_2 = N_2 \oplus N_2'$, где N_2 — ненулевое прямое слагаемое M, N_2' — подмодуль M, изоморфный прямому слагаемому M и $N_2, N_2' \in \mathcal{A}$. Так как любой модуль из класса $\mathcal{A}$ артинов, продолжив приведенные выше рассуждения, для некоторого k получаем разложение $M_1 = N_1 \oplus \ldots \oplus N_k$, где N_i — прямое слагаемое M и $N_i \in \mathcal{A}$ для любого i. Так как M — $\mathcal{A}$-C3-модуль, то $N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_k$ является прямым слагаемым модуля M.

Импликация (2) ⇒ (1) следует из п. (1) леммы 11. Импликация (3) ⇒ (1) очевидна.

Импликацию (1) ⇒ (3) докажем индукцией по n. При $n = 2$ справедливость утверждения следует из теоремы 17. Предположим, что утверждение верно для $n = k$. Пусть $X_1, \ldots, X_{k+1}$ — прямые слагаемые в M и $X_1, \ldots, X_{k+1} \in \mathcal{A}$. Тогда для некоторого подмодуля N из M имеем $M = \Big(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i\Big) \oplus N$. Пусть $\pi : \Big(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i\Big) \oplus N \to N$ — естественная проекция. Так как $\pi(X_{k+1})$ является $\mathcal{A}$-проективным, то $X_{k+1} = \Big(\Big(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i\Big) \cap X_{k+1}\Big) \oplus S$, где S — подмодуль M. Так как (1) и (2) эквивалентны, то $\pi(X_{k+1})$ есть прямое слагаемое в M и, следовательно, $N = \pi(X_{k+1}) \oplus T$, где T — подмодуль в M. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{k+1} X_i = \Big(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i\Big) \oplus \pi(X_{k+1})$ и $M = \Big(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i\Big) \oplus \pi(X_{k+1}) \oplus T$. Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{k+1} X_i$ является прямым слагаемым M. □

Следствие 19. *Пусть M — артинов наследственный модуль. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M является* C2-*модулем*;
(2) *M является* C3-*модулем*;
(3) *M является* SSP-*модулем.*

Теорема 20 (см. [4, предложение 2.7])**.** *Пусть M — правый R-модуль и $\mathcal{A}$ — класс правых R-модулей, который замкнут относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Если каждый фактор-модуль модуля M является $\mathcal{A}$-проективным, то следующие условия эквивалентны*:

(1) *M является $\mathcal{A}$-*SSP*-модулем*;
(2) *M является $\mathcal{A}$-*C3*-модулем*;
(3) *для любого разложения $M = A_1 \oplus A_2$ из условия $A_1 \in \mathcal{A}$ следует, что у каждого гомоморфизма $f : A_1 \to A_2$ образ является прямым слагаемым модуля A_2*;
(4) *M является $\mathcal{A}$-*C2*-модулем*;
(5) *если $X_1, \ldots, X_n$ — прямые слагаемые модуля M и $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{A}$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ — прямое слагаемое модуля M.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна.

Доказательство импликаций (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) аналогично доказательству теоремы 17.

Импликация (4) $\Rightarrow$ (2) следует из леммы 11(1).

(3) $\Rightarrow$ (4). Пусть $\sigma : A \to B$ — изоморфизм, $A \in \mathcal{A}$ — прямое слагаемое модуля M и $B \leqslant M$. Покажем, что B является прямым слагаемым модуля M. Имеет место равенство $M = A \oplus T$ для некоторого подмодуля T из M. Так как модуль $A/A \cap B$ изоморфен фактор-модулю модуля M, то $A \cap B$ — прямое слагаемое A. Тогда $A = (A \cap B) \oplus C$ для некоторого подмодуля C из A. Следовательно, $M = (A \cap B) \oplus (C \oplus T)$. Ясно, что

$$A \cap \big[(C \oplus T) \cap B\big] = 0, \quad B = (A \cap B) \oplus \big[(C \oplus T) \cap B\big].$$

Пусть $H := \sigma^{-1}((C \oplus T) \cap B)$. Тогда H — подмодуль A, $H \cap [(C \oplus T) \cap B] = 0$ и существует такой подмодуль H' в H, что $A = H \oplus H'$. Заметим, что $M = H \oplus (H' \oplus T)$. Рассмотрим проекцию $\pi : H \oplus (H' \oplus T) \to H' \oplus T$. Тогда

$$H \oplus [(C \oplus T) \cap B] = H \oplus \pi((C \oplus T) \cap B).$$

В силу (3) образ гомоморфизма $\pi|_{(C \oplus T) \cap B} \circ \sigma|_H : H \to H' \oplus T$ является прямым слагаемым $H' \oplus T$. Тогда $H' \oplus T = \pi|_{(C \oplus T) \cap B} \sigma(H) \oplus K$ для подмодуля K в $H' \oplus T$. Тогда $H' \oplus T = \pi((C \oplus T) \cap B) \oplus K$. Следовательно,

$$M = H \oplus \pi\big((C \oplus T) \cap B\big) \oplus K = H \oplus \big[(C \oplus T) \cap B\big] \oplus K.$$

По закону модулярности имеем

$$C \oplus T = \big[(C \oplus T) \cap B\big] \oplus \big[(H \oplus K) \cap (C \oplus T)\big].$$

Таким образом,

$$M = (A \cap B) \oplus \big[(C \oplus T) \cap B\big] \oplus \big[(H \oplus K) \cap (C \oplus T)\big] = B \oplus \big[(H \oplus K) \cap (C \oplus T)\big].$$

Импликация (1) $\Rightarrow$ (5) очевидна. Импликация (1) $\Rightarrow$ (5) доказывается аналогично импликации (1) $\Rightarrow$ (3) из теоремы 18. $\square$

Следствие 21. *Пусть Q — квазиинъективный модуль. Если $X_1, \ldots, X_n$ — полупростые прямые слагаемые модуля Q, то $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ — прямое слагаемое модуля Q.*

4. Просто прямо проективные модули и просто прямо инъективные модули

Если $\mathcal{A}$ — класс всех простых (соответственно, полупростых) правых R-модулей, то $\mathcal{A}$-D2-модули называются *просто* (соответственно, *полупросто*) *прямо проективными модулями.*

Следующее утверждение непосредственно следует из теоремы 14

Теорема 22. *Следующие условия эквивалентны для модуля M:*

(1) *M — полупросто прямо проективный модуль;*
(2) *если A, B — прямые слагаемые модуля M и M/A, M/B — полупростые модули, то $A \cap B \leqslant^{\oplus} M$;*
(3) *если A, B — прямые слагаемые модуля M, M/A, M/B — полупростые модули и $A+B = M$, то $A \cap B$ — прямое слагаемое модуля M;*
(4) *если $X_1, \dots, X_n$ — прямые слагаемые модуля M и $M/X_1, \dots, M/X_n$ — полупростые модули, то $\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i$ — прямое слагаемое модуля M.*

Теорема 23 (см. [11, предложение 2.1])**.** *Следующие условия эквивалентны для модуля M:*

(1) *M — просто прямо проективный модуль;*
(2) *если A, B — прямые слагаемые модуля M и M/A, M/B — простые модули, то $A\cap B \leqslant^{\oplus} M$;*
(3) *если $X_1, \dots, X_n$ — прямые слагаемые модуля M и $M/X_1, \dots, M/X_n$ — простые модули, то $\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i$ — прямое слагаемое модуля M;*
(4) *для любого разложения $M = M_1 \oplus M_2$, где M_2 — простой модуль, ядро всякого гомоморфизма $f : M_1 \to M_2$ является прямым слагаемым модуля M_1;*
(5) *если M/A — конечно порожденный полупростой модуль и $M/A \cong B \leqslant^{\oplus} M$, то $A \leqslant^{\oplus} M$.*

Доказательство. Эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) следуют из теоремы 14. Импликация (5) $\Rightarrow$ (1) очевидна.

(1) $\Rightarrow$ (5). Имеет место разложение $M/A = M_1/A \oplus \dots \oplus M_n/A$ модуля M/A, где M_i/A — простой модуль для каждого i. Ясно, что $M_i \cap \Big(\sum\limits_{j\neq i} M_j\Big) = A$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Для каждого подмножества $\{i_1, \dots, i_{n-1}\}$ множества $I := \{1, \dots, n\}$ имеет место изоморфизм

$$M/(M_{i_1} + M_{i_2} + \dots + M_{i_{n-1}}) \simeq M_k/A$$

для некоторого $k \in I \setminus \{i_1, \dots, i_{n-1}\}$. Тогда фактор-модуль $M/(M_{i_1} + \dots + M_{i_{n-1}})$ изоморфен простому прямому слагаемому модуля M. Следовательно, согласно (1), $M_{i_1} + \dots + M_{i_{n-1}}$ — прямое слагаемое M. Нетрудно заметить, что имеет место равенство

$$A = \bigcap_{\{i_1,\dots,i_{n-1}\}\subset I} (M_{i_1} + \dots + M_{i_{n-1}}).$$

Тогда согласно п. (3) имеем $A \leqslant^{\oplus} M$. □

Если $\mathcal{A}$ — класс всех простых (соответственно, полупростых) правых R-модулей, то $\mathcal{A}$-C2-модули называются *просто* (соответственно, *полупросто*) *прямо инъективными модулями.*

Следующее утверждение непосредственно следует из теоремы 20.

Теорема 24. *Следующие условия равносильны для модуля M:*

(1) *M — полупросто прямо инъективный модуль;*
(2) *если A, B — полупростые прямые слагаемые модуля M, то $A + B \leqslant^{\oplus} M$;*
(3) *если A, B — полупростые прямые слагаемые модуля M и $A \cap B = 0$, то $A + B \leqslant^{\oplus} M$;*
(4) *если $X_1, \dots, X_n$ — полупростые прямые слагаемые модуля M и $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ — прямое слагаемое модуля M;*
(5) *для любого разложения $M = A_1 \oplus A_2$, где A_1 — полупростой модуль, у каждого гомоморфизма $f : A_1 \to A_2$ образ является прямым слагаемым модуля A_2.*

Теорема 25 (см. [7, предложение 2.1]). *Следующие условия равносильны для модуля M*:

(1) *M — просто прямо инъективный модуль*;

(2) *если A, B — простые прямые слагаемые модуля M, то $A + B \leqslant^{\oplus} M$*;

(3) *для всяких конечнопорожденных полупростых подмодулей A, B модуля M из условий $A \cong B$, $B \leqslant^{\oplus} M$ следует, что $A \leqslant^{\oplus} M$*;

(4) *для любых конечнопорожденных полупростых прямых слагаемых A, B модуля M выполнено условие $A + B \leqslant^{\oplus} M$.*

Доказательство. Эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) следуют из теоремы 20. Импликация (4) $\Rightarrow$ (1) очевидна.

(2) $\Rightarrow$ (4). Достаточно показать, что если $M_1, \ldots, M_n$ — простые прямые слагаемые модуля M, то $M_1 + \ldots + M_n$ — прямое слагаемое M. Это можно показать с помощью стандартных рассуждений, используя математическую индукцию. $\square$

Правый R-модуль M называется *V-модулем*, если каждый простой правый R-модуль M-инъективен. Кольцо R называется *правым V-кольцом*, если R_R — V-модуль. Согласно теореме Капланского коммутативное кольцо R является регулярным, в точности тогда, когда R — V-кольцо.

Пусть M — правый R-модуль. Правый модуль над кольцом R называется M-циклическим, если он изоморфен некоторому фактор-модулю модуля M.

Лемма 26. *Пусть F — регулярный правый R-модуль. Если A — конечно порожденный малый подмодуль фактор-модуля F/F_0, то $A \oplus F/F_0$ — F-циклический модуль.*

Доказательство. Для некоторых элементов $f_1, \ldots, f_m \in F$ имеет место равенство $(f_1R + \ldots + f_mR + F_0)/F_0 = A$. Так как F — регулярный модуль, то согласно [3, 11.1] имеем $f_1R + \ldots + f_mR = \pi(F)$, где $\pi \in \mathrm{End}_R(F)$ и $\pi^2 = \pi$. Поскольку A — малый подмодуль модуля F/F_0, то

$$F/F_0 = ((1-\pi)F + F_0)/F_0.$$

Тогда существуют эпиморфизмы $f_1 : \pi(F) \to A$, $f_2 : (1-\pi)(F) \to F/F_0$. Следовательно, модуль $A \oplus (F/F_0)$ является F-циклическим. $\square$

Теорема 27. *Для регулярного правого R-модуля F следующие условия равносильны*:

(1) *F является V-модулем*;

(2) *каждый F--циклический модуль является просто прямо инъективным.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $S \in \sigma(F)$ — простой модуль и $E_F(S)$ — инъективная оболочка модуля S в категории $\sigma(F)$. Предположим, что $E_F(S) \neq S$. Так как модуль $E_F(S)$ порождается модулем F, то существует такой гомоморфизм $f : F \to E_F(S)$, что $f(F) \neq S$. Тогда S — малый подмодуль модуля $f(F)$, и из предыдущей леммы вытекает, что $S \oplus f(F)$ — F-циклический. Так как, очевидно, модуль $S \oplus f(F)$ не является просто прямо инъективным, то получаем противоречие с условием п. (2). $\square$

Следствие 28 (см. [7, теорема 4.4]). *Для регулярного кольца R следующие условия равносильны*:

(1) *R является правым V-кольцом*;

(2) *над кольцом R каждый циклический правый модуль является просто прямо инъективным.*

Предложение 29. *Пусть $\mathcal{A}$ — класс правых R-модулей, замкнутый относительно изоморфизмов и прямых слагаемых. Если всякий правый R-модуль $\mathcal{A}$-инъективен, то следующие условия эквивалентны*:

(1) *все модули из $\mathcal{A}$ инъективны*;

(2) *каждый правый R-модуль является $\mathcal{A}$-C2-модулем*;

(3) *каждый правый R-модуль является $\mathcal{A}$-C3-модулем.*

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) очевидны.

(3) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что $A \in \mathcal{A}$. Тогда $A \oplus E(A)$ является $\mathcal{A}$-C3-модулем. Таким образом, A — прямое слагаемое в $E(A)$ и, следовательно, модуль A инъективен. □

Следствие 30 (см. [7, предложение 4.1])**.** *Следующие условия эквивалентны для кольца R:*

(1) *R является V-кольцом;*
(2) *каждый правый R-модуль является просто прямо инъективным модулем.*

Предложение 31. *Пусть $\mathcal{A}$ — класс правых R-модулей, замкнутый относительно изоморфизмов и прямых слагаемых. Если все правые R-модули $\mathcal{A}$-проективны, то следующие условия эквивалентны:*

(1) *все модули из $\mathcal{A}$ проективны;*
(2) *каждый правый R-модуль является $\mathcal{A}$-D2-модулем;*
(3) *каждый правый R-модуль является $\mathcal{A}$-D3-модулем.*

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) очевидны.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $A \in \mathcal{A}$. Существует эпиморфизм $\varphi : R^{(I)} \to A$. Тогда $M = R^{(I)} \oplus A$ является $\mathcal{A}$-D3-модулем. Так как $\langle\varphi\rangle \oplus A = R^{(I)} \oplus A$ и $\langle\varphi\rangle + R^{(I)} = M$, то $\langle\varphi\rangle \cap R^{(I)}$ — прямое слагаемое модуля M. Таким образом, A изоморфен прямому слагаемому в $R^{(I)}$ и, следовательно, модуль A проективен. □

Следствие 32 (см. [11, теорема 3.4])**.** *Следующие условия эквивалентны для кольца R:*

(1) *R является классически полупростым кольцом;*
(2) *каждый правый R-модуль является просто прямо проективным модулем.*

Пусть даны кольца R и S, бимодули ${}_RM_S$ и ${}_SN_R$ и бимодульные гомоморфизмы $\varphi : M\otimes_S N \to R$ и $\psi : N \otimes_R M \to S$. Для $m \in M$ и $n \in N$ положим $mn = \varphi(m \otimes n)$ и $nm = \psi(n \otimes m)$. Тогда если для всех $m, m' \in M$ и $n, n' \in N$ выполняются тождества $(mn)m' = m(nm')$ и $(nm)n' = n(mn')$, то множество K матриц вида $\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}$, где $r \in R$, $m \in M$, $n \in N$, $s \in S$, относительно естественных операций матричного сложения и умножения образует кольцо, которое называют *кольцом формальных матриц*.

Пусть даны модули A_R и B_S и такие гомоморфизмы модулей $f : A\otimes_R M \to B_S$ и $g : B\otimes_S N \to A_R$, что

$$g(f(a \otimes m) \otimes n) = a(mn), \quad f(g(b \otimes n) \otimes m) = b(nm),$$

для всех $a \in A$, $b \in B$, $m \in M$, $n \in N$. Тогда множество пар (A, B) становится правым K-модулем. Нетрудно видеть (см. например, [2]), что все правые K-модули могут быть представлены в таком виде.

Далее будем предполагать, что $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ — кольцо формальных матриц с нильпотентными идеалами следа, т.е. идеалы $MN \leqslant R$ и $NM \leqslant S$ нильпотентны.

Пусть дан правый K-модуль $(A, B)_K$. Введем обозначения

$$L_A = \{a \in A \mid aM = 0\}, \quad L_B = \{b \in B \mid bN = 0\}.$$

Лемма 33. *Пусть K — кольцо формальных матриц с нильпотентными идеалами следа, $(A, B)_K$ — правый K-модуль и (A', B') — его подмодуль. Подмодуль (A', B') является простым прямым слагаемым K-модуля $(A, B)_K$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий:*

(1) *$(A', B') = (A', 0)$, где $A' \leqslant L_A$ — простой подмодуль, и существует такое разложение $A' \oplus C = A$, что $BN \leqslant C$;*
(2) *$(A', B') = (0, B')$, где $B' \leqslant L_B$ — простой подмодуль, и существует такое разложение $B' \oplus D = B$, что $AM \leqslant D$.*

Доказательство. Пусть (A', B') — простой подмодуль $(A, B)_K$. Если $0 \neq A'$, то $0 \neq (A', A'M) \leqslant (A', B')$, а значит, $(A', B') = (A', A'M)$. Если $A'M \neq 0$, то получаем следующую цепочку равенств:

$$(A', B') = (A', A'M) = (A'MN, A'M) = (A'MN, A'MNM) = \cdots =$$
$$= (A'(MN)^k, A'(MN)^k M) = \cdots = 0,$$

которая выполняется в силу нильпотентности идеала MN. Таким образом, любой простой подмодуль $(A, B)_K$ имеет вид либо $(A', 0)$, либо $(0, B')$, где $A' \leqslant A$ и $B' \leqslant B$ — простые подмодули. В частности, $A' \leqslant L_A$, $B' \leqslant L_B$.

Предположим, что $(A', 0)$ является простым прямым слагаемым модуля $(A, B)_K$. Тогда для некоторого $C \leqslant A$ должно иметь место разложение

$$(A', 0) \oplus (C, B) = (A, B).$$

Так как (C, B) является подмодулем $(A, B)_K$, то $BN \leqslant C$. □

Теорема 34. *Пусть K — кольцо формальных матриц с нильпотентными идеалами следа. Для правого K-модуля $(A, B)_K$ следующие условия эквивалентны*:

(1) (A, B) — *полупросто прямо проективный модуль*;

(2) (a) *если для подмодулей $A_1, A_2 \leqslant A$, удовлетворяющих условию $BN \leqslant A_1 \cap A_2$, имеет место разложение $A_1 \oplus C_1 = A = A_2 \oplus C_2$, где $C_1, C_2 \leqslant L_A$ — полупростые подмодули, то существует и разложение $A = (A_1 \cap A_2) \oplus C$, где $C \leqslant L_A$;*

(b) *если для подмодулей $B_1, B_2 \leqslant B$, удовлетворяющих условию $AM \leqslant B_1 \cap B_2$, имеет место разложение $B_1 \oplus D_1 = B = B_2 \oplus D_2$, где $D_1, D_2 \leqslant L_B$ — полупростые подмодули, то существует и разложение $B = (B_1 \cap B_2) \oplus D$, где $D \leqslant L_B$.*

Доказательство. Импликация $(1) \Rightarrow (2)$ очевидна.

$(2) \Rightarrow (1)$. Пусть $(A_1, B_1) \oplus (C_1, D_1) = (A, B) = (A_2, B_2) \oplus (C_2, D_2)$, где подмодули (C_1, D_1) и (C_2, D_2) полупросты. Так как каждый из них является суммой простых подмодулей, то в силу леммы 33 заключаем, что $C_1, C_2 \leqslant L_A$, $D_1, D_2 \leqslant L_B$ полупросты. В силу условий (2a) и (2b) получаем

$$(A, B) = (A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \oplus (C, D).$$ □

Следствие 35. *Пусть $K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ — кольцо формальных матриц. Для правого K-модуля $(A, B)_K$ следующие условия эквивалентны*:

(1) (A, B) — *просто (полупросто) прямо проективный модуль*;

(2) (a) *если для подмодулей $A_1, A_2 \leqslant A$ имеет место разложение $A_1 \oplus C_1 = A = A_2 \oplus C_2$, где $C_1, C_2 \leqslant L_A$ — (простые) полупростые подмодули, то существует и разложение $A = (A_1 \cap A_2) \oplus C$, где $C \leqslant L_A$*;

(b) *если подмодули $B_1, B_2 \leqslant B$, обладающие тем свойством, что $AM \leqslant B_1 \cap B_2$ и фактор-модули B/B_1 и B/B_2 просты (полупросты), выделяются в виде прямых слагаемых в B, то прямым слагаемым также является и их пересечение $B_1 \cap B_2$.*

В частности, если $AM \leqslant J(B_S)$, то условие (2b) превращается в просто (полупросто) прямо проективность модуля B.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абызов А. Н., Туганбаев А. А.* Модули, в которых суммы или пересечения двух прямых слагаемых являются прямыми слагаемыми// Фундам. прикл. мат. — 2014. — *19*, № 1. — С. 3–11.
2. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Кольца формальных матриц и модули над ними. — М.: МЦНМО, 2017.
3. *Туганбаев А. А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.
4. *Abyzov A. N., Quynh T. C., Nhan T. H. N.* On classes of C3 and D3 modules// Hacettepe J. Math. Stat. — 2018. — *47*. — P. 317–329.
5. *Abyzov A. N, Nhan T. H. N, Quynh T. C.* Modules close to SSP- and SIP-modules// Lobachevskii J. Math. — 2017. — *38*, № 1. — P. 16–23.

6. *Amin I., Ibrahim Y. Yousif M. F.* C3-modules// Algebra Colloq. — 2015. — *22.* — P. 655–670.
7. *Camillo V., Ibrahim Y., Yousif M., Zhou Y. Simple-direct-injective modules* J. Algebra. — 2014. — *420.* — P. 39–53.
8. *Clark J., Lomp C., Vanaja N., Wisbauer R.* Lifting Modules. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser Verlag, 2006.
9. *Enochs E. E., Jenda O. M. G.* Relative Homological Algebra. — Berlin: de Gruyter, 2011.
10. *Hamdouni A., Harmanci A., Özcan C. A.* Characterization of modules and rings by the summand intersection property and the summand sum property// JP J. Algebra Number Theory Appl. — 2005. — *5.* — P. 469–490.
11. *Ibrahim Y., Tamer Kosan M., Quynh T. C., Yousif M.* Simple-direct-projective modules// Commun. Algebra. — 2016. — *44*, № 12. — P. 5163–5178.
12. *Jeremy L.* Sur les modules et anneaux quasi-continus// C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. — 1971. — *272.* — P. 80–83.
13. *Lopez-Permouth S. R., Oshiro K., Rizvi S. T.* On the relative (quasi-) continuity of modules// Commun. Algebra. — 1998. — *26*, № 11. — P. 3497–3510.
14. *Nicholson W. K.* Semiregular modules and rings// Can. J. Math. — 1976. — *28.* — P. 1105–1120.
15. *Nicholson W. K., Yousif M. F.* Quasi-Frobenius Rings. — Campridge Univ. Press, 2003.
16. *Mohamed S. H., Bouhy T.* Continuous modules// Arab. J. Sci. Eng. — 1977. — *2.* — P. 107–112.
17. *Mohamed S. H., Muller B. J.* Continuous and Discrete Modules. — Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1990.
18. *Oshiro K.* Continuous modules and quasi-continuous modules// Osaka J. Math. — 1983. — *20.*
19. *Takeuchi T.* On direct modules// Hokkaido Math. J. — 1972. — P. 168–177.
20. *Utumi Y.* On continuous regular rings// Can. Math. Bull. — 1961. — P. 63–69.
21. *Yousif M. F., Amin I., Ibrahim Y.* D3-modules// Commun. Algebra. — 2014. — *42.* — P. 578–592.
22. *Wisbauer R.* Foundations of Module and Ring Theory. — Gordon and Breach, 1991.

Абызов Адель Наилевич
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: `Adel.Abyzov@kpfu.ru`

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет МЭИ, Москва, Россия;
МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: `tuganbaev@gmail.com`

Тапкин Даниль Тагирзянович
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: `danil.tapkin@yandex.ru`

Куинь Чюонг Конг
The University of Danang, Vietnam
E-mail: `tcquynhtcq@gmail.com`