Экстремумы функции нескольких переменных

Возрастание и убывание. Связь с градиентом

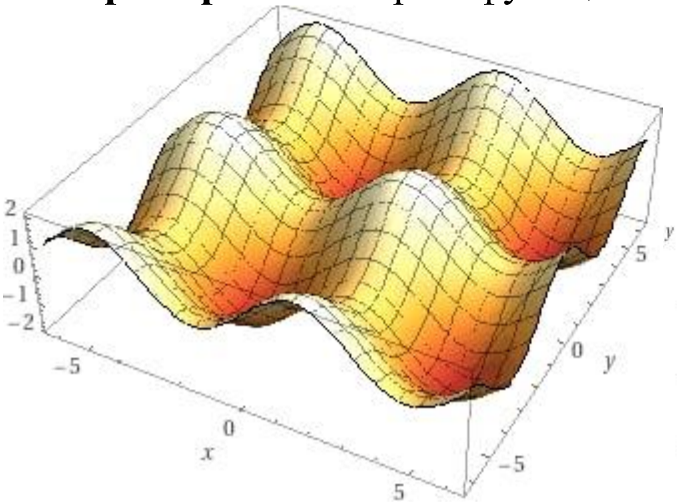
Для функций нескольких переменных нет понятия «возрастание» и «убывание», так как точки многомерного пространства не расположены в каком-либо естественном порядке. Однако можно говорить о возрастании или убывании вдоль координатных осей или по некоторому направлению.

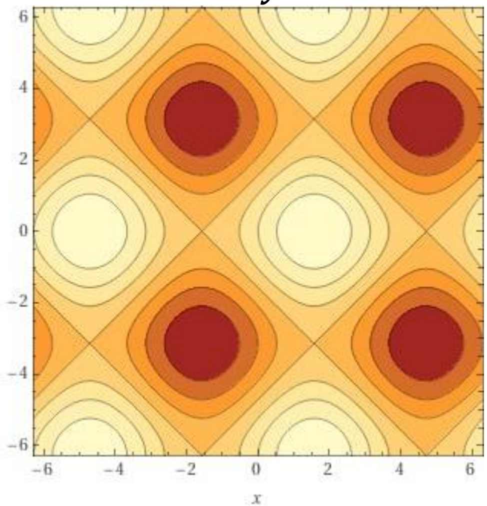
Ограничим изменение аргумента одной прямой, проходящей через точку x, то есть точками $x + ta$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – единичный вектор, $t \geq 0$. Подставляя это выражение в функцию f, получим функцию от одного аргумента, $g(t) = f(x_1 + ta_1, x_2 + ta_2, \dots, x_n + ta_n)$

Можно исследовать ее возрастание и убывание обычным способом, через производную. Имеем $f'_a = (grad\ f, a)$. Это скалярное произведение максимально, если вектор a сонаправлен градиенту. Минимальное (при этом отрицательное) значение оно имеет, если a противонаправлен градиенту. В направлениях, перпендикулярных градиенту, производная равна 0.

Итак, градиент задает направление максимально быстрого изменения функции. На этом основаны некоторые численные методы (например, метод градиентного спуска).

Пример. Рассмотрим функцию $z = \sin x + \cos y$

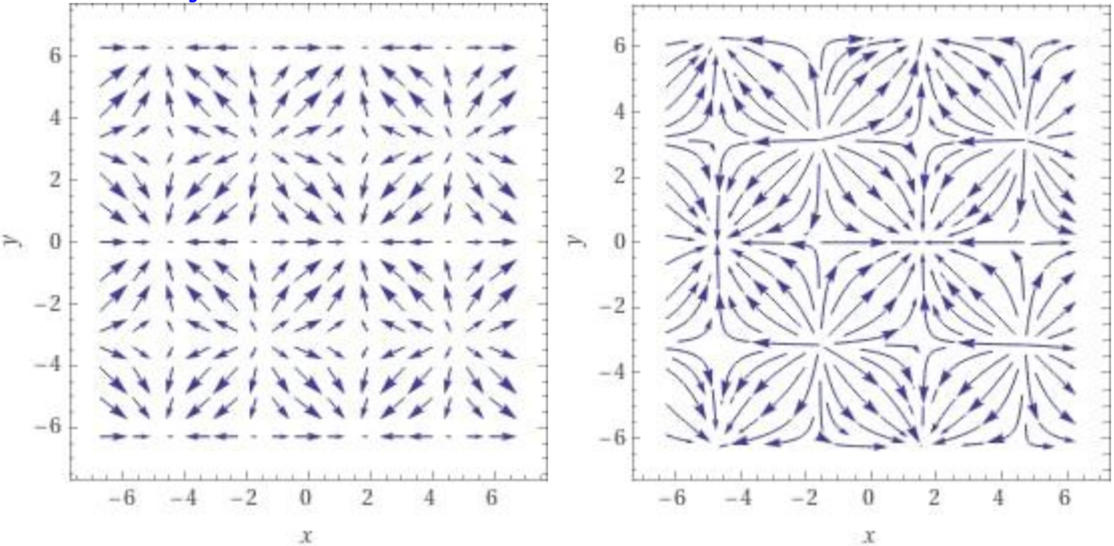




На левой картинке изображен ее график, а на правой – линии уровня. Рисунки выполнены программой *Wolfram Alpha*:
https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+sin%28x%29%2Bcos%28y%29

Градиент это функции имеет вид $grad\, z = (\cos x\,, -\sin y)$. Поле градиента в точках (x, y) выглядит так:

https://www.wolframalpha.com/input?i=VectorPlot+%7BCos%28x%29%2C+-Sin%28y%29%7D



Справа векторное поле изображено с помощью векторных линий. Стрелки показывают направление возрастания функции.

В точке $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ значение функции равно $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, градиент имеет вид $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Касательная плоскость в этой точке будет иметь вид

$$z = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = \frac{x - y}{2} - \frac{\pi}{12} + \sqrt{3}$$

Понятие экстремума, т.е. (локального) минимума или максимума переносится на многомерный случай без изменений. Говорят, что в точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция f имеет локальный максимум, если существует такая её проколотая окрестность $\breve{U}$, что $f(x) > f(y)$ для всех $y \in \breve{U}$. Если выполняется $f(x) \geq f(y)$ то говорят, что максимум нестрогий.

Аналогично определяется минимум (нестрогий минимум). Слово «локальный» перед названием экстремума часто опускают: любой максимум/минимум считается локальным.

Если неравенство выполняется не в окрестности точки, а на каком-то заранее заданном множестве, говорят, что в точке у функции наибольшее (наименьшее) значение на данном множестве.

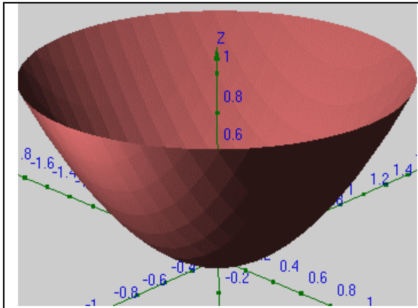
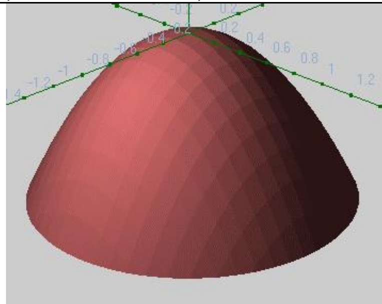
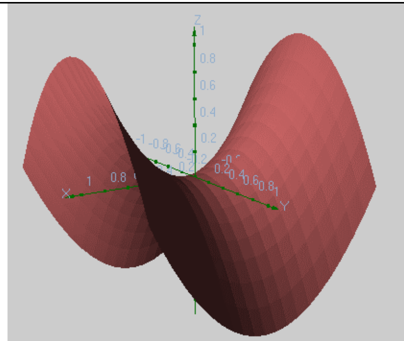
Пусть в точке x функция имеет локальный максимум и дифференцируема. Тогда производная по любому направлению равна 0. Но, как мы видели, такое возможно, только если $grad\ f = 0$. То есть, все частные производные функции равны 0.

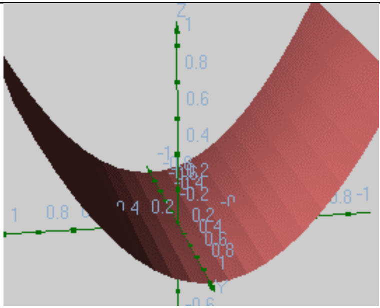
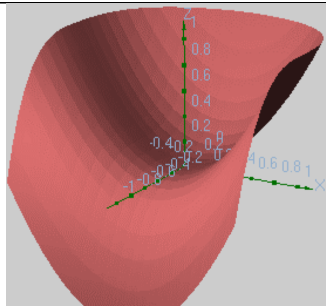
Однако это условие (как и в случае функции одной переменной) не является достаточным.

Пример. Сравните поведение функций а)-д) в окрестности 0.

$$\text{а) } z = x^2 + y^2;\ \text{б) } z = -x^2 - y^2;\ \text{в) } z = x^2 - y^2;$$

$$\text{г) } z = x^2;\ \text{д) } z = x^2 + y^3.$$

 а) Минимум, $z = x^2 + y^2$	 б) Максимум, $z = -x^2 - y^2$	 в) Седло, $z = x^2 - y^2$

 г) Нестрогий минимум, $z = x^2$	 д) Нет экстремума, $z = x^2 + y^3$	Заметим, что в п. д) $z = x^2 + y^3 =$ $= x^2 + o(\rho^2)$ То есть в главном совпадает с п. г)

Эти пять вариантов в каком-то смысле описывают все типичные случаи поведения функции.

Вспомним формулу Тейлора в дифференциалах. Если функция дважды непрерывно дифференцируема, то

$$f(x + dx) = f(x) + {\color{red}df} + \frac{1}{2}d^2f + o(\|dx\|^2)$$

Если в точке a – экстремум, то, как мы показали $df = 0$. Тогда поведение разности $f(x + dx) - f(x)$ в малом определяется знаком второго дифференциала.

Заметим, что d^2f можно рассматривать как квадратичную форму от вектора dx. Например, в двумерном случае

$$d^2f = f''_{11}dx_1^2 + 2f''_{12}dx_1dx_2 + f''_{22}dx_2^2$$

Ясно, что $d^2f = 0$ при $dx = 0$. Поэтому далее считаем, что $dx \neq 0$

Если d^2f – положительно определенная форма (положительна при всех $dx \neq 0$), то $f(x + dx) > f(x)$ в подходящей окрестности. Значит, в точке x – строгий минимум.

Аналогично можно рассмотреть остальные случаи

Форма	d^2f	Тип экстремума
Положительно определена	> 0	Минимум
Отрицательно определена	< 0	Максимум
Неопределенна	$\gtreqless 0$	Седло
Полуопределена	$\geq 0, \leq 0$	Требуется дополнительное исследование

Тип формы можно определить иногда непосредственно, а иногда по критерию Сильвестра. Видео

Примеры.

1) $d^2f = 4dx^2 + dxdy + 2dy^2 = \left(2dx + \frac{1}{4}dy\right)^2 + \frac{31}{16}dy^2 > 0.$

Минимум.

То же по критерию Сильвестра $\begin{vmatrix} 4 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - \frac{1}{4} > 0.$ Форма определенная. При этом $4 > 0$, то есть определенность положительная.

2) $d^2f = 4dx^2 + 2dxdy - dy^2 = \left(2dx + \frac{1}{2}dy\right)^2 - \frac{5}{4}dy^2 \gtrless 0.$

Седло.

То же по критерию Сильвестра $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 1 < 0.$ Форма неопределенная. Нет экстремума, седло.

3) $d^2f = 5dx^2 + 4dxdy + dy^2 + 2dxdz + dz^2 =$
$= (2dx + dy)^2 + (dx + dz)^2 \geq 0.$

Почему знак неравенства здесь нестрогий? Потому что форму третьего порядка удалось выразить через два квадрата. Если каждый их них равен 0, то и второй дифференциал по этому направлению 0. То есть, если приращение имеет вид (dx, $-2dx$, $-dx$), то поведение функции вдоль него не определено. В целом мы не можем (только по второму дифференциалу) сказать, каково поведение функции.

Заметим, что для трёх переменных не так легко найти правильное представление в виде суммы/разности квадратов. Лучше использовать критерий Сильвестра. А именно, если все главные миноры положительны, то форма положительно определена. Если знаки миноров чередуются –, +, –, … то форма отрицательно определена.

Для исследования на полуопределенность главных миноров недостаточно. Нужно проверить все «симметричные» миноры, например, стоящий на 1, 3 строке и 1, 3 столбце. Если все они неотрицательны, то и форма полуопределенная (положительно). Отрицательная полуопределенность сводится к положительной заменой матрицы A квадратичной формы на $-A$.

Заметьте, что элементы на диагонали матрицы равны коэффициентам формы при квадратах. Элементы вне диагонали равны половинам коэффициентов (так как коэффициент – сумма двух смешанных производных). В нашем примере имеем:

$$\begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} & f''_{13} \\ f''_{21} & f''_{22} & f'_{23} \\ f''_{31} & f''_{32} & f''_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 5 > 0;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

Последнее означает, что форма не является определенной. Однако, чтобы проверить полуопределенность, нужно вычислить больше миноров: 5; 1; 1; $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ и определитель всей матрицы. Они все неотрицательны, значит, форма полуопределена.

Но каково поведение функции – мы не знаем.

Экстремум неявно заданной функции

Вспомним условие существования функции, заданной уравнением/системой уравнений.

Система m уравнений с $n + m$ неизвестными определяет m функций в окрестности ее частного решения, если в этой точке якобиан (определитель из производных) не равен 0. А именно, пусть функции F_i непрерывно дифференцируемы. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = 0 \end{cases}$$

Пусть точка $\left(x^{(0)}; u^{(0)}\right) = \left(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}; u_1^{(0)}, \dots, u_m^{(0)}\right)$ является решением этой системы, кроме того, в этой точке якобиан

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(u_1, u_2, \dots, u_m)} \neq 0$$

Тогда система имеет в окрестности $\left(x^{(0)}, u^{(0)}\right)$ единственное решение

$$u_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Функции u_i непрерывные и дифференцируемые в этой окрестности.

Пример вычисления экстремума неявно заданной функции

Пусть функция z задана уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 z + a,\ a = 4 \qquad (1)$$

Продифференцируем равенство, получим

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = x^2 dz + 2xzdx$$

$$(x^2 - 2z)dz = 2x(1 - z)dx + 2ydy \qquad (2)$$

Особые точки графика лежат на поверхности $x^2 = 2z$. Уравнение относительно z квадратное, так что, видимо, на этой поверхности лежат точки склейки двух решений.

При условии $x^2 \neq 2z$ дифференциал можно найти из уравнения (2). Однако нам нужно просто приравнять его нулю, что равносильно соотношениям $x(1 - z) = 0$, $y = 0$. Рассмотрим два случая.

а) $x = y = 0$, уравнение (1) приобретает вид $z^2 = a = 4$, т.е. имеем два решения, $z = \pm 2$. Получили критические точки $M_1 = (0; 0; 2)$ и $M_2 = (0; 0; -2)$. Ни одна из них не является особой

б) $y = 0; z = 1$. Уравнение (1) принимает вид $a = 1$, т.е. при $a = 4$ решений нет. Заметим, что при $a = 1$ первое уравнение превратилось бы в тождество, то есть вся прямая лежала бы на поверхности. В частности, при $x^2 = 2z = 2$ мы получим особые точки.

Итак, у нас две подозрительные на экстремум точки. Чтобы исследовать их, изучим поведение второго дифференциала. Продифференцируем соотношение (2), считая dx и dy константами.

$$d(x^2 - 2z) \cdot dz + (x^2 - 2z)d^2z = 2(1 - z)dx^2 - 2xdzdx + 2dy^2$$

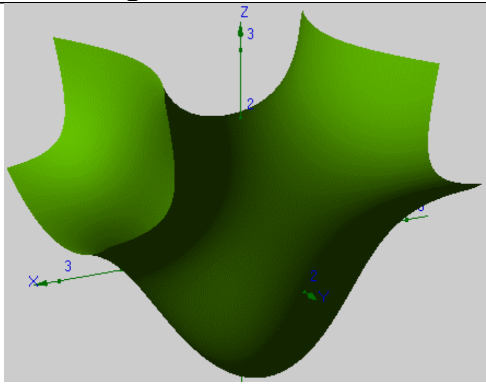
Равенство можно упростить с учетом того, что в критических точках у нас $dz = 0$; получаем

$$(x^2 - 2z)d^2z = 2(1 - z)dx^2 + 2dy^2$$

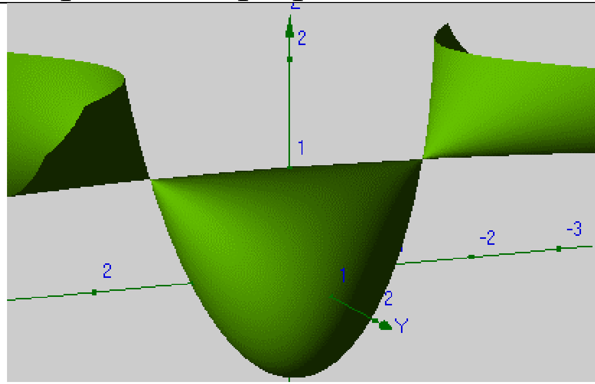
а) $M_1 = (0; 0; 2)$, $-4d^2z = -2dx^2 + 2dy^2$, то есть второй дифференциал в этой точке имеет вид $d^2z = \frac{1}{2}dx^2 - \frac{1}{2}dy^2$. Знаки перед квадратами разные, седло.

б) $M_2 = (0;0;-2)$, $4d^2z = 6dx^2 + 2dy^2$, то есть второй дифференциал в этой точке имеет вид $d^2z = \frac{3}{2}dx^2 + \frac{1}{2}dy^2 > 0$. В точке минимум.

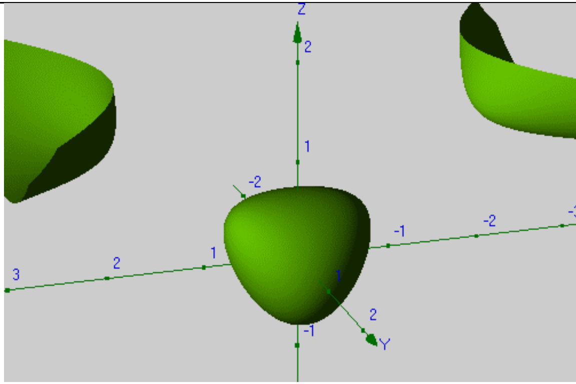
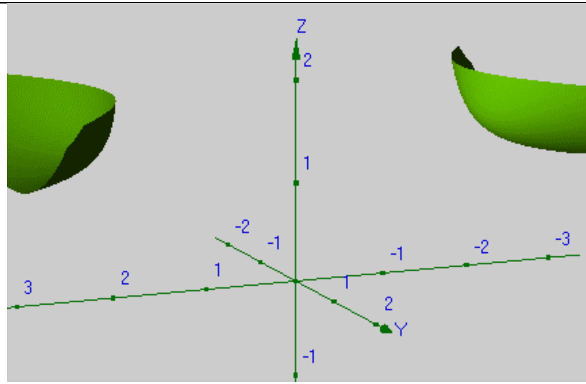
Посмотрим, как выглядит наша поверхность при разных a.



$a = 4$



$a = 1$

 $a = 0{,}5$	 $a = 0$

Наличие нескольких переменных позволяет нам комбинировать идеи локального экстремума и неявно заданной функции разными способами. Один мы разобрали выше. Другой состоит в том, чтобы ограничить значения аргументов какими-то соотношениями (условиями). Соответственно, такой экстремум называется **условным**.

В простейшем случае функции от двух переменных задача ставится так: найти экстремумы функции $z = f(x, y)$ (1) при условии, что переменные связаны соотношением $F(x, y) = 0$ (2). Его так и называют, **уравнение связи**.

Один из способов решения – решить второе уравнение, например, относительно y и подставить это значение в формулу для z. Но, как мы знаем, большинство уравнений не решаются в элементарных функциях.

Будем, однако, считать, что мы нашли решение (по теореме о неявной функции). Как найти точки, подозрительные на экстремум? Для этого надо найти dz и приравнять его к нулю. Дифференцируя оба уравнения, получим

$$\begin{cases} dz = f'_x dx + f'_y dy = 0 \\ F'_x dx + F'_y dy = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение задает направление вдоль кривой, вдоль решения уравнения связи. Нам нужно исследовать функцию f именно в этом направлении. То есть дифференциал dz нужно исследовать только при выполнении второго равенства.

Именно поэтому мы записываем два уравнения как систему. Как мы видим, мы получили линейную систему на переменные dx, dy. Она однородная, так что нулевое решение будет иметь всегда. Нам же нужно ненулевое, которое задает касательное направление к линии связи.

Такое решение будет существовать, если определитель системы равен 0, $\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ F'_x & F'_y \end{vmatrix} = 0$.

Для того, чтобы уравнение связи было разрешимо, потребуем, чтобы производные F'_x, F'_y не обращались в 0 одновременно. Тогда равенство 0 определителя означает, что первая строка пропорциональна второй, то есть существует такое число λ,что $f'_x = \lambda F'_x, f'_y = \lambda F'_y$.

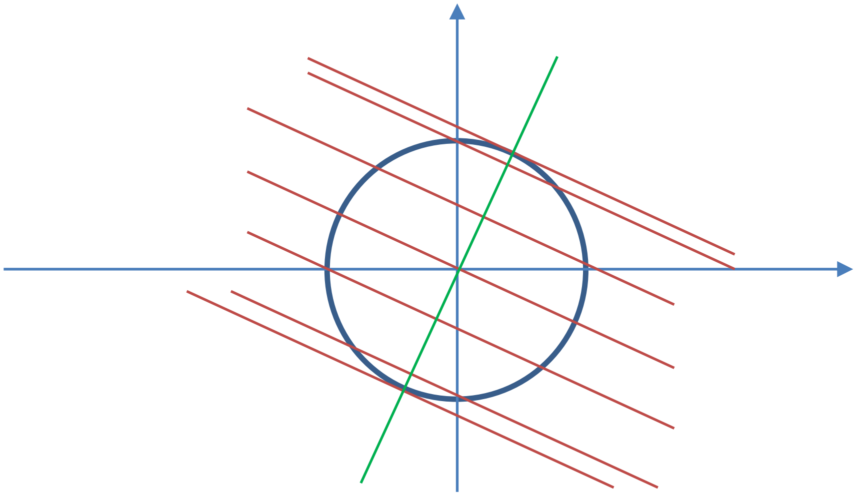
Введем формально функцию $L(x, y) = f(x, y) - \lambda F(x, y)$. Её частные производные будут равны

$$\begin{cases} L'_x = f'_x - \lambda F'_x \\ L'_y = f'_y - \lambda F'_y \end{cases}$$

Таким образом, в критической точке производные от функции L при подходящем λ будут равны 0.

Этот метод называется метод множителей Лагранжа. Его можно обобщить на большее количество переменных и большее количество уравнений связи.

Пример. Найти экстремумы функции $z = x + 2y$ при условии, что $x^2 + y^2 = 1$.



1 способ. Явно выразим y из второго уравнения, $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, тогда $z = x \pm 2\sqrt{1 - x^2}$, $z'_x = 1 \pm \frac{2}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = 1 \mp \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$. Особые точки – $x = \pm 1$.

Уравнение $z'_x = 0$ сводится к $2x = \pm\sqrt{1 - x^2}$, возводя в квадрат получаем $4x^2 = 1 - x^2; 5x^2 = 1$. Критические точки $x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Знак совпадает со знаком в записи функции, так как корень – число положительное.

Достаточное условие проверим с помощью второй производной.

$$z''_{xx} = \mp 2\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'_x = \mp 2\frac{\sqrt{1-x^2} - x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \mp 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}^3}$$

При $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ имеем $z''_{xx} < 0$, в этой точке максимум.

При $x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ имеем $z''_{xx} > 0$, в этой точке минимум.

Как мы видим, исследование получилось громоздкое, несмотря на то, что нам удалось исследовать обе ветви функции единым образом.

2 способ. Продифференцируем функцию и условие, получим в критической точке систему уравнений

$$\begin{cases} dx + 2dy = 0 \\ 2xdx + 2ydy = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = -2dy \\ -4xdy + 2ydy = 0 \end{cases}$$

В силу произвольности dy из второго уравнения получаем $y = 2x$.

Итак, переменные в критической точке связаны двумя уравнениями,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Longrightarrow 5x^2 = 1 \Longrightarrow (x, y) = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}(1; 2)$$

Найдём второй дифференциал. Заметим, что мы не можем при этом считать x и y независимыми переменными, их дифференциалы связаны соотношением $2xdx + 2ydy = 0$. Например, будем считать, что y есть функция от x, тогда, дифференцируя это равенство, получим

$$dx^2 + dy^2 + yd^2y = 0$$

Значит,

$$d^2z = d(dx + 2dy) = 2d^2y = -\frac{2}{y}(dx^2 + dy^2)$$

Видно, что знак второй производной противоположен знаку y (а, значит, и x). То есть в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ наблюдается максимум, а в точке $\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}; \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ – минимум.

Замечание. Что делать, если после преобразований второй дифференциал принимает вид *разности* квадратов? Можно ли сказать, что в этой точке у функции седло? Нет, ведь по сути z – функция одной переменной, так что седла у нее быть не может!

В этом случае надо воспользоваться связью между дифференциалами. Имеем $dx = -2dy$, то есть $dx^2 + dy^2 = 5dy^2$, и $d^2z = -\frac{10}{y}dy^2$, удалось выразить d^2z через один дифференциал.

3 способ. То, что мы делали во втором способе, можно оформить с использованием **функции Лагранжа**.

$$L = x + 2y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Условный экстремум функции f можно искать как безусловный экстремум функции L, причем коэффициент λ находится с использованием уравнения связи. Имеем

$$\begin{cases} L'_x = 1 - \lambda \cdot 2x \\ L'_y = 2 - \lambda \cdot 2y \end{cases}$$

Критическую точку находим из системы

$$\begin{cases} 1 - \lambda \cdot 2x = 0 \\ 2 - \lambda \cdot 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Можно исключить из первых двух уравнений λ, умножив первое на y, второе – на x и вычтя одно из другого. Получим $y - 2x = 0$.

Подставляя это соотношение в последнее уравнение, найдём критические точки $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ и $\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}; \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$.

Для проверки на экстремум рассмотрим второй дифференциал от L,

$$dL = (1 - \lambda \cdot 2x)dx + (2 - \lambda \cdot 2y)dy$$

$$d^2L = -2\lambda dx^2 - 2\lambda dy^2 = -\frac{2}{y}(dx^2 + dy^2)$$

Результат получился тот же, что и предыдущими методами.

Заметим, что при втором дифференцировании мы рассматриваем λ как константу, а x, y – как независимые переменные.

Замечание. То, что говорилось о квадратах дифференциалов с разными знаками, верно и в этом случае.

Случай нескольких уравнений связи

Если уравнений связи несколько, то в функции Лагранжа должно быть столько же неизвестных множителей. Пусть задано m уравнений связи, $F_1(x) = 0$, $F_2(x) = 0$, …, $F_m(x) = 0$. Функция Лагранжа приобретает вид

$$L(x) = f(x) - \lambda_1 F_1(x) - \lambda_2 F_2(x) - \cdots - \lambda_m F_m(x)$$

Критические точки находятся из условия $dL = 0$. Достаточное условие проверяется с помощью второго дифференциала d^2L при дополнительных условиях на дифференциалы переменных

$$dF_1(x) = 0, dF_2(x) = 0, \ldots, dF_m(x) = 0$$

Пример применения метода вынесен в **Приложение**.

Вывод. Для отыскания условного экстремума можно применить один из трёх методов.

1. Явное решение уравнения связи.
2. Дифференцирование условия для составления уравнения на дифференциалы.

3. Метод множителей Лагранжа.

В том случае, если решение уравнения связи затруднительно и нам нужно исследовать экстремум полностью (а не только найти критические точки) удобнее применять метод Лагранжа.

Наибольшее и наименьшее значения

Высшая точка Финляндии находится на сопке Халтиа и имеет высоту 1324 м над уровнем моря, но это не вершина сопки — вершина находится в Норвегии

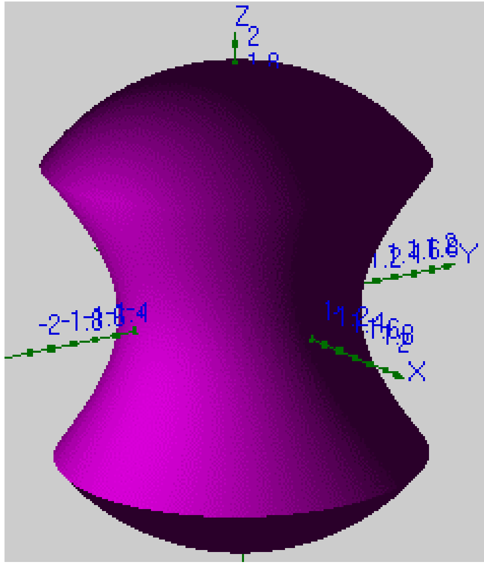
Для нахождения экстремума важно, что точка, в которой он достигается является *внутренней* точкой области изменения переменных. Если же нам нужно найти наибольшее (наименьшее) значение по всей области, надо рассмотреть как внутренние точки, так и граничные.

Таким образом, решение задачи разбивается на несколько этапов.

0. Ищем точки *локального* экстремума. Точнее, критические точки внутри области.
1. Граница области обычно задается уравнением связи. Ищем критические точки *условного* экстремума при этом ограничении.
2. Если граница не везде гладкая, она разделяется на гладкие куски, у которых есть свои границы (так сказать, границы второго порядка). Они задаются дополнительным ограничениями, то есть порождают задачу на экстремум с *двумя условиями*.

3. И т.д., пока не дойдём то отдельных точек, которые также включаем в число подозрительных.

Заметим, что при поиске наибольшего/наименьшего значения нет необходимости проводить исследование достаточными признаками. Можно просто вычислить значения в критических точках и сравнить их между собой.



Пример. Тело задано соотношениями

$$x^2 + y^2 \leq z^2 + 1 \qquad (1)$$

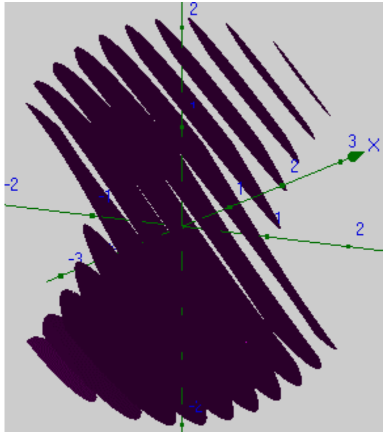
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \qquad (2)$$

Найти наибольшее и наименьшее (в точках данного тела) значение функции

$$u = x + y + z$$

Заметим, что данное тело лежит внутри сферы (2) и во внутренней полости однополостного гиперболоида (1)

0. Ищем локальный экстремум функции $x + y + z$. Все ее производные равны 1, экстремума нет. Поверхности уровня (точки, где функция принимает постоянное значение a) – это плоскости вида $x + y + z = a$, параллельные между собой.



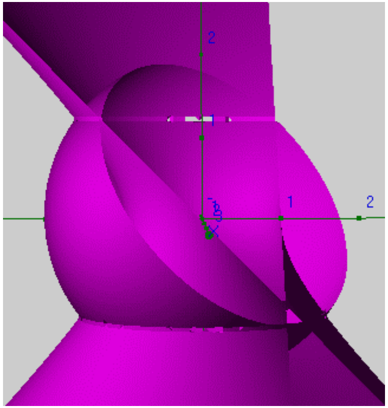
1. а) Ищем экстремум функции $u = x + y + z$ при условии $x^2 + y^2 = z^2 + 1$. Функция Лагранжа принимает вид

$$L = x + y + z - \lambda(x^2 + y^2 - z^2 - 1)$$

Приравниваем производные к 0:

$$\begin{cases} 1 - \lambda \cdot 2x = 0 \\ 1 - \lambda \cdot 2y = 0 \\ 1 + \lambda \cdot 2z = 0 \\ x^2 + y^2 = z^2 + 1 \end{cases}$$

Из первых трех уравнений получаем, что $x = y = -z$, тогда из уравнения связи следует, что $x = y = -z = \pm 1$, получили критические



точки $M_1(1;1;-1)$ и $M_2(-1;-1;1)$. Подставляя эти точки в (2) видим, что они принадлежат нашему телу.

Видно, что плоскость $x+y+z=1$ касается гиперболоида внутри сферы.

При этом гиперболоид находится и ниже, и выше точки касания, то есть значение функции в окрестности точки можно и увеличить, и уменьшить.

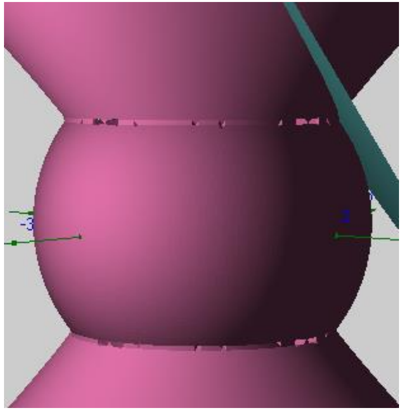
б) Ищем экстремум функции $u=x+y+z$ при условии $x^2+y^2+z^2=4$. Функция Лагранжа принимает вид

$$L=x+y+z-\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$$

Приравниваем производные к 0:

$$\begin{cases} 1-\lambda\cdot 2x=0 \\ 1-\lambda\cdot 2y=0 \\ 1-\lambda\cdot 2z=0 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

Из первых трех уравнений получаем, что $x = y = z$, тогда из уравнения связи следует, что $x = y = z = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$, получили критические точки $M_3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ и $M_4\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. Подставляя эти точки в (1) видим, что они не принадлежат нашему телу.



Видно, что плоскость $x + y + z = 2\sqrt{3}$ касается сферы вне гиперболоида.

2. Границами тела являются кусок сферы и кусок гиперболоида. Каждый из этих кусков ограничен их линией пересечения. Найдем критические точки на этих линиях (граница второго порядка состоит из двух кусков). Для этого применим оба уравнения связи.

Функция Лагранжа принимает вид

$$L = x + y + z - \lambda(x^2 + y^2 - z^2 - 1) - \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$$

Приравниваем производные к 0:

$$
\begin{cases}
1-\lambda\cdot 2x-\mu\cdot 2x=0\\
1-\lambda\cdot 2y-\mu\cdot 2y=0\\
1+\lambda\cdot 2z-\mu\cdot 2z=0\\
x^2+y^2=z^2+1\\
x^2+y^2+z^2=4
\end{cases}
$$

Первые три уравнения можно рассматривать как линейные относительно λ и μ. Или даже как линейные однородные с решением $(1;\lambda;\mu)$. Но однородная система имеет ненулевое решение, если ее определитель равен 0,

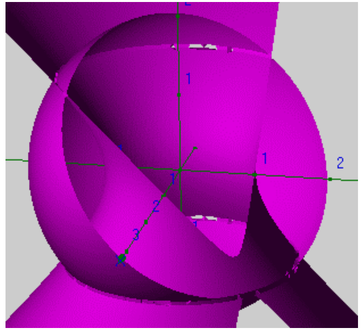
$$
\begin{vmatrix} 1 & -2x & -2x\\ 1 & -2y & -2y\\ 1 & 2z & -2z \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -x & -x\\ 0 & x-y & x-y\\ 0 & z+x & -z+x \end{vmatrix} = -4(x-y)2z=0
$$

Итак, либо $z=0$, либо $x=y$. Первый случай приводит к противоречию с уравнениями связи. Во втором получаем $2x^2=z^2+1$; $2x^2+z^2=4$, откуда $z^2=3/2$, $x^2=y^2=5/4$.

Критические точки:

$M_5\left(\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$, $M_6\left(\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$,
$M_7\left(-\frac{\sqrt{5}}{2};-\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ и $M_8\left(-\frac{\sqrt{5}}{2};-\frac{\sqrt{5}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$.

Видно, что плоскость $x+y+z=\sqrt{5}-\sqrt{1{,}5}$ касается линии пересечения сферы и гиперболоида.



Итак, нам осталось выбрать, в каких из этих критических точек достигается наибольшее и наименьшее значения функции

Критические точки	Значения функции	Прибл.	Вывод
$M_1(1;1;-1)$	1	1	(седловая)
$M_2(-1;-1;1)$	–1	–1	(седловая)
$M_5\left(\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$	$\sqrt{5}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	3,46	Наибольшее
$M_6\left(\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$	$\sqrt{5}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	1,01	

$M_7\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}; -\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$	$-\sqrt{5}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	–1,01	
$M_8\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}; -\frac{\sqrt{5}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$	$-\sqrt{5}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	–3,46	Наименьшее

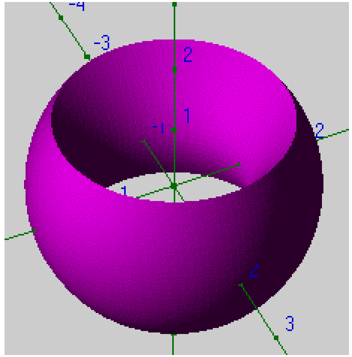
Замечание 1. Конечно, для этой конкретной задачи пункт 2) можно было исследовать гораздо проще. Два уравнения связи можно преобразовать к виду $z^2 = 3/2$, $x^2 + y^2 = 5/2$. Тогда функция примет вид $u = x + y \pm \sqrt{3/2}$. То есть здесь частично можно применить первый способ (исключение переменной).

Но нам важнее было показать более общий метод.

Замечание 2. Некоторые критические точки оказались вне исследуемого тела. За этим надо следить.

Замечание 3. В точках M_1 и M_2 нет экстремума. Действительно, уравнение связи в этом случае представляет собой однополостный гиперболоид. На нем сумма $x + y + z$ принимает любые значения.

Вопрос. Каким будет наибольшее и наименьшее значения, если выбрать другую часть пространства (вне полости гиперболоида)? То есть заданную неравенствами $x^2 + y^2 \geq z^2 + 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.



Приложение. Два уравнения связи

Задание. Найти точку эллипса $\{x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1; x + y + z = 0\}$, наиболее близкую началу координат $O = (0; 0; 0)$.

Решение. Расстояние до начала координат равно $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Проще минимизировать квадрат этой величины $u = x^2 + y^2 + z^2$. Записываем функцию Лагранжа

$$L = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1) - \mu(x + y + z)$$

Приравниваем производные к 0:

$$\begin{cases} 2x - \lambda \cdot 2x - \mu = 0 \\ 2y - \lambda \cdot 4y - \mu = 0 \\ 2z - \lambda \cdot 4z - \mu = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Рассматриваем первые три уравнения как однородную систему с решением $(2; -2\lambda; -\mu)$. Приравняем к нулю ее определитель.

$$\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ y & 2y & 1 \\ z & 2z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -x & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = x(y-z) = 0$$

а) $x = 0$

$$\begin{cases} 2y^2 + 2z^2 = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -y \\ 4y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \mp 1/2 \\ \mathrm{y} = \pm 1/2 \end{cases}$$

$M_1(0; 1/2; -1/2)$; $M_2(0; -1/2; 1/2)$

б) $y = z$

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 8y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \mp \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \mathrm{y} = \mathrm{z} = \pm \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$; $M_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

Достаточные условия. Второй дифференциал

$$dL = (2x - \lambda \cdot 2x - \mu)dx + (2y - \lambda \cdot 4y - \mu)dy + (2z - \lambda \cdot 4z - \mu)dz$$

$$d^2L = 2(1-\lambda)dx^2 + 2(1-2\lambda)dy^2 + 2(1-2\lambda)dz^2$$

Итак, поведение второго дифференциала зависит от значения λ. Исключив μ из первых трех уравнений основной системы, получаем соотношения.

$$x - \lambda x = y - 2\lambda y = z - 2\lambda z$$

При $x = 0$ получаем $(1-2\lambda)y = 0$. Так как $y \neq 0$, то $\lambda = 1/2$

$$d^2L = 2(1-1/2)dx^2 > 0$$

Итак, в точках $M_1(0; 1/2; -1/2)$; $M_2(0; -1/2; 1/2)$ расстояние от начала координат минимально, квадрат его равен 1/2.

При $y = z$ последнее равенство выполняется. Оставшееся принимает вид $(1-\lambda)x = (1-2\lambda)y$, с учетом соотношения $x = -2y$ получаем $-2(1-\lambda) = 1-2\lambda$, $4\lambda = 3$. Итак,

$$d^2L = \frac{1}{2}dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Чтобы найти знак дифференциала, нужно знать соотношение между дифференциалами. Продифференцируем уравнения связи. Получим соотношения

$$\begin{cases} 2xdx + 4ydy + 4zdz = 0 \\ dx + dy + dz = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} z = y \\ x = -2y \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -dx + dy + dz = 0 \\ dx + dy + dz = 0 \end{cases}$$

Замечание. Равенства $z = y; x = -2y$ не являются тождествами (выполняются только в критических точках), поэтому их нельзя дифференцировать! Выражения dx, dy, dz – числа, не зависящие от x, y, z. Вектор (dx, dy, dz) направлен по касательной к кривой, заданной уравнениями связи.

Решая эту систему, получим $dx = 0; dz = -dy$

$$d^2L = -2dy^2 < 0$$

Итак, в точках $M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$; $M_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ расстояние от начала координат максимально, квадрат его равен 3/4.

По сути, в этой задаче мы нашли направление полуосей эллипса, расположенного в пространстве. В этой конкретной задаче можно было и не использовать достаточные условия дифференцирования. Дело в том, что эллипс является компактным множеством, так что непрерывная функция u достигает на нем свои наибольшее и наименьшее значения. Но у нас нет других точек, в которых это могло бы произойти. Значит, глобальный максимум является и локальным, то же для минимума.