

Ю.Г. ИГНАТЬЕВ

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ
ТЕОРИЯ
НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ
В ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ



Казань
ООО «Фолиант»
2010

УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774
ББК 22.632
В87

Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетическая теория неравновесных процессов в гравитационных полях. - Казань: ООО «Фолиант», 2010. -523 с. - ISBN 978-5-94990010-9.

Рецензенты: В.Н. Мельников, доктор физ.-мат. наук, профессор;
Д.В. Гальцов, доктор физ.-мат. наук, профессор.

Цель книги - последовательное изложение теории неравновесных кинетических процессов в сильных полях гравитации с использованием широкого арсенала методов современной теоретической физики, в частности, релятивистской теории гравитации, теории непрерывных групп, статистической физики, кинетической теории, физики плазмы, теории элементарных частиц и фундаментальных взаимодействий. Особое внимание уделяется самосогласованному описанию вещества в сильных гравитационных полях, а также применению кинетической теории для решения проблем релятивистской астрофизики, космологии и гравитационно-волновых экспериментов. В книге обобщаются результаты работ автора и его учеников в области общерелятивистской кинетической теории на протяжении последних 35 лет. Книга будет полезна студентам старших курсов, магистрантам и аспирантам, специализирующимся в области теоретической физики. Ил. 57. Библиогр. 235 назв.

Yurii G. Ignatyev. Relativistic Kinetic Theory of Nonequilibrium Processes in Gravitational Fields. The book's goal is a consistent statement of the theory of non-equilibrium kinetic processes in strong gravitation fields using the broad store of modern theoretical physics's methods, specifically relativistic theory of gravitation, theory of continuous groups, statistical physics, kinetic theory, physics of plasma, theory of elementary particles and fundamental interactions. Special consideration is given to the self-consistent description of matter in strong gravitation fields as well as to the application of the kinetics theory to the solution of relativistic astrophysics, cosmology and gravitation-wave experiments' problems. The results of author's and his pupils' works in the field of general-relativistic theory, obtained by the last 35 years, are generalized in the given book. The book will be useful for the senior students, undergraduates and postgraduates, specializing in the field of a theoretical physics.

ISBN 978-5-94990010-9

@ 2009 Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет

@ ООО «Фолиант», оформление, 2010

Оглавление

Предисловие	7
Глава I. Формализм кинетической теории	19
I.1 Среда в гравитационном поле	19
I.2 Канонический формализм	25
I.3 Релятивистское фазовое пространство	28
I.4 Инвариантная функция распределения	40
I.5 Микроскопическая фазовая плотность	49
I.6 Релятивистские кинетические уравнения	59
Глава II. Самосогласованное описание плазмы	70
II.1 Уравнения переноса	70
II.2 Законы сохранения	72
II.3 Самосогласованная кинетическая модель	76
II.4 Общерелятивистские уравнения Власова	79
Глава III. Равновесие плазмы в гравитационном поле	81
III.1 ЛТР плазмы в гравитационном поле	81
III.2 Уравнения релятивистской гидродинамики	86
III.3 Глобальное термодинамическое равновесие	90
III.4 ГТР самогравитирующей плазмы	93
III.5 ГТР систем со скалярным взаимодействием	101
Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне	105
IV.1 Кинетическая модель плазмы в поле ГВ	105
IV.2 Однородный бесстолкновительный газ в ПГВ	111
IV.3 Действие ПГВ на анизотропную плазму с затуханием	126
IV.4 Действие низкочастотных ПГВ на неоднородную плазму	133

Оглавление

IV.5	Действие низкочастотных ПГВ на магнитоактивную плазму	137
IV.6	Действие слабых ПГВ на магнитоактивную плазму	146
IV.7	Столкновительная релаксация плазмы в поле ГВ	152
IV.8	Действие ПГВ на сильностолкновительную плазму	157
IV.9	Влияние границ на движение плазмы в поле ПГВ	164
Глава V. Гравимагнитные ударные волны		171
V.1	Условия в замороженности в плазму магнитного поля	171
V.2	Уравнения релятивистской МГД плазмы в гравитационном поле	178
V.3	Решение уравнений РМГД в метрике ПГВ для изотропной плазмы	185
V.4	Исследование решения	192
V.5	Передача энергии ГВ в плазме: уравнение энергобаланса	201
V.6	Уравнения РМГД для анизотропной плазмы	207
V.7	Решение уравнений РМГД для анизотропной плазмы	210
V.8	Дрейфовое решение для анизотропной плазмы	217
V.9	Кинетическое обоснование гравимагнитных ударных волн	221
V.10	Ультрарелятивистская анизотропная плазма	227
V.11	Влияние анизотропии плазмы на магнитотормозное излучение	230
V.12	Исследование уравнения энергобаланса	231
V.13	Численное моделирование электромагнитного отклика GSMW	251
V.14	GSMW и гравитационно-волновые эксперименты	262
V.15	Движение неоднородной магнитоактивной плазмы в поле ПГВ	286
Глава VI. Кинетика ранних стадий космологического расширения		291
VI.1	Конформная инвариантность кинетической теории	291
VI.2	Космологическая эволюция бесстолкновительных частиц	296
VI.3	Кинетика космологического расширения плазмы в условиях ЛТР	302
VI.4	Кинетика расширения радиационно доминированной плазмы	310
VI.5	Столкновительное затухание ГВ в горячей Вселенной	314

Глава VII. Релятивистская кинетика космологического бариогенезиса	329
VII.1	Механизм нарушения барионной симметрии Вселенной 329
VII.2	Алгебра взаимодействий $SU(5)$ 332
VII.3	Релятивистские кинетические уравнения в $SU(5)$ 333
VII.4	Кинетические уравнения для фермионов 338
VII.5	Кинетические уравнения для X - бозонов 340
VII.6	Законы сохранения 342
VII.7	Слабое нарушение зарядовой симметрии в стандартной $SU(5)$ модели 344
VII.8	Исследование решения 348
VII.9	Функция Φ в больцмановском приближении 349
VII.10	Отклонение X -бозонов от равновесия 350
VII.11	Преобразование к безразмерным переменным 352
VII.12	Функции $\Psi(t)$ и $\Theta(t)$ 353
VII.13	Отклонение от равновесия, $\delta f(\eta, \xi)$ 356
VII.14	Результаты 359
Глава VIII. Кинетическая модель неравновесной Вселенной	362
VIII.1	Стандартная точка зрения на установление ЛТР во Вселенной 362
VIII.2	Поучительный пример 364
VIII.3	Идеология стандартного космологического сценария 366
VIII.4	Более детальный анализ ЛТР 376
VIII.5	Скейлинг взаимодействия релятивистских частиц 383
VIII.6	Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц 393
VIII.7	Релаксация сверхтепловой компоненты на равновесных частицах 398
VIII.8	Разогрев равновесной компоненты сверхтепловыми частицами 403
VIII.9	Закономерности слабонеравновесной космологической модели 414
VIII.10	Интеграл столкновений в форме Фоккера - Планка 423
VIII.11	Диффузионное уравнение для сверхтепловых частиц 426
VIII.12	Космологическая эволюция с сильно нарушенным равновесием 428

Глава IX. Динамическое обоснование кинетической теории	449
IX.1	Функции источников, уравнения поля и функции распределения 449
IX.2	Средние по ансамблю и уравнения Лиувилля 458
IX.3	Интегральное представление уравнения Лиувилля... . . . 459
IX.4	Уравнения Власова в гравитационном поле 467
IX.5	Кинетические уравнения для плазмы в гравитационном поле 469
IX.6	Усреднение локальных флуктуаций метрики 472
IX.7	Кинетическое уравнение для безмассовых частиц 478
IX.8	Изотропизация фотонов гравитационными взаимодействиями 487
Литература	489

Предисловие

1. Необходимость общерелятивистской кинетической теории

В последние три десятилетия в общей теории относительности (ОТО) выделилось и развивается самостоятельное направление - общерелятивистская кинетическая теория газов и плазмы, основы которой были сформулированы в 60-е годы в работах Н.А. Черникова [1], Г. Таубера и Дж. Вайнберга [2], Н.А. Черникова [3] - [6], А.А. Власова [7], Р. Линдквиста [8] и других (см., например, [9] - [12]). Имеется несколько причин для развития кинетической модели вещества в ОТО. Во - первых, кинетическая теория вследствие своего микроскопического характера является теорией более глубокого уровня, чем гидродинамика. Только на основе кинетической теории возможно строгое динамическое обоснование релятивистской гидродинамики, выяснение границ ее применения, а также конкретизация и вычисление различных параметров гидродинамических уравнений: коэффициентов переноса, уравнения состояния и т.п.

Во - вторых, область применимости гидродинамической модели вещества ограничена условиями существования локального термодинамического равновесия (ЛТР), которые выполняются лишь для слабонеоднородных и слабонестационарных статистических систем. Для поддержания ЛТР длина свободного пробега частиц должна быть гораздо меньше характерного размера неоднородности системы, либо среднее время между столкновениями частиц - гораздо меньше характерного времени эволюции системы. В сильных релятивистских полях тяготения указанные условия легко могут быть нарушены, в результате статистическая система окажется неравновесной. В этом случае традиционное и относительно простое гидродинамическое описание вещества

Предисловие

становится неприемлемым, и требуется привлечение более сложной его модели, к которой приводит общерелятивистская кинетическая теория.

В настоящее время известно множество примеров таких существенно неравновесных релятивистских статистических систем. Это - гравитационные волны в горячей Вселенной, реликтовые фотоны с момента рекомбинации плазмы, реликтовые нейтрино спустя 0,1 секунду с момента Большого Взрыва, космические лучи сверхвысоких энергий внегалактического происхождения, крупномасштабная структура Вселенной, околопульсарная плазма, электроны в плазменных и металлических детекторах гравитационных волн и т.д. (см. Рис. 1).

Следует отметить тенденцию, наметившуюся в последние годы в космологии — обнаружение существенно неравновесных ситуаций там, где молчаливо предполагалось существование ЛТР. Эта тенденция вызвана с одной стороны более углубленным и последовательным анализом условий существования ЛТР в конкретных астрофизических и космологических ситуациях, а с другой стороны — прогрессом в области физики элементарных частиц. Указанной общей тенденции безусловно способствовали и крупнейшие астрономические открытия последних лет целого ряда мощных источников неравновесного электромагнитного излучения. Для теории образования крупномасштабной структуры Вселенной в последние годы вообще характерно введение новых гипотетических массивных слабо взаимодействующих частиц: аксионов, нестабильных нейтрино и т.п. С развитием схем великого объединения взаимодействий элементарных частиц типа $SU(5)$ в космологию ранней Вселенной стали вводиться сверхмассивные векторные и скалярные бозоны с массой порядка 10^{15} Гэв. Нарушение ЛТР между этими бозонами и лептонно - кварковой плазмой на самых ранних стадиях космологического расширения при отсутствии T - инвариантности может привести к генерации барионного заряда [13], [14]. Важно отметить, что указанный эффект может возникать лишь при условии нарушения ЛТР [15], когда гидродинамическая модель оказывается непригодной.

Третья причина необходимости развития общерелятивистской кинетической теории заключается в следующем. Центральный объект кинетической теории, функция распределения, подчиняется интегро - дифференциальным уравнениям, в которых дифференциальный оператор определяется макроскопической метрикой пространства - времени и макроскопическими физическими полями, в то время как интегральный оператор, интеграл столкновений, определяется инвариантными амплитудами рассеяния, вычисление которых является одной из главных

Предисловие

задач квантовой теории поля. Таким образом, кинетическая теория является своеобразным мостом, связывающим микро- и макроуровни описания вещества, и введение общерелятивистской кинетики в структуру общей теории относительности приводит к более полной, логически замкнутой картине мира.

Существует, наконец, еще одна глубокая причина необходимости развития релятивистской кинетики в рамках ОТО, касающаяся ее динамического аспекта и тесным образом связанная с внутренним развитием теории гравитации. Речь идет о гравитационном взаимодействии частиц. Вследствие нелинейного характера теории гравитации макроскопический тензор энергии - импульса не определяет макроскопическую метрику пространства - времени, что приводит к необходимости построения корректной процедуры учета корреляций локальных флуктуаций метрики и процедуры статистического измерения гравитационных полей [16] - [17].

Несмотря на возросший интерес к общерелятивистской кинетике, число публикаций по этой проблеме все еще остается слишком малым. По мнению автора этот факт во многом можно объяснить отсутствием до настоящего времени достаточно полной монографии по общерелятивистской кинетической теории, позволяющей специалистам в теории гравитации достаточно полно овладеть понятиями и методами релятивистской кинетики. Опубликованные до сих пор монографии либо посвящены лишь спецрелятивистской кинетике¹, либо - использованию общерелятивистской кинетики для решения проблем общерелятивистской термодинамики и гидродинамики. Данная же монография нацелена прежде всего на исследование существенно неравновесных, кинетических процессов в релятивистских полях тяготения и призвана восполнить существующий в литературе пробел.

2. Краткий исторический очерк развития общерелятивистской кинетической теории с 1911 по 1976 гг

Приведем краткий исторический обзор развития релятивистской и общерелятивистской кинетической теории. По-видимому, первой работой по релятивистской статистике можно считать работу Ютнера 1911-го года [19] (см. Табл. 1). Звездочками отмечены принципиально важные для развития релятивистской кинетики работы.

¹Как, например, классическая монография С.де Гроота, В. ван Леувена и Х. ван Верта [18]

Предисловие

Таблица 1. А: Хронология развития релятивистской кинетики: с 1911 по 1970 гг.

Год	Автор	Ссылка	Основные результаты
1911	Jüttner F. ^{*)}	[19, 20]	Релятивистское обобщение равновесной функции распределения Максвелла: $f = A \exp(-\sqrt{m^2 + p^2}/T)$
1914	Tolman R.C.	[21]	Релятивистское обобщение равновесной функции распределения Максвелла
1928	Jüttner F.	[22]	Релятивистские обобщения равновесных распределений Ферми и Бозе
1935	Walker A.G.	[23]	Вывод бесстолкновительного релятивистского кинетического уравнения для заряженных частиц
1939	D.Van Dantzing	[24]	Вычислены макроскопические моменты релятивистского распределения Максвелла
1940	Lichnerovich A., Marrot R.	[25]	Релятивистское обобщение уравнения Больцмана для случая парных упругих столкновений
1940	Marrot R.	[26]	Релятивистское обобщение уравнения Больцмана для случая парных упругих столкновений

Предисловие

Таблица 1. В: Хронология развития релятивистской кинетики

Год	Автор	Ссылка	Основные результаты
1948	Тaub А.Н.	[27]	Вычислены макроскопические моменты релятивистского распределения Максвелла и энтропия
1948	Корре Н.	[28]	Вычислены макроскопические моменты релятивистского распределения Максвелла и энтропия
1950	Власов А.А.	[29]	Выведены релятивистские уравнения Лиувилля и получены их трансформационные свойства при преобразованиях Лоренца
1952	Климонтович Ю.Л.	[30]	Получено релятивистское кинетическое уравнение для квантовой функции распределения. Впервые рассмотрены 8-ми мерные функции распределения
1954	Lindhard J.L. *)	[31]	Изучены электромагнитные колебания релятивистской плазмы на основе релятивистских уравнений Власова

*) После работы Линдхарта [31] возник бум на исследование колебаний релятивистской плазмы, - в этом направлении работали Ю.Л. Климонтович, В.П. Силин, С.Т. Беляев, Г.И. Будкер и многие другие теоретики.

Предисловие

Таблица 1. С: Хронология развития релятивистской кинетики

Год	Автор	Ссылка	Основные результаты
1955	Климонтович Ю.Л.	[32]	Получено релятивистское кинетическое уравнение для классической функции распределения на основе формализма Гамильтона 8-мерного фазового пространства
1956	Беляев С.Г., Будкер Г.И.	[33]	На основе инвариантного гамильтонова формализма и формализма 8-ми мерного фазового пространства получено релятивистское обобщение кинетического уравнения Ландау (уравнение типа Фоккера - Планка)
1957	Syng J.L.	[34]	Строгое определение релятивистской функции, функция распределения Ютнера обобщена на случай ненулевой макроскопической скорости и получена как максимально вероятная, определены макроскопические потоки
1957	Черников Н.А.	[35]	Без использования формализма Гамильтона получено релятивистское кинетическое уравнения для семимерной функции распределения с интегралом упругих парных столкновений

Таблица 1. D: Хронология развития релятивистской кинетики

Год	Автор	Ссылка	Основные результаты
1957	Черников Н.А.	[36]	Исследованы свойства релятивистского интеграла упругих парных столкновений
1957	Черников Н.А.	[37]	Интеграл парных столкновений приводится к форме Больцмана и доказывается, что он обращается в нуль равновесным распределением
1957	Черников Н.А.	[38]	Записывается интеграл столкновений многократных упругих столкновений
1959	Власов А.А.*)	[39]	Сформулированы бесстолкновительные релятивистские кинетические уравнения в произвольном гравитационном поле с помощью техники Картана расслоенных пространств.
1959	Климонтович Ю.Л.	[40]	Из релятивистского уравнения Лиувилля получена цепочка Боголюбова для $8N$ -мерных распределений

*)Работа [39] является первой работой по общерелятивистской кинетике. Именно в этой работе в кинетику введен современный формализм Картана дифференцирования в расслоении, кинетические уравнения сформулированы в явно инвариантной форме, соответствующей современной концепции статистической теории. Работы А.А. Власова по общерелятивистской кинетической теории, как и по классической и специально - релятивистской, несомненно, являются пионерскими.

Таблица 1. Е: Хронология развития релятивистской кинетики

1960	Syng J.L. *)	[41]	Впервые сформулированы основные понятия общерелятивистской статистической модели, определены моменты инвариантной семимерной функции распределения и макроскопические потоки.
1960	Климонтович Ю.Л.	[42]	На основе цепочки Боголюбова для $8N$ -мерных распределений выведено инвариантное релятивистское кинетическое уравнение для квантовой функции распределения
1960	Черников Н.А. *)	[1]	Впервые выведено релятивистское кинетическое уравнение с интегралом парных упругих столкновений относительно 7-мерного распределения в сферически симметричном гравитационном поле. Найдена равновесная функция распределения.
1961	Tauber.E., Weinberg J.W. *)	[2]	На основе инвариантного Гамильтонова формализма впервые сформулированы общерелятивистские кинетические уравнения с учетом электромагнитных полей, найдены необходимые условия статистического равновесия и равновесные решения.

Предисловие

Таблица 1. F: Хронология развития релятивистской кинетики

1962	Черников Н.А.	[3]	Выведено релятивистское кинетическое уравнение с интегралом парных упругих столкновений относительно 7-мерного распределения в произвольном гравитационном поле.
1962	Черников Н.А.	[4]	Доказана H-теорема Больцмана для релятивистских упругих столкновений. Из условия равенства потока энтропии найдена равновесная функция распределения.
1962	Черников Н.А.	[5]	Получены уравнения переноса макроскопических величин, доказано сохранение числа частиц и энергии.
1965	Черников Н.А.	[6]	Обобщением метода Града получены уравнения общерелятивистской гидродинамики в 13-ти моментном приближении на основе релятивистских кинетических уравнений с интегралом парных упругих столкновений.
1966	Власов А.А.	[7]	Впервые дано последовательное изложение общерелятивистских уравнений Власова на языке производных Картана, приведены точные их решения.

Предисловие

Таблица 1. G: Хронология развития релятивистской кинетики

1966	Lindquist E.W.	[8]	Получены общерелятивистские уравнения переноса.
1971	Stewart J.M.	[9]	Рассмотрены неравновесные кинетические процессы на основе релятивистской кинетической теории
1971	Ehlers J.*)	[10]	Впервые рассмотрены приложения релятивистской космологии, в частности, найдено решение бесстолкновительного кинетического уравнения в метрике Фридмана
1974	Ehlers J.	[11]	Систематическое изложение кинетической теории газов в общей теории относительности
1974	Игнатьев Ю.Г.**)	[43]	Впервые сформулированы основы самосогласованной кинетической теории взаимодействия гравитационных волн с релятивистским газом

*) Работа [43] является первой работой по самосогласованной общерелятивистской кинетической теории взаимодействия гравитационных волн с плазмой.

Предисловие

Таблица 1. Н: Хронология развития релятивистской кинетики

1975	Ignat'ev Yu.G.**)	[44]	Впервые сформулированы основы самосогласованной кинетической теории взаимодействия электромагнитных волн с релятивистской плазмой в гравитационном поле
1976	Игнатьев Ю.Г.***)	[45]	Впервые сформулированы основы самосогласованной кинетической теории глобального термодинамического равновесия самогравитирующей релятивистской плазмы

С работ Автора [43], [44],[45] фактически начинаются исследования Казанской школы гравитации в области общерелятивистской кинетической теории.

Ниже принята, если это не оговорено особо, система единиц, в которой $G = c = \hbar = 1$; сигнатура метрики $(- - - +)$, латинские индексы пробегают значения от 1 до 4, греческие - от 1 до 3. Ковариантные производные обозначаются запятой либо, где это удобно, символом ∇_i . Тензор Риччи определен через свертку тензора Римана по первому и третьему индексам, как и в книге [46];

$$(p, q) = g_{ik} p^i q^k$$

скалярное произведение векторов p^i и p^k . Соотношение: $A \stackrel{*}{=} B$ будет обозначать, что равенство $A = B$ имеет место в данной системе координат.

Благодарности. Автор благодарен своей жене, Валентине Ивановне Ковтун, за большую помощь по подготовке книги к изданию и Агафонову Александру Алексеевичу за подготовку макета обложки книги и выполнение ряда сложных рисунков.

Глава I

Формализм общерелятивистской кинетической теории

«Более софистическое и детальное
изложение этого предмета читатель
найдет...»

Из книги Ч.Мизнера, К.Торна,
Дж.Уилера “Гравитация” [47]

I.1 Статистическое описание среды в гравитационном поле

Центральным понятием общерелятивистской кинетической теории, как и классической, является *функция распределения*, с помощью которой вычисляются макроскопические значения наблюдаемых величин. Таким образом, функция распределения является макроскопической величиной и должна измеряться макроскопическим прибором.

Макроскопичность прибора в классической статистике означает, во-первых, макроскопичность его размеров: в его объеме $\Delta V = \Delta^3 x$ в каждый момент времени должно находиться достаточно большое число

Глава I. Формализм кинетической теории

частиц N :

$$N = \Delta V n \gg 1, \quad (\text{I.1})$$

где n - плотность числа измеряемых частиц.

Условие (I.1), однако, не является достаточным условием макроскопичности прибора. Наблюдаемые макроскопические значения динамических функций не определяют полностью состояние статистической системы, для полного описания которой необходимо знание числа частиц в каждом динамическом состоянии и в каждый момент времени. Таким образом, мы приходим к понятию фазовой плотности состояний, т.е., к понятию функции распределения.

Рассмотрим случай, когда динамическим является состояние с определенным импульсом \mathbf{p} ; тогда фазовая плотность состояний есть $F(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. Пусть $\Delta \mathbf{p}$ - точность измерения импульса макроскопическим прибором. Условие макроскопичности измерения состояния с импульсом $\mathbf{p} \pm \Delta \mathbf{p}$ аналогично (I.1):

$$N_p = (2\pi)^{-3} \Delta^3 \mathbf{r} \Delta^3 \mathbf{p} F(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \equiv (2\pi)^{-3} \Delta \Gamma f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \gg 1, \quad (\text{I.2})$$

где $\Delta \Gamma_6 = \Delta^3 \mathbf{r} \Delta^3 \mathbf{p}$ - 6-мерный фазовый объем прибора, $(2\pi)^{-3}$ - нормировочный множитель (в обычной системе единиц — $(2\pi\hbar)^{-3}$). Условие (I.2) и является условием макроскопичности прибора в классической статистике. При нарушении условия (I.2) число частиц в данном динамическом состоянии оказывается малым, поэтому наблюдаемые значения динамических функций сильно флуктуируют и отклоняются от своих макроскопических значений.

Соотношение неопределенности Гейзенберга приводит к ограничению на минимальный фазовый объем прибора:

$$\Delta \Gamma > (2\pi)^3. \quad (\text{I.3})$$

Вследствие принципа Паули две тождественные частицы с полуцелым спином S не могут находиться в одном состоянии, т.е., число фермионов в минимальном фазовом объеме не должно превышать $2S + 1$:

$$(2\pi)^{-3} \min \Delta \Gamma F(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = F(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \leq 2S + 1. \quad (\text{I.4})$$

Последнее условие приводит к более жесткому, чем (I.2), определению макроскопичности прибора:

$$\Delta \Gamma \gg (2\pi)^3. \quad (\text{I.5})$$

I.1. Среда в гравитационном поле

Релятивистская теория вносит свои дополнительные штрихи к образу макроскопического прибора. Измерение любой физической величины производится в течение конечного промежутка времени, Δt . Ограниченность скорости распространения взаимодействий налагает ограничение сверху на линейные размеры макроскопического прибора, согласно которому любые два события в приборе, относящиеся к одному акту измерения, должны находиться внутри изотропного конуса:

$$(\Delta t)^2 - (\delta \mathbf{r})^2 > 0. \quad (\text{I.6})$$

Нижний предел Δt устанавливается характерным временным масштабом эволюции статистической системы, τ , и требуемой точностью измерения, — этот предел должен быть заведомо меньше τ . Для строго стационарных систем $\tau \rightarrow \infty$, и время измерения может быть выбрано сколь угодно большим. Вместе с ним согласно (I.6) сколь угодно большими могут быть выбраны и размеры макроскопического прибора, оставаясь ограниченными лишь снизу. Однако, для существенно нестационарных систем условие (I.6) становится достаточно жестким. В случае же, когда (I.5) и (I.6) противоречат друг другу, вообще невозможно построение макроскопического прибора, и введение функции распределения становится физически бессмысленной операцией.

Такая ситуация реализуется, например, на планковских стадиях горячей Вселенной, временной масштаб эволюции которой равен ее возрасту, t . Поэтому $\Delta t \leq t$, что вследствие (I.6) приводит к условию:

$$\Delta r < t. \quad (\text{I.7})$$

Разброс значений импульсов ультрарелятивистских частиц в горячей модели Вселенной имеет порядок $1/\sqrt{t}$, поэтому условие (I.5) примет вид:

$$t \gg 1 \quad (\text{I.8})$$

и нарушается на планковских масштабах времени $t \sim 1$.

Таким образом, уже в специальной теории относительности макроскопический прибор занимает некоторое промежуточное положение между микроскопическим и макроскопическим масштабами, последний из которых определяется временем эволюции статистической системы. Однако, верхний предел масштаба макроскопического прибора не является еще органической чертой спецрелятивистской кинетики, а определяется конкретными свойствами статистической системы и спецификой

Глава I. Формализм кинетической теории

наблюдаемых величин. Аналогичная ситуация возникает и в нерелятивистской кинетике, когда измеряются макроскопически неоднородные распределения. Для измерения этой неоднородности необходим прибор с линейными размерами значительно меньшими масштаба неоднородности.

В общей же теории относительности промежуточность положения макроскопического прибора становится органической чертой общерелятивистской кинетики по следующим причинам. Первая из этих причин вполне аналогична рассмотренной выше: существование кривизны пространства - времени, свидетельствующей о наличии гравитационного поля, приводит к появлению пространственной или временной неоднородности с характерным масштабом равным радиусу кривизны $r_c = K^{-1}$, где K - кривизна пространства - времени. Четырехмерные в указанном выше смысле размеры макроскопического прибора должны быть гораздо меньше этой величины.

Однако, есть и другая, более глубокая причина, связанная с проблемой синхронизации часов. В общей теории относительности синхронизация часов в конечном объеме пространства возможна лишь в синхронных системах отсчета (ССО) [46], которые реализуются времениподобными конгруэнциями геодезических линий. Поэтому, если мы хотим получить с помощью прибора информацию об одновременном значении наблюдаемой величины, то должны сконструировать этот прибор из не связанных между собой элементов, совершающих геодезическое движение. Однако, пространственный объем геодезической трубки прибора изменяется вдоль его траектории вследствие отклонения геодезических. Например, объем геодезической трубки прибора в расширяющемся мире Фридмана растет с течением синхронного времени, в метрике Бонди - Пирани - Робинсона после прохождения гравитационного импульса объем геодезической трубки уменьшается. Изменение объема прибора приводит к неопределенности знаний об измеряемом объекте. Чтобы избежать этой неопределенности, необходимо потребовать малость геодезического отклонения всех элементов прибора, т.е., ограниченность его четырехмерных размеров:

$$|R_{ijkl}\delta^i u^j \delta^k u^l| \ll 1, \quad (\text{I.9})$$

где u^i - вектор скорости какого - либо элемента прибора, δ^i - вектор геодезического отклонения каждой точки прибора относительно выбранной. Если же различные элементы макроскопического прибора не лежат на времениподобных геодезических, то вследствие рассинхрони-

I.1. Среда в гравитационном поле

зации часов в различных точках прибора наблюдаемая динамическая величина будет измеряться в различные моменты времени с разбросом Δt , равным максимальному дефекту времени в приборе. Требование определенной точности измерения наблюдаемой величины совместно с условием времениподобности измерения (I.6) снова приводит к (I.9), т.е., к отмеченному выше условию малости четырехмерных размеров прибора по сравнению с радиусом кривизны пространства - времени.

Резюмируя, скажем, что *макроскопический прибор в общей теории относительности должен быть существенно локальным, точечно-подобным объектом, а его физика должна определяться специальной теорией относительности*. Эта ситуация напоминает ситуацию с прибором в квантовой механике, в которой сам прибор должен являться макроскопическим, классическим объектом, т.е., *инородным по отношению к измеряемой системе объектов*.

Определив макроскопический прибор как локальный объект, внутри которого справедливы законы специальной теории относительности, мы тем самым получили возможность проводить измерения макроскопических наблюдаемых величин вдоль мировой трубки прибора. Измеряя макроскопические наблюдаемые динамические функции и относя их к постоянной прибора - его фазовому объему, наблюдатель приходит к понятию фазовых плотностей динамических функций и тем самым - к функции распределения. Измеряя фазовые плотности динамических функций в каждой точке пространственноподобной гиперповерхности Σ , наблюдатель получает возможность восстановить макроскопически наблюдаемую динамическую функцию на всей гиперповерхности. Для этого необходимо достаточно плотно заполнить гиперповерхность Σ мировыми трубками наблюдателей, т.е., фактически ввести поле наблюдателей, ассоциированных с времениподобным векторным полем $u^i(x)$, ортогональным гиперповерхности Σ . Чтобы иметь возможность восстанавливать одновременное макроскопическое значение наблюдаемой динамической функции, наблюдатели должны находиться в синхронной системе отсчета, т.е., векторное поле $u^i(x)$ должно быть касательным к времениподобной геодезической конгруэнции. Если же поле $u^i(x)$ не является геодезическим, т.е., часы наблюдателей не синхронизованы, остается лишь гадать о смысле величины, полученную интегрированием фазовых плотностей динамических величин.¹ Так например, измерение полного числа частиц, полученного суммированием их локальных

¹Хотя не оставляет никакого сомнения возможность проведения такой вычислительной операции.

Глава I. Формализм кинетической теории

плотностей несинхронными наблюдателями, приведет к выводу о нарушении закона сохранения числа частиц.

В данной монографии будут рассматриваться, в основном, локальные релятивистские кинетические уравнения для классических частиц. Дифференциальный оператор в этих уравнениях определяется классическими макроскопическими полями, а интегральный оператор, вычисляемый в той же пространственно - временной точке, определяется инвариантными амплитудами матрицы рассеяния. Классичность движения частицы во внешнем гравитационном поле подразумевает малость ее комптоновской длины $\lambda_k = E^{-1}$ (E - энергия частицы) по сравнению с масштабом неоднородности гравитационного поля, т.е., по сравнению с радиусом кривизны. Этот вывод строго следует из результатов работы [48], если в последней учесть члены разложения второго порядка по постоянной Планка и сравнить их с членами нулевого порядка. При указанном условии можно одновременно пренебречь и влиянием спина на движение частицы. В инвариантной форме условие квазиклассичности движения релятивистской частицы во внешнем гравитационном поле имеет вид:

$$(u, p)K^{-1} \gg 1, \quad (\text{I.10})$$

где p_i - импульс релятивистской частицы.

Корректное введение матрицы рассеяния частиц во внешнем гравитационном поле требует возможности локального определения чистых состояний свободных частиц “на бесконечности”, т.е., вне области их взаимодействия. Таким образом, для того, чтобы внешнее гравитационное поле не влияло на акт взаимодействия частиц, т.е., для возможности описания статистической системы *локальными кинетическими уравнениями*, необходима малость эффективного радиуса взаимодействия этих частиц по сравнению с радиусом кривизны. Кроме того, акт взаимодействия должен быть мгновенным. В произвольной системе координат указанное условие 4 - мерной точечности акта взаимодействия частиц принимают вид [49]:

$$\sigma |R_{ijkl}v^i u^j v^k u^l| \ll 1, \quad (\text{I.11})$$

где v^i - вектор скорости релятивистской частицы, σ - полное сечение взаимодействия. С другой стороны, свободные состояния частиц “на бесконечности” должны реализовываться внутри макроскопического прибора, что опять - таки приводит к условию (I.11).

I.2. Канонический формализм

Таким образом, при переходе к локальным кинетическим уравнениям и макроскопический прибор и микроскопические взаимодействия элементарных частиц должны определяться физикой пространства - времени Минковского. Этот факт в сочетании с принципом локального соответствия делает возможным получение общерелятивистских кинетических уравнений с локальным интегралом столкновений путем ковариантного обобщения соответствующих уравнений спецрелятивистской теории. В монографии, однако, будут рассмотрены и нелокальные кинетические процессы.

I.2 Гамильтонова формулировка уравнений движения частиц во внешних полях

I.2.1 Канонические уравнения движения

Канонические уравнения движения релятивистской частицы имеют вид [50]:

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}; \quad \frac{dP_i}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i}, \quad (\text{I.12})$$

где $\mathcal{H}(x, P)$ - инвариантная функция Гамильтона, s - канонический параметр, x^i , P_i - динамические переменные, причем x^i - координата частицы, P_i - ее обобщенный импульс. Производная функции динамических переменных $\Psi(x, P) = \Psi(s)$ вдоль траектории частицы $x^i = x^i(s)$, $P_i = P_i(s)$ равна:

$$\frac{d\Psi}{ds} = [\mathcal{H}, \Psi], \quad (\text{I.13})$$

где введена инвариантная скобка Пуассона:

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial P_i} \frac{\partial B}{\partial x^i} - \frac{\partial B}{\partial P_i} \frac{\partial A}{\partial x^i}, \quad (\text{I.14})$$

обладающая свойством кососимметрии:

$$[B, A] = -[A, B]. \quad (\text{I.15})$$

Вследствие (I.13) и (I.15) сама инвариантная функция Гамильтона $\mathcal{H}(x, P)$ всегда является интегралом движения:

$$\mathcal{H}(x, P) = \text{Const}. \quad (\text{I.16})$$

Глава I. Формализм кинетической теории

Поэтому существует бесконечное множество способов выбора функции Гамильтона, связь между которыми осуществляется перенормировкой канонического параметра s . Удобно выбрать следующую нормировку функции Гамильтона:

$$\mathcal{H}(x, P) = \frac{1}{2}m^2, \quad (\text{I.17})$$

где m - масса покоя частицы.

С помощью функции Гамильтона в нормировке (I.17) введем контр-вариантный вектор *кинематического импульса* частицы, p^i :

$$p^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} = \frac{dx^i}{ds}. \quad (\text{I.18})$$

Обычно кинематический импульс вводят соотношением $p^i = mdx^i/ds$, что соответствует нормировке функции Гамильтона в (I.16): $\text{Const} = m$. Однако, такая нормировка оказывается неудобной для безмассовых частиц а также при определении макроскопических средних. Переход от нормировки (I.17), (I.18) к обычной осуществляется масштабным преобразованием канонического параметра $s \rightarrow s/m$.

Поскольку кинематический импульс согласно (I.18) является касательным к траектории частицы, он должен удовлетворять *соотношению нормировки*:

$$(p, p) = m^2. \quad (\text{I.19})$$

I.2.2 Функция Гамильтона

Функция Гамильтона массивной частицы, находящейся в гравитационном, векторном и скалярном полях, может быть записана в виде [50]:

$$\mathcal{H}(x, P) = \frac{1}{2} \left[\frac{g^{ik}(P_i - eA_i)(P_k - eA_k)}{1 + q\Phi/m} - mq\Phi \right], \quad (\text{I.20})$$

где A_i - векторный потенциал, e - векторный заряд частицы, Φ - скалярный потенциал, q - соответствующий скалярный заряд частицы. Этот выбор функции Гамильтона соответствует нормировке (I.17). В присутствие нескольких векторных и скалярных полей в (I.20) необходимо произвести замену:

$$eA_i \rightarrow \sum e_a A_i^{(a)}; \quad q\Phi \rightarrow \sum q_a \Phi_a.$$

1.2. Канонический формализм

В стандартной нормировке вместо (I.20) функцию Гамильтона следует выбрать в виде [51]:

$$\mathcal{H}(x, P) = \sqrt{g^{ik}(P_i - eA_i)(P_k - eA_k) - q\Phi} \quad (= m). \quad (\text{I.21})$$

Из (I.18) и (I.20) найдем связь между кинематическим и обобщенным импульсами частицы:

$$p^i = \frac{P^i - eA^i}{1 + q\Phi/m}. \quad (\text{I.22})$$

Используя связь (I.22) и явный вид функции Гамильтона (I.20) в канонических уравнениях (I.12), получим уравнения движения в Лагранжевой формулировке:

$$\left(1 + \frac{q\Phi}{m}\right) \frac{Dp^i}{ds} = eF^i_{.k}p^k + q\Phi_{,k} \left(g^{ik} - \frac{p^i p^k}{m^2}\right), \quad (\text{I.23})$$

где D - символ абсолютного дифференцирования (см., например, [41]):

$$\frac{Dp^i}{ds} = \frac{dp^i}{ds} + \Gamma^i_{jk}p^j \frac{dx^k}{ds}; \quad (\text{I.24})$$

$$F_{ik} = A_{i,k} - A_{k,i} \quad (\text{I.25})$$

- тензор Максвелла. Заметим, что из (I.25) следует $d(p, p) = 0$, т.е.:

$$(p, p) = \text{Const}. \quad (\text{I.26})$$

Уравнения движения (I.25) могут быть получены также на основе вариационного формализма из функции действия:

$$S = - \int (m + q\Phi) ds - e \int A_i dx^i. \quad (\text{I.27})$$

1.2.3 Линейные интегралы движения

Подставляя в (I.13) $\Psi = (\xi, P)$, где $\xi^i(x)$ - произвольное векторное поле, и используя явный вид функции Гамильтона (I.20), найдем необходимые и достаточные условия существования *линейного интеграла движения*:

$$(\xi, P) = \text{Const} : \quad (\text{I.28})$$

Глава I. Формализм кинетической теории

$$\mathbb{L}_\xi A_i = 0; \quad (\text{I.29})$$

$$\mathbb{L}_\xi \frac{g_{ik}}{m + q\Phi} = 0, \quad (m \neq 0), \quad (\text{I.30})$$

где \mathbb{L}_ξ - производная Ли вдоль направления $\xi(x)$ (см., например, [52]).

Для безмассовых частиц ($m \equiv 0$) условия (I.30) необходимо заменить следующими:

$$\mathbb{L}_\xi g_{ik} = \sigma(x)g_{ik}; \quad (m \equiv 0), \quad (\text{I.31})$$

где $\sigma(x)$ - произвольная скалярная функция.

I.3 Релятивистское фазовое пространство и теорема Лиувилля

I.3.1 Релятивистское фазовое пространство

Присоединяя к каждой точке x риманова пространства V_4 пучок всевозможных ковекторов P , получим 8-ми мерное релятивистское *фазовое пространство*, Γ . Это пространство является векторным расслоением, причем его база X - метрическое пространство V_4 (*конфигурационное пространство*), а слой $P(x)$ - касательное в точке x *пространство импульсов*:

$$\Gamma = P(x) \times X. \quad (\text{I.32})$$

При произвольных невырожденных преобразованиях координат базы X :

$$x'^i = f^i(x); \quad \det \left\| \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \right\| \neq 0 \quad (\text{I.33})$$

координаты в слое $P(x)$ преобразуются как ковариантные компоненты вектора:

$$P'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} P_k. \quad (\text{I.34})$$

1.3. Релятивистское фазовое пространство

Топология импульсного пространства является топологией бесконечного четырехмерного параллелепипеда. Каждая частица описывается траекторией

$$\{x^i(s), P_i(s)\} = \eta_J(s) \subset \Gamma; \quad (J = \overline{(1, 8)}) \quad (I.35)$$

в фазовом пространстве Γ , причем частицы движутся по гиперповерхностям (I.20) этого пространства. В терминах кинематического импульса p данные гиперповерхности в каждой точке базы X представляют пары непересекающихся псевдосфер (массовых поверхностей).

Инвариантными по отношению к преобразованиям (I.33) элементами объемов конфигурационного (dX) и импульсного (dP) пространств являются:

$$dX = \sqrt{-g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4, \quad (I.36)$$

$$dP = \frac{1}{\sqrt{-g}} dP_1 \wedge dP_2 \wedge dP_3 \wedge dP_4. \quad (I.37)$$

В дальнейшем для простоты знак \wedge внешней дифференциальной ко-сой формы будем опускать. Инвариантный элемент объема фазового пространства $d\Gamma$ равен:

$$d\Gamma = dXdP = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 dP_1 dP_2 dP_3 dP_4, \quad (I.38)$$

- благодаря канонической сопряженности динамических переменных x^i и P_i явная зависимость от метрики исчезает из определения элемента объема фазового пространства.

Заметим, что вследствие канонических уравнений движения (I.12) вдоль любой фазовой траектории частицы выполняется соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds} + \frac{\partial}{\partial P_i} \frac{dP_i}{ds} = 0. \quad (I.39)$$

Если фазовым переменным (I.35) сопоставить 8-ми мерный «вектор фазовой скорости» $V_J = d\eta_J/ds$, то соотношение (I.39) может быть записано в более изящном виде:

$$\frac{\partial V_J}{\partial \eta_J} = 0. \quad (I.40)$$

Наряду с введенным фазовым пространством можно рассматривать изоморфное ему расслоение:

$$\Gamma^- = P^-(x) \times X, \quad (I.41)$$

Глава I. Формализм кинетической теории

где $P^-(x)$ представляет собой пучок ковекторов кинематического импульса p_i , приложенного к точке $x \in X$. Используя связь (I.22), преобразуем элемент объема пространства импульсов (I.37):

$$dP = \frac{\left(1 + \frac{q\Phi}{m}\right)^4}{\sqrt{-g}} dp_1 \wedge dp_2 \wedge dp_3 \wedge dp_4. \quad (\text{I.42})$$

Можно, наконец, совершить еще один изоморфизм и перейти к импульсному пространству контрвариантных кинематических импульсов, Γ^+ ; инвариантный элемент объема dP тогда примет вид:

$$dP = \left(1 + \frac{q\Phi}{m}\right)^4 \sqrt{-g} dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3 \wedge dp^4. \quad (\text{I.43})$$

I.3.2 Теорема Лиувилля

Рассмотрим преобразование элемента объема фазового пространства $d\Gamma$ при движении вдоль траектории частицы, т.е., исследуем, как деформируется трубка бесконечно близких фазовых траекторий тождественных частиц. Для этого совершим инфинитезимальный сдвиг δs вдоль фазовой траектории одной из частиц трубки:

$$\begin{aligned} x^i(s') &= x^i(s) + \frac{dx^i}{ds} \delta s; \\ P_i(s') &= P_i(s) + \frac{dP_i}{ds} \delta s. \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

Используя в (I.44) канонические уравнения движения (I.12) и рассматривая соотношения (I.44) как инфинитезимальные преобразования фазовых координат, получим для матрицы преобразования (E - единичная матрица):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_{J'}}{\partial \eta_K} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} E + A\delta s & B\delta s \\ \hline C\delta s & E - A\delta s \end{array} \right]. \quad (\text{I.45})$$

I.3. Релятивистское фазовое пространство

Таким образом, якобиан преобразования (I.44) равен:

$$\det \left\| \frac{\partial \eta_{J'}}{\partial \eta_K} \right\| = 1 + O(\delta^2 s), \quad (\text{I.46})$$

вследствие чего сохраняется элемент объема фазовой трубки:

$$d\Gamma(s') = d\Gamma(s), \quad (\text{I.47})$$

Аналогичное соотношение в классической механике называется *теоремой Лиувилля*.

Заметим, что аналогичные (I.47) соотношения для изоморфных фазовых пространств Γ^- и Γ^+ не выполняются:

$$d\Gamma^\pm(s') \neq d\Gamma^\pm(s), \quad (\text{I.48})$$

так как пары (x^i, p_i) и (x^i, p^i) не являются *канонически сопряженными*.

I.3.3 Конфигурационные производные функций динамических переменных

Тот факт, что фазовое пространство есть векторное расслоение, приводит к тому, что обычная ковариантная производная по Риччи от функций динамических переменных не является тензорной операцией в фазовом пространстве [7]. Вследствие этого дифференцирование по Риччи в фазовом пространстве должно быть заменено на дифференцирование по Картану [7], [53]:

$$\tilde{\nabla}_i = \nabla_i + \Gamma_{ij}^k P_k \frac{\partial}{\partial P_j} \quad (\text{I.49})$$

где ∇_i - оператор ковариантного дифференцирования по Риччи. Оператор $\tilde{\nabla}_i$, который в дальнейшем мы будем называть *производной Картана*, определен таким образом, что:

$$\tilde{\nabla}_i P_k = 0. \quad (\text{I.50})$$

Пусть $\Psi(x, P) \equiv \Psi(\eta)$ есть скалярная функция по отношению к преобразованиям (I.33) - (I.34) фазового пространства. Произвольная скалярная функция в фазовом пространстве может являться лишь функцией инвариантов [16]:

$$\Psi(\eta) = \Psi(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N), \quad (\text{I.51})$$

Глава I. Формализм кинетической теории

где $\phi_s(\eta)$ есть s -линейные симметричные функции вектора импульса:

$$\phi_s(\eta) \stackrel{def}{=} \phi^{i_1 \dots i_s}(x) P_{i_1} \dots P_{i_s}, \quad (\text{I.52})$$

а $\phi^{i_1 \dots i_s}(x)$ - s -валентные полностью симметричные контрвариантные тензоры в конфигурационном пространстве X .

Вычислим производную Картана от функции (I.51):

$$\tilde{\nabla}_i \Psi(\eta) = \sum_s \frac{\partial \Psi}{\partial \phi_s} \tilde{\nabla}_i \phi_s(\eta). \quad (\text{I.53})$$

Используя (I.50), найдем:

$$\tilde{\nabla}_i \phi_s(\eta) = \phi^{i_1 \dots i_s}_{,i} P_{i_1} \dots P_{i_s}. \quad (\text{I.54})$$

Таким образом, получим следующее символическое правило вычисления производной Картана от скаляра Ψ [16], [54], [55]:

$$\tilde{\nabla}_i \Psi(x, P) = \nabla_i [[\Psi(x)], P], \quad (\text{I.55})$$

которое означает, что для вычисления производной Картана от функции $\Psi(x, P)$ достаточно вычислить от нее ковариантную производную по Риччи так, как если бы вектор импульса был ковариантно постоянным.

Поскольку любой тензор в фазовом пространстве может иметь лишь структуры вида $a_{i_1 \dots i_k} \Psi(x, P)$ (где $\phi(x)$ - тензор в конфигурационном пространстве, а Ψ - скаляр), либо $P_{i_1} \dots P_{i_k} \Psi(x, P)$, либо комбинацию таких структур, то правило вычисления производной Картана (I.55) распространяется и на любое тензорное поле $\Psi(\eta)$ [16].

Аналогично (I.49) и (I.50) можно ввести и производные Картана в расслоении Γ^- . Используя связь (I.22), получим связь между этими операторами:

$$\tilde{\nabla}_i = \tilde{\nabla}_i^{(-)} - \frac{e A_{j,i}}{1 + \frac{q\Phi}{m}} \frac{\partial}{\partial p_j} + \partial_i \ln \left| 1 + \frac{q\Phi}{m} \right| p_j \frac{\partial}{\partial p_j}, \quad (\text{I.56})$$

причем теперь:

$$\tilde{\nabla}_i^{(-)} p_j = 0. \quad (\text{I.57})$$

I.3. Релятивистское фазовое пространство

В отсутствие векторных и скалярных полей $P_i = p_i$, и расслоения Γ и Γ^- совпадают; вместе с тем в этом случае совпадают и соответствующие производные Картана.

Наряду с этими производными можно ввести и производную Картана в расслоении Γ^+ , как она и была впервые введена в статистику А.А.Власовым [7]:

$$\tilde{\nabla}_i^{(+)} = \nabla_i - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial p^k}, \quad (\text{I.58})$$

причем:

$$\tilde{\nabla}_i^{(+)} p^k = 0. \quad (\text{I.59})$$

С помощью оператора $\tilde{\nabla}_i$ каноническим уравнениям движения (I.12) и скобкам Пуассона (I.13) можно придать явно ковариантные формы, пригодные и для вычисления производных вдоль фазовых траекторий и от тензорных динамических функций [16], [17]:

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}; \quad \frac{DP_i}{ds} = -\tilde{\nabla}_i \mathcal{H}; \quad (\text{I.60})$$

$$[\mathcal{H}, \Psi] = \tilde{\nabla}_i \Psi \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} - \tilde{\nabla}_i \mathcal{H} \frac{\partial \Psi}{\partial P_i}. \quad (\text{I.61})$$

С учетом равенства вторых смешанных производных функции Гамильтона соотношение (I.61) может быть также записано в форме [50]:

$$[\mathcal{H}, \Psi] = \tilde{\nabla}_i \left(\Psi \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} \right) - \frac{\partial}{\partial P_i} \left(\Psi \tilde{\nabla}_i \mathcal{H} \right). \quad (\text{I.62})$$

Благодаря явной ковариантности выражений (I.61), (I.62) скобки Пуассона наследуют все тензорные свойства динамических функций.

I.3.4 Локальные преобразования Лоренца в слое

В ряде приложений требуется записать бесстолкновительные кинетические уравнения в системе отсчета, ассоциированной с времениподобным единичным векторным полем $v_i(x)$ ($(v, v) = 1$, касательным к мировой трубке наблюдателей: $x^i = x^i(\tau')$). При этом, однако, требуется сохранить координатную систему $\{x^i\}$ и связанные с ней тензорные поля. Таким образом, речь идет о выборе в пучке импульсов $P(X)$ другого

Глава I. Формализм кинетической теории

базиса, векторы которого неколлинеарны смещениям dx^i в римановой базе. Эта операция выбора нового базиса в $P(X)$ осуществляется локальными преобразованиями Лоренца в слое:

$$p'^i = \Omega(x)_k^i p^k, \quad (\text{I.63})$$

где Ω_k^i - тензор в X_4 , являющийся псевдоортогональной матрицей перехода (см., например, [56]) в слое $P(X)$:

$$\Omega_k^i \Omega_l^j g_{i'j'} = g_{kl}; \quad \Omega_k^i \Omega_l^j g^{kl} = g^{i'j'}, \quad (\text{I.64})$$

причем матрицы $\|g_{ij}\|$ и $\|g_{i'j'}\|$ совпадают, так мы лишь меняем базис в $P(X)$, не изменяя координат точки базы X . Таким образом, имеет место соотношение:

$$g_{i'k'} = g_{ik}, \quad \text{if } i' = i, k' = k. \quad (\text{I.65})$$

Таким образом в этой секции во избежании путаницы мы будем обозначать величины, претерпевшие локальные преобразования Лоренца, символами:

$$A'^i = \Omega_k^i A^k,$$

согласно (I.63). Величины же, не подвергающиеся преобразованиям Лоренца, в нужных местах будем просто снабжать штрихованными индексами согласно (I.65).

Вследствие псевдоортогональности матрицы перехода имеют место соотношения:

$$\det \|\Omega_k^i\| = \det \|\Omega_{i'}^k\| = 1. \quad (\text{I.66})$$

Запишем также формулы локальных преобразований Лоренца для обобщенного импульса:

$$P'_{i'} = \Omega_{i'}^j P_j, \quad (\text{I.67})$$

где $\Omega_{i'}^j$ - обратная матрица перехода. Так как Ω_k^i - псевдоортогональная матрица, то имеет место соотношение:

$$\Omega_{i'}^j = g^{jm} g_{k'l'} \Omega_m^l. \quad (\text{I.68})$$

Заметим, что вследствие псевдоортогональности матрицы перехода имеет место соотношение:

$$(p, p) = m^2 \rightarrow (p', p') = m^2. \quad (\text{I.69})$$

I.3. Релятивистское фазовое пространство

Производя локальные преобразования Лоренца в функции Гамильтона (I.20), приведем последнюю к виду:

$$\mathcal{H}(x, P) = \frac{1}{2} \left[\frac{g^{ik} (\Omega_i^j P_j - eA_i) (\Omega_k^l P_l - eA_k)}{1 + q\Phi/m} - mq\Phi \right] = \frac{1}{2} m^2. \quad (\text{I.70})$$

С учетом псевдоортогональности матрицы перехода (I.70) можно записать в виде, аналогичном (I.20):

$$\mathcal{H}'(x, P') = \frac{1}{2} \left[\frac{g^{ik} (P'_i - eA'_i) (P'_k - eA'_k)}{1 + q\Phi/m} - mq\Phi \right], \quad (\text{I.71})$$

где введено:

$$A'_k(x) = g_{kj} \Omega_i^j A^i(x). \quad (\text{I.72})$$

Таким образом, в конечном итоге функция Гамильтона принимает свой первоначальный вид, если данным локальным преобразованиям Лоренца подвергнуть и векторный потенциал.

Используя явно ковариантную форму записи скобки Пуассона (I.62), преобразуем ее к неканонической паре переменных $\{x^i, P'_i\}$. Вычисляя, найдем:

$$\left(\frac{\partial P'_k}{\partial x^i} \right)_P = P'_m \Omega_i^m \partial_i \Omega_k^i; \quad (\text{I.73})$$

$$\frac{\partial P'_k}{\partial P_j} = \Omega_k^j. \quad (\text{I.74})$$

Проводя громоздкие, но несложные выкладки, можно получить соотношение:

$$\tilde{\nabla}_i \Psi(x, P) = \tilde{\nabla}'_i(x, P') + \Omega_j^l \nabla_i \Omega_k^j P_l \frac{\partial}{\partial P'_k}, \quad (\text{I.75})$$

где введена производная Картана по отношению к Лоренц-образу обобщенного импульса:

$$\tilde{\nabla}'_i = \nabla_i + \Gamma_{ik'}^{j'} P'_j \frac{\partial}{\partial P'_k}. \quad (\text{I.76})$$

Используя ковариантную форму записи скобки Пуассона (I.62) и соотношения (I.73) — (I.76), получим:

$$[\mathcal{H}, \Psi] = \Omega_{l'}^i \left(\tilde{\nabla}_{l'} \Psi' \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_{l'}} - \tilde{\nabla}_{l'} \frac{\partial \Psi'}{\partial P_{l'}} \right) + \\ + \Omega_j^m \left(\Omega_{l'}^i \nabla_i \Omega_{k'}^j - \Omega_{k'}^i \nabla_i \Omega_{l'}^j \right) P_{m'} \frac{\partial \Psi'}{\partial P_{k'}} \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_{l'}}. \quad (\text{I.77})$$

Учитывая дифференциальное следствие псевдоортогональности матрицы перехода:

$$\nabla_i (\Omega_j^m \Omega_{k'}^j) = 0, \quad (\text{I.78})$$

запишем (I.77) в более компактной форме:

$$[\mathcal{H}, \Psi] = \Omega_{l'}^i \left(\tilde{\nabla}_{l'} \Psi' \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_{l'}} - \tilde{\nabla}_{l'} \frac{\partial \Psi'}{\partial P_{l'}} \right) + \\ + \nabla_i \Omega_j^m \left(\Omega_{k'}^i \Omega_{l'}^j - \Omega_{l'}^i \Omega_{k'}^j \right) P_{m'} \frac{\partial \Psi'}{\partial P_{k'}} \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_{l'}}. \quad (\text{I.79})$$

Перейдем теперь к установлению явного вида матрицы лоренцевского преобразования, Ω_k^i . В наиболее полном виде преобразования Лоренца приведены в книге Фока [57] - переход в систему отсчета, движущуюся относительно данной с *четырёхмерной* скоростью v_i , описывается матрицей перехода:

$$\Omega_i^4 = v_i; \quad \Omega_4^i = v_i; \\ \Omega_\beta^{\alpha'} = \delta_\beta^{\alpha'} - \frac{v^{\alpha'} v_\beta}{v_4 + 1}. \quad (\text{I.80})$$

Обратная матрица Ω_k^i получается транспонированием соответствующей матрицы перехода с последующими операциями поднятия и опускания индексов:

$$\Omega_k^i = \Omega_m^{j'} g_{j'k'} g^{mi}.$$

Для того, чтобы представить преобразования Лоренца в явно ковариантном виде, введем исходную систему отсчета, ассоциированную с единичным времениподобным векторным полем $u^i(x)$, касательным к линиям времени τ , так что:

$$u^i = (0, 0, 0, u^4); \quad (u, u) = 1. \quad (\text{I.81})$$

1.3. Релятивистское фазовое пространство

Введем оператор ортогонального проектирования на векторное поле u^i :

$$\mathcal{P}_k^i(u) = \delta_k^i - u^i u_k. \quad (\text{I.82})$$

Очевидно, что если W^i - произвольный вектор, то в системе отсчета (I.81) имеют место соотношения:

$$\mathcal{P}_k^A(u)W^k \stackrel{*}{=} 0; \quad \mathcal{P}_k^\alpha(u)W^k \stackrel{*}{=} W^\alpha.$$

Таким образом, мы можем записать:

$$\Omega_k^{\prime i} = u^{i'} v_k - \mathcal{P}_j^{i'}(u)v^j u_k + \mathcal{P}_l^{i'}(u)\mathcal{P}_k^m(u) \left[\delta_m^l - \frac{v^l v_m}{(u, v) + 1} \right]. \quad (\text{I.83})$$

Проводя необходимые действия, получим окончательно:

$$\Omega_k^{\prime i} = \delta_k^{i'} - \frac{v^{i'} v_k + u^{i'} u_k + v^{i'} u_k}{(u, v) + 1} + u^{i'} v_k \left[1 + \frac{(u, v)}{(u, v) + 1} \right]. \quad (\text{I.84})$$

Отметим, что вследствие псевдоортогональности матрицы лоренцевых преобразований:

$$\det \left\| \Omega_k^{\prime i} \right\| = 1, \quad (\text{I.85})$$

поэтому преобразования слоя типа (I.63) не изменяют фазового объема системы.

1.3.5 Интегральные операции в фазовом пространстве

Вследствие структуры фазового пространства операция интегрирования по фазовому объему скалярной динамической функции $\Psi(\eta) \equiv \Psi(x, P)$ должна пониматься как косое интегрирование в расслоении Γ :

$$\int_{\Gamma} \Psi(\eta) d\Gamma = \int_X dX \int_{P(x)} dP \Psi(x, P). \quad (\text{I.86})$$

Операция, перестановочная по отношению к (I.86):

$$\int_{P(x)} dP \int_X dX \Psi(x, P) \quad (\text{I.87})$$

Глава I. Формализм кинетической теории

в произвольных римановых пространствах и произвольных координатах лишена смысла, поскольку пучок импульсов $P(x)$ приложен к точке x конфигурационного пространства, и преобразования координат (I.33) - (I.34) определены именно в этой точке. Переход от некоторой точки x конфигурационного пространства к некоторой другой точке x' сопровождается вращением импульсного пространства, причем относительный поворот векторов импульса определяется не только координатами x, x' , но и формой линии, вдоль которой переносится касательное пространство. В результате (I.87) становится неоднозначной операцией.

В ряде приложений, тем не менее, требуется произвести перестановку интегралов в (I.86). В таких случаях необходимо зафиксировать биекцию, которая бы устанавливала взаимно - однозначное соответствие между импульсами, приложенными к различным точкам конфигурационного пространства. Одной из наиболее удобных форм указанной биекции является параллельный перенос импульсного пространства вдоль геодезических, соединяющих две точки конфигурационного пространства.

Выясним, тем не менее, в каких случаях в интеграле (I.86) можно изменять порядок интегрирования без дополнительных оговорок. Для того, чтобы операция (I.87) была определена однозначно, необходимо, чтобы вектор импульса P_i переносился параллельно вдоль любой кривой $x^i = x^i(v)$ в X_4 , т.е., (см., например, [41]):

$$\frac{DP_i}{dv} \equiv P_{i,j} \frac{dx^j}{dv} = 0.$$

Поскольку результат перенесения не должен зависеть от кривой, вектор P_i должен быть ковариантно постоянным. Но тогда вследствие независимости конфигурационных и импульсных координат должны выполняться условия:

$$\Gamma_{ij}^k P_k = 0,$$

т.е., вследствие произвольности импульса во всем X_4 должно быть:

$$\Gamma_{ij}^k = 0.$$

Таким образом, операция (I.87) определена однозначно лишь в декартовых координатах плоского пространства.

I.3. Релятивистское фазовое пространство

Введем в рассмотрение тензорное поле в конфигурационном пространстве:

$$\Psi^{i_1 i_2 \dots i_s}(x) = \int_{\mathbf{P}(x)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}_{i_1}} \dots \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}_{i_s}} d\mathbf{P}, \quad (\text{I.88})$$

которое назовем s -м моментом относительно динамического скаляра $\Psi(x, \mathbf{P})$. Интегрирование в (I.88) проводится по бесконечному четырехмерному параллелепипеду. Вследствие (I.55) выполняется интегральное соотношение [55]:

$$\int_{\mathbf{P}(x)} p^{i_1} \dots p^{i_s} \tilde{\nabla}_i^+ \Psi(x, \mathbf{P}) d\mathbf{P} = \nabla_i \Psi^{i_1 \dots i_s}(x), \quad (\text{I.89})$$

где производная Картана определена по отношению к кинематическому импульсу.

Рассмотрим интеграл:

$$\int_{\mathbf{P}(x)} [\mathcal{H}, \Psi] d\mathbf{P}, \quad (\text{I.90})$$

где $\Psi(x, \mathbf{P})$ - произвольная тензорная динамическая функция. Используя представление (I.62) скобок Пуассона и интегрируя по частям, получим:

$$\int_{\mathbf{P}(x)} [\mathcal{H}, \Psi] d\mathbf{P} = \nabla_i \int_{\mathbf{P}(x)} p^i \Psi(x, \mathbf{P}) d\mathbf{P} - \int_{\mathcal{P}_\infty} d\mathcal{P}^i \Psi \tilde{\nabla}_i \mathcal{H}. \quad (\text{I.91})$$

где \mathcal{P}_∞ - гиперповерхность, охватывающая импульсное пространство. Налагая на функцию $\Psi(x, \mathbf{P})$ условие:

$$\Psi(x, \mathbf{P})|_{\mathcal{P}_\infty} = 0, \quad (\text{I.92})$$

получим важное интегральное соотношение [50]:

$$\int_{\mathbf{P}(x)} [\mathcal{H}, \Psi] d\mathbf{P} = \nabla_i \int_{\mathbf{P}(x)} p^i \Psi(x, \mathbf{P}) d\mathbf{P}. \quad (\text{I.93})$$

I.4 Инвариантная функция распределения

I.4.1 Введение функции распределения

Введение инвариантной функции распределения в 8-ми мерном фазовом расслоении с римановой базой не является такой очевидной операцией, как это может показаться на первый взгляд. Во - первых, классическая функция распределения тождественных частиц определена на 6 - мерном фазовом пространстве: $\dim X = \dim P = 3$, причем интеграл от этой функции по всему фазовому пространству равен полному числу частиц *в каждый момент времени*. Интегрирование этой величины по времени дало бы бесконечность.

Во - вторых, время в классической физике является абсолютным, поэтому определение полного числа частиц является однозначной операцией.

И, наконец, в - третьих, собственное время релятивистской частицы может быть лишь скрытым параметром статистической системы, поскольку, определяя статистические средние в окрестности какой - либо мировой линии X_4 , макроскопический наблюдатель имеет возможность измерять лишь координаты, импульсы частиц и плотности вероятности, но не имеет возможность измерять собственное время каждой частицы.

Конечно, можно отказаться от попыток сохранить в релятивистской статистике классический смысл функции распределения и определить статистические средние интегрированием некоторой инвариантной функции по четырехмерному конфигурационному пространству. Для этого есть серьезные основания. Как мы отмечали в разделе I.1, каждое физическое измерение характеризуется некоторым четырехмерным объемом $\Delta\Omega$ конфигурационного пространства и соответствующим объемом импульсного пространства ΔP , т.е., в конечном итоге, некоторым объемом $\Delta\Gamma$ 8 - мерного фазового пространства. Элемент объема $\Delta\Gamma$ и определяет точность измерения динамического состояния статистической системы данным прибором. Строго говоря, измерение плотности числа частиц в каком либо состоянии возможно лишь для консервативных систем при условии их стационарности. Если система неконсервативна, то частицы пересекают фазовые границы прибора, и точное определение числа частиц в приборе невозможно.

В классической статистике скорость света бесконечна², поэтому становится принципиально возможным выбор столь малого временного ин-

²Точнее, средние скорости частиц малы по сравнению со скоростью света.

1.4. Инвариантная функция распределения

тервала измерения Δt , в течение которого перенос динамических величин через фазовые границы прибора пренебрежимо мал. Релятивизм кардинально изменяет эту ситуацию. Если частицы в статистической системе движутся с околосветовыми скоростями, то для того, чтобы пренебречь их движением через фазовые границы прибора, линейные размеры прибора должны быть гораздо больше длины пути, пробегаемого ультрарелятивистской частицей за время измерения Δt . Однако, это условие противоречит условию (1.6) времениподобности акта измерения. Поэтому прямое измерение плотности числа релятивистских частиц становится невозможным и, следовательно, эта величина не является наблюдаемой в релятивистской статистике. Она лишь условно наблюдаема в достаточно однородных статистических системах, когда потоки частиц уходящих и входящих через фазовые границы прибора взаимно скомпенсированы в среднем.

Вместо плотности состояний экспериментаторы фактически измеряют фазовые плотности потоков релятивистских частиц. Рассмотрим типичный для спектроскопии быстрых частиц пример, когда распределение γ - квантов исследуется сцинтилляционным счетчиком. Преобразованные монокристаллом поваренной соли в световые вспышки различной интенсивности и усиленные фотоэлектронным множителем сигналы от γ - квантов анализируются затем на N - канальном анализаторе импульсов. Рабочее тело сцинтиллятора имеет вполне определенный объем, продиктованный величиной энергии регистрируемых γ - квантов: с увеличением энергии последних должен увеличиваться и объем сцинтиллятора вследствие увеличения пробега фотонов. Этот объем, ΔV и является трехмерным объемом прибора. При этом, однако, каждый детектор характеризуется конечным временем разрешения, $\Delta t = \tau$, внутри которого он не может разделить два разных события и воспринимает их как одно. Каждый данный счетчик чувствителен к γ - квантам в определенном диапазоне энергий: $[E_i, E_i + \Delta E]$. Для изотропного детектора величина $\frac{4}{3}\pi(\Delta E)^3$ является импульсным объемом прибора. Импульсный же объем одного акта измерения определяется числом каналов анализатора, т.е., величиной $\frac{4}{3}\pi(\Delta E)^3/N$.

При небольших временах измерения, $\Delta t = t$, число отсчетов в различных каналах анализатора еще слишком мало и статистический разброс слишком велик. Чтобы достаточно точно восстановить спектр γ - квантов, экспериментатор вынужден увеличивать время измерения. Во многих спектроскопических экспериментах типа ЯГР измерения длятся сутками, а иногда и месяцами. При условии стационарности потока

Глава I. Формализм кинетической теории

γ - квантов число отсчетов в каналах анализатора будет расти в среднем линейно со временем, вместе с тем статистические ошибки будут падать пропорционально $1/\sqrt{t}$. В типичных спектроскопических измерениях стационарность потока частиц обеспечивается стационарностью известного источника излучения и стационарностью внешних условий.

Если линейные размеры детектора гораздо больше длины пробега γ - квантов в веществе сцинтиллятора, число регистрируемых γ - квантов будет прямо пропорционально площади поверхности последнего. Таким образом, для получения объективной характеристики потока γ - квантов экспериментатор *вынужден* поделить число отсчетов в канале анализатора на ширину канала $\Delta E/N$, телесный угол “зрения детектора” (в рассматриваемом примере — 4π), площадь поверхности сцинтиллятора, ΔS , и время измерения t . В результате он получит величину, называемую плотностью потока: число частиц / (эрг стерадиан см² с), делением которой на скорость γ - квантов наблюдатель восстановит функцию распределения последних. Из рассмотренного примера уже видно, что функция распределения в релятивистской статистике является вторичным понятием, первичным же понятием становится фазовая плотность потока частиц.

Развитие физики элементарных частиц, астрофизики и космологии приводит к необходимости регистрации ультрарелятивистских слабо-взаимодействующих частиц: нейтрино, гравитонов, гравитино и т.п. Увеличение энергии ускорителей вследствие восстановления скейлинга³ в области сверхвысоких энергий также приводит к необходимости детектирования слабо-взаимодействующих частиц. В этих условиях становится принципиально невозможным создание детекторов с линейными размерами сколь-нибудь сравнимыми с длиной пробега частиц. В лучших случаях возможно построение детекторов с линейными размерами на 8 — 10 порядков меньших длины пробега регистрируемых величин. В этом случае число регистрируемых детектором частиц становится пропорциональным рабочему объему детектора, и для определения объективных характеристик распределения частиц экспериментатор *вынужден* относить число отсчетов в канале анализатора не к рабочей площади детектора, а к объему последнего. В результате он *вынужден* вводить в обиход новые величины, имеющие размерность: число частиц / (эрг стерадиан см³ с). Таким образом, развитие физики высоких энергий приводит к необходимости введения наблюдаемых четырехмерных

³ Масштабной инвариантности взаимодействий.

I.4. Инвариантная функция распределения

плотностей динамических величин. Введение таких плотностей могло бы превратить релятивистскую статистику в теорию, инвариантную на всех этапах вычислений.

В данной монографии мы, однако, будем рассматривать кинетическую теорию, основанную на обычной вероятностной трактовке функции распределения. Относительный характер времени приводит к необходимости введения поля наблюдателей для сохранения классического смысла вероятности. Введем в X_4 поле наблюдателей, ассоциированных с единичным времениподобным вектором $u^i(x)$:

$$(u, u) = 1, \quad (\text{I.94})$$

по часам которых будем производить измерения. Для синхронизации часов наблюдателей необходима геодезичность поля $u^i(x)$:

$$\frac{Du^i}{d\tau} = 0, \quad (\text{I.95})$$

где τ - синхронизованное собственное время наблюдателей, к мировым линиям которых касателено векторное поле $u^i(x)$. Гиперповерхность $\tau = \text{Const}$, ортогональная полю наблюдателей $u^i(x)$:

$$u_i dx^i = 0, \quad (\text{I.96})$$

является пространственноподобной (Рис. 2). В дальнейшем будем обозначать эту гиперповерхность символом V ; векторный элемент ее площади равен:

$$d\Sigma_i = u_i dV, \quad (\text{I.97})$$

где dV инвариантный элемент объема на V :

$$dV = \sqrt{-\tilde{g}} d\tilde{x}^1 \wedge d\tilde{x}^2 \wedge d\tilde{x}^3, \quad (\text{I.98})$$

а \tilde{x}^α ($\alpha = \overline{1, 3}$) - внутренние координаты гиперповерхности V .

Пусть теперь $p^i(s) = dx^i/ds$ - кинематический импульс релятивистской частицы. Из локальных преобразований Лоренца нетрудно получить связь между синхронным временем τ и собственным временем s частицы:

$$\frac{d\tau}{ds} = (u(\tau), p(s)), \quad (\text{I.99})$$

Глава I. Формализм кинетической теории

разрешая которую как дифференциальное уравнение при заданных $u^i(\tau)$ и $p^i(s)$, найдем:

$$s = s^*(\tau). \quad (\text{I.100})$$

Определим инвариантную функцию распределения тождественных частиц $F(x, P)$ следующим образом [50]:

$$F(x, P)\delta[s - s^*(\tau)]d\Gamma = \boxed{\text{Количество частиц в области } d\Gamma \text{ с центром в точке } \{x, P\} \text{ на гиперповерхности } \tau = \text{Const} .} \quad (\text{I.101})$$

Согласно (I.101) полное число тождественных частиц на гиперповерхности V равно:

$$N(\tau) = \int_{\Gamma} \delta[s - s^*(\tau)]F(\eta)d\Gamma; \quad (\text{I.102})$$

интегрирование в (I.102) распространяется на все фазовое пространство.

Определенные таким образом статистические средние не зависят от выбора системы координат, однако, зависят от выбора гиперповерхности V , задаваемой полем наблюдателей u^i , т.е., зависят от выбора системы отсчета [50].

I.4.2 Статистические средние от динамических функций

Введем статистическое среднее от скалярной функции динамических переменных $\psi(\eta)$:

$$\Psi(\tau) = \int_{\Gamma} \delta[s - s^*(\tau)]F(\eta)\psi(\eta)d\Gamma. \quad (\text{I.103})$$

I.4. Инвариантная функция распределения

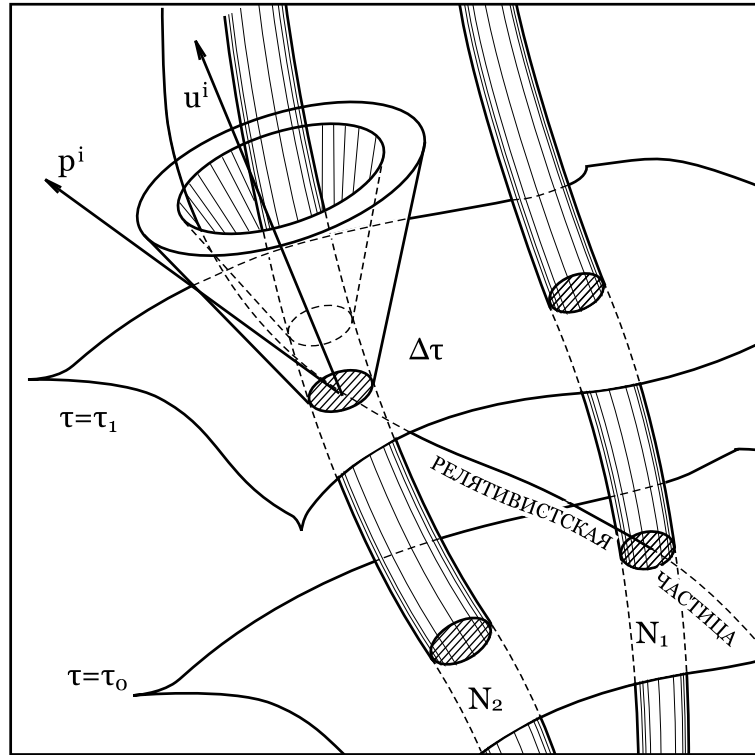


Рис. 2. На рисунке показаны геодезические трубки двух синхронных наблюдателей, ассоциированных с геодезическим полем $u^i(x)$, касательным в каждой точке к линиям времени. Пространственноподобная гиперповерхность $\tau = \text{Const}$ является трехмерным пространством; сечение этой поверхности геодезической трубкой есть тело макроскопического прибора. Траектория релятивистской частицы в момент синхронного времени τ_0 пересекает геодезическую трубку наблюдателя N_1 и в момент времени τ_1 - трубку наблюдателя N_2 . Этим моментам синхронного времени отвечает регистрация частицы наблюдателями N_1 и N_2 , соответственно. На рисунке показана также неопределенность времени регистрации частицы $\Delta\tau$, вызванная конечностью объема макроскопического прибора. Макроскопичность же прибора означает, что каждое его сечение $\tau = \text{Const}$ пронизано большим количеством линий частиц.

Глава I. Формализм кинетической теории

Используя связь (I.99) и свойства δ -функции:

$$\delta[s - s^*(\tau)] = \frac{\delta(\tau - \tau_*)}{\left| \frac{ds^*}{d\tau} \right|} = \delta(\tau - \tau_*) |(u, p)|, \quad (\text{I.104})$$

где τ_* - синхронное по полю U^i время частицы. Производя интегрирование в (I.103) по координатному времени частицы $\tau_* = x^4$, получим:

$$\Psi(\tau) = \int_V dV \int_{\mathbf{P}(V)} |(u, p)| F(\tilde{x}, \tau, \mathbf{P}) \psi(\tilde{x}, \tau, \mathbf{P}) d\mathbf{P}. \quad (\text{I.105})$$

Формулу (I.105) можно непосредственно получить и проведя интегрирование по собственному времени частицы s ; при этом вследствие (I.99):

$$dX = |(u, p)| dV ds. \quad (\text{I.106})$$

Вследствие (I.16) и (I.17) функция распределения частиц с фиксированной массой покоя m должна иметь вид:

$$F(x, \mathbf{P}) = f(x, \mathbf{P}) \delta \left(\mathcal{H} - \frac{1}{2} m^2 \right), \quad (\text{I.107})$$

где $f(x, \mathbf{P})$ - функция, несингулярная на массовой поверхности (I.17). В результате интеграл (I.105) распадается на два:

$$\Psi(\tau) = \sum_{\pm} \int_V dV \int_{\mathbf{P}_{\pm}} f_{\pm}(x, \mathbf{P}) \psi_{\pm}(x, \mathbf{P}) |(u, p)| d\mathbf{P}_{\pm}, \quad (\text{I.108})$$

где:

$$\begin{aligned} d\mathbf{P}_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{dP_1 \wedge dP_2 \wedge dP_3}{\left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_4} \right|_{\mathbf{P}_{\pm}}} \equiv \\ &\equiv \sqrt{-g} \frac{dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3}{|p_4^{\pm}|} \left(1 + \frac{q\Phi}{m} \right)^3; \end{aligned} \quad (\text{I.109})$$

I.4. Инвариантная функция распределения

P_{\pm} - корни уравнения (I.17); f_{\pm} - функции, определенные на соответствующих псевдосферах. Вследствие инвариантности dP и δ - функции в (I.105) элементы объема на псевдосферах dP_{\pm} также являются инвариантными. В полугеодезической системе координат, в которой собственное время наблюдателей, τ , совпадает с линиями времени ($u^i = \delta_4^i$), формула (I.108) принимает вид:

$$\Psi(\tau) = \sum_{\pm} \int_V d^3\tilde{x} \int_{P(V)} d^3P_{\pm} f_{\pm}(x, P) \psi_{\pm}(x, P). \quad (\text{I.110})$$

В этой системе координат смысл функций f_{\pm} совпадает с классическим.

I.4.3 Плотности потоков динамических функций

Из (I.105) видно, что если состояния всех частиц определены лишь на верхней псевдосфере, т.е.:

$$(u, p) \geq 0, \quad (\text{I.111})$$

то каждой тензорной динамической функции $\psi(x, P)$ может быть поставлена в соответствие *макроскопическая плотность потока*:

$$\Psi^i(x) = \int_{P(X)} F(x, P) \psi(x, P) p^i dP. \quad (\text{I.112})$$

Полагая $\psi = 1$, получим *вектор плотности числа частиц*⁴:

$$n^i(x) = \int_{P(X)} F(x, P) p^i dP, \quad (\text{I.113})$$

причем:

$$N(\tau) = \int_V (n, u) dV \quad (\text{I.114})$$

есть полное число частиц на гиперповерхности V . Полагая

$$\psi = P^i - eA^i \equiv \left(1 + \frac{q\Phi}{m}\right) p^i, \quad (\text{I.115})$$

⁴Или числовой вектор по Сингу [41].

Глава I. Формализм кинетической теории

получим тензор энергии - импульса (ТЭИ) частиц:

$$T^{ik} = \left(1 + \frac{q\Phi}{m}\right) \int_{P(X)} F(x, P) p^i p^k dP. \quad (\text{I.116})$$

Рассмотрим теперь некоторую произвольную, но односвязную область фазового пространства $G \subset \Gamma$ и определим неполное статистическое среднее на этой области в соответствии с (I.101) и (I.103):

$$\Psi_G(\tau) = \int_G F(\eta) \psi(\eta) \delta[s - s^*(\tau)] d\Gamma. \quad (\text{I.117})$$

Очевидно, что $\Psi_G(\tau)$ отлично от нуля лишь в том случае, если частица пересекает гиперповерхность $\tau = \text{Const}$, находясь внутри G . Предполагая это условие выполненным, вычислим производную по времени τ от обеих частей равенства (I.117):

$$\frac{d\Psi_G}{d\tau} = \int_G \frac{d}{d\tau} \delta[s - s^*(\tau)] F(\eta) \psi(\eta) d\Gamma.$$

Используя правило дифференцирования δ -функции, получим:

$$\frac{d\Psi_G}{d\tau} = \int_G \frac{ds^*}{d\tau} \delta[s - s^*(\tau)] \frac{d}{ds} [F(\eta) \psi(\eta) d\Gamma].$$

Однако, вследствие теоремы Лиувилля (I.47) $d\Gamma/ds = 0$, а полная производная от динамической функции выражается с помощью скобки Пуассона (I.13). Используя соотношение (I.99) и интегрируя по каноническому параметру s , найдем окончательно:

$$\frac{d\Psi_G}{d\tau} = \int_{V'} dV \int_{P'} dP [\mathcal{H}, \psi F], \quad (\text{I.118})$$

где $V' \subset V$, $P' \subset P(X)$; $P' \times V' = G$.

Поскольку соотношение (I.118) справедливо для любых односвязных областей, оно остается справедливым и для *полных статистических средних*, т.е., в предельном переходе $G \rightarrow \Gamma$:

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = \int_V dV \int_{P(X)} dP [\mathcal{H}, \psi F]. \quad (\text{I.119})$$

I.5. Микроскопическая фазовая плотность

Предполагая, что функция ψF удовлетворяет условию (I.92):

$$[\psi(x, P)F(x, P)]|_{\mathcal{P}_\infty} = 0, \quad (\text{I.120})$$

с помощью (I.93) перепишем (I.119) в более удобной форме:

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = \int_V dV \nabla_i \int_{P(X)} dP \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} \psi F. \quad (\text{I.121})$$

I.5 Инвариантная микроскопическая фазовая плотность

I.5.1 Микроскопическая фазовая плотность тождественных частиц

Процедура введения функции распределения тождественных частиц по правилу (I.101) требует некоторых пояснений, уточняющих ее смысл. Как мы отмечали в разделе 1.4, введенная нами функция распределения (I.101) является существенно макроскопической величиной. Как же происходит переход от микроскопических фазовых траекторий частиц (I.12) к их макроскопическому распределению? Как происходит перенос динамических величин, определенных на точечных объектах (частицах), на непрерывное многообразие? Как и всегда в подобных случаях такой перенос осуществляется с помощью δ -функции. Введем *инвариантные микроскопические фазовые плотности* системы, состоящей из N_A тождественных частиц (см., например, [58], [40]) :

$$\mathcal{N}_A(\eta) = \sum_{\alpha=1}^{N_A} \int \delta[\eta; \underset{(A)}{\overset{(\alpha)}{\eta}}(s_\alpha)] ds_\alpha, \quad (\text{I.122})$$

где интегрирование проводится по всей фазовой траектории каждой α -той частицы. Во избежании путаницы с индексами в дальнейшем договоримся об обозначениях частиц. Произвольную частицу в дальнейшем будем обозначать: $\underset{(A)}{\overset{(\alpha)}{a}}$, где $\alpha = \overline{1, N}$ - номер частицы, $A = \overline{1, n}$ - индекс сорта частицы (бухгалтерский индекс). Когда записываются конкретные реакции, индекс сорта опускается, и вместо, например, $\underset{(1)}{a}$ пишется:

Глава I. Формализм кинетической теории

e (электрон); a пишется: p (протон) и т.д.. Тогда динамические переменные частицы будем записывать в виде:

$$\underset{(A)}{\overset{(\alpha)}{\eta}}_J = \left\{ \underset{(A)}{\overset{(\alpha)}{x}}_i, \underset{(A)}{\overset{(\alpha)}{P}}_i \right\} \quad (\text{I.123})$$

Во избежании слишком громоздких многоиндексных величин некоторые индексы в дальнейшем будем опускать. Далее в (I.122) $\delta[\eta; \eta^\alpha(s_\alpha)]$ - симметричная инвариантная 8-ми мерная δ - функция, определенная на фазовом пространстве Γ^α и изоморфном ему Γ , так что:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^\alpha} \psi(\eta^\alpha) \delta[\eta; \eta^\alpha] d\Gamma^\alpha &= \psi(\eta); \\ \int_{\Gamma} \psi(\eta) \delta[\eta; \eta^\alpha] d\Gamma &= \psi(\eta^\alpha). \end{aligned} \quad (\text{I.124})$$

Так как фазовое пространство является расслоением, то и 8-мерная δ - функция распадается на произведение двух четырехмерных δ - функций:

$$\delta[\eta; \eta^\alpha] = \mathcal{D}(x; x^\alpha) \delta^{(4)}(P - P^\alpha), \quad (\text{I.125})$$

так что:

$$\int_{P(X)} \psi(x, P) \delta^{(4)}(P - P^\alpha) dP = \psi(x, P^\alpha), \quad (\text{I.126})$$

где импульс P^α теперь уже приложен к точке $x \in X$. Далее:

$$\int_X F(x) \mathcal{D}(x; x^\alpha) dX = F(x^\alpha). \quad (\text{I.127})$$

Определенная таким способом 8-ми мерная δ - функция инвариантна по отношению к преобразованиям (I.33) - (I.34) фазового пространства. Релятивистски - инвариантная 7- мерная δ - функция с исключенным собственным временем частицы, определяющая микроскопическую фазовую плотность (I.122):

$$\Delta_\alpha(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[\eta, \eta_\alpha(s_\alpha)] ds_\alpha \quad (\text{I.128})$$

I.5. Микроскопическая фазовая плотность

и называемая *случайной функцией*, была впервые введена в релятивистскую статистику А. Стратоновичем⁵.

Итак, имеет место соотношение:

$$\mathcal{N}_A(\eta) = \sum_{\alpha=1}^{N_A} \Delta_{\alpha}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_{\alpha}). \quad (\text{I.129})$$

Введем, как это мы делали в разделе I.4, поле наблюдателей в X_4 , ассоциированных с единичным времениподобным вектором $u^i(x)$, и пространственноподобную гиперповерхность $\Sigma(\tau) = V(\tau)$, ортогональную этому векторному полю, и вычислим интеграл по этой гиперповерхности от случайной функции (I.128). Заметим сначала, что согласно (I.106) и (I.111):

$$dX = dV d\tau, \quad (\text{I.130})$$

где линии τ являются касательными к векторному полю $u^i(x)$. Поэтому в данной системе отсчета случайная функция (I.128) принимает вид:

$$\Delta(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_{\alpha}) = \frac{1}{(u, p_{\alpha}(s_{\alpha}^*))} \delta^{(3)}(\tilde{x}; \tilde{x}_{\alpha}) \delta^{(4)}(\mathbf{P} - \mathbf{P}_{\alpha}(s_{\alpha}^*)), \quad (\text{I.131})$$

где \tilde{x} - внутренние координаты гиперповерхности $V : \tau = \text{Const}$, а $s_{\alpha}^*(\tau)$ - момент собственного времени частицы, соответствующего пересечению ею гиперповерхности $\tau = \text{Const}$. Таким образом, в конечном итоге:

$$\tilde{x}_{\alpha} = \tilde{x}_{\alpha}(\tau); \quad \tilde{\mathbf{P}}_{\alpha} = \tilde{\mathbf{P}}_{\alpha}(\tau), \quad (\text{I.132})$$

где переменные $\tilde{\eta}_{\alpha}(\tau)$ являются решениями канонических уравнений движения (I.12) с последующим исключением канонического параметра: $s_{\alpha} = s_{\alpha}^*(\tau)$. Момент времени τ определяется из решения дифференциального уравнения (I.103).

Действительно, заметим, что канонические уравнения движения частиц (I.12) после исключения канонического параметра s можно представить в виде уравнений характеристик:

$$\frac{dx^1}{p^1} = \dots = \frac{dx^4}{p^4} = \frac{dP_1}{-\tilde{\nabla}_1 \mathcal{H}} = \dots = \frac{dP_4}{-\tilde{\nabla}_4 \mathcal{H}} \quad (= ds), \quad (\text{I.133})$$

⁵На этот факт указано в работе Ю.Л. Климонтовича [40], но ссылки на саму работу А. Стратоновича Автору найти не удалось. Ю.Л. Климонтович в ответ на просьбу Автора сообщил, что работа Стратоновича так и не была опубликована.

Глава I. Формализм кинетической теории

где согласно (I.12):

$$p^i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}.$$

Система уравнений движения (I.133) допускает 7 независимых интегралов:

$$\Phi_r(x, P) = C_r; \quad (r = \overline{0, 6}), \quad (\text{I.134})$$

одним из которых, C_0 , всегда является интеграл массы (I.16) (или (I.19)). При фиксированной массе покоя частиц, m , система уравнений (I.133) определяет в фазовом пространстве Γ 6-параметрическое семейство фазовых траекторий. Разрешая эти уравнения, в системе координат, в которой $x^4 = \tau$, относительно времени наблюдателей τ , мы получим ($i = \overline{1, 3}$):

$$\left. \begin{aligned} x^i &= x^i(\tau) && \stackrel{\text{def}}{=} && \tilde{x}^i \\ P_i &= P_i(\tau) && \stackrel{\text{def}}{=} && \tilde{P}_i \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{2}m^2 && \rightarrow && \tilde{P}_4 \end{aligned} \right\} = \tilde{\eta}(\tau). \quad (\text{I.135})$$

Интегрируя затем любую связь в системе (I.133), мы найдем $s_*(\tau)$. Именно в этом смысле и надо понимать соотношение (I.131), а также и аналогичные ему нижеследующие.

I.5.2 Связь микроскопической фазовой плотности с макроскопической функцией распределения

Заметим, что интегрирование вида (I.127) вместе с фазовыми координатами (I.135), удовлетворяющими каноническим уравнениям движения (I.12) переносит на интегрируемую функцию $\psi(\eta)$, измеряемую в точке наблюдения, и все динамические функции частицы и соответствующие связи. Так, например, автоматически переносится соотношение нормировки (I.17), устанавливающее в каждой точке x связь между четвертой компонентой импульса частицы и остальными его компонентами.

С учетом сделанных замечаний, получим:

$$\int_{V_\alpha} dV_\alpha \int_{P(V_\alpha)} dP_\alpha(u, p) \Delta(\tilde{\eta}; \tilde{\eta}_\alpha) = 1, \quad (\text{I.136})$$

I.5. Микроскопическая фазовая плотность

если данная частица в момент времени τ находится в области V_α . В противном случае интеграл (I.136) равен нулю. Мы можем получить и симметричное к (I.136) соотношение:

$$\int_V dV \int_{P(V)} dP(u, p) \Delta(\tilde{\eta}; \tilde{\eta}_\alpha) = 1, \quad (\text{I.137})$$

где интегрирование проводится уже по фазовым координатам прибора.

Проводя интегрирование (I.122) по гиперповерхности фазового пространства наблюдателя $P \times V(\tau)$ с учетом (I.137), получим:

$$\int_V dV \int_{P(V)} dP(u, p) \mathcal{N}_A(\eta) = N_A(V), \quad (\text{I.138})$$

где $N_A(V)$ - число частиц сорта «A» в объеме прибора $V(\tau)$. Пусть теперь $\Delta V(\tau)$ - малый объем прибора наблюдателя (см. (I.98)), а $\Delta P(V)$ - малый инвариантный объем импульсного пространства измерения длительностью $\Delta\tau$. Таким образом,

$$\Delta\Gamma = \Delta P \cdot \Delta V \cdot \Delta\tau$$

есть фазовый объем измерения. Устремляя в (I.138) фазовый объем к нулю⁶, получим в пределе число частиц в окрестности точки $\eta \in \Gamma$:

$$(u, p) \Delta V \Delta P \mathcal{N}_A(\eta) = \Delta N_A(x, P). \quad (\text{I.139})$$

Рассматривая определение (I.132) макроскопической функции распределения $F(x, P)$ в малой, но конечной области фазового пространства и проводя в этой области интегрирование δ -функции, преобразуем его к форме, эквивалентной (I.139):

$$(u, p) \Delta V \Delta P F_A(x, P) = \Delta N_A(x, P). \quad (\text{I.140})$$

Сравнивая (I.139) и (I.140), найдем связь между микроскопической фазовой плотностью тождественных частиц и макроскопической функцией распределения тождественных частиц сорта «A»:

$$\Delta V \Delta P F_A(\eta(\tau)) = \Delta V \Delta P \mathcal{N}_A(\eta(\tau)). \quad (\text{I.141})$$

⁶ Не забывая при этом о нижнем ограничении (I.5).

Глава I. Формализм кинетической теории

Следует особо подчеркнуть, что соотношение (I.141) имеет смысл лишь для конечных фазовых объемов, содержащих достаточно большое число частиц данного сорта: $N_A \gg 1$.

Таким образом, *макроскопическая функция распределения есть среднее значение микроскопической фазовой плотности по малому, но конечному объему фазового пространства.*

Заметим, что при такой операции пропадает вся информация о номере частицы и остается лишь информация о сорте частицы, определяемым массой, зарядами, спином и т.п.

I.5.3 Микроскопические фазовые плотности динамических функций

Пусть далее

$$\psi \left[\underset{(A)}{\eta}^{(\alpha)}(s_\alpha) \right] \equiv \psi \left[\underset{(A)}{x}^{(\alpha)}(s_\alpha), \underset{(A)}{P}^{(\alpha)}(s_\alpha) \right]$$

- функция динамических переменных α -той частицы. Аналогично (I.122) введем *микроскопическую фазовую плотность динамической функции тождественных частиц* $\underset{(A)}{\psi}^{(\alpha)}$:

$$\Psi_A(\eta) = \sum_{\alpha=1}^{N_A} \int \psi \left[\underset{(A)}{\eta}^{(\alpha)}(s_\alpha) \right] \delta \left[\underset{(A)}{\eta}; \underset{(A)}{\eta}^{(\alpha)}(s_\alpha) \right] ds_\alpha. \quad (\text{I.142})$$

Вследствие (I.126), (I.127) и свойств инвариантной случайной функции $\Delta_\alpha(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_\alpha)$ (I.128) выполняется следующее символическое правило, понимаемое в смысле последующего интегрирования по фазовым координатам:

$$\int \psi \left[\underset{(A)}{\eta}^{(\alpha)}(s_\alpha) \right] \delta \left[\underset{(A)}{\eta}; \underset{(A)}{\eta}^{(\alpha)}(s_\alpha) \right] ds_\alpha = \psi_A(\tilde{\eta}) \Delta_\alpha(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_\alpha). \quad (\text{I.143})$$

Так как динамические функции $\underset{(A)}{\Psi}^{(\alpha)}$ для частиц одного сорта специализированы лишь номером частицы, α , то соотношение (I.142) с помощью (I.115) и определения микроскопической фазовой плотности тождественных частиц сорта «A» может быть записано в более простом виде:

$$\Psi_A(\eta) = \psi_A(\eta) \mathcal{N}_A(\eta). \quad (\text{I.144})$$

I.5. Микроскопическая фазовая плотность

В частности, полагая в (I.144) $\psi_A(\eta) = p_A^i$, получим *микроскопическую фазовую плотность вектора потока тождественных частиц*:

$$\mathcal{N}_A^i(\eta) = p_A^i \mathcal{N}_A(\eta), \quad (\text{I.145})$$

так что согласно (I.138):

$$\int_V d\Sigma_i \int_{\mathbb{P}} d\mathbb{P} \mathcal{N}_A^i(\eta) = N_A(V) \quad (\text{I.146})$$

есть число частиц сорта «A» в объеме $V(\tau)$, где элемент гиперповерхности $d\Sigma_i$ определяется соотношением (I.97). Полагая $\psi_A(\eta) = e_A p_A^i$, получим *микроскопическую фазовую плотность тока тождественных частиц*:

$$\mathcal{J}_A^i(\eta) = e_A p_A^i \mathcal{N}_A(\eta), \quad (\text{I.147})$$

так что:

$$\int_V d\Sigma_i \int_{\mathbb{P}} d\mathbb{P} \mathcal{J}_A^i(\eta) = Q_A(V), \quad (\text{I.148})$$

где $Q_A(V)$ - полный заряд частиц сорта «A» в объеме $V(\tau)$.

Здесь следует сделать замечание. Как известно, интегрирование в римановом пространстве тензорных полей зависит от пути интегрирования и поэтому не является однозначной операцией. Однако, в тех случаях, когда подинтегральное выражение содержит инвариантную δ -функцию Дирака, указанная неоднозначность устраняется. Это дает возможность введения и микроскопических тензорных фазовых плотностей динамических функций.

Введенная согласно (I.142) микроскопическая фазовая плотность динамической функции тождественных частиц позволяет определить и *микроскопическую фазовую плотность динамической функции ансамбля частиц*. Пусть $\psi_A(\eta)$ - динамические функции одинаковой тензорной структуры и одинаковой физической природы. Тогда введем микроскопическую фазовую плотность этой функции по всему ансамблю частиц:

$$\Psi(\eta) = \sum_{A=1}^N \psi_A(\eta) \mathcal{N}_A(\eta). \quad (\text{I.149})$$

Глава I. Формализм кинетической теории

В частности:

$$\mathcal{N}(\eta) = \sum_{A=1}^N \mathcal{N}_A(\eta) \quad (\text{I.150})$$

есть инвариантная микроскопическая фазовая плотность ансамбля частиц;

$$\mathcal{N}^i(\eta) = \sum_{A=1}^n p_A^i \mathcal{N}_A(\eta) \quad (\text{I.151})$$

есть вектор микроскопической фазовой плотности потока ансамбля частиц;

$$\mathcal{J}^i(\eta) = \sum_{A=1}^n e_A p_A^i \mathcal{N}_A(\eta) \quad (\text{I.152})$$

- вектор микроскопической фазовой плотности тока ансамбля частиц. Таким образом:

$$\int_V d\Sigma_i \int_P dP \mathcal{N}^i(\eta) = N(V) \quad (\text{I.153})$$

есть полное число частиц ансамбля в области V , а

$$\int_V d\Sigma_i \int_P dP \mathcal{J}^i(\eta) = Q(V), \quad (\text{I.154})$$

есть полный заряд области V .

Используя свойства инвариантной случайной функции Δ , можно показать справедливость следующих равенств:

$$\sum_{\alpha=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[\eta; \eta_\alpha] ds_\alpha \psi(\tilde{\eta}_\alpha) \equiv \mathcal{N}(\eta) \psi(\eta); \quad (\text{I.155})$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[\eta; \eta_\alpha] ds_\alpha \psi(\tilde{\eta}_\alpha; \tilde{\eta}_\beta) \int d\Sigma'_i p'^i dP' \mathcal{N}(\eta') \equiv \mathcal{N}(\eta) \psi(\eta; \eta') \quad (\text{I.156})$$

I.5. Микроскопическая фазовая плотность

и т.д. Предположим, что область V является замкнутой, так что частицы не пересекают ее границ, тогда $dN(V)/d\tau = 0$. Дифференцируя по времени наблюдателей соотношение (I.153) с учетом сохранения фазового объема, получим:

$$\int_V dV \int_{\mathbb{P}} dP(u, p) \frac{d\mathcal{N}(\eta)}{d\tau} = 0.$$

Поскольку это соотношение должно выполняться для произвольных фазовых объемов, то должно выполняться и соответствующее локальное соотношение:

$$\frac{d\mathcal{N}}{d\tau} = 0. \quad (\text{I.157})$$

I.5.4 Уравнение Лиувилля для микроскопической фазовой плотности

Ниже мы получим уравнение Лиувилля для релятивистски инвариантной микроскопической фазовой плотности. В специальной теории относительности такая процедура впервые была проведена в работах Ю.Л. Климонтовича [40], [42]. В соответствии с определенем (I.150), свойствами случайной функции (I.128) $\Delta(\tilde{\eta})$ и соотношениями (I.135), устанавливающими связи $\tilde{\eta}(\tau)$, микроскопическая фазовая плотность ансамбля частиц (I.150) есть функция вида:

$$\mathcal{N}(\eta) = \sum_A \mathcal{N}_A(\tilde{\eta}(\tau)). \quad (\text{I.158})$$

Продифференцируем (I.158) по времени наблюдателей τ , учитывая свойства инвариантной релятивистской случайной функции (I.122), $\Delta_\alpha(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_\alpha)$:

$$\frac{d}{d\tau} \Delta_\alpha(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \delta[\eta, \eta_\alpha(s_\alpha)]}{\partial \eta_\alpha^J} \frac{d\eta_\alpha^J}{ds_\alpha^*} \frac{ds_\alpha}{(u, p_\alpha)}. \quad (\text{I.159})$$

Используя соотношения (I.129), получим:

$$\frac{d\mathcal{N}(\eta)}{d\tau} = \sum_{\alpha=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \delta[\eta, \eta_\alpha(s_\alpha)]}{\partial \eta_\alpha^J} \frac{d\eta_\alpha^J}{ds_\alpha^*} \frac{ds_\alpha}{(u, p_\alpha)}. \quad (\text{I.160})$$

Глава I. Формализм кинетической теории

Пользуясь свойствами четности δ - функции Дирака, перепишем (I.160) в виде:

$$(u, p) \frac{d\mathcal{N}(\eta)}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial \eta^J} \sum_{\alpha=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[\eta, \eta_\alpha(s_\alpha)] \frac{d\eta_\alpha^J}{ds_\alpha^*} ds_\alpha. \quad (\text{I.161})$$

Для вычислений удобнее перейти от пары канонически сопряженных переменных $\{x, P\}$, отвечающей Гамильтоновой формулировке уравнений движения, к паре $\{x^i, p^k\}$, отвечающей Лагранжевой формулировке уравнений движения. При этом, естественно, и микроскопические фазовые плотности а также случайные функции будут определяться Лагранжевой парой переменных. Уравнения движения в Лагранжевой формулировке (I.22) принимают вид:

$$\frac{dx_\alpha^i}{ds_\alpha} = p_\alpha^i; \quad (\text{I.162})$$

$$\frac{dp_\alpha^i}{ds_\alpha} = -\Gamma_{jk}^i(x_\alpha) p_\alpha^j p_\alpha^k + e_\alpha F_{.k}^i(x_\alpha) p_\alpha^k, \quad (\text{I.163})$$

где вследствие принципа суперпозиции тензор Максвелла представим в виде:

$$F_{ik}(x_\alpha) = \overset{0}{F}_{ik}(x_\alpha) + \sum_{\beta=1}^N F_{ik}(x_\alpha; \eta_\beta), \quad (\text{I.164})$$

причем $\overset{0}{F}_{ik}$ - тензор Максвелла внешнего электромагнитного поля, а $F_{ik}(x_\alpha; \eta_\beta)$ - тензор Максвелла межчастичных электромагнитных полей. Подставляя (I.162) - (I.164) в (I.161), получим:

$$(u, p) \frac{d\mathcal{N}(\eta)}{d\tau} = -p^i \tilde{\nabla}_i \mathcal{N}(\eta) - e \overset{0}{F}_{.k}^i(x) p^k \frac{\partial \mathcal{N}(\eta)}{\partial p^i} - p^k \frac{\partial}{\partial p^i} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[\eta, \eta_\alpha(s_\alpha)] F_{.k}^i(x_\alpha; \eta_\beta) ds_\alpha. \quad (\text{I.165})$$

В соответствие с (I.155) и (I.156) введем:

$$\tilde{F}_k^i(x) = \overset{0}{F}_{.k}^i(x) + \int dV'(u, p') dP' \mathcal{N}(\eta') F_k^i(x; \eta'), \quad (\text{I.166})$$

I.6. Релятивистские кинетические уравнения

Таким образом, с учетом (I.165), (I.166), (I.155), (I.156) запишем (I.157) в явном виде уравнения Лиувилля:

$$-(u, p) \frac{d \mathcal{N}(\eta)}{d\tau} = p^i \tilde{\nabla}_i \mathcal{N}(\eta) + e \tilde{F}_k^i(x) p^k \frac{\partial \mathcal{N}(\eta)}{\partial p^i} = 0. \quad (\text{I.167})$$

I.6 Релятивистские кинетические уравнения

I.6.1 Вывод кинетических уравнений

Движение частицы в гравитационном поле всегда квазиклассично, если ее комптоновская длина гораздо меньше радиуса кривизны K^{-1} (I.10):

$$\lambda_k = E^{-1} \ll K^{-1}. \quad (\text{I.168})$$

Тем не менее и в таких системах частиц могут быть существенны квантостатистические явления, связанные со свойствами симметрии волновой функции тождественных частиц. Поэтому такие системы удобнее описывать не функцией распределения, а *средними локальными числами заполнения квантовых состояний*, $n(x, P)$, связь которых с функцией распределения дается соотношением (см., например, [59]):

$$f(x, P) = \frac{\rho}{(2\pi)^3} n(x, P), \quad (\text{I.169})$$

где ρ - кратность вырождения.

Рассмотрим процесс взаимодействия частиц a_1, \dots, a_m в результате которого образуются частицы $a'_1, \dots, a'_{m'}$:

$$\sum_{A=1}^m \nu_A a_A \longrightarrow \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B a'_B, \quad (\text{I.170})$$

где ν_A - числа частиц сорта a_A , участвующих в реакции; A - номер частицы. Если суммы в обеих частях (I.170) совпадают, взаимодействия называются *упругими*, в противном случае — *неупругими*. Будем полагать взаимодействия (I.170) точечными, происходящими в точке $x \in X_4$. Применительно к внешнему гравитационному полю точечность взаимодействий подразумевает кроме (I.168) малость эффективного радиуса взаимодействия, $r_{eff} = \sqrt{\sigma}$, (I.11):

$$r_{eff} \ll v K^{-1}, \quad (\text{I.171})$$

Глава I. Формализм кинетической теории

где v - скорость частицы в системе центра масс (I.170). При выполнении (I.171) столкновения точечны не только в трехмерном смысле, но и мгновенны, т.е., *четырёхточечны*. Вследствие четырёхточечности взаимодействий на них распространяется *принцип локального соответствия*, поэтому в точке столкновения $\{x\}$ выполняется закон сохранения обобщенного 4 - импульса:

$$P_I^k = P_F^k, \quad (\text{I.172})$$

где P_I^k - суммарный обобщенный импульс начального состояния, P_F^k - конечного:

$$P_I = \sum_{A=1}^m \sum_{\alpha=1}^{\nu_A} P_A^\alpha; \quad P_F = \sum_{B=1}^{m'} \sum_{\beta=1}^{\nu'_B} P_B'^\beta$$

- векторные индексы для краткости опущены. Следует особо подчеркнуть, что в акте столкновения выполняется закон сохранения обобщенного, а не кинематического импульса. Второй закон следует из первого закона лишь при дополнительном условии - сохранения векторных и скалярных зарядов в реакциях типа (I.170). Вследствие принципа локального соответствия, который применим к взаимодействиям частиц при условии (I.171), вероятность уничтожения частицы «а» в состоянии $\eta_a \equiv \{x, P\} \in \Gamma_a$ за единицу собственного времени ds_a есть:

$$\begin{aligned} d\omega_a = & \sum \nu_a \int \prod_{A=1}^m \prod_{\alpha=1}^{\nu_A} {}'n_A(x, P_A^\alpha) d\pi_A^\alpha \times \\ & \times \prod_{B=1}^{m'} \prod_{\beta=1}^{\nu'_B} [1 \pm n_B(x, P_B'^\beta)] d\pi_B'^\beta \delta^{(4)}(P_I - P_F) W_{if} ds_a, \end{aligned} \quad (\text{I.173})$$

где \prod' означает, что в произведении отсутствует один множитель, относящийся к «а» - той частице в состоянии η_a ; «+» соответствует бозонам, «-» - фермионам,

$$d\pi_A^\alpha = \frac{\rho_A dP_A^\alpha}{(2\pi)^3} \cdot \delta \left(\mathcal{H}_A^\alpha - \frac{1}{2} m_A^2 \right). \quad (\text{I.174})$$

Величины W_{if} (фазовые плотности вероятности перехода) связаны с *инвариантными нормированными амплитудами рассеяния* M_{if} соотношением (см., например, [60]):

$$W_{if} = (2\pi)^4 |M_{if}|^2 2^{-(\sum \nu_A + \sum \nu'_B)}. \quad (\text{I.175})$$

I.6. Релятивистские кинетические уравнения

Инвариантные нормированные амплитуды M_{if} пропорциональны обычно используемым амплитудам T_{if} :

$$T_{fi} = \frac{M_{fi}}{\prod \sqrt{2p_4 V}}, \quad (\text{I.176})$$

где произведение вычисляется по всем частицам, участвующим в реакции. Инвариантные амплитуды рассеяния T_{if} связаны с матрицей рассеяния S (см., например, [60]):

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_F - P_I) T_{fi}. \quad (\text{I.177})$$

Суммирование в (I.173) проводится по всем каналам реакций (I.170) и по всем состояниям поляризации частиц; интегрирование — по импульсным пространствам всех начальных и конечных частиц кроме «а»-той. Матрица рассеяния перестановочна по любой паре частиц либо в начальном либо в конечном состояниях. Если мы не измеряем состояния поляризации частиц, то в формуле (I.175) необходимо произвести замену:

$$|M_{if}|^2 \rightarrow \langle |M_{if}|^2 \rangle, \quad (\text{I.178})$$

где скобки означают усреднение по всем состояниям поляризации матрицы рассеяния. Именно в таком смысле и понимаются обычно классические кинетические уравнения.

Дифференциальное сечение рассеяния выражается через соответствующую матрицу рассеяния. Так, например, при столкновении двух частиц с превращением их в совокупность произвольного числа частиц отвечает дифференциальное сечение рассеяния (см., например, [60]):

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_F - P_I) |M_{fi}|^2 \frac{1}{4I} \prod_f \frac{d^3 p'_a}{(2\pi)^3 2p'_4}, \quad (\text{I.179})$$

где введен инвариант рассеяния, I :

$$I = \sqrt{(p_1, p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}. \quad (\text{I.180})$$

Учитывая связь между собственным временем частиц s_a и временем наблюдателей τ (I.99), найдем скорость уничтожения частиц сорта «а» из произвольной односвязной фазовой области $G_a \subset \Gamma_a$ в результате реакций (I.170):

$$\left(\frac{dN_a^-}{d\tau} \right)_{G_a} = \int_{G_a} \frac{d\omega}{d\tau} n_a(x, P_a) dX d\pi_a \delta[s_a - s_a^*(\tau)]. \quad (\text{I.181})$$

Глава I. Формализм кинетической теории

Интегрируя (I.181) по собственному времени s_a , найдем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dN_a^-}{d\tau}\right)_{G_a} &= \sum \nu_a \int_{V'_a} dV \int_{P'_a} \int_a' \prod_{A=1}^m \prod_{\alpha=1}^{\nu_A} n_A(x, P_A^\alpha) d\pi_A^\alpha \times \\ &\times \prod_{B=1}^{m'} \prod_{\beta=1}^{\nu'_B} [1 \pm n_B(x, P_B'^\beta)] \delta^{(4)}(P_I - P_F) W_{if} d\pi_B'^\beta. \end{aligned} \quad (\text{I.182})$$

Аналогичным образом можно подсчитать и скорость рождения частиц сорта « a » в фазовом объеме G_a в результате обратных реакций:

$$\sum_{B=1}^{m'} \nu'_B a'_B \longrightarrow \sum_{A=1}^m \nu_A a_A; \quad (\text{I.183})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dN_a^+}{d\tau}\right)_{G_a} &= \sum \nu_a \int_{V'_a} dV \int_{P'_a} \int_a' \prod_{B=1}^{m'} \prod_{\beta=1}^{\nu'_B} n_B(x, P_B'^\beta) d\pi_B'^\beta \times \\ &\times \prod_{A=1}^m \prod_{\alpha=1}^{\nu_A} [1 \pm n_A(x, P_A^\alpha)] \delta^{(4)}(P_F - P_I) W_{fi} d\pi_A^\alpha. \end{aligned} \quad (\text{I.184})$$

где W_{fi} - матрица обратного рассеяния.

Суммарная скорость притока частиц сорта « a » в область G_a фазового пространства равна разности величин (I.184) и (I.182):

$$\left(\frac{dN_a}{d\tau}\right)_{G_a} = \int_{V'_a} dV \int_{P'_a} d\pi_a J_a(x, P_a), \quad (\text{I.185})$$

где введен *интеграл столкновений*:

$$\begin{aligned} I_a(x, P_a) \stackrel{def}{=} & - \sum \nu_a \int_a' \delta^{(4)} \times \\ & \times (P_F - P_I) (Z_{if} W_{if} - Z_{fi} W_{fi}) \prod_{i,f}^I d\pi, \end{aligned} \quad (\text{I.186})$$

где:

I.6. Релятивистские кинетические уравнения

$$Z_{if} \stackrel{def}{=} \prod_{A=1}^m \prod_{\alpha=1}^{\nu_A} n_A(x, P_A^\alpha) \prod_{B=1}^{m'} \prod_{\beta=1}^{\nu'_B} [1 \pm n_B(x, P_B'^\beta)] = \stackrel{Df}{=} \prod n_I \prod (1 \pm n_F); \quad (I.187)$$

$$Z_{fi} \stackrel{def}{=} \prod_{A=1}^m \prod_{\alpha=1}^{\nu_A} [1 \pm n_A(x, P_A^\alpha)] \prod_{B=1}^{m'} \prod_{\beta=1}^{\nu'_B} n_B(x, P_B'^\beta) = \stackrel{Df}{=} \prod n_F \prod (1 \pm n_I); \quad (I.188)$$

а $\prod'_{i,f} d\pi$ означает произведение импульсных объемов всех частиц кроме « a » - той.

С другой стороны, приток частиц в область G_a описывается соотношением (I.120), в котором необходимо положить $\psi = 1$. Приравнявая это соотношение (I.185), вследствие произвольности области G_a получим *общерелятивистские кинетические уравнения* [49]:

$$[\mathcal{H}_a, n_a] = I_a(x, P_a); \quad (a = \overline{1, m + m'}). \quad (I.189)$$

Таким образом общерелятивистские кинетические уравнения представляют систему $m + m'$ нелинейных интегро - дифференциальных уравнений.

Классические общерелятивистские кинетические уравнения ($n_a \ll 1$) для упругих парных T - инвариантных столкновений сформулированы в работах [1], [3], для упругих парных T - неинвариантных столкновений - в [61]. Для упругих парных T - инвариантных столкновений при произвольных числах заполнения общерелятивистские кинетические уравнения были получены в [62] путем ковариантного обобщения классического кинетического уравнения Улинга - Уленбека (см., например, [63]).

I.6.2 Симметрии S -матрицы и кинетическая теория

I.6.2.1 Перестановочные симметрии

Согласно смыслу классических общерелятивистских кинетических уравнений (I.189) интеграл столкновений (I.186) определен относительно

Глава I. Формализм кинетической теории

матрицы рассеяния W_{ab} , усредненной по спиновым состояниям частиц, участвующих в реакциях (I.170), (I.183). Поэтому эта матрица симметрична по перестановке импульсных переменных любой пары частиц в каждом из состояний:

$$W_{if}(\dots P_a \dots P_b \dots | \dots P'_c \dots P'_d \dots) = W_{if}(\dots P_b \dots P_a \dots | \dots P'_d \dots P'_c \dots). \quad (\text{I.190})$$

I.6.2.2 СРТ-симметрия

Вследствие СРТ - инвариантности матрицы рассеяния должны выполняться соотношения (см., например, [60]):

$$W_{fi} = \overline{W}_{if}, \quad (\text{I.191})$$

где верхняя черта означает, что все состояния частиц заменены состояниями античастиц и наоборот.

I.6.2.3 Унитарность и оптическая теорема

Из унитарности матрицы рассеяния:

$$SS^+ = S^+S = 1 \quad (\text{I.192})$$

следует так называемая *оптическая теорема* (см., например, [18]), которую с учетом конечности величины чисел заполнения можно записать в виде:

$$\sum_f \int \prod_f [1 \pm n_f] (W_{fi} - W_{if}) d\pi_f = 0, \quad (\text{I.193})$$

где суммирование и интегрирование проводится по всем конечным состояниям частиц. Приведем более подробную форму записи оптической теоремы:

$$\sum_f \int \prod_{B=1}^{m'} [1 \pm n_f(P')] \cdot [W_{fi}(P'_1, \dots, P'_{m'} | P_1, \dots, P_m) - W_{if}(P_1, \dots, P_m | P'_1, \dots, P'_{m'})] d\pi'_f = 0, \quad (\text{I.194})$$

I.6. Релятивистские кинетические уравнения

I.6.2.4 Принцип детального равновесия

Для Т-инвариантных взаимодействий функция W удовлетворяет условию:

$$W_{fi}(P'_1, \dots, P'_{m'} | P_1, \dots, P_m) = W_{if}(P_1, \dots, P_m | P'_1, \dots, P'_{m'}). \quad (\text{I.195})$$

Это соотношение называется *принципом детального равновесия*. Таким образом, для Т-инвариантных взаимодействий интеграл (I.186) принимает наиболее простой «классический» вид:

$$I_a(x, P_a) = - \sum \nu_a \delta^{(4)}(P_F - P_I) (Z_{if} - Z_{fi}) W_{if} \prod_{i,f} d\pi, \quad (\text{I.196})$$

I.6.3 Бесстолкновительные кинетические уравнения

В тех случаях, когда длина свободного пробега частиц сорта « a », l_a , гораздо больше характерного масштаба L_0 статистической системы или время свободного пробега частиц τ_a гораздо больше характерного временного масштаба T_0 эволюции системы ⁷:

$$l_a \gg L_0; \quad \tau_a \gg T_0, \quad (\text{I.197})$$

интегралом столкновений в правой части кинетического уравнения (I.189) для частиц сорта « a » можно пренебречь и описывать движение этих частиц *бесстолкновительным кинетическим уравнением* [7]:

$$[\mathcal{H}_a, n_a] = 0. \quad (\text{I.198})$$

Таким образом, в заданных внешних полях бесстолкновительные кинетические уравнения являются линейными однородными дифференциальными уравнениями первого порядка в частных производных относительно функции распределения (или чисел заполнения).

Уравнения характеристик для этих уравнений совпадают с уравнениями движения частиц, описываемых нормальной системой 8 - ми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (см., например, [64]), т.е., в нашем случае — системой канонических уравнений (I.12) при независимых канонически сопряженных переменных $\{x^i, P_i\}$; либо системой вида: (I.23):

$$\frac{dx^i}{ds} = p^i;$$

⁷Эти условия мы уточним в дальнейшем

Глава I. Формализм кинетической теории

$$\left(1 + \frac{q\Phi}{m}\right) \frac{Dp^i}{ds} = eF_{.k}^i p^k + q\Phi_{,k} \left(g^{ik} - \frac{p^i p^k}{m^2}\right), \quad (\text{I.199})$$

при независимых переменных $\{x^i, p^i\}$.

Как мы отмечали в разделе I.5, система уравнений движения (I.12) или (I.23) допускает 7 независимых интегралов $\Phi_r(x, P)$ (I.134), являющихся характеристиками бесстолкновительного кинетического уравнения (I.198). При фиксированной массе покоя его точное 6 - параметрическое семейство решений полностью определяется этими характеристиками:

$$n_a(x, P) = \Phi(\psi_1, \dots, \psi_6), \quad (\text{I.200})$$

где Φ - произвольная функция своих аргументов ψ_p . Единственное условие, которое налагается на эту функцию, есть условие сходимости ее моментов (I.88).

Для конкретизации $\Phi(\psi_p)$ необходимо задать ее на некоторой гиперповерхности $\Sigma \subset \Gamma$ фазового пространства. Заметим, в частности, что при выполнении условий (I.29) — (I.31) функция распределения имеет среди своих характеристик и линейные интегралы движения (I.28).

I.6.4 H-теорема Больцмана

В соответствие с [59] определим энтропию каждой компоненты статистической системы соотношением:

$$S_a(\tau) = \int_{\Gamma} dX d\pi_a \delta[s_a - s_a^*(\tau)] [\pm(1 \pm n_a) \ln(1 \pm n_a) - n_a \ln n_a]. \quad (\text{I.201})$$

Вычисляя производную от этой величины по формуле (I.119), найдем:

$$\begin{aligned} \frac{dS_a}{d\tau} &= \int_V dV \int_P d\pi_a [\mathcal{H}_a, \mathcal{S}_a n_a] \equiv \\ &\equiv \int_V dV \int_P d\pi_a \ln \left(\frac{1 \pm n_a}{n_a} \right) [\mathcal{H}, n_a], \end{aligned} \quad (\text{I.202})$$

где \mathcal{S}_a - выражение в квадратных скобках (I.201), есть фазовая плотность энтропии.

I.6. Релятивистские кинетические уравнения

Используя теперь кинетические уравнения (I.189), получим:

$$\frac{dS_a}{d\tau} = \int_V dV \int_{\mathbb{P}} d\pi_a \ln \left(\frac{1 \pm n_a}{n_a} \right) I_a(x, P_a). \quad (\text{I.203})$$

Рассмотрим интеграл:

$$\dot{I}_a(x) = \int_{\mathbb{P}} d\pi_a \ln \left(\frac{1 \pm n_a}{n_a} \right) I_a(x, P_a), \quad (\text{I.204})$$

смысл которого - скорость изменения трехмерной плотности энтропии. Вследствие перестановочности матрицы рассеяния по частицам внутри каждого из состояний, I или F , а также симметрии интеграла (I.204) по всем тождественным частицам сорта « a » величину $\nu_a \ln[(1 \pm n_a)/n_a]$ под знаком интеграла можно представить в симметричной форме:

$$\nu_a \ln \left(\frac{1 \pm n_a}{n_a} \right) \rightarrow \ln \left[\prod_{\alpha=1}^{\nu_a} \frac{1 \pm n_a(P_a)}{n_a(P_a)} \right]$$

и в результате получить:

$$\begin{aligned} \dot{I}_a = - \sum \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \ln \left[\prod_{\alpha=1}^{\nu_a} \frac{1 \pm n_a(P_a)}{n_a(P_a)} \right] \times \\ \times (Z_{if}W_{if} - Z_{fi}W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi dV. \end{aligned} \quad (\text{I.205})$$

Энтропия есть величина аддитивная, поэтому полная энтропия статистической системы, $S(\tau)$, равна:

$$S(\tau) = \sum_{A=1}^m S_a + \sum_{B=1}^{m'} S_B. \quad (\text{I.206})$$

Выполняя суммирование в (I.205) в соответствие с (I.206), получим с учетом перестановочности матрицы рассеяния (I.190):

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\tau} = \\ = \sum \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \ln \left(\frac{Z_{if}}{Z_{fi}} \right) (Z_{if}W_{if} - Z_{fi}W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi dV. \end{aligned} \quad (\text{I.207})$$

Глава I. Формализм кинетической теории

Для Т-инвариантных взаимодействий (I.206) получим для (I.207):

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\tau} &= \\ &= \sum \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \ln \left(\frac{Z_{if}}{Z_{fi}} \right) (Z_{if} - Z_{fi}) W_{if} \prod_{i,f} d\pi dV. \end{aligned} \quad (\text{I.208})$$

Заметим, что для любых неотрицательных Z_{if} и Z_{fi} выполняется алгебраическое неравенство:

$$R(Z_{if}, Z_{fi}) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \left(\frac{Z_{if}}{Z_{fi}} \right) (Z_{if} - Z_{fi}) \geq 0, \quad (\text{I.209})$$

причем:

$$R(Z_{if}, Z_{fi}) = 0 \iff Z_{if} = Z_{fi}. \quad (\text{I.210})$$

Поэтому вследствие неотрицательности входящих в (I.208) выражений для Т-инвариантных взаимодействий справедлива так называемая *H-теорема Больцмана*:

$$\frac{dS}{d\tau} \geq 0, \quad (\text{I.211})$$

согласно которой во всех Т-инвариантных взаимодействиях энтропия системы не убывает со временем.

Заметим, что в бесстолкновительных системах, когда $I_a(x, P) \approx 0$, энтропия системы не изменяется со временем:

$$S \approx \text{Const}, \quad \text{if } I_a \approx 0. \quad (\text{I.212})$$

Пусть теперь взаимодействия частиц не являются Т-инвариантными. Произведем тождественное преобразование величины в круглых скобках подынтегрального выражения в (I.207):

$$(Z_{if} W_{if} - Z_{fi} W_{fi}) \equiv W_{if} (Z_{if} - Z_{fi}) + (W_{if} - W_{fi}) Z_{fi}$$

и преобразуем выражение (I.208) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\tau} &= \sum \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \ln \left(\frac{Z_{if}}{Z_{fi}} \right) (Z_{if} - Z_{fi}) W_{if} \prod_{i,f} d\pi dV + \\ &+ \sum \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \ln \left(\frac{Z_{if}}{Z_{fi}} \right) Z_{fi} (W_{if} - W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi dV. \end{aligned} \quad (\text{I.213})$$

I.6. Релятивистские кинетические уравнения

Первый интеграл в правой части (I.213) совпадает с интегралом в правой части (I.208), поэтому он неотрицателен. Во втором интеграле можно сначала провести интегрирование по конечным состояниям, но тогда вследствие оптической теоремы (I.193) получим нуль. Итак справедливо утверждение:

H-теорема Больцмана (I.211) справедлива для любых взаимодействий до тех пор, пока справедлива оптическая теорема.

Таким образом H-теорема Больцмана и в общерелятивистской кинетике остается фундаментальным законом природы. В частности, полный поток энтропии статистической системы в любом случае описывается выражением (I.208), поэтому равенство нулю потока энтропии может достигаться лишь при условии (I.210).

Глава II

Самосогласованное описание плазмы в гравитационном поле

II.1 Уравнения переноса динамических величин

Пусть $\psi(x, P)$ ¹ - некоторая скалярная функция динамических переменных. Согласно (I.118) скорость ее макроскопического среднего, определенного в объеме $V' \subset X$, есть:

$$\frac{d\Psi_{V'}}{d\tau} = \int_{V'} dV \int_{P(V')} dP [\mathcal{H}, \psi F]. \quad (\text{II.1})$$

Используя линейность скобки Пуассона, перепишем (II.1) в более удобном виде:

$$\frac{d\Psi_{V'}}{d\tau} = \int_{V'} dV \int_{P(V')} dP \{ \psi [\mathcal{H}, F] + F [\mathcal{H}, \Psi] \}.$$

¹ Индексы сорта частиц мы здесь для краткости опускаем

II.1. Уравнения переноса

Заменяем согласно кинетическим уравнениям (I.189) скобку Пуассона относительно функции распределения интегралом столкновений:

$$\frac{d\Psi_{V'}}{d\tau} = \int_{V'} dV \int_{P(V')} dP \{ \psi I(x, P) + F[\mathcal{H}, \Psi] \}. \quad (\text{II.2})$$

С другой стороны скорость изменения макроскопического среднего $\Psi_{V'}(\tau)$ определяется формулой (I.121). Приравняв правые части уравнений (I.121) и (II.2), получим интегральное равенство:

$$\int_{V'} \left\{ \nabla_i \int_{P(V)} \psi_a F_a \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial P_i} d\pi_a - \int_{P(V)} [F_a[\mathcal{H}_a, \psi_a] + \psi_a I_a] d\pi_a \right\} dV = 0, \quad (\text{II.3})$$

которое вследствие произвольности трехмерной области V' приводит к *локальному уравнению переноса динамических величин*:

$$\nabla_i \int_{P(X)} \psi_a F_a \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial P_i} d\pi_a - \int_{P(X)} F_a[\mathcal{H}_a, \psi_a] d\pi_a = \int_{P(X)} \psi_a I_a d\pi_a; \quad (a = 1, \dots, m + m'). \quad (\text{II.4})$$

Уравнение переноса (II.4) можно получить и для произвольных тензорных функций $\psi(x, P)$, если не связывать эти уравнения с сохранением макроскопических средних от этих функций. Для получения таких уравнений достаточно проинтегрировать по импульсному пространству скобку Пуассона $[\mathcal{H}_a, \psi_a]$, понимаемую в смысле (I.50), и затем воспользоваться кинетическими уравнениями (I.189) и соотношениями (I.89). Поэтому в дальнейшем $\psi(x, P)$ в уравнениях (II.4) - произвольная тензорная функция.

Просуммируем (II.4) по всем частицам, участвующих в реакциях (I.170) и (I.183):

$$\begin{aligned} \nabla_i \sum_a \int_{P(X)} \psi_a F_a \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial P_i} d\pi_a - \sum_a \int_{P(X)} F_a[\mathcal{H}_a, \psi_a] d\pi_a = \\ = \sum_a \int_{P(X)} \psi_a I_a d\pi_a. \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Глава II. Самосогласованное описание плазмы

Сумму в правой части (II.5) разложим на две: первая по состояниям, уничтожаемым в реакциях (I.170)²:

$$- \sum_{channels} \sum_a \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \nu_a \psi_a (Z_{if} W_{if} - Z_{fi} W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi ;$$

вторая по состояниям, уничтожаемым в реакциях (I.183); для них:

$$Z_{if} W_{if} - Z_{fi} W_{fi} \rightarrow -(Z_{if} W_{if} - Z_{fi} W_{fi}) .$$

В результате уравнения переноса (II.5) принимает вид [65]:

$$\begin{aligned} \nabla_i \sum_a \int_{P(X)} \psi_a F_a \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial P_i} d\pi_a - \sum_a \int_{P(X)} F_a [\mathcal{H}_a, \psi_a] d\pi_a = \\ - \sum_{channels} \sum_a \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \left(\sum_{A=1}^m \nu_A \psi_A - \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B \psi'_B \right) \times \\ (Z_{if} W_{if} - Z_{fi} W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi . \end{aligned} \quad (II.6)$$

II.2 Законы сохранения в общерелятивистской кинетической теории

Положим в уравнениях переноса (II.6):

$$\psi_A(x, P) = e_A = \text{Const} , \quad (II.7)$$

где e_A - некоторые числа (электрические, барионные, электрослабые заряды и т.п.), причем для k -той реакции (I.170):

$$\sum \nu_A^k e_A - \sum \nu'_B{}^k e'_B = \Delta e^k . \quad (II.8)$$

Подставляя (II.7) в (II.6) и используя (II.8), получим уравнение:

$$\nabla_i J^i = - \sum_k \Delta e^k \int_{P(X)} I_{(k)} dP , \quad (II.9)$$

²Суммирование в этих формулах проводится по всем каналам реакций (I.170), (I.183)

II.2. Законы сохранения

где суммирование проводится по всевозможным реакциям, в которых участвуют заряженные частицы; $J^i(x)$ - вектор плотности тока, соответствующего данному типу зарядов.

Алгебра взаимодействий элементарных частиц, т.е., фактически, схемы реакций (I.170), (I.183), возможных в той или иной теоретико - полевой модели взаимодействий частиц, приводят к законам сохранения некоторых обобщенных токов. Действительно, алгебра взаимодействий элементарных частиц определяется натуральными числами ν_A^k , определяющими число частиц сорта A , участвующих в k -той реакции, т.е., матрицей $||\nu_A^k||$. Пусть N - число r типов фундаментальных частиц, включая и античастицы, в конкретной теоретико - полевой модели. Перепишем реакции (I.170) и (I.183) в единой форме:

$$\sum_A \nu_a^k a_A = 0; \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (\text{II.10})$$

и ν_A^k могут теперь принимать любые целочисленные значения: положительные, отрицательные и нулевые. В любой замкнутой теории элементарных частиц должно быть:

$$\text{rang} ||\nu_A^k|| < N. \quad (\text{II.11})$$

В противном случае найдется такая частица, которая не сможет быть получена ни в одной реакции (II.10)*.

**Замечание. В принципе, конечно, можно рассматривать теории элементарных частиц такого типа, в которых существуют непересекающиеся классы элементарных частиц и соответствующих типов взаимодействий, а единственным универсальным взаимодействием остается гравитационное (впрочем, и его универсальность также можно оспорить). При этом мы получили бы картину множественных физических миров, одновременно существующих в одном физическом пространстве и взаимодействующих лишь гравитационно. Подобная картина мира, в принципе, не противоречит современным космологическим и астрофизическим наблюдениям. В случае реализации такой картины мира недостающие в наблюдениях массы (по некоторым данным до 95%) можно было бы списать за счет масс других миров (порядка 20-ти миров). При отсутствии универсального взаимодействия мы получили бы полностью непересекающиеся миры, изучение которых могло бы стать лишь предметом философии.*

Глава II. Самосогласованное описание плазмы

Вследствие (II.11) можно выбрать N чисел g_A , одновременно не равных нулю, таких что:

$$\sum_A \nu_A^k g_A = 0; \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (\text{II.12})$$

Пусть $\text{rang} \|\nu_A^k\| = r < N$. Тогда существуют $N - r$ линейно независимых нетривиальных решений системы (II.12), которые мы будем обозначать символами g_A^s ($s = 1, \dots, N - r$) и называть *обобщенными зарядами*. Поскольку ν_A^k - целые числа, решения (II.12) также представимы в целых числах, т.е., обобщенным зарядам можно придать целочисленные значения. Полагая в (II.7), (II.8) $e_A = g_A^s$, получим вследствие (II.12): $\Delta g_s^k = 0$, что приводит к законам сохранения $N - r$ обобщенных токов:

$$\nabla_i J_s^i = 0; \quad (s = 1, 2, \dots, N - r), \quad (\text{II.13})$$

где в соответствие с (I.113):

$$J_s^i(x) = \sum_A g_A^s \int_{P(x)} \frac{\partial \mathcal{H}_A}{\partial P_i} dP_A. \quad (\text{II.14})$$

Тогда согласно (II.13) и (I.114) сохраняется и полный обобщенный заряд G_s :

$$\frac{dG_s}{d\tau} = 0, \quad (\text{II.15})$$

где:

$$G_s = \int_V dV_i J_s^i(x). \quad (\text{II.16})$$

Положим теперь в (II.6) $\psi_a = P_a^i$; тогда выражение в круглых скобках (II.6) равно:

$$\sum \nu P_A^i - \sum \nu'_B P_B'^i \equiv P_I^i - P_F^i = 0. \quad (\text{II.17})$$

Таким образом, правая часть уравнения переноса (II.6) оказывается равной нулю вследствие сохранения при столкновениях полного импульса частиц. Вычисляя скобку Пуассона относительно P^i , найдем с учетом уравнения массовой поверхности (I.17):

II.2. Законы сохранения

$$[\mathcal{H}_A, P_A^i] = \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial P_k^A} \tilde{\nabla}_k P_A^i - \frac{\partial P_A^i}{\partial P_k^A} \tilde{\nabla}_k \mathcal{H}_A = -m_A q_A \nabla^i \Phi - e_A P_A^k \nabla^i A_k. \quad (\text{II.18})$$

Уравнение переноса (II.6) относительно вектора обобщенного импульса P^i принимает вид:

$$\nabla_i \Xi_p^{ik} - \sigma \nabla^k \Phi - J^i \nabla^k A_i = 0, \quad (\text{II.19})$$

где $J^i(x)$ - вектор плотности тока, связанного с переносом зарядов e (II.14);

$$\sigma(x) = \sum_{P(X)} m_A q_A \int d\pi_A F_A \quad (\text{II.20})$$

- скалярная функция;

$$\Xi_p^{ik} = \sum_{P(X)} \int d\pi_A P_A^i P_A^k F_A \quad (\text{II.21})$$

- несимметричный тензор. Используя связь между обобщенным и кинематическим импульсами (I.18), получим из (II.21):

$$\Xi_p^{ik}(x) = T_p^{ik}(x) - J^i(x) A^k(x), \quad (\text{II.22})$$

где $T_p^{ik}(x)$ - симметричный тензор энергии - импульса частиц (ТЭИ).

Подставляя (II.22) в (II.19), приведем уравнение переноса к виду [65]:

$$\nabla_k T_p^{ik} - \sigma \nabla^i \Phi - J_k F^{ik} + A^i \nabla_k J^k = 0. \quad (\text{II.23})$$

Несимметричный тензор (II.21) связан с полной энергией плазмы. Действительно, предположим, что пространство - время допускает времениподобный вектор Киллинга $\xi^i(x)$, причем выполняются условия (I.29) - (I.31) существования интеграла энергии E . Тогда, полагая в (II.6) $\psi_a = (\xi, P_a)$, получим:

$$\frac{dE}{d\tau} = 0, \quad (\text{II.24})$$

Глава II. Самосогласованное описание плазмы

где E - полная энергия плазмы:

$$E = \int_V dV_i \sum_A \int_{P(X)} \frac{\partial \mathcal{H}_A}{\partial P_i^A}(\xi, P) F_A d\pi_A \int dV_i \xi_k \Xi_p^{ik} . \quad (\text{II.25})$$

В заключение раздела запишем уравнения переноса заряда (II.9) в форме, явно разделяющей состояния частиц и античастиц. Для этого выражение в правой части (II.6) представим в виде суммы двух:

$$\begin{aligned} & - \sum \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \left(\sum_A \nu_A \psi_A - \sum_B \nu'_B \psi'_B \right) (Z_{if} W_{if} - Z_{fi} W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi \\ & - \sum \int \delta^{(4)}(\bar{P}_F - \bar{P}_I) \left(\sum_A \bar{\nu}_A \bar{\psi}_A - \sum_B \bar{\nu}'_B \bar{\psi}'_B \right) \\ & \quad \times (\bar{Z}_{if} \bar{W}_{if} - \bar{Z}_{fi} \bar{W}_{fi}) \prod_{i,f} d\bar{\pi} . \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Очевидно, что для античастиц $\bar{\nu}_A = \nu_A$, $\bar{e}_A = -e_A$. Поэтому вследствие СРТ - симметрии ((I.191)) и равенства масс частиц и античастиц закон переноса заряда (II.9) принимает вид:

$$\begin{aligned} \nabla_i J^i \stackrel{def}{=} \nabla_i (J^i - \bar{J}^i) &= - \sum_k \Delta e^k \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \\ & \times [(Z_{if} + \bar{Z}_{fi}) W_{if} - (Z_{fi} + \bar{Z}_{if}) W_{fi}] \prod_{i,f} d\pi . \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

II.3 Самосогласованное кинетическое описание системы частиц

Для выяснения смысла уравнений (II.23) и входящих в них величин рассмотрим полевые уравнения относительного векторного и скалярного потенциалов. ТЭИ этих полей определяются выражениями (см., например, [65], [66]):

$$T_v^{ik} = -\frac{\epsilon_v}{4\pi} \left[F^{il} F_{.l}^i + \mu_v^2 A^i A^k - \frac{1}{4} g^{ik} (F^{lm} F_{lm} + 2\mu_v^2 A^l A_l) \right] ; \quad (\text{II.28})$$

II.3. Самосогласованная кинетическая модель

$$T_s^{ik} = \frac{\epsilon_s}{8\pi} \left(\frac{4}{3} \Phi^{,i} \Phi^{,k} - \frac{1}{3} g^{ik} \Phi^{,l} \Phi_{,l} + g^{ik} \mu_s^2 \Phi^2 \right) + \frac{1}{3} \left(R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} \right) \Phi^2 - \frac{2}{3} \Phi \Phi^{,ik} + \frac{2}{3} g^{ik} \Phi \square \Phi + \frac{\lambda}{6} g^{ik} \Phi^4, \quad (\text{II.29})$$

где μ_v, μ_s - массы векторного и скалярного полей; $\epsilon_s = +1$ для скалярного поля с притяжением одноименно заряженных частиц, $\epsilon_s = -1$ - для скалярного поля с отталкиванием. Вычисляя дивергенцию ТЭИ векторного поля (II.29), найдем:

$$T_v^{ik}{}_{,k} = -\frac{\epsilon_v}{4\pi} \left[F_{,k}^i (F^{kj} - \mu_v^2 A^k) + \mu_v^2 A^i A_{,k}^k \right]. \quad (\text{II.30})$$

Выбирая в качестве уравнений для векторного поля уравнения Прока:

$$F_{,k}^{ik} - \mu_v^2 A^i = 4\pi \epsilon_v J^i, \quad (\text{II.31})$$

где векторный ток J^i определяется выражением (II.14), получим из (II.29):

$$T_v^{ik}{}_{,k} = -F_{,k}^i J^k - \frac{\epsilon_v}{4\pi} \mu_v^2 A^i A_{,k}^k. \quad (\text{II.32})$$

Вычисляя дивергенцию от обеих частей (II.31), получим соотношение:

$$\mu_v^2 A_{,k}^k = -4\pi \epsilon_v J_{,k}^k. \quad (\text{II.33})$$

Подставляя теперь (II.33) в (II.32), запишем (II.32) в более удобной форме:

$$T_v^{ik}{}_{,k} = -F_{,k}^i J^k + A^i J_{,k}^k. \quad (\text{II.34})$$

Вычисляя теперь ковариантную дивергенцию от ТЭИ скалярного поля (II.29) с учетом коммутационных соотношений для вторых ковариантных производных (см., например, [41]), найдем:

$$T_s^{ik}{}_{,k} = \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left(\square \Phi + \mu_s^2 \Phi - \frac{1}{6} R \Phi + \frac{1}{3} \lambda \Phi^3 \right). \quad (\text{II.35})$$

Выбирая в качестве уравнения для скалярного поля уравнение типа Клейна - Гордона с источником (см., например, [65]):

$$\square \Phi + \mu_s^2 \Phi - \frac{1}{6} R \Phi + \frac{1}{3} \lambda \Phi^3 = -4\pi \epsilon_s \sigma, \quad (\text{II.36})$$

Глава II. Самосогласованное описание плазмы

Преобразуем (II.35) к более простому виду:

$$T_s^{ik},k = -\sigma\Phi^i. \quad (\text{II.37})$$

Учитывая теперь (II.34) и (II.37) в уравнении переноса (II.23), приведем его к виду дифференциального закона сохранения полного тензора энергии - импульса системы «релятивистские заряженные частицы + векторное поле + скалярное поле» [65]:

$$T_{,k}^{ik} = 0, \quad (\text{II.38})$$

где

$$T^{ik} = T_p^{ik} + T_v^{ik} + T_s^{ik}. \quad (\text{II.39})$$

Следует отметить, что вид этого ТЭИ устанавливается однозначно при соответствующем выборе ТЭИ векторного и скалярного полей. Тожественное выполнение закона «сохранения» (II.38) позволяет непротиворечиво описывать макроскопические поля релятивистской самогравитирующей плазмы системой самосогласованных уравнений (I.189) (кинетические уравнения), (II.31), (II.36) (уравнения для векторного и скалярного полей) и уравнений Эйнштейна:

$$G^{ik} \equiv R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik} = 8\pi T^{ik}, \quad (\text{II.40})$$

в которых источники определяются выражениями (I.116), (I.113), (II.28), (II.20) и (II.39)³.

Уравнение (II.36) может быть записано в более удобной форме, для чего скалярную кривизну необходимо выразить через след ТЭИ:

$$R = -8\pi T = -8\pi(T_p + T_v + T_s). \quad (\text{II.41})$$

Вычисляя шпур ТЭИ векторного и скалярного полей, найдем:

$$T_v = -\frac{\epsilon_v}{4\pi}\mu_v^2(A, A); \quad (\text{II.42})$$

$$T_s = -\sigma\Phi + \frac{\epsilon_s}{4\pi}\mu_s^2\Phi^2. \quad (\text{II.43})$$

³Заметим, что в работе Шоке - Брюа [67] доказаны локальные теоремы существования и устойчивости решений системы уравнений Эйнштейна - Максвелла - Больцмана, аналогичной приведенной выше системы уравнений, но без скалярного поля и с больцмановским интегралом столкновений.

II.4. Общерелятивистские уравнения Власова

Далее из определения скалярной плотности зарядов, $\sigma(x)$, (II.20) и ТЭИ частиц (I.116) следует соотношение [65]:

$$\sigma = \sum_A \frac{q_A T^A}{m_a + q_a \Phi}. \quad (\text{II.44})$$

Таким образом, получим вместо (II.36) уравнение:

$$\square \Phi + \mu_s^2 \Phi + \frac{1}{3} \Phi^3 (\mu_s^2 + \lambda) + \frac{1}{3} \mu_v^2 \Phi(A, A) + 4\pi \epsilon_s \sigma \left(1 - \frac{1}{3} \Phi^2\right) + \frac{4\pi}{3} \frac{T}{p} \Phi = 0, \quad (\text{II.45})$$

которое можно рассматривать в качестве эквивалентного уравнения для скалярного поля.

II.4 Общерелятивистские уравнения Власова

Как мы отмечали в разделе I.6, в случае, когда длина свободного пробега частиц сорта « a », l_a , гораздо больше характерного масштаба L_0 статистической системы или время свободного пробега частиц τ_a гораздо больше характерного временного масштаба T_0 эволюции системы, интегралом столкновений в правой части кинетического уравнения (I.189) для частиц сорта « a » можно пренебречь и описывать движение этих частиц *бесстолкновительным кинетическим уравнением*. Согласно результатам раздела I.4 это можно сделать в случае выполнения условий:

$$\tau_a \gg L_g, \quad (\text{II.46})$$

где

$$L_g = \max |v^i \partial_i \ln|; \quad (\text{II.47})$$

$$\tau_a^{-1} = \sum_b \tau_{ab}^{-1}, \quad (\text{II.48})$$

Глава II. Самосогласованное описание плазмы

причем:

$$\tau_{ab}^{-1} = \left\langle\left\langle (p_a, v) \int f_b \sqrt{(p_a, p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} \sigma_{tot} d\pi_b \right\rangle\right\rangle. \quad (\text{II.49})$$

При выполнении условий (II.46) - (II.49) движение плазмы с большой точностью описывается бесстолкновительными уравнениями (I.198):

$$[\mathcal{H}_a, n_a] = 0. \quad (\text{II.50})$$

Как мы отмечали в том же разделе, энтропия в бесстолкновительных системах не изменяется со временем:

$$\frac{dS}{d\tau} = 0. \quad (\text{II.51})$$

Далее, вследствие общих законов сохранения: (II.9), (II.23) и с учетом равенства нулю интеграла столкновений в бесстолкновительной плазме выполняются следующие законы сохранения:

$$\nabla_i n_A^i = 0 \quad (\text{II.52})$$

- сохраняется число частиц каждого сорта;

$$J_{,i}^i = 0 \quad (\text{II.53})$$

- сохраняется любой заряд. В частности, из (II.33) при $\mu_v \neq 0$ сразу следует:

$$A_{,k}^k = 0 \quad (\text{II.54})$$

- лоренцевская калибровка для векторного потенциала массивного векторного поля.

Выбирая теперь для этого поля уравнения Прока (II.31) с векторным током (II.14), а для скалярного поля уравнения (II.36) с источником (II.44), определяя с учетом (II.52) - (II.54) согласно (II.28), (II.29) ТЭИ векторного и скалярного полей и присоединяя к полученным уравнениям уравнения Эйнштейна (II.40), мы получим замкнутую систему интегродифференциальных уравнений, которая описывает самосогласованное движение бесстолкновительных заряженных частиц с их макроскопическими скалярными, векторными полями и полями тяготения.

Данная система самосогласованных уравнений для случая электромагнитных и гравитационных полей впервые была приведена в книге А.А. Власова [7], поэтому и в дальнейшем самосогласованные бесстолкновительные кинетические модели для любого типа макроскопических полей будем называть уравнениями Власова.

Глава III

Релятивистская теория статистического равновесия плазмы в полях тяготения

III.1 Локальное термодинамическое равновесие плазмы в гравитационном поле

III.1.1 Локально равновесное распределение

Как мы показали в разделе I.6 термодинамическое равновесие статистической системы, когда поток энтропии равен нулю

$$\frac{dS}{d\tau} = 0, \quad (\text{III.1})$$

может осуществляться лишь при выполнении условий (см. (I.209) и (I.210)):

$$Z_{fi} - Z_{if} = 0 \quad (\text{III.2})$$

в каждом канале реакций (II.12). Уравнения (III.2) являются аналогом функциональных уравнений Больцмана [6]. Для их решения сделаем

Глава III. Равновесие плазмы в гравитационном поле

замену:

$$F_a = e^{-\phi_a} (e^{-\phi_a} \mp 1)^{-1} \equiv (1 \mp e^{\phi_a})^{-1}, \quad (\text{III.3})$$

в результате которой величины Z_{if} и Z_{fi} примут вид:

$$Z_{if} = \frac{\prod_i e^{-\phi_a}}{\prod_{i,f} (e^{-\phi_a} \mp 1)}; \quad Z_{fi} = \frac{\prod_f e^{-\phi_a}}{\prod_{i,f} (e^{-\phi_a} \mp 1)}. \quad (\text{III.4})$$

Тогда после логарифмирования уравнения (III.2) примут вид:

$$\sum_{A=1}^m \sum_{\alpha=1}^{\nu_A} \phi_A(\mathbf{P}_A^\alpha) = \sum_{B=1}^{m'} \sum_{\beta=1}^{\nu'_B} \phi'_B(\mathbf{P}_B^{\beta}), \quad (\text{III.5})$$

причем, эти соотношения должны выполняться в каждом канале реакций (II.12). Единственным решением (III.5) при произвольных значениях импульсов частиц являются линейные функции импульсов:

$$\phi_A(\mathbf{P}_A^\alpha) = -\lambda_A(x) + (\xi_A, \mathbf{P}_A^\alpha), \quad (\text{III.6})$$

где вследствие инвариантности функции распределения: $\lambda_A(x)$ - скаляры в конфигурационном пространстве, $\xi^i(x)$ - векторы. Подставляя (III.6) в уравнения (III.5) и учитывая закон сохранения обобщенного импульса при столкновениях, вследствие произвольности импульсов частиц получим:

$$\xi_A^i(x) = \xi^i(x); \quad (\text{III.7})$$

$$\sum_{A=1}^N \nu_A^k \lambda_A = 0, \quad (\text{III.8})$$

где $\|\nu_A^k\|$ - матрица, введенная в главе I. Вследствие условия (II.11) уравнения (III.8) всегда имеют нетривиальное решение.

Условия (III.7), (III.8) являются условиями локального термодинамического равновесия (ЛТР); скаляры $\lambda_A(x)$ называются химическими потенциалами статистической системы.

III.1. ЛТР плазмы в гравитационном поле

Подставляя решения (III.6) в (III.3) с учетом (III.7) получим *локально - равновесные функции распределения*:

$$f_a^0(x, P_a) = \{ \exp[-\lambda_a + (\xi, P_a)] \mp 1 \}^{-1}, \quad (\text{III.9})$$

где верхний знак, как и ранее, соответствует бозонам, нижний - фермионам.

Для сходимости моментов от распределения (III.9) необходима времениподобность вектора $\xi^i(x)$:

$$\xi^2 \equiv (\xi, \xi) > 0. \quad (\text{III.10})$$

Введем с помощью $\xi^i(x)$ единичное времениподобное поле $v^i(x)$:

$$v^i = \frac{\xi^i}{\xi}; \quad (v, v) = 1, \quad (\text{III.11})$$

локальную температуру $\theta(x)$ [6]:

$$\theta(x) = \xi^{-1} \quad (\text{III.12})$$

и химические потенциалы, $\mu_a(x)$, в обычной нормировке:

$$\mu_a(x) = \theta(x)\lambda_a(x). \quad (\text{III.13})$$

Тогда распределение (III.9) может быть записано в виде:

$$f_a^0(x, P_a) = \left\{ \exp \left[\frac{-\mu_a + (v, P_a)}{\theta} \right] \mp 1 \right\}^{-1}. \quad (\text{III.14})$$

III.1.2 Моменты равновесного распределения

Вычислим моменты распределения (III.9). При этом удобно перейти в локально лоренцевый репер, временная компонента которого направлена вдоль вектора v^i и ввести новые переменные $P_i = P_i - eA_i$, в которых уравнение массовой поверхности (I.17) принимает вид:

$$P_4^2 = P^2 + m_*^2, \quad (\text{III.15})$$

где:

$$m_*(x) = |m + q\Phi(x)| \quad (\text{III.16})$$

является эффективной массой частиц. Затем необходимо перейти к сферической системе координат в пространстве импульсов $P(X)$ и ковариантно обобщить полученные результаты. В итоге получим выражения

Глава III. Равновесие плазмы в гравитационном поле

для компонент вектора плотности числа частиц, $n_a^i(x)$, и ТЭИ a -той компоненты плазмы, T_a^{ik} , [65], [68]:

$$n_a^i(x) = n_a(x)v^i; \quad (\text{III.17})$$

$$T_a^{ik}(x) = (\mathcal{E}_a + P_a)v^i v^k - P_a g^{ik}, \quad (\text{III.18})$$

где

$$n_a(x) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \exp \left[\frac{-\mu'_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta} \mp 1 \right]^{-1} \right\} P^2 dP; \quad (\text{III.19})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_a(x) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \exp \left[\frac{-\mu'_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta} \mp 1 \right]^{-1} \right\} \times \\ \times \sqrt{m_*^2 + P^2} P^2 dP; \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

$$P_a(x) = \frac{\rho}{6\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \exp \left[\frac{-\mu'_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta} \mp 1 \right]^{-1} \right\} \frac{P^4 dP}{\sqrt{m_*^2 + P^2}}. \quad (\text{III.21})$$

В формулах (III.19) - (III.21) введены обозначения [65]:

$$\mu'_a(x) = \mu_a(x) - e_a(v, A). \quad (\text{III.22})$$

Следует заметить, что химические потенциалы μ'_a в отличие от потенциалов μ_a не сохраняются подобно (III.8) в реакциях, нарушающих закон сохранения векторного заряда. Для этих потенциалов вместо (III.8) получим:

$$\sum \nu_A^k \mu'_A = -\Delta e^k(v, A). \quad (\text{III.23})$$

III.1.3 ЛТР при нарушении Т-инвариантности

Химический потенциал безмассовых частиц, обладающих нулевыми фундаментальными зарядами, в состоянии ЛТР равен нулю. Этот вывод следует из того, что числа ν_A^k таких частиц, участвующих в реакциях (III.8), могут быть совершенно произвольными. Тогда из факта существования реакции аннигиляции частиц и античастиц следует известное соотношение [59]:

$$\bar{\mu}_a = -\mu_a. \quad (\text{III.24})$$

III.1. ЛТР плазмы в гравитационном поле

Вследствие определения (III.22) это соотношение сохраняет силу и для перенормированных химических потенциалов μ'_a . Аналогичные выводы можно сделать и в отношении фундаментальных зарядов g_A :

$$\bar{g}_A = -g_A. \quad (\text{III.25})$$

Заметим, что единичный вектор в направлении вектора плотности потока числа частиц называется *кинематической скоростью среды*, а собственный времениподобный единичный вектор ТЭИ частиц называется *динамической скоростью среды*, собственное же значение ТЭИ, соответствующее этому вектору, называется *плотностью энергии среды* (см., например, [41]).

Таким образом в состоянии ЛТР кинематическая скорость частиц совпадает с их динамической скоростью и равна V^i . Плотность энергии частиц равна согласно (III.18)

$$\mathcal{E}_p(x) = \sum_a \mathcal{E}_a, \quad (\text{III.26})$$

а изотропное давление всех сортов частиц:

$$P_p(x) = \sum_a P_a, \quad (\text{III.27})$$

где \mathcal{E}_a и P_a описываются формулами (III.20) и (III.21).

Рассмотрим теперь Т-неинвариантные взаимодействия, предполагая, однако, что распределение частиц остается локально равновесным, т.е., (III.9). Но тогда вследствие (III.3) тождественно выполняются функциональные соотношения (III.2). Но тогда согласно (I.207) скорость изменения энтропии равна нулю, т.е., мы снова получаем условие ЛТР (III.1). Итак, энтропия системы всегда сохраняется, если распределение частиц является локально равновесным.

Обратимся теперь к уравнениям переноса (II.6). В условиях ЛТР вследствие (III.3) эти уравнения принимают более простую форму:

$$\begin{aligned} & \nabla_i \sum_A \int_{\mathbb{P}} \psi f p^i d\pi - \sum_A \int_{\mathbb{P}} f [\mathcal{H}, \Psi] d\pi = \\ & = - \sum_k \int_{\mathbb{P}} \delta^{(4)}(P_F - P_I) \sum_A \nu_A^k \psi_A Z_{if} (W_{if} - W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi. \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Глава III. Равновесие плазмы в гравитационном поле

Полагая, в частности, $\psi_A = \delta_A^a$, получим из (III.28):

$$\nabla_i n_a^i = - \sum_k \nu_A^k \int_{\mathbb{P}} \delta^{(4)}(P_F - P_I) Z_{if} (W_{if} - W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi. \quad (\text{III.29})$$

Проведем в правой части (III.29) интегрирование по конечным состояниям частиц:

$$\sum \nu_A^k \int_f \prod (1 \pm f)(W_{if} - W_{fi}) d\pi_f.$$

Вследствие унитарности S -матрицы и оптической теоремы (I.194) этот интеграл равен нулю. Поэтому в условиях ЛТР имеет место закон сохранения каждого сорта частиц:

$$\nabla_i n_a^i = 0 \Leftrightarrow N_a = \text{Const}. \quad (\text{III.30})$$

III.2 Уравнения релятивистской гидродинамики плазмы в гравитационном поле

Соотношения (III.28) - (III.30) в условиях ЛТР выполняются лишь приближенно. Действительно, для их строгого выполнения необходимо, чтобы функции распределения (III.9) или (III.14) являлись решениями кинетических уравнений (I.189), т.е., необходимо существование *глобального термодинамического равновесия, ГТР*, которое может быть реализовано лишь для узкого класса физических и гравитационных полей. Для существования же ЛТР достаточно, чтобы функции распределения (III.9) являлись лишь приближенными решениями кинетических уравнений. Обратимся к этим уравнениям, для начала полагая взаимодействия частиц Т-инвариантными.

Будем полагать интеграл столкновений главным членом в уравнениях (I.189). Это подразумевает малость эффективного времени между столкновениями частиц сорта « a » со всеми остальными частицами, τ_a , по сравнению с четырехмерными размерами системы, L_g . Действительно, потребуем, чтобы характерный член в левой части кинетических уравнений (I.189) был в среднем гораздо меньше характерного члена в правой части кинетических уравнений, т.е.:

III.2. Уравнения релятивистской гидродинамики

$$|\langle p^i \partial_i f_a \rangle| \ll \left\langle \left\langle f_a \sum_k \nu_a^k \int \prod' f_I d\pi_I \prod (1 \mp f_f) d\pi_F W_{if} \delta(P_I - P_F) \right\rangle \right\rangle. \quad (\text{III.31})$$

Учитывая связь матрицы рассеяния с дифференциальным сечением рассеяния (I.179), оценим порядок интеграла в правой части (III.31):

$$f_a \sum_k \nu_a^k \int f_b d\pi_b \sqrt{(p_a, p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} \sigma_{tot},$$

где σ_{tot} - полное сечение взаимодействия $a + b \rightarrow \sum \nu_B^k a_B$. Введем эффективное время τ_{ab} между столкновениями частиц сортов a и b :

$$\tau_{ab}^{-1} = \left\langle \left\langle (p_a, v) \int f_b \sqrt{(p_a, p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} \sigma_{tot} d\pi_b \right\rangle \right\rangle, \quad (\text{III.32})$$

Тогда соотношение (III.31) может быть переписано в более сжатой форме:

$$\tau_a \ll L_g, \quad (\text{III.33})$$

где

$$L_g = \max |v^i \partial_i \ln|, \quad (\text{III.34})$$

$$\tau_a^{-1} = \sum_b \tau_{ab}^{-1}. \quad (\text{III.35})$$

Под знак логарифма в (III.34) следует подставить максимально неоднородную макроскопическую характеристику системы. Из (III.32) следует оценка эффективного времени столкновений:

$$\tau_{ab}^{-1} \sim n_b \sigma_{eff} \langle v_{ab} \rangle, \quad (\text{III.36})$$

где $\sigma_{eff} = \sigma_{tot}$ - эффективное сечение взаимодействий, v_{ab} - относительная скорость частиц a и b .

Таким образом, при выполнении (III.33) интеграл столкновений является главным членом в кинетических уравнениях (I.189), которые в нулевом приближении принимают вид:

$$I_a(x, P) = 0. \quad (\text{III.37})$$

Глава III. Равновесие плазмы в гравитационном поле

Эти уравнения для Т-инвариантных взаимодействий эквивалентны функциональным уравнениям (III.2), имеющими своими решениями локально равновесные функции распределения (III.9). Положим поэтому:

$$f_a(x, P_a) = \{ \exp[-\lambda_a + (\xi, P_a) + \phi_a] \mp 1 \}^{-1}, \quad (\text{III.38})$$

где $\phi_a = \phi_a(x, P_a)$, причем $\langle \phi_a \rangle \ll 1$. Имеет место следующее разложение функции (III.38) по малости ϕ :

$$f_a(x, P_a) = f_a^0(x, P_a) - [f_a^0(x, P_a)]^2 e^{-\lambda_a + (\xi, P_a)} \phi_a + \dots$$

Подставляя (III.38) в кинетические уравнения (I.189), используя функциональные уравнения (III.12), соотношение (I.23), в линейном по ϕ приближении получим интегральные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{df_a^0}{d\lambda_a} \left[\frac{(P^i - eA^i)(P^k - eA^k)}{1 + \frac{q\Phi}{m}} \frac{L}{\xi} g_{ik} - \frac{(P^i - eA^i)}{1 + \frac{q\Phi}{m}} (e \frac{L}{\xi} A_i + \lambda, i) - mq \frac{L}{\xi} \Phi \right] \\ = - \sum_k \nu_a^k \int \delta(P_F - P_I) \overset{0}{Z}_{if} \sum (W_{if} \phi_i - W_{fi} \phi_f) \prod_{f,i} d\pi. \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

В работах [6], [8], [9], [12] и других развиты методы приближенного интегрирования уравнений типа (III.39). При этом получаются уравнения релятивистской гидродинамики с учетом диссипативных процессов. Методы эти основаны на релятивистской модификации методов Грэда, Энского - Чемпена и др. В данной главе мы ограничимся выводом уравнений идеальной гидродинамики плазмы.

Умножая уравнения (III.39) на соответствующий обобщенный импульс и интегрируя по импульсному пространству, получим вследствие сохранения суммарного 4-импульса уравнения (II.23), в которых, однако, ТЭИ частиц имеет структуру ТЭИ идеальной жидкости (III.8). С учетом этого факта уравнения (II.23) принимают вид:

$$\nabla_k \left[(\mathcal{E} + P) v^i v^k \right] - P^{,i} - J_k F^{ik} - \sigma \Phi^{,i} + A^i J_{,k}^k = 0, \quad (\text{III.40})$$

где суммарные плотность энергии и давления частиц определяются формулами (III.20), (III.21), (III.26), (III.27);

$$J^i = \sum e_a n_a^i = v^i \sum e_a n_a; \quad (\text{III.41})$$

III.2. Уравнения релятивистской гидродинамики

скаляр $n_a(x)$ определен формулой (III.19).

Уравнениям (III.40) можно придать более удобный вид, для чего их следует свернуть с вектором макроскопической скорости частиц v^i . Тогда с учетом (III.41) и кососимметричности тензора F_{ik} , получим следствие:

$$\nabla_k \left[(\mathcal{E} + P) v^k \right] - \sigma v^k \Phi_{,k} - (v, A) J_{,k}^k = 0, \quad (\text{III.42})$$

используя которое в (III.40), приведем уравнения гидродинамики к виду:

$$\left(\mathcal{E} + \frac{P}{p} \right) v^k v_{,k}^i - \left(\frac{P}{p} + \sigma \Phi_{,k} - A_k J_{,l}^l \right) (g^{ik} - v^i v^k) - J_k F^{ik} = 0. \quad (\text{III.43})$$

Уравнения (III.42), (III.43) необходимо рассматривать совместно с уравнениями поля (II.31), (II.36), (II.40) а также с определениями (II.44), (III.19) - (III.21) и (III.41).

В случае, когда вектор плотности тока связан с сохраняющимся зарядом g_A , мы получаем еще одно уравнение - закон сохранения векторного тока (II.13) - и, таким образом, самосогласованная система уравнений идеальной гидродинамики замыкается с точностью до определения *уравнения состояния*:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E} \left(\frac{P}{p} \right). \quad (\text{III.44})$$

В случае же, когда векторный ток не сохраняется, система уравнений идеальной гидродинамики остается незамкнутой. Действительно, законы сохранения числа частиц (III.30) являются лишь приближенными, верными в нулевом порядке теории возмущений. Уравнения же гидродинамики представляют собой уравнения первого порядка теории возмущений. В этом приближении закон «сохранения тока» определяется уже поправками ϕ_a к равновесному распределению:

$$J_{,i}^i = - \sum_k \Delta e^k \int \delta(P_F - P_I) W_{if} \overset{0}{Z}_{if} \left(\sum \phi_I - \sum \phi_F \right) \prod_{i,f} d\pi, \quad (\text{III.45})$$

для определения которых необходимо решать интегральные уравнения (III.17). В случае Т-неинвариантных взаимодействий при условии сохранения векторного тока описанная выше система уравнений идеальной гидродинамики опять - таки справедлива вследствие закона «сохранения» суммарного ТЭИ (II.38). Однако, уравнения (III.17) в этом

случае необходимо изменить добавлением в правую часть несимметричного члена:

$$- \sum \nu_a^k \int \delta(P_F - P_I) \left(\sum W_{if} \phi_I - \sum W_{fi} \phi_F \right) \prod' d\pi.$$

III.3 Глобальное термодинамическое равновесие

В случае, когда функции распределения (III.9) (или (III.14)) являются точными решениями кинетических уравнений (I.189), статистическая система находится в строгом *глобальном термодинамическом равновесии* (ГТР). В условиях ГТР выполняются строгие законы сохранения частиц каждого сорта (III.30), и энтропия системы строго постоянна $S = \text{Const}$. Для нахождения условий ГТР подставим решения (III.9) в кинетические уравнения (I.189). Поскольку интеграл взаимодействий обращается в нуль на локально равновесных распределениях, приведем (I.189) к виду:

$$[\mathcal{H}_a, \phi_a] = 0, \quad (\text{III.46})$$

где:

$$\phi_a(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} (\xi, P) - \lambda_a(x).$$

Таким образом, для обеспечения ГТР должен существовать линейный интеграл движения, причем ξ^i - времениподобный вектор.

Разрешая (III.46), получим систему необходимых и достаточных условий существования ГТР [65], [68]:

$$\mathbb{L}_{\xi} g_{ik} = \sigma g_{ik}; \quad (\text{III.47})$$

$$m_a \left[(m_a + q_a \Phi) \sigma + q_a \mathbb{L}_{\xi} \Phi \right] = 0; \quad (\text{III.48})$$

$$e_a \mathbb{L}_{\xi} A_i = \lambda_a \cdot_i. \quad (\text{III.49})$$

Условия (III.47), (III.48) совпадают с условиями (I.30) существования линейного интеграла движения (I.27); условия (III.49) отличаются от соответствующих условий (I.29).

III.3. Глобальное термодинамическое равновесие

В случае, когда $m_a \neq 0$, получим из (III.47):

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{L}_\xi g_{ik}(m_a + q_a \Phi) &= 0; \\ e_a \mathbb{L}_\xi A_i &= \lambda_{a,i} \end{aligned} \right\} (m_a \neq 0). \quad (\text{III.50})$$

Для системы безмассовых частиц $m_a \equiv 0$ эти условия заменяются следующими:

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{L}_\xi \sigma g_{ik} &= 0; \\ e_a \mathbb{L}_\xi A_i &= \lambda_{a,i} \end{aligned} \right\} (m_a \equiv 0). \quad (\text{III.51})$$

Если же в равновесии находится более одного сорта частиц, (III.50) заменяются более жесткими условиями [65]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{L}_\xi g_{ik} &= 0; \\ \mathbb{L}_\xi \Phi &= 0; \\ e_a \mathbb{L}_\xi A_i &= \lambda_{a,i} \end{aligned} \right\} (m_a \neq 0). \quad (\text{III.52})$$

Вследствие условий на векторный потенциал, которые справедливы во всех случаях, выполняется закон сохранения модифицированного химического потенциала [65]:

$$\mathbb{L}_\xi \lambda'_a = 0; \quad (\lambda'_a = \lambda_a - e_a(\xi, A)). \quad (\text{III.53})$$

Поскольку все моменты равновесной функции распределения определяются с помощью скаляров ξ^2 , λ'_a , Φ и тензоров ξ^i , g^{ik} , $\xi^i \xi^k$, ..., то выполняются и законы сохранения моментов функции распределения [65]:

$$\mathbb{L}_\xi n_a^i = 0; \quad (\text{III.54})$$

$$\mathbb{L}_\xi J^i = 0; \quad (\text{III.55})$$

$$\mathbb{L}_{\xi a} T^{ik} = 0 \quad (\text{III.56})$$

и т.д. В [45], [69] показано, что необходимым и достаточным условием интегрируемости уравнений (III.53) относительно λ_a являются:

$$\mathbb{L}_\xi F_{ij} = 0. \quad (\text{III.57})$$

Глава III. Равновесие плазмы в гравитационном поле

Для доказательства (III.57) достаточно вычислить вторые смешанные производные от обеих частей уравнения:

$$e_a \underset{\xi}{L} A_i = \lambda_{,i}$$

и приравнять их. После коммутации производных L и ковариантных производных получим (III.57).

Вследствие первой группы уравнений (III.52) вдоль направления ξ^i сохраняются компоненты тензора Римана, Риччи и тензора Эйнштейна:

$$\underset{\xi}{L} R_{ijkl} = 0; \quad \underset{\xi}{L} R_{ij} = 0; \quad \underset{\xi}{L} G_{ij} = 0. \quad (\text{III.58})$$

Поэтому вследствие уравнений Эйнштейна должны выполняться соотношения:

$$\underset{\xi}{L} T_{ij} = 0, \quad (\text{III.59})$$

где T_{ij} определяется формулой (II.39). Нетрудно увидеть, что вследствие второй группы условий (III.52) а также (III.58):

$$\underset{\xi}{L} T^{ik} = 0. \quad (\text{III.60})$$

Но тогда вследствие (III.59) и (III.56) должно быть:

$$\underset{\xi}{L} T^{ik} = 0. \quad (\text{III.61})$$

Вычисляя производную L от (II.28) с учетом (III.57) и (III.61), получим:

$$\frac{\mu_v^2}{4\pi} \left\{ A^i \underset{\xi}{L} A^k + A^k \underset{\xi}{L} A^i - g^{ik} A^j \underset{\xi}{L} A_j \right\} = 0. \quad (\text{III.62})$$

Полагая $\mu_v \neq 0$, получим из (III.62) систему уравнений для определения векторов $a^i \stackrel{def}{=} \underset{\xi}{L} A^i$:

$$a_j (A^i g^{kj} + A^k g^{ij} - g^{ik} A^j) = 0. \quad (\text{III.63})$$

Сворачивая (III.63) с помощью g_{ik} , найдем следствие:

$$(a, A) = 0, \quad (\text{III.64})$$

III.4. ГТР самогравитирующей плазмы

с помощью которого уравнения (III.63) приводятся к более простой форме:

$$A^i a^j + A^j a^i = 0. \quad (\text{III.65})$$

Единственным решением этой системы уравнений является тривиальное: $a^i \equiv 0$.

Поэтому при $\mu_v \neq 0$:

$$\underset{\xi}{L} A_i = 0. \quad (\text{III.66})$$

Если же $\mu_v \equiv 0$, т.е., векторное поле является безмассовым, то подходящей градиентной перенормировкой векторного потенциала всегда можно добиться выполнения условия (III.66) (см. [69]). Таким образом, в условиях ГТР статистической системы, в которой имеются массивные частицы, выполняется соотношение:

$$\lambda = \underset{a}{\text{Const}}. \quad (\text{III.67})$$

Таким образом, в статистической системе заряженных частиц, находящейся в глобальном термодинамическом равновесии в гравитационном поле, полный химический потенциал каждого сорта частиц постоянен.

Перечисленные выше условия являются необходимыми и достаточными условиями глобального термодинамического равновесия статистической системы, содержащей массивные частицы. Поскольку вектор ξ^i является времениподобным и в то же время - вектором Кииллинга, статистическая система, содержащая массивные частицы, может находиться в состоянии глобального термодинамического равновесия лишь при условии стационарности всех полей.

III.4 Глобальное термодинамическое равновесие самогравитирующей плазмы

Задача о равновесных макроскопических движениях (т.е., о движениях, не выводящих систему из состояния ГТР) была поставлена автором [45] и полностью решена в последующих работах [69], [68]. Согласно

Глава III. Равновесие плазмы в гравитационном поле

результатам предыдущих разделов, самосогласованная система уравнений, описывающих гравитационное и электромагнитное поля равновесного ансамбля релятивистских частиц, имеет вид:

$$R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik} = 8\pi \left(T_p^{ik} + T_f^{ik} \right) \equiv 8\pi T^{ik}; \quad (\text{III.68})$$

$$F_{,k}^{ik} = -4\pi J^i; \quad (\text{III.69})$$

$$\overset{*}{F}_{,k}^{ik} = 0, \quad (\text{III.70})$$

где T_p^{ik} и J^i определяются выражениями (III.17), (III.18), (III.20), (III.21), (III.22), (III.41), в которых:

$$n_a(x) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp[-\lambda - e_a(\xi, A) + \theta^{-1} \sqrt{m_a^2 + p^2}] \pm 1}; \quad (\text{III.71})$$

$$\mathcal{E}(x) = \sum_a \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 \sqrt{m_a^2 + p^2} dp}{\exp[-\lambda - e_a(\xi, A) + \theta^{-1} \sqrt{m_a^2 + p^2}] \pm 1}; \quad (\text{III.72})$$

$$P(x) = \sum_a \frac{\rho}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{\exp[-\lambda - e_a(\xi, A) + \theta^{-1} \sqrt{m_a^2 + p^2}] \pm 1}, \quad (\text{III.73})$$

причем:

$$\lambda = \text{Const}; \quad \int_\xi A_i = 0. \quad (\text{III.74})$$

Согласно результатам предыдущего раздела вектор ξ^i является времениподобным вектором Киллинга, т.е., пространство - время должно допускать группу движений, подгруппой которой является движение вдоль линий времени. Допустим, что X_4 допускает группу движений G^r порядка $r \geq 1$ с векторами $\xi_\lambda^i(x)$ ($\lambda = \overline{1, r}$):

$$\xi_\lambda^{i,k} + \xi_\lambda^{k,i} = 0. \quad (\text{III.75})$$

III.4. ГТР самогравитирующей плазмы

Тогда вектор Киллинга $\xi^i(x)$, определяющий макроскопическую скорость $v^i = \xi^i/\xi$ и температуру системы $\theta = \xi^{-1}$, является линейной комбинацией векторов ξ_λ^i :

$$\xi^i = \sum_{\lambda=1}^r \alpha_\lambda \xi_\lambda^i; \quad (\alpha_\lambda = \text{Const}). \quad (\text{III.76})$$

Возникает вопрос, каковы постоянные α_λ , т.е., *каковы равновесные макроскопические движения плазмы?* Если плазма является пробной, т.е., рассматривается на фоне заданного гравитационного поля, то значения констант α_λ произвольны и ограничены лишь требованием времениподобности вектора ξ^i . Если же гравитационное поле само порождено плазмой, ситуация радикально меняется. Действительно, в этом случае вследствие уравнений Эйнштейна (III.68) и уравнений Киллинга (III.75):

$$\underset{\xi}{\mathbb{L}} T^{ik} \stackrel{def}{=} \underset{\lambda}{\mathbb{L}} T^{ik} = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{III.77})$$

В [70] показано, что в случае, когда ТЭИ вещества имеет структуру ТЭИ идеальной жидкости, симметрия пространства - времени наследуется отдельно идеальной жидкостью и электромагнитным полем, т.е., в этом случае из (III.77) следует:

$$\underset{\lambda p}{\mathbb{L}} T^{ik} = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}), \quad (\text{III.78})$$

$$\underset{\lambda f}{\mathbb{L}} T^{ik} = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{III.79})$$

Условия (III.78), (III.79) налагают жесткие ограничения на допустимые равновесные движения плазмы и структуру ее электромагнитного поля. В случае $r = 1$ вектор ξ^i с точностью до постоянного множителя совпадает с касательным вектором к траекториям группы G^1 ; условия (III.78), (III.79) при этом выполняются автоматически вследствие (III.59), (III.61) и (III.66).

Рассмотрим поэтому случай $r > 1$. Обратимся сначала к условиям (III.78). Вычисляя производную Ли от (III.18), получим:

$$\xi^i \xi^k \underset{\lambda}{\mathbb{L}} (\mathcal{E} + P) + \xi^{(i} \bar{\xi}^{k)} (\mathcal{E} + P) - 2(\bar{\xi}, \xi) \frac{\xi^i \xi^k}{\xi^2} (\mathcal{E} + P) - g^{ik} \underset{\lambda}{\mathbb{L}} P = 0$$

$$(\lambda = \overline{1, r}), \quad (\text{III.80})$$

где введено обозначение:

$$\bar{\xi}^i \stackrel{def}{=} \underset{\lambda}{\mathbb{L}} \xi^i. \quad (\text{III.81})$$

Предположим, что хотя бы при одном фиксированном $\lambda = p \underset{p}{\mathbb{L}} P \neq 0$; тогда согласно (III.80) метрический тензор g^{ik} может быть разложен по двум векторам ξ^i и $\bar{\xi}^i$. Но в этом случае метрический тензор вырожден ($g = 0$), чего не должно быть.

Следовательно, при любых $p = \lambda$ имеет место соотношение:

$$\underset{\lambda}{\mathbb{L}} P = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{III.82})$$

Но тогда вследствие (III.80) должны выполняться условия:

$$\xi^i \xi^k \left[\underset{\lambda}{\mathbb{L}} (\mathcal{E} + P) - 2(\bar{\xi}, \xi) \frac{\xi^i \xi^k}{\xi^2} (\mathcal{E} + P) \right] + \xi^{(i} \bar{\xi}^{k)} (\mathcal{E} + P). \quad (\text{III.83})$$

Поскольку $(\mathcal{E} + P) > 0$ (имеются ввиду плотность энергии и давление «голых» частиц), из (III.83) следует:

$$\xi^{(i} \bar{\xi}^{k)} = -\xi^i \xi^k \left[\underset{\lambda}{\mathbb{L}} \ln(\mathcal{E} + P) - 2 \frac{(\xi, \bar{\xi})}{\xi^2} \right]; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{III.84})$$

Сворачивая (III.84) с ξ^i с учетом времениподобности этого вектора, найдем:

$$\bar{\xi}^i = -\xi^i \left[\underset{\lambda}{\mathbb{L}} \ln(\mathcal{E} + P) - \frac{(\xi, \bar{\xi})}{\xi^2} \right]; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{III.85})$$

Сворачивая (III.85) еще раз, получим:

$$\underset{\lambda}{\mathbb{L}} \ln(\mathcal{E} + P) = 0,$$

III.4. ГТР самогравитирующей плазмы

откуда вследствие (III.82) найдем:

$$\mathbb{L}_\lambda \mathcal{E} = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{III.86})$$

Используя (III.86) и (III.82) в (I.111), получим:

$$\bar{\xi}_\lambda^i = \frac{(\xi, \bar{\xi})}{\xi^2} \xi^i; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{III.87})$$

Уравнения (III.87) можно также записать в виде:

$$\bar{\xi}_\lambda^k (g_{ik} - v_i v_k) = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{III.88})$$

Обратимся теперь к уравнениям (III.82) и (III.86). Согласно (III.72) и (III.73) скаляры $\mathcal{E}(x)$ и $P(x)$ могут зависеть от координат лишь посредством двух скаляров: $(\xi, A) \equiv A_\xi$ и ξ . Поэтому уравнения (III.82) и (III.86) могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} \mathbb{L}_\lambda \xi + \frac{\partial P}{\partial A_\xi} \mathbb{L}_\lambda A_\xi = 0; \quad (\text{III.89})$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi} \mathbb{L}_\lambda \xi + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_\xi} \mathbb{L}_\lambda A_\xi = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{III.90})$$

Соотношения (III.89) и (III.90) можно рассматривать как систему однородных алгебраических уравнений относительно переменных $\mathbb{L}_\lambda \xi$ и $\mathbb{L}_\lambda A_\xi$. Тогда, если определитель этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial \xi} & \frac{\partial P}{\partial A_\xi} \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_\xi} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то (III.89), (III.90) имеют лишь тривиальные решения:

$$\mathbb{L}_\lambda \xi = 0; \quad (\text{III.91})$$

$$\mathbb{L}_\lambda (\xi, A) \equiv \mathbb{L}_\lambda A_\xi = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{III.92})$$

Глава III. Равновесие плазмы в гравитационном поле

Но тогда вследствие тождества:

$$\mathbb{L}_\lambda \xi = \xi^{-1}(\bar{\xi}, \xi) \quad (\text{III.93})$$

(III.87) дает:

$$\bar{\xi}^i \equiv \mathbb{L}_\lambda \xi^i = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{III.94})$$

Если же $\Delta \equiv 0$, мы получаем соотношение:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_\xi} - \frac{\partial P}{\partial A_\xi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi} = 0. \quad (\text{III.95})$$

Рассматривая (III.95) как дифференциальное уравнение относительно функции, например, $P(x)$, найдем его общее решение:

$$P = P(\mathcal{E}), \quad (\text{III.96})$$

которое означает, что функции $\xi(x)$ и $A_\xi(x)$ связаны алгебраическим соотношением:

$$A_\xi = \Psi(\xi).$$

Но тогда скаляры $P(x)$ и $\mathcal{E}(x)$ либо зависят от координат лишь посредством инварианта ξ , либо вообще не зависят от координат, т.е., $\xi = \text{Const}$. И в первом и во втором случаях мы снова приходим к условиям (III.91), (III.92), (III.94).

Таким образом, условия (III.91), (III.92), (III.94) являются необходимыми и достаточными условиями выполнения (III.78).

Отметим, что (III.94) можно также записать в виде [45]:

$$\sum_{\lambda' \neq \lambda} (\xi^i \xi^k)_{[\lambda \lambda']} = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}), \quad (\text{III.97})$$

или, вводя генераторы группы [52]

$$X_\lambda = \xi_\lambda^i \partial_i,$$

перепишем условия (III.97) в более компактном виде:

$$[X, X_\lambda] = 0, \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{III.98})$$

III.4. ГТР самогравитирующей плазмы

Последние условия означают, что оператор

$$X = \xi^i \partial_i \quad (\text{III.99})$$

является *центром группы*.

Таким образом, *равновесные макроскопические поля тяготения ансамбля заряженных частиц должны допускать группу движений, обладающей времениподобным центром.*

Обратимся теперь к условиям (III.78) на ТЭИ электромагнитного поля. В [70] показано, что для выполнения (III.78) необходимо и достаточно выполнение условий :

$$\mathbb{L}_\lambda F_{ik} = b_\lambda F_{ik}^* , \quad (\text{III.100})$$

где $b_\lambda(x)$ - произвольные скалярные функции. Свертывая (III.100) с дискриминантным тензором, получим следствие [69]:

$$\mathbb{L}_\lambda F_{ik}^* = -b_\lambda F_{ik} . \quad (\text{III.101})$$

Свернем соотношения (III.100) и (III.101) с вектором макроскопической скорости ξ^i/ξ , учитывая при этом (III.94):

$$\mathbb{L}_\lambda E_i = b_\lambda H_i ; \quad (\text{III.102})$$

$$\mathbb{L}_\lambda H_i = -b_\lambda E_i , \quad (\text{III.103})$$

где введены обозначения [71]:

$$E_i = \frac{\xi^k}{\xi} F_{ki} \equiv v^k F_{ki} ; \quad (\text{III.104})$$

$$H_i = \frac{\xi^k}{\xi} F_{ki}^* . \quad (\text{III.105})$$

Векторы E_i и H_i являются векторами напряженности электрического и магнитного полей в сопутствующей с плазмой системе отсчета. Важно отметить, что вследствие времениподобности вектора ξ^i компоненты

Глава III. Равновесие плазмы в гравитационном поле

тензора Максвелла однозначно выражаются через наблюдаемые E_i и H_i [71]:

$$F_{ik} = \frac{1}{\xi} \left[\xi_i E_k - \xi_k E_i - \eta_{iklm} \xi^l H^m \right]. \quad (\text{III.106})$$

Отметим также, что согласно (III.104), (III.105):

$$(E, \xi) = 0; \quad (H, \xi) = 0. \quad (\text{III.107})$$

Рассмотрим, например, соотношение (III.102). Выполняя тождественные преобразования с учетом (III.91), (III.92), получим:

$$\mathbb{L}_\lambda E_i \equiv \xi^{-1} \mathbb{L}_\lambda F_{ki} \xi^k = \xi^{-1} \mathbb{L}_\lambda (A_{i,k} - A_{k,i}) \xi^k.$$

Используя условия (III.52) и (III.66), запишем:

$$(A_{i,k} - A_{k,i}) \xi^k \equiv A_{i,k} \xi^k - \xi^k_{,i} A_k - \partial_i A_\xi \equiv \mathbb{L}_\xi - \partial_i A_\xi = -\partial_i A_\xi.$$

Таким образом:

$$\mathbb{L}_\lambda E_i = -\xi^{-1} \mathbb{L}_\lambda \nabla_i A_\xi \equiv -\xi^{-1} \nabla_i \mathbb{L}_\lambda A_\xi = 0, \quad (\text{III.108})$$

и соотношения (III.102) принимают вид:

$$b_\lambda H_i = 0. \quad (\text{III.109})$$

Пусть сначала $b_\lambda \neq 0$ и $H_i = 0$. Но тогда из (III.103) сразу следует:

$$E_i = 0,$$

или, согласно (III.106):

$$F_{ik} = 0, \quad (\text{III.110})$$

т.е., электромагнитное поле отсутствует. Если же тензор Максвелла отличен от нуля, то остается второй вариант: $b_\lambda = 0$, т.е.:

$$\mathbb{L}_\lambda F_{ik} = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{III.111})$$

Очевидно, что (III.111) включает в себя как частный случай и (III.110).

Таким образом, мы доказали, что:

Необходимыми и достаточными условиями выполнения (III.77) являются (III.94) и (III.111).

III.5. ГТР систем со скалярным взаимодействием

Условия (III.92) и (III.93) являются следствиями указанных двух. Заметим, что вследствие (III.91) и (III.94) вдоль траекторий группы сохраняется и вектор макроскопической скорости системы:

$$\mathbb{L}_\lambda v^i = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{III.112})$$

В [45] приведены примеры равновесных гравитирующих конфигураций при $r = 2$ и $r = 4$. В [72], [73] с помощью классификации Петрова [52] полей тяготения по группам движений был произведен отбор равновесных полей тяготения согласно условиям (III.98) и показано, что порядок группы движений не может больше 5, причем G^5 допускается лишь в специальном случае: $\mathcal{E} = -P = \text{Const}$.

Следует отметить, что для статистических систем с массивным векторным взаимодействием частиц аналогичные утверждения до сих пор не доказаны.

III.5 Глобальное термодинамическое равновесие самогравитирующей системы со скалярным взаимодействием частиц

Этот случай был рассмотрен в [68]. Условия глобального равновесия принимают вид:

$$\lambda_\alpha = \text{Const}; \quad \mathbb{L}_\xi \Phi = 0; \quad \mathbb{L}_\xi g_{ik} = 0. \quad (\text{III.113})$$

Плотность энергии и давление плазмы определяются формулами (III.20) и (III.21), в которых следует положить: $A_i = 0$, т.е., определяются двумя скалярами $\xi(x)$ и $\Phi(x)$. В целях общности изложения рассмотрим неконформно инвариантное скалярное поле.¹ Вычисляя производную Ли от суммарного ТЭИ, получим:

$$\begin{aligned} \xi_i \xi_k \mathbb{L}_\lambda \left(\frac{\mathcal{E} + P}{\xi^2} \right) + \left(\bar{\xi}_i \xi_k + \bar{\xi}_k \xi_i \right) \frac{\mathcal{E} + P}{\xi^2} + \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left(\Phi_{,i} \Phi_{,k} + \Phi_{,k} \Phi_{,i} \right) - \\ - g_{ik} \left[\mathbb{L}_\lambda P + \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left(\Phi_{,j} \Phi_{,j} - \mu_s^2 \Phi_{,j} \Phi_{,j} \right) \right] = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}), \end{aligned} \quad (\text{III.114})$$

¹Для случая конформно инвариантного скалярного поля результаты не нуждаются в исправлении.

Глава III. Равновесие плазмы в гравитационном поле

где:

$$\Phi_{\lambda} \stackrel{def}{=} \mathbb{L}_{\lambda} \Phi; \quad \Phi_{\lambda,i} \stackrel{def}{=} \mathbb{L}_{\lambda} \Phi_{,i} = \partial_i \Phi_{\lambda}; \quad (\text{III.115})$$

$\epsilon_s = \pm 1$ (плюс и минус соответствуют отталкивающимся и притягивающимся барионам).

В случае, если:

$$\mathbb{L}_{\lambda} P + \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left(\Phi_{\lambda}^{,j} \Phi_{\lambda,j} - \mu_s^2 \Phi_{\lambda} \Phi_{\lambda} \right) \neq 0,$$

при каждом фиксированном λ , то метрический тензор может быть выражен, как нетрудно убедиться, через три вектора, но в этом случае он вырожден (т.е., $g = 0$), чего не должно быть. Из (III.77) следует тогда, что должны выполняться 11r условий:

$$\mathbb{L}_{\lambda} P + \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left(\Phi_{\lambda}^{,j} \Phi_{\lambda,j} - \mu_s^2 \Phi_{\lambda} \Phi_{\lambda} \right) = 0; \quad (\text{III.116})$$

$$\begin{aligned} & \xi_i \xi_k \mathbb{L}_{\lambda} \frac{\mathcal{E} + P}{\xi^2} + \left(\bar{\xi}_{\lambda}^i \xi_{k,i} + \bar{\xi}_{\lambda}^k \xi_{i,k} \right) + \\ & + \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left(\Phi_{\lambda}^{,i} \Phi_{\lambda,i} + \Phi_{\lambda}^{,k} \Phi_{\lambda,k} \right) = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \end{aligned} \quad (\text{III.117})$$

Свертывая (III.117) с $\xi^i \xi^k$ и учитывая (III.113), получим:

$$\mathbb{L}_{\lambda} (\mathcal{E} + P) = 0, \quad (\text{III.118})$$

а свертывая (III.117) с $\xi^i \Phi^k$, учитывая (III.113) и очевидное соотношение:

$$\left(\bar{\xi}_{\lambda}^i, \Phi \right) = \left(\xi_i, \Phi_{\lambda} \right),$$

получим:

$$\left(\bar{\xi}_{\lambda}^i, \Phi \right) \left[\mathcal{E} + P - \frac{\epsilon_s}{4\pi} (\Phi, \Phi) \right] = 0. \quad (\text{III.119})$$

Свертка (III.117) с $\Phi'^i \Phi^k$ приводит к результату:

$$(\Phi, \Phi)_{\lambda} (\Phi, \Phi) = 0. \quad (\text{III.120})$$

III.5. ГТР систем со скалярным взаимодействием

Для решения (III.119) предположим сначала:

$$(\xi, \Phi) = 0. \quad (\text{III.121})$$

Тогда свертывая (III.117) с ξ^k и учитывая очевидное соотношение:

$$\mathbb{L}_\lambda \xi^2 = 2(\xi, \bar{\xi}),$$

найдем:

$$\bar{\xi}_\lambda^i = \frac{\xi_i}{\xi} \mathbb{L}_\lambda \xi, \quad (\text{III.122})$$

откуда получим:

$$\mathbb{L}_\lambda v_i = 0 \quad (\text{III.123})$$

и приведем уравнение (III.117) к виду:

$$\Phi_{\lambda,i} \Phi_{,k} + \Phi_{\lambda,k} \Phi_{,i} = 0. \quad (\text{III.124})$$

В случае:

$$\Phi_{,i} \neq 0 \quad (\text{III.125})$$

единственным решением (III.124) является:

$$\Phi_{\lambda,i} = 0. \quad (\text{III.126})$$

Тогда (III.116) сводится к соотношению:

$$\mathbb{L}_\lambda \left(P - \frac{\epsilon_s \mu_s^2}{8\pi} \Phi^2 \right) = 0. \quad (\text{III.127})$$

Рассмотрим другой вариант решения уравнения (III.119):

$$\mathcal{E} + P - \frac{\epsilon_s}{4\pi} (\Phi, \Phi) = 0; \quad (\text{III.128})$$

тогда из (III.117) получим:

$$(\Phi, \Phi) = 0. \quad (\text{III.129})$$

Свертывая (III.117) с $\Phi_{\lambda,k}$ и учитывая (III.128) и (III.129), найдем:

$$(g^{ik} - v^i v^k) \Phi_{\lambda,k} = 0. \quad (\text{III.130})$$

Глава III. Равновесие плазмы в гравитационном поле

Используя (III.113) найдем из (III.130) $\Phi_{,\lambda} = 0$, т.е., снова приходим к (III.122), (III.123), (III.126) и (III.127).

Согласно (III.116), (III.117) скаляры \mathcal{E} и P могут зависеть от координат лишь посредством функций $\xi(x)$ и $\Phi(x)$. Из уравнений (III.118) и (III.127) получим систему однородных алгебраических уравнений относительно Φ и ξ :

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} \bar{\xi}_{,\lambda} + \left(\frac{\partial P}{\partial \Phi} - \frac{\epsilon_s \mu_s^2}{4\pi} \Phi \right) \Phi_{,\lambda} = 0; \quad (\text{III.131})$$

$$\frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial \xi} \bar{\xi}_{,\lambda} + \frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial \Phi} \Phi_{,\lambda} = 0. \quad (\text{III.132})$$

В случае, если определитель этой системы отличен от нуля, получаем:

$$\Phi_{,\lambda} \equiv \mathbb{L}_{\lambda} \Phi = 0; \quad (\text{III.133})$$

$$\bar{\xi}_{,\lambda} \equiv \mathbb{L}_{\lambda} \xi = 0. \quad (\text{III.134})$$

Но тогда из (III.118), (III.122), (III.124) и (III.134) следует:

$$\mathbb{L}_{\lambda} \mathcal{E} = 0; \quad \mathbb{L}_{\lambda} P = 0; \quad (\text{III.135})$$

$$\mathbb{L}_{\lambda} \xi = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{III.136})$$

В случае же равенства нулю определителя системы (III.131) - (III.132) легко показать, что:

$$\Phi = \Phi(\xi); \quad \mathcal{E} + P = \text{Const}.$$

Из (III.20), (III.21) вытекает, что это возможно лишь при $\xi = \text{Const}$, но тогда и $\Phi = \text{Const}$, т.е., вновь получаем условия (III.133) - (III.136). Достаточность же этих условий для сохранения суммарного ТЭИ при движении вдоль траекторий G^r проверяется элементарно.

Таким образом и *глобальное равновесие самогравитирующей статистической системы со скалярным взаимодействием частиц возможно лишь в том случае, когда пространство - время допускает группу движений с времениподобным центром, вдоль которого происходит макроскопическое движение системы.*

Глава IV

Кинетика плазмоподобных сред в поле гравитационной волны

IV.1 Кинетическая модель плазмоподобной среды в поле заданного гравитационного излучения

IV.1.1 Кинетические уравнения

Плазмоподобными будем называть среды с малым межчастичным взаимодействием, когда средняя энергия парного взаимодействия частиц гораздо меньше их кинетической энергии. Корректное описание таких сред как раз и возможно в рамках кинетической теории. Примером плазмоподобных сред являются: высокотемпературная плазма, электроны в металлах, магнитосферная плазма, реликтовые фотоны и т.п. Движение плазмоподобной среды, состоящей из электрически заряженных частиц, в заданном гравитационном поле описывается самосогласованной системой ковариантных уравнений Максвелла - Больцмана:

$$[H_a, f_a] = \sum_b J^{ab}(f); \quad (IV.1)$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

$$F_{,k}^{ik} = -4\pi J^i; \quad (\text{IV.2})$$

$$F^*_{,k}{}^{ik} = 0, \quad (\text{IV.3})$$

где $\mathcal{H}_a(x, P)$ - функция Гамильтона заряженной частицы:

$$\mathcal{H}_a(x, P) = \frac{1}{2}g^{ik}(P_i - e_a A_i)(P_k - e_a A_k) = \frac{1}{2}m_a^2, \quad (\text{IV.4})$$

$$J^i = \sum_a e_a \int_{\mathbf{P}} f_a p^i d\mathbf{P} = \sum e n^i. \quad (\text{IV.5})$$

В этом разделе мы будем также рассматривать и плазмоподобные среды с массивными скалярными полями. В таких случаях уравнения Максвелла (IV.2) - (IV.3) необходимо заменить соответствующими полевыми уравнениями раздела II.2. При рассмотрении плазмоподобных сред с электромагнитным взаимодействием мы ограничимся учетом упругих кулоновских и комптоновских взаимодействий:

$$e_a + e_b = e_a + e_b; \quad e + \gamma = e + \gamma, \quad (\text{IV.6})$$

пренебрегая потерями энергии на тормозное излучение, что оправдано и при релятивистских, но не слишком высоких температурах [33]:

$$\theta \ll \sqrt{137\Lambda} m_e, \quad (\text{IV.7})$$

где $\Lambda \gg 1$ - кулоновский логарифм. Кулоновские взаимодействия заряженных частиц будем описывать модифицированным интегралом Беляева - Будкера [33], [74]:

$$J_i^{ab}(p) = -\frac{\partial}{\partial P_i} J_i^{ab}, \quad (\text{IV.8})$$

где

$$J_i^{ab} = 2\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda m_a m_b \int d\pi W_{ik} \left[(1 - n') n' \frac{\partial n}{\partial P_k} - (1 - n) n \frac{\partial n'}{\partial P'_k} \right]; \quad (\text{IV.9})$$

(штрих относится к индексу «b»). Ядро интеграла столкновений, $W_{ik}(u, u')$, имеет вид:

IV.1. Кинетическая модель плазмы в поле ГВ

$$W_{ik}(u, u') = -\frac{(u, u')^2}{[(u, u')^2 - 1]} \left\{ [(u, u')^2 - 1]g_{ik} + \right. \\ \left. + u_i u_k + u'_i u'_k - (u, u')(u_i u'_k + u'_i u_k) \right\}; \quad (\text{IV.10})$$

$u_i = p_i/m_a, u'_i = p'_i/m_b$ - 4-скорости частиц. Ядро интеграла столкновений удовлетворяет ряду алгебраических и дифференциальных соотношений [75], [76]:

$$W_{ik}(u, u') = W_{ki}(u, u') = W_{ik}(u', u); \quad (\text{IV.11})$$

$$W_{ik}(u, u')u^k = W_{ik}(u, u')u'^k = 0; \quad (\text{IV.12})$$

$$\det \|W_{ik}\| = 0; \quad (\text{IV.13})$$

$$\frac{\partial W_{ik}}{\partial u^k} = \frac{4(u, u')^2}{[(u, u')^2 - 1]^{3/2}} [u'^i(u, u') - u^i]. \quad (\text{IV.14})$$

Вследствие упругости кулоновских столкновений интеграл Беляева - Будкера обладает следующими свойствами:

$$\sum_b \int J^{ab} d\pi_a = 0; \quad (\text{IV.15})$$

$$\sum_{a,b} \int J^{ab} p^i d\pi_a = 0, \quad (\text{IV.16})$$

обеспечивающими выполнение законов сохранения заряда и импульса.

IV.1.2 Метрика плоской гравитационной волны

Метрика плоской гравитационной волны (ПГВ), распространяющейся вдоль оси $0x^1 \equiv x$, в синхронной системе отсчета (ССО), описывается решением Бонди - Пирани - Робинсона [77]:

$$ds^2 = 2dudv - A(u)(dx^2)^2 - B(u)(dx^3)^2 + 2C(u)dx^2 dx^3 = \\ = (dx^4)^2 - (dx^1)^2 - A(u)(dx^2)^2 - B(u)(dx^3)^2 + 2C(u)dx^2 dx^3, \quad (\text{IV.17})$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

где:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^4 - x^1); \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^4 + x^1)$$

- запаздывающее и опережающее времена;

$$\begin{aligned} A(u) &= L^2 \operatorname{ch}(2\gamma) \exp(2\beta); \\ B(u) &= L^2 \operatorname{ch}(2\gamma) \exp(-2\beta); \\ C(u) &= L^2 \operatorname{sh}(2\gamma). \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

Произвольные функции $\beta(u)$ и $\gamma(u)$ описывают амплитуды двух возможных состояний поляризации ПГВ: \mathbf{e}_+ и \mathbf{e}_\times и обычно называются *волновыми факторами ПГВ*; *фоновый фактор ПГВ* $L^2(u) = \sqrt{-g}$ удовлетворяет единственному нетривиальному вакуумному уравнению Эйнштейна:

$$L'' + L[\beta'^2 \operatorname{ch}^2(2\gamma) + \gamma'^2] = 0. \quad (\text{IV.19})$$

Мировые линии геодезического наблюдателя в метрике (IV.17) есть линии времени $x^4 = \tau$. Как известно, (см., например, [46]), в ССО решения уравнений Эйнштейна имеют координатную сингулярность. В случае метрики (IV.17) координатная сингулярность связана с обращением в нуль на некоторой изотропной гиперповерхности $u = \bar{u}$ фонового фактора $L(u)$. Оценка \bar{u} приведена в [47]:

$$\bar{u} \sim \frac{1}{(\beta'^2 + \gamma'^2)\tau_g}, \quad (\text{IV.20})$$

где τ_g - длительность гравитационного импульса.

Подпространство $\Sigma_2\{x^1, x^4\} \subset X_4$ есть псевдоевклидова плоскость; преобразования Лоренца в плоскости Σ_2 не меняют вида метрики (IV.17) и сводятся лишь к замене аргумента u функций A, B, C на аргумент:

$$u' = u \frac{(1 - V)}{\sqrt{1 - V^2}}.$$

Двумерное подпространство $\bar{\Sigma}_2\{x^2, x^3\} \equiv \{y, z\}$ является римановым пространством с положительно определенной сигнатурой, однако его двумерная метрика не изменяет своей формальной структуры при невырожденных преобразованиях координат x^2, x^3 :

$$A(u); B(u); C(u) \rightarrow A'(u); B'(u); C'(u).$$

IV.1. Кинетическая модель плазмы в поле ГВ

ПГВ с фиксированной поляризацией \mathbf{e}_+ отвечает метрика ($C = 0$):

$$ds^2 = 2dudv - L^2(u) \left(e^{2\beta} (dx^2)^2 + e^{-2\beta} (dx^3)^2 \right), \quad (\text{IV.21})$$

а ПГВ с фиксированной поляризацией \mathbf{e}_\times :

$$ds^2 = 2dudv - L^2(u) \text{ch} 2\gamma \left((dx^2)^2 + (dx^3)^2 \right) + 2L^2(u) \text{sh}(2\gamma) dx^2 dx^3. \quad (\text{IV.22})$$

Поворотом системы координат :

$$x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'^2 + x'^3); \quad x^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'^2 \pm x'^3)$$

метрика (IV.22) приводится к виду (IV.21). При $\beta' = \gamma' = 0$ пространство - время является плоским; ПГВ в этом случае отсутствует. Поэтому метрика (IV.17) до прихода ПГВ задается соотношениями:

$$\beta = \gamma = 0; \quad L = 1; \quad (u \leq 0). \quad (\text{IV.23})$$

В слабой ПГВ:

$$\beta \ll 1; \quad \gamma \ll 1; \quad L(u) = 1; \quad (\text{IV.24})$$

$$A(u) \approx 1 + 2\beta; \quad B(u) \approx 1 - 2\beta; \quad C(u) \approx 2\gamma. \quad (\text{IV.25})$$

IV.1.3 Границы применимости приближения вакуумной ПГВ

Возникает естественный вопрос: в какой мере вакуумное решение (IV.17) пригодно для описания движения физической среды в поле ГВ? Для слабых ГВ ответ на этот вопрос можно дать на основе результатов линейной теории распространения ГВ в однородной среде [43], [78], [75], [79], [80], [81], [76], [74] и др. Спектр слабых высокочастотных ГВ в квазиоднородной среде эволюционирует по закону:

$$\omega^2 = k^2 + \omega_g^2, \quad (\text{IV.26})$$

где \mathbf{k} - волновой вектор ГВ:

$$\omega_g^2 \sim 8\pi\mathcal{E} \quad (\text{IV.27})$$

(\mathcal{E} - плотность энергии среды). Конкретное значение ω_g зависит от уравнения состояния среды и структуры ее невозмущенного гравитационного поля. Таким образом:

$$\omega_g \sim L_g^{-1} \sim K, \quad (\text{IV.28})$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

где K - кривизна пространства - времени. В однородной Вселенной таким масштабом является космологическое время $t \sim L_g$. Амплитуда же, h , слабых ГВ эволюционирует по закону:

$$\dot{h} \sim h/L_g. \quad (\text{IV.29})$$

Для того, чтобы можно было пренебречь обратным влиянием среды на слабую ГВ, т.е., использовать метрику (IV.17), необходимо *одновременное* выполнение двух условий [82], [83], [84]:

1. высокочастотность ГВ:

$$\omega^2 \gg \omega_g^2 \sim 8\pi\mathcal{E}, \quad (\text{IV.30})$$

- при этом фазовая скорость ГВ стремится к скорости света;

2. ограниченность линейных размеров рассматриваемой системы:

$$\ell \ll L_g \sim (8\pi\mathcal{E})^{-1/2}, \quad (\text{IV.31})$$

- при этом амплитуда ГВ практически постоянна в рассматриваемой области.

Для лабораторных детекторов ($\rho \leq 10\text{г/см}^3$) указанные условия всегда выполняются с огромным запасом: $\omega \gg 10^{-3}\text{с}^{-1}$, $\ell \ll 10^{13}\text{см}$. Для космической среды масштаб L_g , как мы отмечали выше, совпадает с космологическим временем t , откуда получаем: $\omega \gg 10^{-18}\text{с}^{-1}$, $\ell \ll 10^{28}\text{см}$.

Как показывает анализ, условия (IV.30), (IV.31) являются достаточными и для использования вакуумной метрики (IV.17) и в случае сильной ГВ, если под частотой сильной ПГВ понимать максимальное значение производных от логарифмов функций L, β, γ : $\omega \sim \max \ln'(\beta)$ и т.д. Действительно, с одной стороны, плотность энергии ГВ, вычисленная с помощью псевдотензора Ландау - Лифшица в приближении ВКБ, порядка $h^2\omega^2/8\pi$. Плотность энергии, передаваемая от ГВ материальной среде, порядка $\mathcal{E}h^2$ и при выполнении (IV.30) ничтожно мала по сравнению с плотностью энергии ГВ независимо от амплитуды последней. С другой стороны, условия (IV.30), (IV.31) можно получить и из прямого анализа уравнений Эйнштейна, описывающих ПГВ совместно с веществом. Полная метрика, описывающая указанную ситуацию, имеет вид:

$$ds^2 = g_{ab}(x, t)dx^a dx^b + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta,$$

IV.2. Однородный бесстолкновительный газ в ПГВ

где $a, b = 1, 4$, $\alpha, \beta = 2, 3$; компонента g_{14} описывает продольную волну, генерируемую ГВ в веществе. Подставляя эту метрику в уравнения Эйнштейна в среде и полагая выполненными условия (IV.30), (IV.31) для производных $g_{\alpha\beta}$, мы снова приходим в первом приближении к метрике (IV.17).

IV.2 Однородный бесстолкновительный газ в ПГВ

IV.2.1 Решение бесстолкновительного кинетического уравнения

Движение бесстолкновительного газа описывается бесстолкновительными кинетическими уравнениями (I.197):

$$[\mathcal{H}_a, f_a] = 0. \quad (\text{IV.32})$$

Метрика (IV.17) допускает группу движения G^5 с тремя линейно независимыми в точке векторами Киллинга:

$$\xi_1^i = \delta_v^i; \quad \xi_2^i = \delta_2^i; \quad \xi_3^i = \delta_3^i. \quad (\text{IV.33})$$

С этими векторами Киллинга согласно результатам главы ?? связаны три независимые интеграла движения:

$$\mathbb{P}_v = \text{Const}; \quad \mathbb{P}_2 = \text{Const}; \quad \mathbb{P}_3 = \text{Const}. \quad (\text{IV.34})$$

Кроме того имеется интеграл массы $\mathcal{H}_a = m_a^2/2$. Этих интегралов достаточно, чтобы описать движение в поле ПГВ бесстолкновительного первоначально однородного газа с произвольным распределением частиц по импульсам. Действительно, из независимых интегралов движения (IV.34) и \mathcal{H}_a можно сконструировать еще два:

$$\mathcal{E}_a(u, \mathbb{P}) = \frac{1}{2^{3/2}\mathbb{P}_v} \left(2\mathcal{H}_a + 2\mathbb{P}_v^2 + \mathbb{P}_\perp^2 \right) \equiv \frac{1}{2} \left(\sqrt{2}\mathbb{P}_v + \frac{m_a^2 + \mathbb{P}_\perp^2}{\sqrt{2}\mathbb{P}_v} \right); \quad (\text{IV.35})$$

$$\bar{\mathbb{P}}_1 = \sqrt{2}\mathbb{P}_v - \mathcal{E}_a = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2}\mathbb{P}_v - \frac{m_a^2 + \mathbb{P}_\perp^2}{\sqrt{2}\mathbb{P}_v} \right), \quad (\text{IV.36})$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

($\mathbb{P}_1^2 = \mathbb{P}_2^2 + \mathbb{P}_3^2$), которые в отсутствие ПГВ переходят в обычные компоненты обобщенного импульса:

$$\mathcal{E}_a(u, \mathbb{P})|_{u \leq 0} = \mathbb{P}_4; \quad \overline{\mathbb{P}}_1|_{u \leq 0} = \mathbb{P}_1. \quad (\text{IV.37})$$

Предположим, что до прихода ПГВ распределение газа являлось однородным, т.е.:

$$F_a(x, \mathbb{P})|_{u \leq 0} = F_a(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4), \quad (\text{IV.38})$$

где F_a - произвольная функция своих аргументов. Тогда точным решением (IV.32), удовлетворяющим начальному условию (IV.38) является [82]:

$$F_a(u, \mathbb{P}) = F_a(\overline{\mathbb{P}}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathcal{E}_a). \quad (\text{IV.39})$$

Рассмотрим первоначально однородный равновесный газ, который до прихода ПГВ покоился относительно выбранной системы отсчета. Его функция распределения в поле ПГВ согласно (IV.39) равна:

$$F_a(u, \mathbb{P}) = U_+(\mathbb{P}_v) \delta\left(\mathcal{H}_a - \frac{1}{2}m_a^2\right) \left\{ \exp\left[\frac{-\mu_a + \mathcal{E}_a(u, \mathbb{P})}{T}\right] \pm 1 \right\}^{-1}, \quad (\text{IV.40})$$

где μ_a, T - произвольные константы, а $U_+(z)$ - ступенчатая функция:

$$U_+(z) = \begin{cases} 0, & z < 0; \\ 1, & z > 0 \end{cases}.$$

IV.2.2 Моменты функции распределения

Для вычисления моментов относительно распределения (IV.40) заметим, что функция Гамильтона в координатах u, v, x^2, x^3 принимает вид:

$$\mathcal{H}_a(u, \mathbb{P}) = \mathbb{P}_u \mathbb{P}_v - \frac{S_{\perp}^2}{2}, \quad (\text{IV.41})$$

где:

$$S_{\perp}^2 = -g_{\perp}^{\alpha\beta} \mathbb{P}_{\alpha} \mathbb{P}_{\beta} = \frac{A\mathbb{P}_3^2 + B\mathbb{P}_2^2 + 2C\mathbb{P}_2\mathbb{P}_3}{AB - C^2}. \quad (\text{IV.42})$$

Нетрудно показать, что при

$$AB - C^2 \equiv -g \geq 0 \rightarrow S_{\perp}^2 \geq 0;$$

IV.2. Однородный бесстолкновительный газ в ПГВ

тогда из уравнения массовой поверхности при $\mathbb{P}_v \geq 0$ и $\mathbb{P}_4 = (m^2 + S_1^2)/2\mathbb{P}_v \geq 0$. Заметим также, что при

$$\mathbb{P}_v \geq 0 \rightarrow \mathcal{E}_a(u, \mathbb{P}) \geq m_a. \quad (\text{IV.43})$$

Таким образом, условие (IV.43) отбирает состояния частиц на «верхней» псевдосфере. Ковариантные моменты функции распределения после интегрирования по массовой поверхности принимают вид:

$$f_{i_1 \dots i_n} = \frac{1}{L^2} \int_0^\infty \frac{d\mathbb{P}_v}{\mathbb{P}_v} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbb{P}_2 d\mathbb{P}_3 f_a(\mathcal{E}_a) \mathbb{P}_{i_1} \dots \mathbb{P}_{i_n}. \quad (\text{IV.44})$$

Интегрирование в (IV.44) легче всего провести, вводя вместо \mathbb{P}_v новую переменную \mathbb{P}_1^* :

$$\mathbb{P}_v = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{P}_1^* + \sqrt{m^2 + \mathbb{P}^2}); \quad \mathbb{P}^2 \stackrel{def}{=} (\mathbb{P}_1^*)^2 + \mathbb{P}_\perp^2 \quad (\text{IV.45})$$

и переходя затем к сферической системе координат в пространстве импульсов. В этих координатах:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_a(u, \mathbb{P}) &= E_a(\mathbb{P}) = \sqrt{m_a^2 + \mathbb{P}^2}; \\ \frac{d\mathbb{P}_v}{\mathbb{P}_v} d\mathbb{P}_2 d\mathbb{P}_3 &= \frac{\mathbb{P}^2 d\mathbb{P} d\Omega}{\sqrt{m_a^2 + \mathbb{P}^2}}, \end{aligned} \quad (\text{IV.46})$$

где $d\Omega$ - элемент телесного угла в пространстве импульсов. Следует подчеркнуть, что \mathbb{P}_1^* не является компонентой вектора импульса, равно как и \mathbb{P}^2 не является квадратом обобщенного импульса.

Вычисляя интегралы (IV.44) относительно распределения (IV.40), получим после несложных, но громоздких выкладок выражения для отличных от нуля компонент вектора плотности числа частиц и ТЭИ [82]:

$$n_v + \frac{N}{\sqrt{2}L^2}; \quad n_u = \frac{N}{\sqrt{2}L^2} \left[1 + (1 - \mathcal{L}_n(K^2 - 1)) \right]; \quad (\text{IV.47})$$

$$\begin{aligned} T_{uu} &= \frac{1}{2L^2} \left[\mathcal{E} - 3P - 4K^2(\mathcal{E} - 3P - \mathcal{L}_T) + 2(3K^4 - L^{-2})(\mathcal{E} - 2P - \mathcal{L}_T) \right]; \\ T_{22} = T_{33} &= \frac{P}{L^2}; \quad T_{vv} = \frac{\mathcal{E} + P}{2L^2}; \quad T_{uv} = \frac{1}{2L^2}(\mathcal{E} - 3P + 2PK^2), \end{aligned} \quad (\text{IV.48})$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

причем:

$$\text{Sp}T \equiv g^{ik}T_{ik} = \frac{\mathcal{E} - 3P}{L^2}. \quad (\text{IV.49})$$

В формулах (IV.47) - (IV.49) введены обозначения:

$$K^2(u) = \frac{A + B}{2L^4}; \quad (\text{IV.50})$$

N, P, \mathcal{E} - соответственно плотность числа частиц, давление и плотность энергии каждой компоненты газа в невозмущенном состоянии (индекс сорта частиц для простоты опущен). Числа \mathcal{L}_n и \mathcal{L}_T гидродинамического аналога не имеют; они равны:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n &= \frac{(2S+1)m^2}{2\pi^2 N} \int_0^\infty \frac{\ln\left(\frac{E+p}{m}\right) p dp}{E \left[\exp\left(\frac{-\mu+E}{T}\right) \pm 1 \right]}; \\ \mathcal{L}_T &= \frac{(2S+1)m^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\ln\left(\frac{E+p}{m}\right) p dp}{\left[\exp\left(\frac{-\mu+E}{T}\right) \pm 1 \right]}, \end{aligned} \quad (\text{IV.51})$$

куда вместо E необходимо подставить $\mathcal{E}_a(u, P)$ из (IV.46). Очевидно, что всегда справедливо неравенство:

$$\mathcal{L}_n \leq 1. \quad (\text{IV.52})$$

В ультрарелятивистском пределе:

$$\xi_a = \frac{m_a}{\langle p_a \rangle} \rightarrow 0$$

эти числа стремятся к нулю как $\xi_a^2 \ln \xi_a$; для безмассовых частиц они строго равны нулю. Выпишем выражения для этих чисел в ряде важных случаев.

1. Больцмановский газ ($f_a = \text{Const} \cdot \exp(-E_a/T)$):

$$\mathcal{L}_n = \frac{K_0(z)}{K_2(z)}; \quad \mathcal{L}_T = \frac{Nm}{K_2(z)} \left[K_1(z) + \frac{K_0(z)}{z} \right], \quad (\text{IV.53})$$

IV.2. Однородный бесстолкновительный газ в ПГВ

где $z = m/T$; $K_n(z)$ - функция Мак - Дональда (см., например, [85]):

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} x} \operatorname{ch}(\nu x) dx. \quad (\text{IV.54})$$

2. Вырожденный Ферми - газ ($\mu/T \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n &= \frac{(2S+1)m^3}{2\pi^2 N} \left[\frac{\varepsilon_F}{m} \ln \frac{\varepsilon_F + p_F}{m} - \frac{p_F}{m} \right]; \\ \mathcal{L}_T &= \frac{(2S+1)m^4}{8\pi^2} \left[\left(1 + \frac{2p_F^2}{m^2}\right) \ln \frac{\varepsilon_F + p_F}{m} - \frac{p_F \varepsilon_F}{m^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{IV.55})$$

где p_F и ε_F - импульс и энергия Ферми:

$$\varepsilon_F = \mu = \sqrt{m^2 + p_F^2}. \quad (\text{IV.56})$$

3. Газ нерелятивистских реликтовых нейтрино, оторвавшихся от вещества на ультрарелятивистской стадии расширения Вселенной. При вычислении интегралов (IV.51) в этом случае распределение по импульсам следует взять ультрарелятивистским с температурой реликтовых фотонов T_γ ($\mu_\nu = 0$), а выражение для энергии $E_\nu(p)$ - нерелятивистским (см. [86] - [89]):

$$\begin{aligned} N_\nu &= \frac{3\zeta(3)}{2\pi^2} T_\gamma^3; \quad P_\nu = N_\nu \frac{T_\gamma^2 \zeta(5)}{m_\nu \zeta(3)}; \\ \mathcal{E}_\nu &= N_\nu m_\nu + \frac{3}{2} P_\nu; \\ \mathcal{L}_{T_\nu} &= N_\nu m_\nu - \frac{1}{2} P_\nu; \quad \mathcal{L}_{n_\nu} = 1 - \frac{45\zeta(5)T_\gamma^2}{4\zeta(3)m_\nu^2}, \end{aligned} \quad (\text{IV.57})$$

где $\zeta(z)$ есть ζ - функция Римана (см., например, [90]).

IV.2.3 Действие ПГВ на однородный бесстолкновительный газ

Перейдем к анализу полученных формул. В координатах $\{x^1, x^4\}$ получим из (IV.47):

$$n^1(u) = \frac{N}{2L^2} (K^2 - 1)(1 - \mathcal{L}_T); \quad n^4(u) = \frac{N}{L^2} + n^1(u). \quad (\text{IV.58})$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

До прихода ГВ $K = 1$, $n^1_{|u \leq 0} = 0$, и поток газа отсутствует. При появлении ГВ $K^2 - 1 \neq 0$, и возникает поток вдоль направления распространения ПГВ, $0x^1$. Легко видеть, что этот эффект является нелинейным по амплитуде ПГВ. Для достаточно слабых ГВ:

$$K^2(u) - 1 \approx \frac{1}{2}h^2 + (L^{-4} - 1) \sim h^2,$$

где $h^2 = 4(\beta^2 + \gamma^2)$, так как в слабой ПГВ [47]:

$$L = 1 + O(h^2). \quad (\text{IV.59})$$

Кроме того возникающий поток имеет чисто релятивистскую природу. Из (IV.51) следует, что при $\xi_a \rightarrow \infty$ $\mathcal{L}_n \rightarrow 1$ и поток исчезает, а при $\xi_a \rightarrow 0$ он максимален ($\mathcal{L}_n \rightarrow 0$). Поскольку плотность потока числа частиц зависит лишь от запаздывающего времени, ПГВ переносит возмущение плотности числа частиц со скоростью света. Кинематическая же скорость газа $v_k^\alpha = n^\alpha/n^4$ [91] равна:

$$v_k^1 = \frac{1}{2} \frac{(1 - \mathcal{L}_n)(K^2 - 1)}{1 + \frac{1}{2}(1 - \mathcal{L}_n)(K^2 - 1)}, \quad (\text{IV.60})$$

и при $h^2 \ll 1$

$$v_k \sim \frac{h^2}{2}(1 - \mathcal{L}_n) \ll 1.$$

После прохождения пакета ПГВ:

$$A = B = L^2(u); \quad C = 0; \quad L = 1 - \frac{u}{\bar{u}}, \quad (\text{IV.61})$$

поэтому при $u < 2\bar{u}$ всегда $K^2 - 1 > 0$. Вследствие (IV.52) при $u < 2\bar{u}$ ПГВ увлекает частицы газа в направлении своего распространения ($v_k^1 > 0$). На гиперповерхности $u = \bar{u}$ за фронтом ПГВ возникает сингулярное состояние $v_k^1 \rightarrow 1$; на гиперповерхности $u = 2\bar{u}$ происходит остановка газа и восстановление его первоначальных параметров. При $u > 2\bar{u}$ газ движется в направлении, противоположном направлению распространения ПГВ, причем при $u \rightarrow \infty$ скорость газа стремится к скорости света.

Анализ компонент ТЭИ газа (IV.48) также обнаруживает наличие сингулярности на изотропной гиперповерхности $L^2(\bar{u}) = 0$. Нетрудно видеть, например, что и динамическая скорость газа, определяемая как

IV.2. Однородный бесстолкновительный газ в ПГВ

собственный времениподобный вектор ТЭИ [91], также стремится к скорости света на этой гиперповерхности.

Наличие сингулярности в распределении вещества делает необходимым анализ основных допущений модели. Таких допущений было два:

1. бесстолкновительность газа,
2. вакуумный характер распространения ПГВ.

Внутри пакета ПГВ ($h \neq 0$) первое из этих допущений справедливо при выполнении условия:

$$\min[\tau_g, \omega] \ll \tau_{\text{eff}}, \quad (\text{IV.62})$$

где τ_{eff} - эффективное время столкновений частиц.

Второе допущение справедливо при выполнении условий (IV.30), (IV.31). Для возможности рассмотрения сингулярного состояния за фронтом ПГВ необходимо, чтобы линейный размер исследуемой среды, ℓ , был порядка \bar{t} . Используя оценку (IV.20) для \bar{t} в соотношении (IV.31), получим условие на амплитуду ПГВ:

$$h^2 \gg \frac{\omega_g}{\omega^2 \tau_g}. \quad (\text{IV.63})$$

Таким образом, лишь очень сильные ГВ сохраняют в среде свой вакуумный характер при временах $t \sim \bar{t}$. Из уравнений Эйнштейна в среде можно получить оценку для величины L_{min} , при которой нарушается вакуумный характер ГВ:

$$L_{\text{min}} \sim \frac{\omega_g^2}{2h^4 \omega^4 \tau_g^2}.$$

В линейном по амплитуде ГВ приближении ковариантные компоненты ТЭИ (IV.48) совпадают со своими невозмущенными компонентами. Это, однако, не означает, что ПГВ не вызывает в изотропном газе линейных по своей амплитуде возмущений. Вычисляя собственные значения ТЭИ (IV.48), найдем:

$$\begin{aligned} \lambda_{(1),(4)} &= T_{uv} \pm \sqrt{T_{vv} T_{uu}}; \\ \lambda_{(2),(3)} &= -\frac{P}{2L^2} \left[A + B \pm \sqrt{(A+B)^2 - 4} \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.64})$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

Разлагая выражения (IV.64) в ряд Тейлора по малости β, γ , найдем в первом неисчезающем приближении:

$$\lambda_{(1)} = -P; \lambda_{(4)} = \mathcal{E}; \lambda_{(2),(3)} = -P(1 \pm 2\beta). \quad (\text{IV.65})$$

Таким образом, ПГВ в линейном приближении возмущает лишь давление изотропного бесстолкновительного газа в плоскости своего фронта:

$$\Delta P = \pm 2\beta P,$$

причем поляризация \mathbf{e}_\times не вносит вклад в этот эффект.

IV.2.4 Влияние движения газа

Пусть до прихода ПГВ однородный равновесный газ двигался с макроскопической скоростью V^i . Точное решение (IV.40), в отсутствие ПГВ описывающее такой газ, имеет вид [82]:

$$F_a(u, \mathbf{P}) = U_+(\mathbf{P}_v) \delta(\mathcal{H}_a - \frac{1}{2}m_a^2) \left\{ \exp \left[\frac{-\mu'_a + \mathcal{E}'_a(u, \mathbf{P})}{T} \right] \pm 1 \right\}^{-1}, \quad (\text{IV.66})$$

где:

$$\mathcal{E}'_a(u, \mathbf{P}) = (v^4 - v^1)\mathcal{E}_a(u, \mathbf{P}) + \sqrt{2}v^1 P_1 + v^2 P_2 + v^3 P_3; \quad (\text{IV.67})$$

μ, T, v^a - произвольные числа, причем:

$$v^4 = \sqrt{1 + v^2}; \quad v^2 = \sum (v^\alpha)^2.$$

В отсутствие ГВ интеграл (IV.67) совпадает с выражением:

$$\mathcal{E}' = P_i v^i \equiv (\mathbf{P}, \mathbf{v}).$$

Совершая преобразование (IV.45) импульсных переменных в выражении для плотности потока числа частиц, получим:

$$n_2 = \frac{1}{L^2} \int \frac{d^3 \mathbf{P}^*}{\mathbf{P}_4^*} P_2 f[(\mathbf{v}, \mathbf{P}^*)];$$

$$n_3 = \frac{1}{L^2} \int \frac{d^3 \mathbf{P}^*}{\mathbf{P}_4^*} P_3 f[(\mathbf{v}, \mathbf{P}^*)];$$

IV.2. Однородный бесстолкновительный газ в ПГВ

$$\begin{aligned} n_v &= \frac{1}{\sqrt{2}L^2} \int \frac{d^3 P^*}{P_4^*} (P_1^* + P_4^*) f[(v, P^*)]; \\ n_u &= \frac{1}{\sqrt{2}L^2} \int \frac{d^3 P^*}{P_4^*} \frac{m^2 + S_1^2}{P_1^* + P_4^*} f[(v, P^*)], \end{aligned} \quad (\text{IV.68})$$

где $P_4^* = \mathcal{E}(P)$,

$$(v, P^*) \stackrel{def}{=} P_1^* v^1 + P_2^* v^2 + P_3^* v^3 + P_4^* v^4.$$

Учитывая явную специально релятивистскую форму первых трех компонент (IV.65) и результаты раздела III.1, сразу можно записать:

$$n_2 = \frac{Nv_2}{L^2}; \quad n_3 = \frac{Nv_3}{L^2}; \quad n_v = \frac{N}{\sqrt{2}L^2} (v_1 + v_4), \quad (\text{IV.69})$$

где

$$v_a \equiv \eta_{ab} v^b; \quad \eta_{ab} = \text{diag}(-1, -1, -1, +1).$$

Инвариантность метрики (IV.17) относительно преобразований Лоренца в плоскости $\Sigma_2 = \{x^1, x^4\}$ и тот факт, что двумерная метрика поверхности фронта ПГВ $\bar{\Sigma}_2 = \{x^2, x^3\}$ не изменяет своей формальной структуры при преобразованиях координат x^2, x^3 , позволяет ограничиться рассмотрением частного случая, когда первоначальная $\mathbf{3}$ -скорость газа, \mathbf{V} направлена вдоль оси x^2 :

$$v^i = \left[0, \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \right].$$

Для упрощения вычисления интегралов в выражении для n_u совершим Лоренцев поворот базиса $\{P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*\}$ так, чтобы $(v, P^*) = P_4^*$, и используя лоренцеву инвариантность элемента объема пространства импульсов, $d^3 P^*/P_4^*$. В результате табличного интегрирования найдем [84]:

$$n_u = \frac{N\sqrt{1-V^2}}{\sqrt{2}L^2} \left[K^2 - (K^2 - 1)\mathcal{L}_n + \frac{V^2}{1-V^2} \frac{B}{L^4} \right]. \quad (\text{IV.70})$$

Выражения (IV.69), (IV.70) можно описать одной ковариантной формулой:

$$n_i = \tilde{n}_1 v_i + \tilde{n}_2 \xi_i, \quad (\text{IV.71})$$

где $\xi_i = \xi_1^i$ - изотропный вектор Киллинга (см. (IV.33)), пропорциональный волновому вектору ПГВ; \tilde{n}_α - скалярные функции:

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

$$\tilde{n}_1 = \frac{N}{L^2}; \quad \tilde{n}_2 = \frac{N\sqrt{1-V^2}}{2L^2} \left[K^2 - \frac{1}{1-V^2} - \mathcal{L}_n(K^2 - 1) + \frac{V^2}{1-V^2} \frac{B}{L^4} \right].$$

Перейдем в систему отсчета (СО), в которой геодезический в метрике (IV.32) до прихода ПГВ покоился относительно газа, т.е.:

$$u^i_{|u \leq 0} = v^i. \quad (\text{IV.72})$$

Переход в эту СО эквивалентен введению скорости $(-v^i)$ источника ПГВ. Решая уравнения геодезических в метрике (IV.32) с начальными условиями (IV.72), получим:

$$\begin{aligned} u^1 &= \frac{V^2}{2\sqrt{1-V^2}} \left(\frac{B}{L^4} - 1 \right); & u^2 &= \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} \frac{B}{L^4}; \\ u^3 &= \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} \frac{C}{L^4}; & u^4 &= u^1 + \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}. \end{aligned} \quad (\text{IV.73})$$

Построим орторепер, направляя его времениподобный вектор вдоль 4- скорости наблюдателя (IV.73):

$$\lambda^i_{(4)} = u^i, \quad (\text{IV.74})$$

а пространственноподобный вектор $\lambda^i_{(1)}$ вдоль направления распространения ПГВ в этой СО:

$$\lambda^i_{(1)} = \frac{\xi^i - u^i(u, \xi)}{(u, \xi)}. \quad (\text{IV.75})$$

В качестве остальных векторов орторепера можно, например, выбрать:

$$\begin{aligned} \lambda^i_{(3)} &= \delta^i_3 B^{-1/2}; & \lambda^1_{(2)} &= \lambda^4_{(2)} = V B^{1/2} L^{-2}; \\ \lambda^2_{(2)} &= B^{1/2} L^2; & \lambda^3_{(2)} &= C B^{-1/2} L^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.76})$$

В поле источника ПГВ, движущегося со скоростью $(-\mathbf{V})$ вдоль оси x^2 относительно равновесного газа, геодезический наблюдатель, первоначально покоящийся относительно газа, зафиксирует компоненты вектора потока числа частиц:

$$n_{(a)} = \lambda^i_{(a)} n_i,$$

IV.2. Однородный бесстолкновительный газ в ПГВ

т.е., согласно (IV.71) - (IV.76):

$$n^{(2)} = n^{(3)} = 0; \quad n^{(1)} = \frac{N}{2L^2}(K^2 - 1)(1 - \mathcal{L}_n);$$

$$n^{(4)} = \frac{N}{L^2} + n^{(1)}.$$

Этот результат совпадает с результатом (IV.58) предыдущего раздела, полученным для неподвижного относительно газа источника ПГВ. Единственное отличие состоит в замене аргумента u в функциях K^2 , L^2 на некоторое другое значение u' ; связь между u и u' можно получить, интегрируя соотношения (IV.73). Связь эта является аналогом квадратичного эффекта Доплера в ускоренной СО [84].

IV.2.5 Однородная и изотропная бесстолкновительная плазма в поле ПГВ

Рассмотрим действие ГВ на бесстолкновительную плазму, которая до прихода ГВ была изотропной и электронейтральной. При попадании ГВ в такую плазму согласно (IV.5) и (IV.47) возникает продольный электрический ток

$$j^1(u) = j^4(u) = -\frac{1}{2L^2}(K^2 - 1) \sum e_a \mathcal{L}_{na} N_a, \quad (\text{IV.77})$$

который исчезает в нерелятивистской ($\xi_a \rightarrow \infty$) и ультрарелятивистской плазме (все $\xi_a \rightarrow 0$) и максимален для плазмы с ультрарелятивистскими электронами и нерелятивистскими ионами [82], [83]. При $0 < u < 2u_x$ ГВ индуцирует в бесстолкновительной плазме отрицательную плотность заряда и переносит ее со скоростью света. Поскольку в плазме возникает электрический ток и связанное с ним продольное электрическое поле, необходимо решать самосогласованную систему уравнений Власова (IV.1) - (IV.3) с равным нулю интегралом столкновений. Будем искать стационарные решения этой системы, полагая

$$F_{41} = E(u). \quad (\text{IV.78})$$

Из уравнений Максвелла (IV.2) - (IV.3) следует, что необходимым и достаточным условием выполнения (IV.78) является изотропность вектора плотности тока, т.е.

$$j_v(u) = 0. \quad (\text{IV.79})$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

Уравнение непрерывности в координатах u, v имеет вид

$$\frac{1}{L^2} \frac{d}{du} (L^2 j_v) = 0,$$

откуда найдем

$$j_v(u) = \text{Const} \cdot L^{-2}. \quad (\text{IV.80})$$

Но так как до прихода ГВ $j_v = 0$, то $\text{Const} = 0$, и следовательно, (IV.79) автоматически выполняется вследствие кинетических уравнений (IV.1). Положим $E(u) \equiv \frac{dA_v}{du}$, где $A_v(u)$ - потенциал электрического поля в функции Гамильтона

$$\mathcal{N}_a = (\mathbb{P}_v - eA_v)\mathbb{P}_u - \frac{1}{2}S_1^2. \quad (\text{IV.81})$$

Этот потенциал не удовлетворяет условию калибровки Лоренца, однако, градиентным преобразованием

$$A'_i = A_v \delta_i^v + \partial_i \varphi; \quad \varphi = -\frac{v}{2} \left(A_v + \frac{1}{L} \int L' A_v du \right)$$

калибровка Лоренца может быть достигнута.

Точным решением (IV.32) с гамильтонианом (IV.81) опять таки является (IV.40). Заметим, что состояния частиц отбираются условием $\mathbb{R} \geq 0$. Действительно, если до появления ГВ и сопутствующего ей электрического поля состояния частиц отбирались этим условием, последнее должно быть сохранено при любых значениях переменной u , так как \mathbb{R}_v является интегралом движения. При этом в случае $eA_v > 0$ захватывается часть состояний с нижней псевдосферы массовой поверхности [92]. Согласно результатам раздела IV.9 эти состояния можно интерпретировать как поток частиц с противоположным зарядом и компенсирующий заряд, захваченный потенциальным барьером, движущимся со скоростью света. Прямым вычислением можно, например, показать, что вектор плотности потока частиц, полученный интегрированием распределения (IV.40) по состояниям с $\mathbb{P}_v - eA_v \geq 0$ не удовлетворяет уравнению непрерывности. Заметим, также, что барьером захватывается anomalously малое число частиц, импульс которых больше величины

$$P_* = \frac{m^2 - 2(eA_v)^2}{2^{3/2}|eA_v|}.$$

Если использовать для eA_v оценку (см. ниже) $eA_v \sim hT$ ($h \sim 10^{-19}$), то в объеме всей видимой Вселенной, разогретой до температуры 10^8

IV.2. Однородный бесстолкновительный газ в ПГВ

Мэв, число таких частиц меньше единицы. Как мы отмечали выше, статистическое описание оправдано лишь для тех состояний, в которых число частиц гораздо больше единицы. Поэтому при рассмотрении любой реалистической ситуации учет частиц с $\mathbb{P}_v \sim |eA_v|$ носит сугубо формальный характер. Произведя интегрирование по массовой поверхности и угловой переменной, получим [82]:

$$n_{au} = \frac{2s+1}{16\pi^2 L^2} \int_0^\infty d\mathbb{P}_1^2 (m_a^2 + K^2 \mathbb{P}_1^2) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{\text{sign}(\mathbb{P}_v - eA_v) d\mathbb{P}_v}{(\mathbb{P}_v - eA_v)^2} \left\{ \exp \left[\frac{-\mu + \mathcal{E}_a(u, \mathbb{P})}{T} \right] \pm 1 \right\}^{-1}. \quad (\text{IV.82})$$

Как следует из результатов раздела IV.1, поток нерелятивистских частиц в ПГВ пропорционален ξ_a^{-2} , и поэтому в выражении для полной плотности тока (IV.5) им можно пренебречь, учитывая его как положительный фон ионов

$$j_u^{(i)} = \frac{e_i N_i}{\sqrt{2} L^2}. \quad (\text{IV.83})$$

В целях методической простоты рассмотрим плазму, состоящую из полностью вырожденных электронов и холодных ионов. В условиях полного вырождения ($\mu/T \rightarrow \infty$) все состояния с $\mathcal{E}(\mathbb{P}) - \mu > 0$ заполнены. Полагая

$$\frac{\mathcal{E}_F - \sqrt{2} e A_v}{P_F} \equiv \psi > 1 \quad (\text{IV.84})$$

(при этом в распределении Ферми отсутствуют частицы с $\mathbb{P}_v \leq eA_v$) и проводя интегрирование в (IV.82) внутри поверхности Ферми, приведем единственное нетривиальное уравнение Максвелла к виду [82]:

$$\frac{d}{du} \left(L^2 \frac{d\psi}{du} \right) = \\ = \frac{4\pi N_e e^2}{p_F} \left\{ K^2 - 1 + 3 \left[\frac{m^2}{p_F^2} - K^2 (\psi^2 - 1) \right] \left(\frac{\psi}{2} \ln \frac{\psi+1}{\psi-1} - 1 \right) \right\} \quad (\text{IV.85})$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

Решение (IV.85), удовлетворяющее начальным условиям

$$\psi(0) = \mathcal{E}_F/p_F; \quad \left. \frac{d\psi}{du} \right|_{u=0} = 0, \quad (\text{IV.86})$$

точно описывает электрическое поле индуцированное ПГВ (IV.17) в неограниченной электронейтральной плазме с вырожденными электронами.

Рассмотрим нерелятивистский Ферми-газ ($p_F/m \ll 1$) и слабое электрическое поле ($|eA_v| \ll m$). Разлагая правую часть (IV.85) в ряд Тейлора по степеням $1/\psi$ и удерживая члены до $1/\psi^3$, а затем линеаризируя уравнение по A_v , приведем его к виду

$$\frac{d}{du} \left(L^2 \frac{dA_v}{du} \right) + 2\omega_p^2 A_v = -\frac{2^{5/2}\pi N e p_F^2}{5m^2} (K^2 - 1), \quad (\text{IV.87})$$

где ψ_p - плазменная частота. Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (IV.86), внутри пакета ГВ ($L \approx 1$) имеет вид

$$A_v(u) = \frac{2^{3/2}\pi N e p_F^2}{5m^2\omega_p} \int_0^{\bar{u}} [K^2(\bar{u}') - 1] \sin \omega_p(\bar{u}' - \bar{u}) d\bar{u}'; \quad (\text{IV.88})$$

$$E(u) = -\frac{4\pi N e p_F^2}{5m^2} \int_0^{\bar{u}} [K^2(\bar{u}') - 1] \cos \omega_p(\bar{u}' - \bar{u}) d\bar{u}', \quad (\text{IV.89})$$

где $\bar{u} = t - x$. Подставим значение $A_v(u)$ из (IV.89) в значение индуцированного тока (правая часть (IV.85)), найдем ток, индуцированный ПГВ с учетом плазменного отклика в пределе $\omega_p/\omega \gg 1$:

$$j' = -\frac{N e p_F^2}{5m^2} [K^2(\bar{u}) - 1] \cos \omega_p \bar{u}. \quad (\text{IV.90})$$

Нетрудно получить и точное решение уравнения (IV.85) после прохождения пакета ГВ ($\beta = \gamma = 0$):

$$E(u) = -\frac{\bar{A}}{L^3} + \frac{1}{L^{3/2}} \left(\bar{B} \cos a \ln \frac{L_0}{L} + \bar{C} \sin a \ln \frac{L_0}{L} \right), \quad (\text{IV.91})$$

где $a = [(\omega_p u)^2 - \frac{1}{4}]^{\frac{1}{2}}$, \bar{B} , \bar{C} - некоторые постоянные.

IV.2. Однородный бесстолкновительный газ в ПГВ

Заметим также, что нетрудно исследовать и влияние ПГВ на движущуюся плазму аналогично тому, как это сделано в предыдущем разделе [84]. Результат оказывается простым: геодезический наблюдатель не измеряет каких-либо новых эффектов по сравнению с рассмотренными в этом разделе.

В заключении этого раздела выпишем формулы для индуцированного электрического поля и тока для плазмы с произвольным изотропным распределением частиц по импульсам. Предполагая, что это распределение образуется при очень больших значениях импульса $p_\infty \sim m^2/|eA_v|$, разлагая выражение (IV.82) в ряд Тейлора по малости индуцированного потенциала, а затем переходя к пределу $p_\infty \rightarrow \infty$, получим [84]:

$$E(u) = 4\pi \sum e_a N_a \mathcal{L}_{n_a} \int_0^\infty [K^2(\bar{u}') - 1] \cos[\omega_p(u' - \bar{u})] d\bar{u}'; \quad (\text{IV.92})$$

$$j^1(u) = \sum e_a N_a \mathcal{L}_{n_a} \omega_p \times \\ \times \left\{ K^2(\bar{u}) - 1 - \omega_p \int_0^{\bar{u}} [K^2(\bar{u}') - 1] \sin[\omega_p(\bar{u}' - \bar{u})] d\bar{u}' \right\}, \quad (\text{IV.93})$$

где плазменная частота ω_p описывается выражением

$$\omega_p^2 = \sum \frac{4\pi e_a^2 N_a}{m_a} \psi_a; \quad (\text{IV.94})$$

$$\psi_a = \frac{4\pi m_a}{N_a} \int_0^\infty f_a(p) \cdot \left[\ln \frac{\varepsilon + p}{\varepsilon - p} - \frac{p}{\varepsilon} \right] p dp. \quad (\text{IV.95})$$

Приведем значения ψ_a для ряда важных случаев: для бoльцмановского распределения

$$\psi_a = K_2(z) [K_1(z) + 2K_0(z) \cdot z^{-1}];$$

для вырожденного Ферми-газа:

$$\psi_a = \frac{3}{x} \left[(1 + x^2) \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - x\sqrt{1 + x^2} \right];$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

для ультррелятивистского Ферми-распределения с $\mu = 0$ ($z \rightarrow 0$)

$$\psi_a = \pi^2 z \ln \left(\frac{2}{\gamma z} \right) / 9\zeta(3);$$

для ультррелятивистского Бозе - распределения с $\mu = 0$ ($z \rightarrow 0$)

$$\psi_a = \pi^2 z \ln \left(\frac{2}{\gamma z} \right) / 6\zeta(3),$$

где γ - постоянная Эйлера.

Итак, ПГВ индуцирует в однородной, изотропной, бесстолкновительной плазме электрические колебания, распространяющиеся со скоростью света вдоль направления распространения ПГВ и представляющие собой колебания с плазменной частотой, промодулированные квадратом амплитуды ПГВ — функцией $(K^2(u) - 1)$.

IV.3 Действие плоских гравитационных волн на первоначально однородную анизотропную плазмopodobную среду с затуханием

Из результатов предыдущих разделов следует, что перемещение однородной изотропной плазмы в поле ПГВ является чисто нелинейным по амплитуде ГВ эффектом. В однородной, а значит, и неограниченной по амплитуде ГВ плазме классические приливные силы, действующие со стороны ГВ на пробные частицы, не могут привести к наблюдательным линейным эффектам вследствие тождественности частиц и отсутствия корреляции между их положением. Существует еще и релятивистское воздействие ГВ на плазму, квадратичное по импульсам в плоскости фронта волны. Однако при изотропном распределении частиц по импульсам в плоскости фронта ГВ средние «силы» равны нулю в линейном приближении и линейно по h изменяются лишь квадраты проекций импульса на эту плоскость, что приводит к анизотропным натяжениям. Если, однако, в плоскости фронта ГВ распределение частиц анизотропно по импульсам, становятся возможными и линейные по h смещения и токи даже в однородной плазме.

Итак, рассмотрим действие ПГВ на первоначально однородную плазмopodobную среду [84], [93], [94],[95], [96]. Столкновительное затухание

IV.3. Действие ПГВ на анизотропную плазму с затуханием

колебаний будем учитывать в рамках модели Бхатнагара-Гросса-Крука (БГК). Вследствие микроскопического волнового характера взаимодействий электронов с ионами в ряде случаев макроскопическое равновесное распределение электронов отличается от равновесного Ферми-распределения. Такая ситуация, например, реализуется в ряде монокристаллических проводников, в которых поверхность Ферми может существенно отличаться от сферы. Имея ввиду такие случаи, будем полагать равновесную функцию распределения $f_0(p_i)$ произвольной функцией 4-импульса:

$$f_0(p_i) = f_0(p_1, p_2, p_3, p_4). \quad (\text{IV.96})$$

Эта функция должна быть определена таким образом, чтобы в отсутствие ГВ плазма была в целом электронейтральной и бестоковой. В присутствии ГВ ($u > 0$) компоненты импульса в f_0 необходимо заменить на их ортореперные проекции. Кроме того, f_0 можно умножить на любую функцию запаздывающего времени, обращающуюся в единицу в отсутствии ГВ. Требования сохранения числа частиц, как это будет видно из дальнейшего, приводит к единственному виду f_0 в присутствии ГВ:

$$f_0 = \frac{1}{L^2(u)} \cdot f_0(p_v, p_{(2)}, p_{(3)}, \mathcal{N}) \cdot \delta\left(\mathcal{H} - \frac{1}{2}m^2\right), \quad (\text{IV.97})$$

где $p(a)$ - ортореперные проекции кинематического импульса. Согласно модели БГК интеграл столкновений в (IV.1) выберем в форме:

$$J(f) = -(f - f_0)m/\tau, \quad (\text{IV.98})$$

где τ - релятивистски-инвариантное время релаксации.

Будем искать решения (IV.1), зависящие лишь от импульса и запаздывающего времени, тогда векторный потенциал можно выбрать как и ранее в виде $A_i = \delta_i^v A_v(u) \equiv \delta_i^v \psi(u)$ с нулевыми начальными условиями на изотропной гиперповерхности $u = 0$ (IV.86). В этом случае релятивистски-инвариантное время релаксации τ связано с классически постоянным временем релаксации τ_0 соотношением [44]:

$$\tau = m\tau_0/\sqrt{2}(\xi, \mathbb{P}) = m\tau_0/\sqrt{2}\mathbb{P}_v.$$

С учетом интегралов движения (IV.34) линейное неоднородное уравнение (IV.1) с интегралом столкновений в форме (IV.98) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{df}{du} + \frac{\sqrt{2}}{\tau_0}f = \frac{\sqrt{2}}{\tau_0 L^2} f_0(\mathbb{P}_v - e\psi; \lambda_{(a)}^b \mathbb{P}_b), \quad (\text{IV.99})$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

где $a, b = 2, 3$, $\lambda_{(a)}^b$ - векторы ОР (IV.76).

Решение уравнения (IV.99), удовлетворяющее начальному условию (IV.38), есть [93]:

$$f = f_0(\mathbb{P}_v, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3) e^{-z} + e^{-z} \int_0^z \frac{e^{z'}}{L^2(z')} dz' \times f_0[\mathbb{P}_v - e\psi(z'); \lambda_{(a)}^b \mathbb{P}_b], \quad (\text{IV.100})$$

где $z = \sqrt{2}u/\tau_0$.

Для вычисления вектора плотности тока необходимо несколько конкретизировать функцию распределения. Пусть $f_0|_{u \leq 0}$ принимает постоянные значения на поверхностях 2-го порядка в импульсном пространстве:

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} p^i p^k + \sum_{i=1}^3 b_i p^i + c = 0.$$

Для того, чтобы в невозмущенном состоянии в плазме отсутствовали токи, необходимо и достаточно, чтобы $b_i = 0$. После приведения квадратичной формы к главным осям, получаем:

$$\alpha p_1^2 + \beta p_2^2 + \gamma p_3^2 \equiv p_*^2 = \text{Const}. \quad (\text{IV.101})$$

Рассмотрим для простоты случай, когда поверхность (IV.101) является эллипсоидом вращения:

$$\alpha^4 p_l^2 + \alpha^{-2} p_{tr}^2 = p_*^2, \quad (\text{IV.102})$$

где $p_l = p_\alpha n^\alpha$; $p_{tr}^2 = p_\alpha p_\beta (\delta^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta)$ - продольная и поперечная проекции 3-вектора импульса на оси анизотропии \vec{n} . Таким образом $f_0|_{u \leq 0} = f_0(p_*^2)$. Полагая в (IV.82) $\alpha \rightarrow i\alpha$, получим гиперboloид вращения. С помощью интегралов (IV.34) можно образовать два интеграла движения, в отсутствие ГВ переходящие в величины p_l и p_{tr} [84]:

$$\mathbb{P}_l = \cos \theta (m^2 + \mathbb{P}_\perp^2 - 2\mathbb{P}_v^2) / 2^{3/2} \mathbb{P}_v - \sin \theta \mathbb{P}_2; \\ \mathbb{P}_{tr}^2 = \mathbb{P}_3^2 + \left[\sin \theta (m^2 + \mathbb{P}_\perp^2 - 2\mathbb{P}_v^2) / 2^{3/2} \mathbb{P}_v + \cos \theta \mathbb{P}_2 \right]^2, \quad (\text{IV.103})$$

IV.3. Действие ПГВ на анизотропную плазму с затуханием

где θ - угол между волновым вектором ГВ и осью анизотропии. Таким образом, в решении (IV.100) необходимо поставить $f_0(\mathbb{P}_*^2)$, где $\mathbb{P}_*^2 = \alpha^4 \mathbb{P}_l^2 + \alpha^{-2} \mathbb{P}_{tr}^2$. Вычисляя вектор плотности числа частиц относительно распределения (IV.100), получим:

$$n_2 = n_3 = 0; \quad n_v = \frac{N}{\sqrt{2}L^2}, \quad (\text{IV.104})$$

где

$$N = \frac{2s+1}{2\pi^2} \int_0^\infty f_0(p_*^2) p_*^2 dp_*$$

- плотность числа частиц в невозмущенном состоянии. Вследствие (IV.104) автоматически обеспечивается закон сохранения числа частиц. Единственной отличной от нуля является компонента плотности тока j_u . Для ее вычисления имеем:

$$n_u = \frac{(2s+1)e^{-z}}{(2\pi)^3 L^2} \int \frac{d\mathbb{P}_v d\mathbb{P}_2 d\mathbb{P}_3}{2[\mathbb{P}_v - e\psi(u)]} [m^2 + S_\perp^2(u)] \left\{ f_0(\mathbb{P}_*^2) + \int_0^z e^{z'} L^{-2}(z') f_0[\mathbb{P}_*^2[\mathbb{P}_v - e\psi(z') \lambda_{(b)}^a(z') \mathbb{P}_a]] dz' \right\}. \quad (\text{IV.105})$$

Имея ввиду слабость индуцированного поля ($|e\psi| \ll m$), разложим подынтегральное выражение в ряд Тейлора по этому параметру. В линейном приближении, пренебрегая произведениями ψ на члены, учитывающие влияние ГВ, найдем:

$$n_u = n_v + \frac{\omega_p^{1\ 2}}{2\pi e} \mathcal{P}(z) \psi + \mathcal{P}(z) \delta n_u, \quad (\text{IV.106})$$

где $\mathcal{P}(z)$ - линейный интегральный оператор,

$$\mathcal{P}(z) \Phi = \Phi(z) - e^{-z} \int_0^z e^{z'} \Phi(z') dz', \quad (\text{IV.107})$$

$\omega_p^{1\ 2}$ - плазменная частота в направлении x^1 :

$$\omega_p^{1\ 2} = \frac{(2s+1)e^2}{2\pi^2} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{m^2 + p^2}} \frac{\sqrt{m^2 + p^2} - p_1}{\sqrt{m^2 + p^2} + p_1} f_0(p_*^2); \quad (\text{IV.108})$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

$$\delta n_u = \frac{2S+1}{(2\pi)^3 L^2} \int \frac{d\mathbb{P}_v d\mathbb{P}_2 d\mathbb{P}_3}{\mathbb{P}_v} \frac{S_\perp^2 - \mathbb{P}_\perp^2}{2\mathbb{P}_v} f_0(\mathbb{P}_*^2). \quad (\text{IV.109})$$

В слаборелятивистской плазме эти величины равны [93]:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m} \left\{ 1 + \frac{\bar{\varepsilon}_0}{3m} [\alpha^{-4}(4\cos^2\theta - 1) + \alpha^2(4\sin^2\theta - 2)] \right\}; \quad (\text{IV.110})$$

$$\delta n_u = \frac{N\bar{\varepsilon}_0}{\sqrt{2}L^2 3m} \left\{ \sin^2\theta \left(\frac{B}{L^4} - 1 \right) (\alpha^{-4} - \alpha^2) + 2(K^2 - 1)\alpha^2 \right\}, \quad (\text{IV.111})$$

где $\bar{\varepsilon}_0$ - средняя кинетическая энергия частиц, вычисленная относительно изотропной функции распределения $f_0(p^2)$:

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{2s+1}{2\pi^2 N} \int_0^\infty \frac{p^4}{2m} f_0(p^2) dp.$$

В случае произвольных средних энергий частиц, но слабой анизотропии ($\alpha \approx 1$) эти величины вычислены в [84]. Результаты этого раздела справедливы для широкого класса начальных распределений $f_0(p_*^2)$. В качестве примера $f_0(p_*^2)$ можно выбрать в виде квазиравновесного Ферми - распределения

$$f_0(p_*^2) = \left\{ \exp \left[-\frac{\mu + \sqrt{m^2 + p_*^2}}{T} \right] + 1 \right\}^{-1}. \quad (\text{IV.112})$$

При $\mu/T \rightarrow \infty$ получаем отсюда распределение вырожденного анизотропного релятивистского газа; в этом случае поверхность Ферми является эллипсоидом вращения (или гиперboloидом вращения при $\alpha \rightarrow i\alpha$). При малых числах заполнения (IV.112) переходит в анизотропное максвелловское распределение с двумя температурами T_\parallel и T_\perp . В слаборелятивистской плазме параметр анизотропии α можно выразить с помощью этих температур

$$\alpha = \left(\frac{T_\perp}{T_\parallel} \right)^{1/3},$$

где $T_\parallel = \bar{p}_i^2/m$; $T_\perp = \bar{p}_{tr}^2/2m$. Средняя кинетическая энергия $\bar{\varepsilon}_0$ равна $\frac{3}{2}T$ для распределения Больцмана и $3/5(\varepsilon_F - m)$ для вырожденного

IV.3. Действие ПГВ на анизотропную плазму с затуханием

ферми-газа. С учетом (IV.83) и (IV.106) суммарная плотность тока в анизотропной плазме равна

$$j_u = \mathcal{P}(z) \left[\frac{\omega_p^1{}^2}{2\pi} \psi + j^0 \right], \quad (\text{IV.113})$$

где $j^0 = e\delta n_u$. Единственным нетривиальным уравнением Максвелла является

$$L^{-2}(L^2\psi')' = -4\pi j_u. \quad (\text{IV.114})$$

Это уравнение необходимо решать с начальными условиями (II.73). Пренебрегая, согласно нашей процедуре, произведением потенциала на величины, учитывающие влияние гравитации и используя в правой части (IV.114) выражение для плотности тока (IV.113), приведем (IV.114) к виду

$$\ddot{\psi} + \nu_0^2 \mathcal{P}(z)\psi = -2\pi\tau_0^2 \mathcal{P}(z)j^0, \quad (\text{IV.115})$$

где $\nu_0 = \omega_p^1\tau_0$, точка означает дифференцирование по переменной z . Уравнение (IV.115) является интегрально-дифференциальным уравнением; для его решения необходимо найти оператор, обратный к $\mathcal{P}(z)$. Пусть $\Phi(0) = 0$. Положим

$$U(z) = \mathcal{P}(z)\Phi,$$

тогда и $U(0) = 0$. Дифференцируя это соотношение, найдем с учетом определения $\mathcal{P}(z)$ (IV.107):

$$\dot{U} + U = \dot{\Phi}.$$

Тогда $\dot{U}(0) = \dot{\Phi}(0)$, и обратный к $\mathcal{P}(z)$ оператор $\mathcal{P}^{-1}(z)$ есть:

$$\mathcal{P}^{-1}z\Phi = \Phi(z) + \int_0^z \Phi(z')dz'. \quad (\text{IV.116})$$

Непосредственным вычислением (меняя порядок интегрирования) можно убедиться в справедливости равенства:

$$\mathcal{P}^{-1}(z)\mathcal{P}(z)\Phi = \Phi(z)$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

для любых $\Phi(z)$, удовлетворяющих условию $\Phi(0) = 0$. Подействуем оператором $\mathcal{P}^{-1}(z)$ на обе части уравнения (IV.115), учитывая, что вследствие (IV.23) и (IV.86) функции $\psi(z)$ и $j^0(z)$ удовлетворяют указанным начальным условиям:

$$\ddot{\psi} + \dot{\psi} + \nu_0^2 \psi = -2\pi\tau_0^2 j^0(z). \quad (\text{IV.117})$$

Решая это уравнение методом вариации постоянных с начальными условиями (IV.86), получим [94]:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{2\pi\tau_0^2}{\nu} e^{-z/2} \int_0^z e^{z'/2} j^0(z') \sin \nu(z' - z) dz'; \\ E &= -2^{3/2} \pi\tau_0 e^{-z/2} \int_0^z e^{z'/2} j^0(z') \times \\ &\quad \times [\cos \nu(z' - z) + (2\nu)^{-1} \sin \nu(z' - z)] dz', \end{aligned} \quad (\text{IV.118})$$

где $\nu = (\nu_0^2 - \frac{1}{4})^{1/2}$. Подставляя ψ из этого решения в (IV.113) и проводя необходимые вычисления, получим выражение для полной плотности индуцированного тока:

$$\begin{aligned} j_u &= j^0(z) + \frac{\nu_0^2}{\nu} e^{-z/2} \times \\ &\quad \times \int_0^z e^{z'/2} j^0(z') \left[\sin \nu(z - z') \left(1 + \frac{1}{2\nu_0^2} \right) + \cos \nu(z' - z) \frac{\nu}{2\nu_0^2} \right] dz' \end{aligned} \quad (\text{IV.119})$$

Полученные решения (IV.118) - (IV.119) описывают генерацию достаточно слабого электрического поля ($|e\psi| \ll m$) плоской гравитационной волной с произвольными амплитудой и поляризацией в изначально электронейтральной однородной плазмоподобной среде с произвольными анизотропией и проводимостью.

В качестве конкретного примера рассмотрим генерацию электрического поля слабым когерентным гравитационным излучением $\beta = \beta_0 \sin \omega \bar{u}$ ($u = t - x, \beta_0 \ll 1$) в слаборелятивистской анизотропной плазме. Заметим, что согласно (IV.111) линейные по амплитуде ГВ электрические токи в анизотропной плазме генерирует лишь поляризация e_+ [84], [95]. Вычисляя интегралы в (IV.118), найдем [94]:

IV.4. Действие низкочастотных ПГВ на неоднородную плазму

$$E = \sqrt{2}\pi\tau_0 J_0 \beta_0 \frac{\nu'}{\nu} \left[\frac{2^{-1} \sin \nu' z - (\nu + \nu') \cos \nu' z}{(\nu' + \nu)^2 + \frac{1}{4}} + e^{-z/2} \frac{2^{-1} \sin \nu z - \nu'^{-1} (\nu^2 + \nu\nu' + \frac{1}{4}) \cos \nu z}{(\nu + \nu')^2 + \frac{1}{4}} - \frac{2^{-1} \sin \nu' z + (\nu - \nu') \cos \nu' z}{(\nu - \nu')^2 + \frac{1}{4}} + e^{-z/2} \frac{2^{-1} \sin \nu z + \nu'^{-1} (\nu^2 + \nu\nu' + 1/4) \cos \nu z}{(\nu - \nu')^2 + \frac{1}{4}} \right], \quad (\text{IV.120})$$

где $\nu' = \omega\tau_0$,

$$J_0 = Ne \frac{\bar{\varepsilon}_0}{3m} \sin^2 \theta (\alpha^{-4} - \alpha^2). \quad (\text{IV.121})$$

Из (IV.120) видно, что колебания содержат две моды: незатухающую с частотой ГВ и экспоненциально затухающую с плазменной частотой. В пределе $\nu \rightarrow \infty$, $\nu' \rightarrow \infty$, $z \rightarrow 0$ формулы переходят в результаты [82], [84]. Для низкочастотных ГВ ($\omega_p^1 \gg \omega$) и $\nu_0 \gg 1$ при больших временах $\bar{u} \gg \tau_0$ получим из (IV.120)

$$E = -\frac{2^{3/2}\pi\omega}{\omega_p^1{}^2} \beta_0 J_0 \cos \omega \bar{u}. \quad (\text{IV.122})$$

Амплитуда таких колебаний весьма мала вследствие малости отношения ω/ω_p^1 . При $\omega_p^1{}^2 = \omega^2 + (2\tau_0)^{-2}$ в плазме возникает резонанс и при $\omega \gg \tau_0^{-1}$ получим из (IV.120):

$$E = -\pi\tau_0 J_0 \beta_0 2^{3/2} \sin \omega \bar{u} \left(1 - e^{-\frac{\bar{u}}{2\tau_0}}\right). \quad (\text{IV.123})$$

В этом случае амплитуда индуцированного поля растет со временем и при $\bar{u} \gg 2\tau_0$ достигает насыщения, в ν раз превосходя нерезонансную амплитуду. Отметим, что в изотропной плазме резонанс происходит на чистоте $\omega_p^1/2$.

IV.4 Действие низкочастотных плоских гравитационных волн на бесстолкновительную неоднородную и изотропную плазму

Неоднородных статистических решений бесстолкновительного кинетического уравнения в отсутствие внешних полей, как известно, не суще-

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

ствует. Будем полагать поэтому, что бесстолкновительная плазма находится в плоском электростатическом поле и l - характерный размер неоднородности плазмы. Исследуем действие на такую плазму достаточно длинных ГВ, таких, что $\xi = l/\lambda \ll 1$, где λ - длина волны ГВ [84], [95], [96], [97]. Можно показать, что если плазма локально изотропна и электрическое поле направлено вдоль направления распространения ГВ, индуцированный ток опять-таки квадратичен по амплитуде ГВ. Поэтому направим вектор напряженности невозмущенного электрического поля в плоскости фронта ГВ вдоль оси $x^2 = y$, тогда в соответствии с дрейфовым приближением ($\xi \ll 1$) y - быстрая переменная, а $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x)$ - медленная переменная. Для простоты будем рассматривать плоскополяризованную ГВ. Из симметрии задачи очевидно, что отличны от нуля лишь компоненты $A_v(u, y)$ и $A_u(u, y)$, которые удовлетворяют начальным условиям на изотропной гиперповерхности $u = 0$:

$$A_v(y, u)|_{u \leq 0} = A_u(y, u)|_{u \leq 0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_0(y);$$

$$(\partial u A_v)|_{u \leq 0} = 0; \quad (\partial z A_v)|_{u \leq 0} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0(y), \quad (\text{IV.124})$$

где $\varphi_0(y)$ и $E_0(y)$ — потенциал и напряженность невозмущенного электрического поля. Уравнения Максвелла в первом дрейфовом приближении принимают вид:

$$-4\pi j^2 = \frac{1}{L^2} \partial_{2u} L^2 g^{22} A_v; \quad (\text{IV.125})$$

$$j^3 = 0; \quad (\text{IV.126})$$

$$4\pi j_v = g^{22} \partial_{22} A_v; \quad (\text{IV.127})$$

$$4\pi j_u = g^{22} \partial_{22} A_u. \quad (\text{IV.128})$$

Можно показать, что (IV.125) является дифференциальным следствием (IV.127) и закона сохранения заряда, поэтому в качестве независимых можно рассматривать уравнения (IV.127) и (IV.128). Функция Гамильтона задачи имеет вид

$$\mathcal{H} = (\mathbb{P}_v - eA_v)(\mathbb{P}_u - eA_u) + \frac{1}{2} S_{\perp}^2. \quad (\text{IV.129})$$

IV.4. Действие низкочастотных ПГВ на неоднородную плазму

Будем искать решения бесстолкновительного кинетического уравнения, зависящие лишь от переменных $u, y, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_v, \mathbb{P}_u$. Тогда бесстолкновительное кинетическое уравнение (IV.32) с гамильтонианом (IV.129)

$$(\mathbb{P}_v - eA_v) \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial \mathbb{P}_u} + g^{22} \mathbb{P}_2 \frac{\partial F}{\partial x^2} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial \mathbb{P}_2} = 0 \quad (\text{IV.130})$$

допускает три точных интеграла $\mathbb{P}_v, \mathbb{P}_3, \mathcal{H}$. В нулевом по ξ приближении (II.117) сводится к уравнению:

$$g^{22} \mathbb{P}_2 \frac{\partial F}{\partial x^2} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial \mathbb{P}_2} = 0,$$

которое имеет быстрые (дрейфовые интегралы) u, \mathbb{P}_u и $eA_v \mathbb{P}_u + eA_u \mathbb{P}_v - e^2 A_u A_v + S_{\perp}^2/2$. Итак, в нулевом по ξ приближении решением (IV.130) является изотропное распределение:

$$F_0 = f_0(\varepsilon) U + (\mathbb{P}_v) \delta(\mathcal{H} - \frac{1}{2} m^2), \quad (\text{IV.131})$$

где $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{P}_v + \mathbb{P}_u)$ — полная энергия частицы в электростатическом поле (дрейфовый интеграл). В первом дрейфовом приближении поправку к распределению (IV.131) будем искать в виде $f_1 = f_0(\varepsilon) \psi$. Проведя интегрирование в (IV.130), найдем:

$$\psi = \frac{g^{22}}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ln f_0 \int \frac{dx^2}{\mathbb{P}_2} \left\{ -e[A'_v(\mathbb{P}_u - eA_u) + A'_u(\mathbb{P}_v - eA_v)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(g^{22'} \mathbb{P}_2^2 + g^{35'} \mathbb{P}_3^2) \right\} + \Phi(u, \mathbb{P}_v, \mathbb{P}_u, \mathbb{P}_3); \quad (\text{IV.132})$$

штрихом обозначено дифференцирование по медленной переменной u . Интеграл в (IV.132) вычисляется при постоянных $u, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_v, \mathbb{P}_u$ и \mathbb{P}_2 , определяемой из соотношения нормировки; Φ — произвольная функция. В отсутствие ГВ (IV.131) становится точным решением (IV.130), поэтому $\psi|_{u \leq 0} = 0$, откуда $\Phi|_{u \leq 0} = 0$. Кроме того функция Φ должна быть определена таким образом, чтобы выполнялось уравнение неразрывности, а также (IV.126). Эти условия, как и начальные (IV.124), автоматически выполняются, если положить $\Phi = 0$ и

$$A_v = A_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(y, u). \quad (\text{IV.133})$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

Тогда система уравнений сводится к одному:

$$4\pi\Sigma e_a N_a[\varphi(y, u)] = -A^{-1}(u)\partial_{22}\varphi, \quad (\text{IV.134})$$

где

$$N(\varphi) = \frac{2s+1}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 F'(\sqrt{m^2 + p^2} + e\varphi) dp \quad (\text{IV.135})$$

— плотность числа частиц как функция потенциала $\varphi(y, u)$. Поскольку уравнения неразрывности автоматически удовлетворяются при подстановке решения кинетического уравнения $F = F_0(1 + \psi)$, то (IV.125) можно рассматривать как определение плотности тока j^2 . Выражение (IV.135) не отличается по форме от соответствующего в отсутствие ГВ, единственное отличие уравнения Максвелла (IV.134) от аналогичного в отсутствие ГВ заключается в появлении метрического коэффициента $A(u)$. Однако, переменная u выступает в этом уравнении лишь как параметр. Поэтому, если $\varphi_0(y)$ — решение аналогичного уравнения в отсутствие ГВ, то

$$\varphi(y, u) = \varphi_0(\sqrt{A(u)} y) \quad (\text{IV.136})$$

есть решение уравнения (IV.134) в присутствии ГВ. Этот результат станет более наглядным, если вспомнить, что расстояние вдоль направления x^2 между двумя точками, измеренное в метрике (IV.17) с помощью изотропной геодезической, как раз равно $\sqrt{A}\Delta y$, где Δy — расстояние между этими точками в отсутствие ГВ. Таким образом, первое дрейфовое приближение учитывает приливное воздействие ГВ на самосогласованное электрическое поле. На это указывает и то обстоятельство, что первоначально однородное вакуумное электрическое поле $E = \text{Const}$ не деформируется ГВ; последний результат непосредственно следует из (IV.134). Подставляя (IV.136) в (IV.125), получим выражение для плотности тока, индуцированного ГВ:

$$j^{(2)} = -\frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \times \left\{ \beta' [E_0(y) + y \exp \beta 4\pi\rho_0(y)] - \frac{L'}{L} [E_0(y) - 4\pi\rho_0(y) \exp \beta] \right\}, \quad (\text{IV.137})$$

IV.5. Действие низкочастотных ПГВ на магнитоактивную плазму

где $\rho_0(y) = \Sigma e_a N_a(\varphi_0)$ — невозмущенная плотность заряда. С помощью потенциала $\varphi_0(y)$ найдем также ортореперные проекции ненулевых компонент тензора Максвелла в присутствии ГВ:

$$E'_2 = E_0(y); \quad E_{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}L} E_0(y) (L \exp(\beta))'. \quad (\text{IV.138})$$

Таким образом и в этом случае возникает составляющая электрического поля вдоль направления распространения ГВ. В качестве примера рассмотрим действие ГВ на границу металла с вакуумом. Полагая $x^2 = 0$ уравнением этой границы и отбрасывая в (IV.137) члены, квадратичные по амплитуде ГВ, получим выражение для плотности тока на поверхности металла:

$$j^{(2)}(0, u) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \beta' E(0). \quad (\text{IV.139})$$

Этот ток экспоненциально быстро затухает при удалении от поверхности металла и становится исчезающе малым на глубине порядка нескольких радиусов Томаса-Ферми. Составляющая электрического поля имеет противоположные направления вне металла и внутри его. На границе эти составляющие равны нулю.

IV.5 Действие низкочастотных плоских гравитационных волн на однородную и бесстолкновительную магнитоактивную плазму

Исследуем действие ПГВ с поляризацией e_+ ($\gamma = 0$) на магнитоактивную плазму, которая до прихода ГВ являлась однородной, изотропной и электронейтральной. Пусть вектор напряженности магнитного поля до прихода ГВ лежит в плоскости x^1, x^2 : $H_1 = H_0 \cos \theta$; $H_2 = H_0 \sin \theta$ ($u \leq 0$). Этому полю соответствует векторный потенциал:

$$A_v = A_u = A_2 = 0; \quad A_3 = H_0(x^1 \sin \theta - x^2 \cos \theta), \quad (u \leq 0). \quad (\text{IV.140})$$

Решением вакуумных уравнений Максвелла в поле ГВ указанной поляризации, удовлетворяющим начальным условиям (IV.140) является

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

$$\begin{aligned}
 A_v = A_u = A_2 = 0; \quad A_3 = H_0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta [v \exp(-\beta) - u] - x^2 \cos \theta \right\} \\
 F_{23} = H_0 \cos \theta; \quad F_{13} = \frac{1}{2} H_0 \sin \theta \{1 + \exp(-\beta) + \exp(-\beta)v\beta'\}; \\
 F_{43} = \frac{1}{2} H_0 \sin \theta \{\exp(-\beta) - 1 - \exp(-\beta)v\beta'\}. \quad (\text{IV.141})
 \end{aligned}$$

В присутствии ГВ возникает электромагнитная волна и поток энергии в направлении распространения ГВ:

$$T_{14} = \frac{H_0^2}{8\pi L^2} \left[\frac{1}{2} (\exp 2\beta - 1) + \exp \beta v \beta' + \frac{v^2 \beta'^2}{2} \right].$$

В этом разделе мы рассмотрим движение плазмы в дрейфовом приближении без предположения слабости ГВ, т.е. в первом приближении по малому параметру

$$\xi = \omega/\omega_B \ll 1 \quad (\text{IV.142})$$

(ω_B — ларморовская частота) [84],[96], [98]. В соответствии с этим приближением, а также с (IV.32) выберем функцию Гамильтона в виде:

$$\mathcal{H} = \mathbb{P}_a \mathbb{P}_v - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mathbb{P}_2^2}{A} + \frac{(\mathbb{P}_3 - eA_3)^2}{B} \right\}, \quad (\text{IV.143})$$

где

$$A_3 = \psi(u, v) - x^2 H_0 \cos \theta; \quad (\text{IV.144})$$

$\psi(u, v)$ — произвольная функция своих аргументов. Интегралами бесстолкновительного кинетического уравнения (I.197) с гамильтонианом (IV.143) являются \mathbb{P}_2 , \mathbb{P}_3 , \mathcal{H} . Введем единичный времениподобный вектор V^i :

$$V_2 = V_3 = 0; \quad V_u = -\frac{\partial_u \psi}{\overline{H}}; \quad V_v = +\frac{\partial_v \psi}{\overline{H}}; \quad (\text{IV.145})$$

где

$$\overline{H} = \sqrt{-2\partial_u \psi \partial_v \psi}, \quad (\text{IV.146})$$

и преобразуем кинетическое уравнение в СО, движущуюся со скоростью V^i :

$$\mathbb{P}_v = V_u (\tilde{\mathbb{P}}_4 + \tilde{\mathbb{P}}_1) \quad \mathbb{P}_u = V_v (\mathbb{P}_4 - \mathbb{P}_1); \quad \frac{D(\mathbb{P}_v, \mathbb{P}_u)}{D(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_4)} = 1. \quad (\text{IV.147})$$

В результате получим уравнение:

IV.5. Действие низкочастотных ПГВ на магнитоактивную плазму

$$\begin{aligned}
& (\mathbb{P}_4 - \mathbb{P}_1)V_u \frac{\partial f}{\partial v} + V_v(\mathbb{P}_4 + \mathbb{P}_1) \frac{\partial f}{\partial u} + [\mathbb{P}_4(\partial_v V_u - \partial_u V_v) - \\
& - \mathbb{P}_1(\partial_v V_u + \partial_u V_v)] \left(\mathbb{P}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}_4} + \mathbb{P}_4 \frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}_1} \right) - \frac{e\mathbb{P}_3}{B} \left(\overline{H} \frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}_1} - H_0 \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}_2} \right) + \\
& + \frac{1}{2} [(A^{-1})' \mathbb{P}_2^2 + (B^{-1})' \mathbb{P}_3^2] V_u \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}_4} + \frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}_1} \right) = 0. \quad (\text{IV.148})
\end{aligned}$$

Будем решать (IV.148) методом последовательных приближений по параметру ξ . В нулевом приближении имеем:

$$\overline{H} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbb{P}_1} - H_0 \cos \theta \frac{f_0}{\partial \mathbb{P}_2} = 0. \quad (\text{IV.149})$$

Дрейфовым интегралом этого уравнения является

$$\pi = \mathbb{P}_2 + \frac{H_0}{H} \mathbb{P}_1 \cos \theta, \quad (\text{IV.150})$$

а его решением, переходящим в изотропное в отсутствие ГВ,

$$f_0 = f_0(\mathbb{P}_4, u, v) \quad (\text{IV.151})$$

(в отсутствие ГВ согласно (IV.145)) $V_v = V_u = 1/\sqrt{2}$. В частности, если до прихода ГВ плазма находилась в равновесии, то

$$f_0 = \left[\exp \left(\frac{\mathbb{P}_4 - \mu_a}{T_a} \right) \pm 1 \right]^{-1}, \quad (\text{IV.152})$$

где $\mu_a = \mu_a(u, v)$, $T_a = T_a(u, v)$ — произвольные функции, удовлетворяющие начальным условиям:

$$\mu_a(u, v)|_{u \leq 0} = \mu_a^0; \quad T_a(u, v)|_{u \leq 0} = T_a^0. \quad (\text{IV.153})$$

Поскольку следствиями полного кинетического уравнения (IV.148) являются законы сохранения числа частиц каждого сорта и импульсов всей системы (см. раздел II.2):

$$n_a^i{}_{,i} = 0; \quad (T_p^i{}^k + T_f^i{}^k)_{,k} = 0, \quad (\text{IV.154})$$

функции μ_a и T_a должны быть определены из этих уравнений. Подставляя (IV.151) в (IV.148), получаем уравнение для поправки первого порядка $f^1 \sim f^0 \xi$, которое легко интегрируется с учетом дрейфовых интегралов [98]:

$$\begin{aligned}
 f^1 = & \frac{B}{\epsilon \bar{H} \mathbb{P}_3} \left\{ \mathbb{P}_1 \left[\mathbb{P}_4 (V_a \partial_v + V_v \partial_u) - \frac{\mathbb{P}_1}{2} (V_u \partial_v - V_v \partial_u) \right] + \right. \\
 & + \mathbb{P}_1^2 \left[\frac{1}{2} \mathbb{P}_4 (\partial_v V_u - \partial_u V_v) - \frac{1}{3} \mathbb{P}_1 (\partial_v V_u + \partial_u V_v) \right] \frac{\partial}{\partial \mathbb{P}_4} + \\
 & + \frac{1}{2} \mathbb{P}_1 \left[(A^{-1})' \left(\mathbb{P}_2^2 + H_0 \cos \theta \mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2 / \bar{H} + H_0^2 \cos^2 \theta \mathbb{P}_1^2 / 3 \bar{H}^2 \right) + \right. \\
 & \left. \left. + (B^{-1})' \mathbb{P}_3^2 \right] V_u \frac{\partial}{\partial \mathbb{P}_4} \right\} f_0 + \varphi(\mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4, u, v), \quad (\text{IV.155})
 \end{aligned}$$

где φ — произвольная функция, которая должна определяться из законов сохранения. Удобно выбрать эту функцию в виде

$$\varphi(\mathbb{P}_2^2, \mathbb{P}_3^2, \mathbb{P}_4^2, u, v) / \mathbb{P}_3.$$

Тогда вследствие четных свойств функции φ , f^1 вклад от нее в интегралы n_u, n_v, n_2 равен нулю согласно (IV.151)

$$n_i = N_a V_i; \quad (i \neq 3), \quad (\text{IV.156})$$

где N_a — плотность числа частиц, определенная относительно распределения (IV.151). Таким образом, закон сохранения числа частиц в первом дрейфовом приближении имеет вид:

$$L^{-2} \partial_u (V_v L^2 N_a) + \partial_v (V_u N_a) = 0. \quad (\text{IV.157})$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение для определения химического потенциала μ_a . Поскольку коэффициенты (IV.157) не зависят от специфики частиц,

$$N_a / N_b = \text{Const}, \quad (\text{IV.158})$$

вследствие чего, а также изначальной электронейтральности плазмы

$$j_1 = j_2 = j_4 = 0. \quad (\text{IV.159})$$

Вычисляя j_3 с помощью (IV.155), найдем [84]:

$$\begin{aligned}
 j_3 = & \frac{B}{H} [(V_v \partial_u - V_u \partial_v) P + (\epsilon + P)(\partial_u V_v - \partial_v V_u)] + \\
 & + 4\pi \sum e_a \int_0^\infty p^2 dp \Phi_a(p_4, u, v), \quad (\text{IV.160})
 \end{aligned}$$

IV.5. Действие низкочастотных ПГВ на магнитоактивную плазму

где P , ε — суммарные давление и плотность энергии плазмы, Φ_a — новые произвольные функции.

Используя явную гидродинамическую структуру всех компонент ТЭИ частиц, кроме компонент T_{3v} и T_{3u} , а также следствие (IV.159)

$$F_{3k}n^k = 0,$$

выпишем все нетривиальные следствия законов сохранения ТЭИ (IV.154), кинетического уравнения (IV.148) и уравнений Максвелла (IV.2), (IV.3):

$$L^{-2}\partial_u(L^2T_{3v}^a) + \partial_v T_{3u}^a = 0; \quad (a = 1, \dots, m); \quad (\text{IV.161})$$

$$j_3 = \frac{B}{H} [(V_v\partial_u - V_u\partial_v)P + (\partial_u V_v - \partial_v V_u)(\varepsilon + P)]; \quad (\text{IV.162})$$

$$L^{-2}\partial_u(L^2V_v\varepsilon) + \partial_v(V_u\varepsilon) + [L^{-2}\partial_u(V_vL^2) + \partial_v V_u]P = 0; \quad (\text{IV.163})$$

$$\partial_{uv}\psi + \beta'\partial_v\psi = 2\pi j_3(\psi). \quad (\text{IV.164})$$

Сравнив (IV.160) и (IV.162), получим условие

$$\sum e_a \int_0^\infty p^2 \Phi_a(p_4, u, v) dp = 0,$$

откуда следует, что Φ_a следует выбрать в виде $\Phi_a = Z(u, v)f_a^0(p_4, u, v)$, где $Z(u, v)$ — произвольные функции. Тогда, вычисляя, найдем:

$$\begin{aligned} T_{3v} &= \frac{BV_u}{6eH} \left\{ \left[V_u\partial_v + 3V_v\partial_u - 3\partial_v V_u - 7\partial_u V_v + 2(\ln L^2)' + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{A'H_0^2 \cos^2 \theta}{A^2 H^2} \right] \Xi_a - 3m_a^2 N_a (\partial_v V_u - \partial_u V_v) \right\} + V_u Z \varepsilon_a; \\ T_{3u} &= \frac{BV_v}{6eH} \left\{ \left[-3V_u\partial_v + 3V_v\partial_u - 3\partial_v V_u - 7\partial_u V_v + 2(\ln L^2)' + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{A'H_0^2 \cos^2 \theta}{A^2 H^2} \right] \Xi_a - 3m_a^2 N_a (\partial_v V_u - \partial_u V_v) \right\} + V_u Z \varepsilon_a; \end{aligned} \quad (\text{IV.165})$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

где $\Xi_a(u, v)$ — момент третьего порядка функции (IV.151):

$$\Xi_a = \frac{2s+1}{2\pi^2} \int_0^\infty p^4 f_0(p) dp. \quad (\text{IV.166})$$

Итак, для плазмы состоящей из частиц m сортов имеем m уравнений (IV.157), m уравнений (IV.161), одно уравнение (IV.163) и одно уравнение (IV.164) — всего $2(m+1)$ уравнений относительно $2(m+1)$ неизвестных функций T_a, μ_a, Z, ψ . Вследствие (IV.155) функция Z должна удовлетворять начальному условию

$$Z(u, v)|_{u \leq 0} = 0. \quad (\text{IV.167})$$

Указанная система уравнений совместно с определениями $N_a, P_a, \varepsilon_a, \Xi_a$ и соответствующими начальными условиями полностью описывает движение бесстолкновительной магнитоактивной плазмы в поле низкочастотных ГВ. При выводе этих уравнений существенно предположение, что $\sin \theta \neq 0$, т.е. направление первоначального магнитного поля не совпадает с направлением распространения ГВ. В последнем случае дрейфовый ток не возникает [100].

Из (IV.141) следует, что при $\sin \theta \neq 0$ вакуумное решение уравнение Максвелла в поле ПГВ, удовлетворяющее начальным условиям (IV.140), является существенно нестационарным: $E_3 = E_3(u, v)$; $H_2 = H_2(u, v)$. В [96] а также в [98] показано, что в присутствии плазмы указанная система уравнений имеет лишь строго стационарные решения. Положим поэтому [95]:

$$\psi(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_0 \sin \theta (v - u + \varphi(u)),$$

причем $\varphi(u)|_{u \leq 0} = 0$; $\varphi'|_{u \leq 0} = 0$. Тогда¹ с учетом $\theta \in (0, \pi)$, найдем:

$$V_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \varphi'}; \quad V_v = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \varphi'}}; \quad \bar{H} = H_0 \sin \theta \sqrt{1 - \varphi'}. \quad (\text{IV.168})$$

Тогда из (IV.161) вследствие начальных условий найдем $T_{3v}^a = 0$, и (IV.165) примет вид уравнения:

¹Приведенные ниже точные решения на основе модели работы [95] впервые получены в диссертации Автора [99].

IV.5. Действие низкочастотных ПГВ на магнитоактивную плазму

$$\frac{B}{6\epsilon\bar{H}} \left\{ \left[3V_v \partial_u - 7V_v' + 2(\ln L^2)' + \frac{A' H_0^2 \cos^2 \theta}{A^2 \bar{H}^2} \right] \Xi_a - \right. \\ \left. - 3m_a^2 N_a V_v' \right\} + Z \epsilon_a = 0; \quad (a = 1, \dots, m). \quad (\text{IV.169})$$

Уравнения (IV.162) - (IV.164) существенно упрощаются, причем (IV.164) сразу дает выражение для плотности дрейфового тока [95]:

$$j_z = \frac{B}{H} [V_v P' + V_v' (\epsilon + P)], \quad (\text{IV.170})$$

$$(L^2 V_v \epsilon)' + P (V_v L^2)' = 0, \quad (\text{IV.171})$$

$$j_z = \frac{1}{2^{3/2} \pi} H_0 \sin \theta \beta'. \quad (\text{IV.172})$$

Уравнения непрерывности (IV.157) интегрируются точно:

$$N_a = \frac{N_a^0}{\sqrt{2} V_v L^2} = \frac{N_a^0}{L^2} \sqrt{\eta}, \quad (\text{IV.173})$$

где $\eta = 1 - \varphi'$. Подставляя найденное значение для плотности дрейфового тока (IV.172) в уравнение (IV.170) и используя явные выражения для V_v и \bar{H} (IV.168) получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения «потенциала» η :

$$\eta' (\epsilon + p) - 2\eta P' + \frac{H_0^2 \sin^2 \theta}{\pi L^2} e^{2\beta} \beta' \eta^2 = 0, \quad (\text{IV.174})$$

причем η удовлетворяет начальному условию:

$$\eta(0) = 1. \quad (\text{IV.175})$$

В качестве конкретного примера функции (IV.151) рассмотрим нерелятивистское бoльцмановское распределение. Для этого распределения

$$P_a = N_a T_a; \quad \epsilon_a = \rho_a + \frac{3}{2} P_a; \quad \Xi_a = 6m_a P_a. \quad (\text{IV.176})$$

Подставляя (IV.176) в (IV.171) и используя решение (IV.173), найдем:

$$P = P_0 \left(\frac{\sqrt{\eta}}{L^2} \right)^{5/3}. \quad (\text{IV.177})$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

Пренебрегая давлением в (IV.174) и решая это уравнение с начальным условием (IV.175), получим

$$\frac{1}{\sqrt{\eta}} = 1 + \alpha^2(e^{2\beta} - 1), \quad (\text{IV.178})$$

где

$$\alpha^2 = \frac{H_0^2 \sin^2 \theta}{4\pi\rho_0}, \quad (\text{IV.179})$$

$\rho_0 = \sum m_a N_a^0$ — невозмущенная плотность плазмы. Таким образом найдем точное выражение для скорости дрейфа плазмы

$$V' = -\frac{V_v - V_u}{V_v + V_u} = -\alpha^2(e^{2\beta} - 1) \frac{2 + \alpha^2(e^{2\beta} - 1)}{[1 + \alpha^2(e^{2\beta} - 1)]^2}. \quad (\text{IV.180})$$

Для нахождения температур $T_a(u)$ поступим следующим образом. Введем эффективную температуру плазмы $\bar{T}(u)$ и эффективную массу частиц:

$$\bar{T} = \frac{\sum N_a T_a}{\sum N_a} = \frac{P}{N}, \quad \bar{m} = \frac{\sum m_a N_a}{\sum N_a} = \frac{\rho}{N}. \quad (\text{IV.181})$$

Вследствие (IV.173) и (IV.177)

$$\bar{m} = \text{Const}; \quad \bar{T} = \bar{T}_0 \left(\frac{\sqrt{\eta}}{L^2} \right)^{2/3}. \quad (\text{IV.182})$$

Введем еще одно обозначение

$$\frac{T_a - \bar{T}}{\bar{T}} = \delta_a. \quad (\text{IV.183})$$

Поделив обе части уравнения (IV.169) на m_a и просуммировав его по всем сортам частиц, используя в полученном уравнении (IV.173), (IV.176), (IV.179), найдем выражение для $Z(u)$. Подставляя это выражение в (IV.169) и учитывая обозначения (IV.181), (IV.183) получим уравнения для определения $\delta_a(u)$:

$$\begin{aligned} \delta'_a + \left[-4\sqrt{\eta}(\eta^{-1/2})' - \frac{5}{3}(\ln L^2)' + \frac{2^{3/2}}{3}\sqrt{\eta}(\ln L^2)' + \frac{A' \text{ctg}^2 \theta \sqrt{2}}{A^2 3\sqrt{\eta}} \right] \delta &= \\ = \frac{1}{6}\sqrt{\eta}(\eta^{-1/2})' \frac{m_a - \bar{m}}{\bar{T}}. \end{aligned} \quad (\text{IV.184})$$

IV.5. Действие низкочастотных ПГВ на магнитоактивную плазму

Уравнения (IV.184), являясь линейным дифференциальным уравнением первого порядка, всегда интегрируются в квадратурах. Таким образом, поставленная нами задача решена точно. В случае слабой гравитационной волны можно получить простое выражение для δ_a :

$$\begin{aligned}\delta_a &= \delta_a^0 + \frac{m_a - \bar{m}}{6T} \ln[1 + \alpha^2(e^{2\beta} - 1)] \approx \delta_a^0 + \frac{\beta(u)(m_a - \bar{m})}{3T} \alpha^2. \\ \delta_a &= \delta_a^0 + \frac{m_a - \bar{m}}{6T} \ln[1 + \alpha^2(e^{2\beta} - 1)] \approx \delta_a^0 + \alpha^2 \beta \frac{(m_a - \bar{m})}{3T}. \quad (\text{IV.185})\end{aligned}$$

Скорость дрейфа (IV.180) в слабой ПГВ равна [96]:

$$v^1 = -2\alpha^2 \beta(u). \quad (\text{IV.186})$$

Вычислим, наконец, наблюдаемые значения тензора электромагнитного поля

$$\begin{aligned}H_{(1)} &= F_{(1)(4)}^* = H_0 \cos \theta; \\ H_{(2)} &= F_{(3)(4)} = \frac{H_0 \sin \theta}{L} e^\beta \left(\frac{1 + \eta}{2} \right); \\ E_{(3)} &= F_{(3)(4)} = -\frac{H_0 \sin \theta}{L} e^\beta \left(\frac{1 - \eta}{2} \right).\end{aligned} \quad (\text{IV.187})$$

Таким образом под действием ПГВ возникает поперечная электромагнитная волна, распространяющаяся со скоростью света в направлении распространения ГВ. Перейдем теперь в систему отсчета, движущуюся с плазмой, в которой $V^i = \delta_\eta^i$. Наблюдаемые значения полей E и H в этой СО определяются формулами [71]:

$$E'_\alpha = F_{(\alpha)(k)} V^{(k)}; \quad H'_{(\alpha)} = F^* V^{(k)}.$$

Вычисляя эти компоненты, найдем:

$$E'_{(s)} = 0; \quad H'_{(1)} = \frac{H_0 \cos \theta}{2\sqrt{\eta}} (1 + \eta); \quad H'_{(2)} = \frac{H_0 \sin \theta e^\beta}{2\sqrt{\eta} L} (1 + \eta^2). \quad (\text{IV.188})$$

Таким образом, в СО, движущейся совместно с плазмой, электрическое поле отсутствует; вместе с тем отсутствует и поток энергии электромагнитного поля. Это означает, что магнитные силовые линии вмерозены в плазму, как и должно быть в дрейфовом приближении.

IV.6 Действие слабых гравитационных волн с произвольной частотой и поляризацией на однородную магнитоактивную плазму

Исследуем теперь действие слабых гравитационных волн произвольной поляризации

$$|h_{\alpha\beta}| \ll 1$$

на первоначально однородную магнитоактивную плазму, не налагая ограничения на частоту гравитационных волн [101]. Для слабых ГВ воспользуемся метрикой (IV.25), причем будем полагать:

$$\beta(u) = \frac{1}{2}h_+ \exp(-ik_0u)U_+(u) \equiv \frac{1}{2}h_+\psi(u); \quad (\text{IV.189})$$

$$\gamma(u) = \frac{1}{2}h_\times \exp(-ik_0u)U_+(u) \equiv \frac{1}{2}h_\times\psi(u), \quad (\text{IV.190})$$

где в отличие от принятых обозначений $u = \dot{x}^4 - x^i$; h_+ , h_\times — постоянные амплитуды, соответствующие двум различным состояниям поляризации ГВ.

Линеаризованная по амплитудам h_+ , h_\times система уравнений Максвелла - Власова с учетом процедуры перенормировки 4-импульса [75] принимает вид (ω_{Ba} — ларморовская частота):

$$\left\{ p^4 \partial_u + p^v \partial_v + m_a \omega_{Ba} \left[\cos \theta \left(p^3 \frac{\partial}{\partial p^2} - p^2 \frac{\partial}{\partial p^3} \right) + \sin \theta \left(p^1 \frac{\partial}{\partial p^3} - p^3 \frac{\partial}{\partial p^1} \right) \right] \right\} \delta f_a = - \left\{ -e_a (\vec{E} \vec{P}) + \psi'_u \left[\frac{h_+}{2} (p^{22} - p^{32}) + h_\times p^2 p^3 \right] \right\} \frac{df_a^0}{d\varepsilon}; \quad (\text{IV.191})$$

IV.6. Действие слабых ПГВ на магнитоактивную плазму

$$(\partial_u + \partial_v)E_x = 4\pi j^1; \quad (\text{IV.192})$$

$$\partial_u(B_z - E_y) - \partial_v(B_z + E_y) = -B_0 \sin \theta h_x \psi' - 4\pi j^2; \quad (\text{IV.193})$$

$$-\partial_u(B_y + E_z) + \partial_v(B_y - E_z) = -B_0 \sin \theta h_+ \psi' - 4\pi j^3; \quad (\text{IV.194})$$

$$\partial_u(E_y - B_z) - \partial_v(E_y + B_z) = 0; \quad (\text{IV.195})$$

$$\partial_u(E_z + B_y) - \partial_v(E_z - B_y) = 0; \quad (\text{IV.196})$$

$$\partial_u F_{23} = 0; \quad \partial_v F_{23} = 0; \quad (\text{IV.197})$$

$$j^i = \sum e_a \int p^i \delta f_a dP, \quad (\text{IV.198})$$

где $\delta f_a(x, p)$ — возмущение функции распределения; $v = x^4 + x^1$. Из (IV.197) сразу следует $F_{23} = B_\times = \text{Const}$, т.е. первое соотношение из (IV.187). Первые члены в правах частях (IV.193), (IV.194) возникают вследствие деформации магнитных силовых линий; из сравнения с (IV.172) видно, что эти токи смещения с точностью до знака совпадают с дрейфовым током:

$$j_{\text{СМ}}^3 = -j_g^3 = \frac{B_0 \sin \theta}{4\pi} h_+ \psi'; \quad j_{\text{СМ}}^2 = -j_g^2 = \frac{B_0 \sin \theta}{4\pi} h_\times \psi'. \quad (\text{IV.199})$$

Из (IV.191) - (IV.198) следует строгий результата [98], согласующийся с выводом работы ([100]): в условиях продольного распространения ($\sin \theta = 0$) плазменные колебания не возбуждаются. Максимальный плазменный отклик на ГВ следует ожидать в условиях поперечного распространения ($\sin \theta = \pm 1$). В этом разделе мы подробно остановимся именно на этом случае. Перейдем в кинетическом уравнении (IV.192) к цилиндрическим координатам в пространстве импульсов: $p^1 = p_1 \cos \varphi$; $p^3 = p_1 \sin \varphi$ и применим к (IV.192) - (IV.198) преобразование Фурье-Лапласа, которое сообразно заданию начальных условий на анизотропной гиперповерхности $u = 0$ определяются следующими формулами:

$$a(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_0^{\infty} du a(u, v) \exp[i(k, x)];$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

$$a(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_v \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} dk_u a(k) \exp[-i(k, x)], \quad (\text{IV.200})$$

где

$$\begin{aligned} (k, x) &= k_1 x^1 + k_4 x^4 = k_u u + k_v v; \\ k_4 &= \omega; \quad k_1 = -k; \quad k_4 = \frac{1}{2}(k_4 - k_1), \\ k_v &= \frac{1}{2}(k_4 + k_1). \end{aligned}$$

Следует также учесть, что

$$\psi'(k) = -ik_u \psi(k),$$

где

$$\psi(k) = \delta(k_v) \left\{ \frac{\mathcal{P}_i}{k_4 - \omega_0} + \pi \delta(k_4 - \omega_0) \right\}. \quad (\text{IV.201})$$

Исключая B_y и B_z в уравнениях (IV.193) - (IV.196), получим вместо (IV.192) - (IV.198) систему:

$$\begin{aligned} -i[(k, p) + m_a \omega_{B_a} \partial_\varphi] \delta f_a &= -e_a(E, p) \frac{df_a^0}{d\varepsilon} + \\ &+ i \left\{ \frac{h_+}{2} (p_\perp^2 \sin^2 \varphi - p^2) + h_\times p_\perp p^2 \sin \varphi \right\} k_u \psi(k) \frac{df_a^0}{d\varepsilon}; \end{aligned} \quad (\text{IV.202})$$

$$iE_\times k_u = 4\pi j^1(k); \quad (\text{IV.203})$$

$$iE_y(\omega^2 - k^2)/\omega = -4\pi[j^2(k) - j_y^2(k)]; \quad (\text{IV.204})$$

$$iE_z(\omega^2 - k^2)/\omega = -4\pi[j^3(k) - j_y^3(k)]; \quad (\text{IV.205})$$

Пользуясь линейностью уравнений (IV.202) - (IV.205), структурой тензора проводимости $\sigma^{\alpha\beta}(k)$ в условиях поперечного распространения волн [102], а также симметрией функции распределения, систему (IV.202) -

IV.6. Действие слабых ПГВ на магнитоактивную плазму

(IV.205) можно расщепить на две независимые системы уравнений, каждая из которых описывает плазменные колебания, индуцированные e_+ и e_- составляющими гравитационного излучения [96]:

$$E_x(k_u + 4\pi i \sigma^{11}) + E_z 4\pi i \sigma^{31} = -4\pi i j_+^1; \quad (\text{IV.206})$$

$$E_x 4\pi i \sigma^{31} - E_z[(\omega^2 - k^2)/\omega + 4\pi i \sigma^{33}] = -4\pi i (j_+^3 - j_g^3); \quad (\text{IV.207})$$

$$E_y[(\omega^2 - k^2)/\omega + 4\pi i \sigma^{22}] = -4\pi i (j_x^2 - j_g^2), \quad (\text{IV.208})$$

где j_+^i, j_x^i — вынужденные плотности тока, генерируемые ГВ и вызванные соответствующими возмущениями функции распределения:

$$\begin{aligned} \delta f_a^+ &= \frac{h_+}{2} \psi k_u \frac{df_a^0}{d\varepsilon} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(\frac{ikp_\perp}{m_a \omega_{Ba}} - is\varphi\right)}{\omega\varepsilon - sm_a \omega_{Ba}} [p_\perp^2 J_s'' + (p^2)^2 J_s]; \\ \delta f_a^\times &= -ih_\times k_u p_\perp p^2 \frac{df_a^0}{d\varepsilon} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(\frac{ikp_\perp}{m_a \omega_{Ba}} - is\varphi\right)}{\omega\varepsilon - sm_a \omega_{Ba}} J_s'; \end{aligned} \quad (\text{IV.209})$$

аргументом функции Бесселя J_s является $kp_\perp/m_a \omega_{Ba}$. В частности, если f_a^0 — бoльцмановское распределение:

$$j_+^1(k) = -\frac{h_+ \psi}{2} \sum_a e_a N_a \omega_{Ba} Z_a \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{s A_s''(Z_a)}{\omega - s\omega_{Ba}}; \quad (\text{IV.210})$$

$$j_x^2(k) = ih_\times \psi \sum_a e_a N_a \omega_{Ba} Z_a \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{A_s'}{\omega - s\omega_{Ba}}; \quad (\text{IV.211})$$

$$j_+^3(k) = i \frac{h_+ \psi}{2} \sum_a e_a N_a \omega_{Ba} Z_a \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{Z_a A_s''' + 2A_s'' + 2A_s'}{\omega - s\omega_{Ba}}, \quad (\text{IV.212})$$

где

$$Z_a = (\xi_a v_{Ta})^2, \quad \xi_a = \omega/\omega_{Ba},$$

v_{Ta} — тепловая скорость частиц; определение функций $A_s(Z)$ см. в [102].

Из (IV.206) — (IV.208) следует, что поляризация ГВ e_+ возбуждает смешанные продольно-поперечные электромагнитные колебания

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

с составляющей магнитного поля, коллинеарной вектору напряженности невозмущенного магнитного поля: продольное E_x и поперечное E_Z , $H_y = -kE_Z/\omega$. Поляризация e_x индуцирует чисто поперечные электромагнитные колебания; $H_Z = kE_y/\omega$. Если плазма отсутствует ($N_a \equiv 0$), решение (IV.206) — (IV.208) существенно нестационарно:

$$\begin{aligned} E_x &= 0; & E_Z &= \frac{1}{4}H_0 h_+ [\psi(u) + v\psi'_u]; \\ E_y &= -\frac{1}{4}H_0 h_x [\psi(u) + v\psi'(u)], \end{aligned}$$

что вызвано наличием вакуумного полюса $k_v = 0$ дисперсионного уравнения. Нетрудно видеть, что полученное решение является первым членом разложения по амплитуде ГВ точного вакуумного решения (IV.141). При наличии плазмы вакуумный полюс $k_v = 0$ исчезает вследствие фактора $\delta(k_v)$ в Фурье-образе вынужденного тока (IV.210)–(IV.212) и тока смещения (IV.199). Поэтому при наличии плазмы $k_v = 0$, т.е. $\omega = k$, и решение становится строго стационарным. Тогда из уравнений Максвелла (IV.203) — (IV.205) следует

$$j^1 = -\frac{E_x}{4\pi i\omega}; \quad j^2 = j_y^2; \quad j^3 = j_y^3, \quad (\text{IV.213})$$

т.е. найденной в предыдущем разделе в рамках дрейфового приближения выражение для плотности поперечного тока оказалось точным. Из (IV.213) найдем:

$$\begin{aligned} E_x(k) &= -\frac{1}{\Delta(k)} [j_+^1 \sigma^{33} - (j_+^3 + j_g^3) \sigma^{31}]; \\ E_Z(k) &= -\frac{1}{\Delta(k)} [-j_+^1 \sigma^{31} + \left(\sigma^{11} + \frac{\omega}{4\pi i}\right) (j_+^3 + j_g^3)]; \\ E_y(k) &= -\frac{1}{\sigma^{22}} (j_x^2 + j_g^2), \end{aligned} \quad (\text{IV.214})$$

где

$$\Delta(k) = \sigma^{33} \left(\sigma^{11} + \frac{\omega}{4\pi i} \right) - (\sigma^{31})^2. \quad (\text{IV.215})$$

Предполагая далее

$$\omega_{Bi} \ll \omega; \quad Z_e = \left(\frac{\omega}{\omega_{Be}} v_{Te} \right)^2 \ll 1, \quad (\text{IV.216})$$

IV.6. Действие слабых ПГВ на магнитоактивную плазму

пренебрегая вкладом ионов и разлагая выражения для $\sigma^{\alpha\beta}(k)$ и $j_{+, \times}^i$ в ряд Тейлора по параметру Z_e , в первом релятивистском приближении найдем:

$$\begin{aligned} E_{\times}(k) &= -iH_0 h_+ \psi(k) \frac{k\omega_{Be}}{\omega^2 - \omega_{Le}^2} \left[1 - \frac{v_{Te}^2 \Delta_{\times}(\omega)}{2\omega_{Be}^2 (k^2 - \omega_{Le}^2)(k^2 - 4\omega_{Be}^2)} \right]; \\ E_Z(k) &= -H_0 h_+ \psi(k) \frac{k^2}{\omega_{Le}^2 (k^2 - \omega_{Le}^2)} \left[1 - \frac{v_{Te}^2 \Delta_Z(\omega)}{2\omega_{Be}^2 (k^2 - \omega_{Le}^2)(k^2 - 4\omega_{Be}^2)} \right]; \\ E_y(k) &= \frac{-h_{\times} \psi(k) H_0 k^2}{\omega_{Le}^2} \left[1 - \frac{v_{Te}^2 (k^2 - \omega_{Le}^2)}{k^2 - \omega_{Be}^2} \right], \end{aligned} \quad (IV.217)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{\times} &= (k^2 - 4\omega_{Be}^2)(6k^4 - 9k^2\omega_{Le}^2 + \omega_{Le}^4 + 4k^2\omega_{Be}^2) - \\ &- 2k^2(k^2 - \omega_{Be}^2)(3k^2 - 4\omega_{Le}^2) - k^2\omega_{Le}^2(3k^2 + \omega_{Le}^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_Z &= (k^2 - 4\omega_{Be}^2)[\omega_{Le}^2(k^2 - \omega_{Le}^2)(k^2 + \omega_{Le}^2 - \omega_{Be}^2) + \\ &+ k^2(k^2 - \omega_{Le}^2 - \omega_{Be}^2)(k^2 - 2\omega_{Le}^2 + 2\omega_{Be}^2)] - (k^2 - \omega_{Be}^2)[\omega_{Le}^2(k^4 - \\ &- \omega_{Le}^4) + k^2(k^2 - \omega_{Le}^2 - \omega_{Be}^2)(k^2 - 2\omega_{Le}^2)] + \omega_{Be}^2\omega_{Le}^4(k^2 - \omega_{Le}^2) - \\ &- 2k^2\omega_{Le}^2\omega_{Be}^2(k^2 - \omega_{Be}^2 - \omega_{Le}^2). \end{aligned}$$

Из (IV.217) видно, что поляризация ГВ e_+ резонирует на ленгмювской (плазменной частоте) и удвоенной ларморовской; поляризация e_{\times} резонирует лишь на ларморовской. Произведя обратное Фурье-преобразование формул (IV.217), в нулевом приближении по параметру v_{Te}^2 получим:

$$\begin{aligned} E_{\times}^0 &= \frac{h_+ H_0 \omega_{Be}}{\omega_0^2 - \omega_{Le}^2} (\omega_0 \sin \omega_0 u - \omega_{Le} \sin \omega_{Le} u); \\ E_Z^0 &= h_+ H_0 \frac{\omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega_{Le}^2 - \omega_{Be}^2) \cos \omega_0 u - \omega_{Be}^2 \omega_{Le}^2 \cos \omega_{Le} u}{\omega_{Le}^2 (\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)}; \\ E_y^0 &= -h_{\times} H_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_{Le}^2} \cos \omega_0 u. \end{aligned} \quad (IV.218)$$

Для величин первого порядка по параметру v_{Te}^2 рассмотрим два различных резонансных случая.

1. Тройной резонанс e_+ поляризации ГВ ($\omega_0 = \omega_{Le} = 2\omega_{Be}$):

$$\begin{aligned} E_x^1 &= -\frac{5}{64}h_+H_0v_{Te}^2(\omega_0u)^3 \cos \omega_0u; \\ E_z^1 &= -\frac{1}{2^{10}}h_+H_0v_{Te}^2(\omega_0u)^3 \sin \omega_0u. \end{aligned} \quad (\text{IV.219})$$

2. Однократный резонанс e_\times — поляризации ($\omega_0 = \omega_{Be}$):

$$E_y^1 = \frac{h_\times H_0 v_{Te}^2}{\omega_{Le}^2} [\omega_{Be} u (\omega_{Be}^2 - \omega_{Le}^2) - 2\omega_{Be}^2 + \omega_{Le}^2]. \quad (\text{IV.220})$$

Как известно [102], в условиях строго поперечного распространения продольных ($E \perp H_0$) волн в плазме возникает резонанс на модах Бернштейна: $\omega = \sqrt{\omega_{Le}^2 + \omega_{Be}^2}$ и $\omega = s\omega_{Be}$ ($s \geq 2$); в случае продольного распространения ($E \parallel H_0$) возникает резонанс только на первой циклотронной частоте. Анализ структуры вынужденного тока (IV.210) выявляет наличие резонансов на частотах, кратных ларморовской. В результате низшей резонирующей гармоникой является двойная ларморовская частота для e_+ - поляризации ГВ и первая циклотронная гармоника для e_\times - поляризации, причем в случае e_+ поляризации возникает тройной резонанс вследствие совпадения полюсов в тензоре диэлектрической проницаемости и в индуцированном ГВ токе (IV.210). Следует отметить, что вывод о преобладании первой и второй ларморовских гармоник в суммарной мощности гравитационного излучения магнитоактивной плазмы сделан в работе [103]. Следует также подчеркнуть, что в дрейфовом приближении ($\omega_0 \ll \omega_{Be}, \omega_{Bi}$) формулы этого раздела переходят в соответствующие формулы предыдущего раздела, линеаризованные по малости амплитуды ГВ. Для этого необходимо в формулах (IV.115) положить $\omega_0 \ll \omega_{Le} \ll \omega_{Be}$: В этом приближении выражение для E_z^0 из (IV.218) совпадает с (IV.187), $E_x^0 \ll E_z^0$, $j_e^0/N_e e = v^1$ из формулы (IV.180).

IV.7 Столкновительная релаксация плазмы в поле гравитационного излучения

ГВ даже в изотропной плазме вызывают линейные по своей амплитуде возмущения, которые приводят к отклонению функции распределения от равновесия. Обмен импульсами при столкновениях заряженных

IV.7. Столкновительная релаксация плазмы в поле ГВ

частиц плазмы изотропизирует и максвеллизировывает возмущенное распределение и тем самым замыкает рассмотренные выше эффекты. В этом разделе на примере кулоновских столкновений мы опишем релаксационные процессы в плазме, находящейся в поле ГВ [76], [74],[104]. С учетом столкновений кинетические уравнения (IV.1) в метрике ПГВ (IV.17) можно записать в виде[74]:

$$(\mathbb{P}_v - e_a A_v) \frac{\partial f_a}{\partial u} = \sum_a J^{ab} \{f_a, f_b\}, \quad (\text{IV.221})$$

где $f_a = f_a(\mathbb{P}_v, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathcal{H}_a, u)$. В нулевом приближении при малости интеграла столкновений $\partial f_a / \partial u = 0$, и мы получаем решения бесстолкновительного кинетического уравнения (IV.221):

$$f_a^0(\mathbb{P}_v, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathcal{H}_a).$$

В следующем приближении

$$f_a^1 = \sum_b \int_o^u \frac{du'}{\mathbb{P}_v - e_a A_v(u')} J^{ab} \{f_a, f_b\}. \quad (\text{IV.222})$$

Этот интеграл вычисляем при постоянных $\mathbb{P}_v, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathcal{H}_a$ и $\mathbb{P}_u(u')$, определяемым из соотношения нормировки. В качестве f_a^0 рассмотрим первоначально равновесное изотропное распределение (IV.40). Подставляя (IV.40) в интеграл Беляева-Будкера (IV.9), (IV.10) и пользуясь соотношениями (IV.11) — (IV.13), приведем его к виду:

$$J_i^{ab} = \frac{\sqrt{2}\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda m_a m_b^3}{(2\pi)^3 L^2 T} (1 - n_a) n_a \int \frac{du'_v du'_2 du'_3}{u'_v} n_b (1 - n_b) \frac{(u, u')^2}{[(u, u')^2 - 1]^{3/2}} \times \\ \times \left\{ [(u, u')^2 - 1] (g_{i\alpha} + \delta_{i\alpha}) \left(\frac{u'_\alpha}{u'_v} - \frac{u_\alpha}{u_v} \right) + \left(\frac{u_\perp^2 - s_\perp^2}{2u_v^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{u_\perp'^2 - s_\perp'^2}{2u_v'^2} + \frac{\Omega}{u_v u'_v} \right) [u'_i u'_v - u_i u_v + (u, u') (u'_i u_v - u_i u'_v)] \right\}, \quad (\text{IV.223})$$

где

$$i = v, 2, 3 : \alpha, \beta = 2, 3; u_\perp^2 = u_2^2 + u_3^2; \\ s_\perp^2 = -g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta; \Omega = -(\delta^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}) u_\alpha u'_\beta.$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

Поскольку решение бесстолкновительного кинетического уравнения f_a^0 не зависит явно от запаздывающего времени, отыскание столкновительной поправки к функции распределения (IV.40) сводится к вычислению интеграла по запаздывающему времени от явной функции метрических коэффициентов, входящих в (IV.223). В этом разделе мы ограничимся рассмотрением линейных по амплитуде ГВ процессов релаксации в нерелятивистской плазме. В случае больцмановского распределения частиц столкновительная поправка к функции распределения имеет вид [74]:

$$f_a^1 = -\frac{3^{3/2} f_a^0(u=0) m_a}{32\sqrt{\pi} T \tau_a} \sum_b (\gamma_b^a)^{3/2} F_{ab}(z_b) \int_0^u (s_\perp^2 - u_\perp^2) du, \quad (\text{IV.224})$$

где

$$F_{ab}(z) = \frac{\sqrt{\pi} \Phi(z)}{z^{3/2}} \left(6\gamma_b^a - 2 + \frac{6}{z} - \frac{9\gamma_b^a}{z} - \frac{21}{2z^2} \right) + \frac{e^{-z}}{z^2} \left(2 + \frac{21}{z} + 18\gamma_b^a \right);$$

$$z_b = \frac{m_b u_\perp^2}{2T}; \quad \gamma_b^a = \frac{m_a}{m_b};$$

τ_a — эффективное время релаксации заряженных частиц [105]:

$$\tau_a = \frac{3^{3/2} m_a^{1/2} T^{3/2}}{8\pi Z^2 N_a e^4 \Lambda}, \quad (\text{IV.225})$$

$\Phi(z)$ — интеграл вероятности. Как видно из (IV.225), условием справедливости сделанного приближения, т.е. малости столкновительной поправки, является

$$\omega \tau_a \gg 1. \quad (\text{IV.226})$$

Вычислим теперь столкновительные поправки к тензору энергии - импульса. Отметим, что низкоэнергетические части спектра, в которых условие (IV.226) может быть нарушено, вносят исчезающе малый вклад в ТЭИ, поэтому возможность установления ЛТР в этих участках спектра можно игнорировать. Проводя интегрирование (IV.224), найдем для отличных от нуля компонент ТЭИ:

$$\delta T_{\alpha\beta}^a = \frac{3^{3/2} N_a T}{16\sqrt{\pi} \tau_a} [\psi(1) + (\gamma_b^a)^{3/2} \psi(\gamma_b^a)] \int_0^u (-g_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) du',$$

IV.7. Столкновительная релаксация плазмы в поле ГВ

где

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x+1}} \cdot \frac{12x^2 + 9x - 1}{2x^2} - \frac{12x^2 + 17x + 1}{x(x+1)}.$$

Учитывая малость отношения m_e/m_i , выпишем основные вклады в поправки к ТЭИ электронов и ионов:

$$\begin{aligned} \delta T_{\alpha\beta}^e &= -\frac{3^{3/2} m_i^{1/2} N_e T}{32 m_e^{1/2} \tau_e} \int_0^u (-g_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) du'; \\ \delta T_{\alpha\beta}^i &= -\frac{3^{5/2} m_i^{3/2} Z N_i T}{4\sqrt{\pi} m_e^{3/2} \tau_i} \int_0^u (-g_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) du'. \end{aligned} \quad (\text{IV.227})$$

Основной вклад в столкновительную поправку к ТЭИ вносят электронные столкновения, причем вклад ионов примерно в $\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2}$ раз больше вклада электронов. На зависимость от температуры столкновительной поправки $\delta T_{\alpha\beta} \sim T^{-1/2}$ указывалось в более ранней работе автора [75]. Столкновительная поправка к ТЭИ благодаря наличию интегрирования по запаздывающему времени описывает колебания давления в противофазе с бесстолкновительной поправкой $\delta P_0 = \pm 2hP$ и тем самым уменьшает эффект воздействия ГВ на плазму. Рассмотрим для примера слабую ГВ с поляризацией e_+ , причем $\beta = \beta_0 \sin \omega \bar{u}$ тогда бесстолкновительная поправка к давлению плазмы равна:

$$\delta P_{(2,3)} = \pm 2\beta_0 \sin \omega \bar{u} \cdot P_0,$$

где $P_0 = (N_e + N_i)T$. Столкновительная поправка к давлению δP^1 согласно (IV.227) приближенно равна:

$$\delta P_{2,3}^1 \approx \delta P_{(2,3)}^{1(i)} = -\frac{3^{5/2} m_i^{3/2} N_i T}{2^{5/2} \sqrt{\pi} m_e^{3/2} \omega \tau_i} \cdot \beta_0 \cos \omega \bar{u}.$$

Эта поправка остается малой по сравнению с бесстолкновительной при условии:

$$\omega \tau_i \gg \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{3/2}.$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

Однако, электронную компоненту плазмы можно считать бесстолкновительной при более мягком условии:

$$\omega\tau_e \gg \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2}. \quad (\text{IV.228})$$

Анализируя (IV.227), можно прийти к ошибочному выводу, что при $T \rightarrow 0$ столкновительные поправки к ТЭИ стремятся к бесконечности. Формулы (IV.227) получены в предположении $T \gg \varepsilon_F$. При $T \sim \varepsilon_F$ начинается вырождение электронов, в результате которого прекращается обмен импульсами на нижних уровнях. Этот эффект описывает член типа $(1 - n_a)n_a$ в интеграле столкновений (IV.223). Для иллюстрации этого факта рассмотрим почти вырожденный газ электронов $\varepsilon_F/T \gg 1$. Тогда статистический множитель $(1 - n)n$ в (IV.223) имеет δ -образный характер, отличаясь от нуля лишь близи поверхности Ферми. Процедура вычисления подобных интегралов разработана Зоммерфельдом (см., например, [106]). В результате вычислений найдем столкновительную поправку к функции распределения электронов, обязанную электрон-электронным столкновениям:

$$\delta f'_e = -\frac{2^{1/2}e^4\Lambda m_e^2}{4\pi T^2} f_e^0(1 - f_e^0) \left(\varepsilon_F - \frac{mu_{\perp}^2}{2}\right) \int_0^u (s_{\perp}^2 - u_{\perp}^2) du', \quad (\text{IV.229})$$

где $\varepsilon_F = p_F^2/2m_e$, и соответствующую поправку к ТЭИ электронов:

$$\delta T_{\alpha\beta}^e = \frac{m_e^{5/2}\varepsilon_F^{3/2}T\Lambda e^4}{5\pi} \int_0^u (-g_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) du'. \quad (\text{IV.230})$$

При $T \rightarrow 0$ столкновительная поправка к ТЭИ стремится к нулю. Вырожденную электронную компоненту можно считать бесстолкновительной при выполнении условия:

$$\omega \gg \frac{m_e e^4 \Lambda T}{\varepsilon_F}. \quad (\text{IV.231})$$

С уменьшением температуры электронный газ становится более бесстолкновительным. Заметим, что при $\varepsilon_F/T \rightarrow 0$ столкновительная релаксация отсутствует и в случае анизотропной поверхности Ферми, например, для (IV.101).

IV.8 Действие плоских гравитационных волн на сильностолкновительную плазму

IV.8.1 Действие ПГВ на однокомпонентную жидкость

При выполнении условий, обратных рассмотренным в предыдущем разделе

$$\omega\tau_{eff} \ll 1, \quad (\text{IV.232})$$

столкновения частиц успевают поддерживать ЛТР в плазме. В этом случае интеграл столкновений становится главным членом в кинетических уравнениях, и поведение плазмы в поле ГВ описывается гидродинамическими уравнениями раздела III.1. Пользуясь этими уравнениями, нетрудно показать, что если до прихода ГВ плазма покоилась, то компоненты макроскопической скорости в плоскости фронта ГВ остаются равными нулю. В этом случае решения уравнений гидродинамики также стационарны $P = P(u)$; $\mathcal{E} = \mathcal{E}(u)$:

$$u_v = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\psi}; \quad u_u = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\psi}; \quad \psi = \psi(u). \quad (\text{IV.233})$$

Нетривиальные уравнения гидродинамики в метрике (IV.17) принимают вид [107]:

$$(\mathcal{E} + P)\psi' - P' = 0; \quad (\text{IV.234})$$

$$L^{-2}[L^2(\mathcal{E} + P)e^{-\psi}]' - P'e^{-\psi} = 0, \quad (\text{IV.235})$$

откуда сразу следует первый интеграл:

$$(\mathcal{E} + P)L^2e^{-2\psi} = (\mathcal{E} + P)_0 = \text{Const}. \quad (\text{IV.236})$$

Используя этот интеграл в (IV.234), получим уравнение ($x = \ln L^2$)

$$\frac{d}{dx}(\mathcal{E} - P) = -(\mathcal{E} + P). \quad (\text{IV.237})$$

При заданном уравнении состояния $P = P(\mathcal{E})$ уравнение (IV.237) решается в квадратурах, таким образом, уравнения гидродинамики в поле

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

ПГВ интегрируются точно [107]. Физическая компонента скорости плазмы, измеряемая синхронным наблюдателем, выражается через функцию $\psi(u)$:

$$v^1 = u^1/u^4 = \text{th } \psi. \quad (\text{IV.238})$$

Из (IV.233), (IV.236), (IV.237) следует, что взаимодействие жидкости с ПГВ существенно нелинейно по амплитуде ГВ, — в линейном по амплитуде ГВ жидкость не откликается на действие ПГВ. Это обстоятельство неоднократно отмечалось ранее (см., например, [109]).

Рассмотрим действие ПГВ на нерелятивистскую плазму, уравнение состояния которой имеет вид $\mathcal{E} = Nm + \frac{3}{2}P$. Плотность числа частиц определим из уравнения неразрывности:

$$N = N_0 e^\psi / L^2. \quad (\text{IV.239})$$

Интегрируя уравнение (IV.236), (IV.237), найдем [107]:

$$\frac{T^3}{\left(1 + \frac{5T}{2m}\right)^2} = \frac{T_0^3}{L^4 \left(1 + \frac{5T_0}{2m}\right)^2}; \quad N = \frac{N_0 \left(1 + \frac{5T}{2m}\right)}{L^2 \left(1 + \frac{5T_0}{2m}\right)},$$

$$v^1 = \frac{5(T - T_0)}{m} \cdot \frac{\left[1 + \frac{5}{4m}(T + T_0)\right]}{\left(1 + \frac{5T}{2m}\right)^2 + \left(1 + \frac{5T_0}{2m}\right)^2}, \quad (\text{IV.240})$$

где $T = P/N$ — температура плазмы. Для нерелятивистской плазмы $T/m \ll 1$. Разлагая по этому параметру выражения (IV.240), найдем [107]:

$$T = T_0 \cdot L^{-4/3}; \quad N = N_0 \cdot L^{-2}; \quad v^1 = \frac{5T_0}{m}(L^{-4/3} - 1). \quad (\text{IV.241})$$

После прохождения ГВ нерелятивистская плазма разогревается и движется в направлении распространения ГВ. При $L \ll 1$ формулы (IV.240) — (IV.241) становятся несправедливыми, поскольку при этом нарушается нерелятивистское уравнение состояния. Рассмотрим теперь баро-

IV.8. Действие ПГВ на сильностолкновительную плазму

тропическое уравнение состояния $\mathcal{E} = kP$ ($|k| \geq 1$). Уравнения (IV.236), (IV.237) при этом интегрируются элементарно:

$$P = \frac{P_0}{L \frac{2(k+1)}{k-1}}; \quad v^1 = \frac{1 - L \frac{4}{k-1}}{1 + L \frac{4}{k+1}}. \quad (\text{IV.242})$$

При $L \rightarrow 0$ давление плазмы стремится к бесконечности, скорость — к скорости света. В частности, для ультрарелятивистского уравнения состояния $\mathcal{E} = 3P$ ($k = 3$) получим из (IV.242):

$$P = \frac{P_0}{L^4}; \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{L^4}; \quad v^1 = \frac{1 - L^2}{1 + L^2}. \quad (\text{IV.243})$$

Для ультрарелятивистской плазмы с $\mu \rightarrow 0$ $P \sim T^4$, таким образом для такой плазмы [107]:

$$T = T_0/L. \quad (\text{IV.244})$$

Сравнение формул (IV.243) - (IV.244) с аналогичными выражениями для бесстолкновительного газа безмассовых частиц из раздела IV.2 показывает, что после прохождения фронта ГВ ($A = B = L^2$, $C = 0$) эти формулы совпадают. Этот любопытный факт можно усмотреть непосредственно из решения бесстолкновительного уравнения для безмассовых частиц в поле ГВ $f = f[\mathcal{E}_a(u, \mathbb{P})]$. Действительно, введем вектор макроскопической скорости согласно (IV.243) ($v^1 = u^1/u^4$):

$$u^1 = \frac{(1 - L^2)}{2L}; \quad u^4 = \frac{(1 + L^2)}{2L}.$$

Тогда величину $\mathcal{E}_a(u, \mathbb{P})$ после прохождения фронта ГВ можно записать в виде

$$\mathcal{E}_a(u, \mathbb{P}) = \frac{L}{T_0}(u, \mathbb{P}) + \frac{(1 - L^2)m_a^2}{2^{3/2}\mathbb{P}_v T_0},$$

откуда видно, что распределение безмассовых частиц после прохождения пакета ГВ становится равновесным с температурой (IV.244) и макроскопической скоростью (IV.243) [109].

Из (IV.242), а также (IV.237) следует, что указанные решения не пригодны в случае предельно жесткого уравнения состояния $\mathcal{E} = P$. Решение в этом случае становится существенно нестационарным [107].

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

Нетривиальные уравнения гидродинамики в этом случае можно записать в виде:

$$P(\ln L^2)' + \partial_v(Pe^{2\psi}) = 0, \quad (\text{IV.245})$$

$$\partial u \ln(L^2 Pe^{-2\psi}) = 0. \quad (\text{IV.246})$$

Из (IV.246) сразу следует интеграл:

$$PL^2 e^{-2\psi} = \varphi^2(v), \quad (\text{IV.247})$$

где $\varphi(v)$ — произвольная функция. Подставляя (IV.247) в (IV.245), получим линейное уравнение на величину $e^{2\psi}$, решая которое, найдем общее решение [108]:

$$e^{2\psi} = \frac{\xi(u) - (\ln L)' \int^v \varphi(v') dv'}{\varphi(v)}, \quad (\text{IV.248})$$

где $\xi(u)$ — произвольная функция. В отсутствие ГВ $\psi = 0$, поэтому $\xi(u)|_{u \leq 0} = \varphi(v)$. Отсюда следует, что

$$\xi(u) = \varphi(v) = 1,$$

поэтому решение уравнений гидродинамики, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, принимает вид:

$$e^{2\psi} = |1 - (\ln L)'v|; \quad P = L^{-2}|1 - (\ln L)'v|; \quad (\text{IV.249})$$

причем наложения знака модуля при $u > u_*$ объяснены в [108].

IV.8.2 Действие ПГВ на радиационно - доминированную плазму

Из (IV.241), (IV.243) следует, что газ безмассовых частиц эффективнее ускоряется ГВ, чем нерелятивистский газ. Если плазма состоит из двух взаимодействующих между собой компонент, безмассовой и массивной, последняя будет ускоряться в направлении распространения ГВ за счет взаимодействия с массивной компонентой. В [109] рассмотрено ускорение сильной ПГВ радиационно-доминированной плазмой, состоящей из холодных электронов и ионов и большого количества слабозаимодействующих фотонов. Показано, что фотоны эффективно ускоряют плазму за время, определенное из соотношения:

$$\sigma_T N_\gamma u_* T_\gamma / m_i \sim L^4(u),$$

где σ_T - томпсоновское сечение рассеяния.

IV.8.3 Действие ПГВ на плазму со скалярным взаимодействием частиц

Рассмотрение в рамках идеальной гидродинамики аналогичной задачи с учетом электромагнитного поля не имеет смысла, поскольку первоначально однородное, изотропное равновесное распределение возможно лишь при отсутствии электрического поля. Под действием ГВ в такой плазме не возникнут электрические токи вследствие изначальной электронейтральности плазмы и равенства макроскопических скоростей всех ее компонент. Однако, такая задача имеет смысл для плазмы с коротким взаимодействием частиц, поскольку в этом случае возможно невозмущенное состояние однородной изотропной плазмы одновременно заряженных частиц. Рассмотрим действие ПГВ на такую систему на примере плазмы с массивным скалярным взаимодействием частиц [110]. Поскольку метрика ПГВ (IV.17) является вакуумной самосогласованные уравнения движения плазмы в рамках гидродинамической модели (раздел III.1) принимают вид:

$$T_p^{ik}{}_{,k} - \sigma \Phi^{,i} = 0; \quad (\text{IV.250})$$

$$\Delta_2 \Phi + \mu^2 \Phi = -4\pi \epsilon_S \sigma, \quad (\text{IV.251})$$

где плотность скалярного заряда описывается формулой (II.44), $\epsilon_S = -1$ в случае отталкивания одноименно заряженных частиц, $\epsilon_S = +1$ в случае притяжения. ТЭИ скалярного поля на фоне вакуумной метрики имеет вид:

$$T_S^{ik} = \frac{\epsilon_S}{4\pi} \left[\Phi^{,i} \Phi^{,k} - \frac{1}{2} g^{ik} (\Phi^{,l} \Phi_{,l} - \mu^2 \Phi^2) \right], \quad (\text{IV.252})$$

Будем искать стационарные решения уравнений (IV.250), (IV.251), полагая все функции зависящими лишь от запаздывающего времени. Тогда уравнения (IV.250), (IV.251) принимают вид:

$$L^{-2} [L^2(P + \mathcal{E})]' + 2(P + \mathcal{E})\Psi' = 0; \quad (\text{IV.253})$$

$$L^{-2} [L^2(P + \mathcal{E})]' - 2p' - 2\sigma\Phi' = 0; \quad (\text{IV.254})$$

$$\mu^2 \Phi = -4\pi \epsilon_S \sigma. \quad (\text{IV.255})$$

Из (IV.253) находим интеграл (IV.236). С учетом этого интеграла и алгебраического уравнения (IV.255) система уравнений сводится к одному

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка, которое всегда решается в квадратурах, если известно уравнение состояния $\mathcal{E} = \mathcal{E}(P)$ и зависимость $\sigma = \sigma(P)$. Рассмотрим решение этого уравнения в частном случае, когда суммарное уравнение состояния плазмы является баротропным $\mathcal{E} = kP$, а скалярным зарядом обладают лишь нерелятивистские частицы, которые для краткости будут называться барионами. Для этих частиц из закона сохранения барионного тока найдем (см. (IV.239)):

$$N^+ - N^- = \delta N_0 e^\psi L^{-2},$$

где $\delta N_0 = N_0^+ - N_0^-$ - начальная концентрация. Для нерелятивистских частиц $T_p^\pm = m_* N^\pm$, поэтому

$$\sigma = q \delta N_0 e^\psi L^{-2} \operatorname{sgn}(m + q\Phi). \quad (\text{IV.256})$$

Предположим для определенности $\delta N_0 > 0$. Тогда из (IV.255) следует, что в случае $\epsilon_S = +1$ (притяжение) решение может принадлежать лишь к закрытому интервалу:

$$m \geq m + q\Phi \geq 0; \quad (\epsilon_S = +1), \quad (\text{IV.257})$$

а в случае $\epsilon_S = -1$ (отталкивание) - лишь двум открытым:

$$\begin{aligned} +\infty > m + q\Phi \geq m; \\ -\infty < m + q\Phi \leq 0; \quad (\epsilon_S = -1). \end{aligned} \quad (\text{IV.258})$$

В случае, когда $m + q\Phi \geq 0$, получим из (IV.253) - (IV.255) решение [110]:

$$\begin{aligned} e^\psi &= L^2 \left| \frac{k-1 + \epsilon_S \gamma^2}{L^2(k-1) + \epsilon_S \gamma^2} \right|^{\frac{k}{k-1}}; \\ P &= P_0 L^2 \left| \frac{k-1 + \epsilon_S \gamma^2}{L^2(k-1) + \epsilon_S \gamma^2} \right|^{\frac{2k}{k-1}}; \\ \Phi &= 4\pi \epsilon_S q \delta N_0 \left| \frac{k-1 + \epsilon_S \gamma^2}{L^2(k-1) + \epsilon_S \gamma^2} \right|, \end{aligned} \quad (\text{IV.259})$$

где

$$\gamma^2 = \frac{4\pi q^2 \delta N_0^2}{\mu^2 P_0}. \quad (\text{IV.260})$$

IV.8. Действие ПГВ на сильностолкновительную плазму

Нетрудно видеть, что эти выражения при $\gamma = 0$ переходят в выражения (IV.242) для нейтральной жидкости. В случае притяжения одноименно заряженных барионов вблизи координатной сингулярности $L = 0$ $\Psi \rightarrow 0$; $P \rightarrow 0$; $\Phi \rightarrow \text{Const}$. При этом скорость плазмы $v^1 = -1$ - плазма движется навстречу ГВ. Таким образом, при $\gamma \neq 0$ поведение заряженной жидкости разительно отличается от поведения нейтральной. Собственные числа суммарной ТЭИ равны:

$$\begin{aligned}\lambda_2 = \lambda_3 &= -P + \frac{\epsilon_S}{8\pi} \mu^2 \Phi^2; \\ \lambda_{1,4} &= \frac{1}{2}(k-1)P + \frac{\epsilon_S}{8\pi} \mu^2 \Phi^2 \pm \\ &\pm \left\{ \frac{(k+1)P_0}{2L^2} 2L^2 \left[\frac{e^{2\psi}}{2} (k+1)P + \frac{\epsilon_S}{4\pi} \Phi'^2 \right] \right\}^{1/2}\end{aligned}$$

В отсутствие ГВ:

$$\lambda_1 = -P_0 + \frac{\epsilon_S}{8\pi} \mu^2 \Phi_0^2; \quad \lambda_4 = \bar{\mathcal{E}} = kP + \frac{\epsilon_S}{8\pi} \mu^2 \Phi_0^2$$

- суммарное давление плазмы и скалярного поля изотропно. Вблизи координатной сингулярности $L = 0$ возникает анизотропия давления $P_1 > P_2 = P_3 = -\frac{\epsilon_S}{8\pi} \mu^2 \Phi^2$.

В случае отталкивания одноименно заряженных барионов возникает любопытная ситуация - реализуется физически сингулярное состояние вдали от координатной сингулярности: при $L^2(k-1) = \gamma^2$ $\Psi \rightarrow +\infty$, $P \rightarrow +\infty$, $\Phi \rightarrow +\infty$, скорость плазмы стремится к скорости света. Возникновение физической сингулярности вдали от координатной следует понимать как развитие неустойчивости в барионной плазме с отталкиванием одноименно заряженных частиц, спровоцированное ГВ.

В случае предельно жесткого уравнения состояния плазмы $\mathcal{E} = P$ и $\gamma^2 \neq 0$ в отличие от нейтральной жидкости существует стационарное решение, которое можно получить из (IV.259) переходом к пределу $k-1 \rightarrow +0$:

$$\begin{aligned}e^\Psi &= L^2 \exp \left[\frac{\epsilon_S(1-L^2)}{\gamma^2} \right]; \\ P &= P_0 L^2 \exp \left[\frac{2\epsilon_S(1-L^2)}{\gamma^2} \right]; \\ \Phi &= -4\pi\epsilon_S \delta N_0 \exp \left[\frac{\epsilon_S(1-L^2)}{\gamma^2} \right].\end{aligned}$$

При $\gamma^2 \neq 0$ эти величины конечны при любых конечных L .

IV.9 Влияние границ на движение плазмы в поле плоской гравитационной волны

В [94] решена задача о резонансной генерации плазменных колебаний плоской гравитационной волной в неограниченной однородной анизотропной плазме. В реальных лабораторных ситуациях плазмоподобная среда ограничена стенками, на которых происходит отражение частиц плазмы. В связи с этим необходимо исследовать влияние границ на движение плазмы под действием ГВ. При этом мы сталкиваемся с проблемой задания границ в поле ПГВ. Действительно, поверхности $x^2 = \text{Const}$, $x^3 = \text{Const}$, $x^1 = \text{Const}$ являются поверхностями геодезическими в метрике (IV.17) трубки. Объем такого геодезического «куба» вдоль волнового вектора ГВ меняется пропорционально L^2 . Реальные границы плазмы не могут образовываться геодезическими, так как в этом случае они не смогут удержать плазму. Для того, чтобы задать реальные границы плазмы, необходимо знать динамику этих границ в поле ПГВ, в частности, динамику твердого тела. При этом мы рискуем оказаться в области, имеющей крайне ненадежный фундамент. Тем не менее, можно корректно поставить частную краевую задачу, когда плазма является ограниченной или полуограниченной по координате x^1 . Действительно, геодезические линии $x^1 = \text{Const}$ определяют параллельные плоскости, расстояние между которыми не изменяется под действием гравитационной волны, таким образом, границы плазмы $x^1 = \text{Const}$ являются жесткими границами. Эти жесткие границы могут быть созданы из вещества с нерелятивистским уравнением состояния $P/\mathcal{E} \rightarrow 0$. Действительно, из результатов предыдущих разделов следует, что при $P/\mathcal{E} \rightarrow 0$ среда не увлекается ГВ в направлении распространения последней. Следовательно, граница такого вещества сохраняет своим уравнение $x^1 = \text{Const}$. Такие плоские границы могут быть образованы, например, кристаллической решеткой, в узлах которой находятся тяжелые ионы.

IV.9. Влияние границ на движение плазмы в поле ПГВ

IV.9.1 Задача с граничными условиями для плазмы с предельно жестким уравнением состояния

Рассмотрим сначала точно решаемую задачу с граничными условиями на примере полуограниченной идеальной жидкости с предельно жестким уравнением состояния [108]. Соответствующие независимые уравнения гидродинамики имеют вид:

$$P\partial u(\ln L^2) + \partial v(Pe^{2\psi}) + f_u = 0; \quad (\text{IV.261})$$

$$L^{-2}\partial u(L^2Pe^{-2\psi}) + f_v = 0, \quad (\text{IV.262})$$

где f_i - внешняя сила, удерживающая плазму на границе $x^1 = \text{Const}$. Если вещество заключено между плоскостями $x^1 = 0$ и $x^1 = l$, удерживающую силу можно задать в виде:

$$f_i = P\partial_i[U_+(v-u) + U_-(v-u-\sqrt{2}l)].$$

Рассмотрим падение ГВ на полуограниченную плазму $x^1 \geq 0$. В отсутствие ГВ ($u \leq 0$) статическое решение (IV.261) — (IV.262) имеет вид

$$\psi = 0; \quad P = P_0U_+(v-u) \equiv P_0U_+(x^1).$$

Решение (IV.261) — (IV.262) при наличии ГВ будем искать в виде

$$P(u, v) = \pi(u, v)U_+(v-u), \quad (\text{IV.263})$$

где $\pi(u, v)$ - функция, не имеющая разрывов на поверхности $x^1 = 0$. Начальные условия имеют вид:

$$\pi(u, v)|_{u \leq 0} = P_0; \quad \psi(u, v)|_{n \leq 0} = 0. \quad (\text{IV.264})$$

Подставляя (IV.263) в (IV.261), приведем эти уравнения к виду

$$U_+(v-u)\partial u \ln(\pi L^2 e^{-2\psi}) + \delta_+(v-u) = e^{2\psi}\delta_+(v-u); \quad (\text{IV.265})$$

$$U_+(v-u)[\pi\partial u \ln L^2 + \partial v \pi e^{2\psi}] + e^{2\psi}\pi\delta_+(v-u) = \pi\delta_+(v-u), (\text{IV.266})$$

Приравнявая коэффициенты при δ - функциях, получим граничное условие:

$$\psi(v, v) \equiv \psi(x=0, t) = 0, \quad (\text{IV.267})$$

которое означает, что жидкость на границе покоится во все времена. Вследствие определения ступенчатой функции $U_+(x)$ уравнения (IV.265),

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

(IV.266) в области $x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v-u) \leq 0$ обращаются в тривиальные тождества $0 = 0$ при любых ψ и π . В области $x^1 > 0$ эти уравнения совпадают с (IV.245), (IV.246) и имеют своим решением (IV.247), (IV.248). Это общее решение должно удовлетворять начальным и граничным условиям (IV.264), (IV.267). Учитывая (IV.267), получим $\xi(u) = \varphi(u)$, а используя (IV.264): $\varphi^2(v) = P_0 = \text{Const}$. Таким образом, найдем точное решение задачи о движении полуограниченной идеальной жидкости в поле ГВ:

$$P = \frac{P_0 U_+(v-u)}{L^2(u)} |1 - (\ln L)'(v-u)|; \quad (\text{IV.268})$$

$$V^1 = \frac{|1 - (\ln L)'(v-u)| - 1}{|1 - (\ln L)'(v-u)| + 1}.$$

Давление на границе меняется по закону $P(0, t) = P_0 L^{-2}(t)$ - растет в течение времени

$t \leq t_* = \sqrt{2}u_*$, а затем монотонно падает до нуля. При $v \gg u > 0$ решение (IV.268) стремится к решению задачи Коши для неограниченной жидкости (IV.249).

Аналогично можно рассмотреть и другую, более интересную ситуацию, когда жидкость расположена в левом полупространстве $x^1 < 0$, т.е. волна набегает на стенку, в этом случае в выражении для внешней силы необходимо удержать член $U_-(v-u) = U_+(u-v)$. ГВ достигает стенки при $t = 0$. До этого времени наличие стенки не должно сказываться на поведении жидкости внутри пакета ГВ, поэтому при $t < 0$ решение уравнений (IV.261) - (IV.262), должно совпадать с решением задачи Коши. При $u > 0$ жидкость почувствует реакцию стенки лишь в областях, определяемых неравенством $-x^1 \leq t$, т.е. $v \geq 0$. Поэтому на изотропной поверхности $v = 0$ решение Коши (IV.249) должно быть сшито с общим решением (IV.247), (IV.248). Такая сшивка приводит к интегральному уравнению на функцию $y(u) = \varphi(u)/\varphi(0)$:

$$y(u) + (\ln L)' \int_0^u y(u') du' = 1,$$

для решения которого положим

$$Z(u) = \int_0^u y(u') du'.$$

IV.9. Влияние границ на движение плазмы в поле ПГВ

тогда

$$Z' + Z(\ln L)' = 1; \quad Z(0) = 0.$$

Решая это уравнение, найдем:

$$Z(u) = L^{-1}(u) \int_0^u L(u') du',$$

$$y(u) = 1 - [\ln L(u)]' Z(u).$$

таким образом, найдем решение задачи с граничным условием:

$$e^{2\psi} = \frac{1 - L^{-1}(v) [\ln L(u)]' \int_0^v L(v') dv'}{1 - L^{-1}(v) [\ln L(v)]' \int_0^v L(v') dv'},$$

$$P = \frac{P_0 U_+(u-v)}{L^2(u)} |e^{2\psi}(u,v)| \left[1 - \frac{[\ln L(v)]'}{L(v)} \int_0^v L(v') dv' \right]^2. \quad (\text{IV.269})$$

Данное решение пригодно во всех областях изменения переменных u и v . Решение (IV.269) содержит две сингулярности, возникающие как при $u = u_*$, так и при $v = v_*$. Вторая сингулярность соответствует волне сжатия, отраженной от стенки. На границе ($u = v$) давление растет по закону $P = P_0 L^{-6}(t)$. Наличие двух отражающих стенок приводит к появлению сложной картины, состоящей из наложения многократно отраженных волн.

IV.9.2 Граничная задача для бесстолкновительной анизотропной плазмы

Перейдем к решению такой задачи для бесстолкновительной анизотропной плазмы в поле слабой ГВ [111], причем анизотропию плазмы будем также считать слабой:

$$f_0(p) = f_0(p^2 + \gamma_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta),$$

причем $\delta p \gamma = 0$. Направим одну из главных осей матрицы γ , x^1 , нормально к границам, уравнения которых зададим в виде

$$x = 0; \quad x = l. \quad (\text{IV.270})$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

Линеаризованное кинетическое уравнение для бесстолкновительной плазмы в поле ГВ с поляризацией e_+ имеет вид:

$$p^i \frac{\partial \delta f}{\partial x^i} = \frac{ikh_+}{2} (p_2^2 - p_3^2) \frac{\partial f_0}{\partial p_1} - e F_{\alpha k} p^k \frac{\partial f_0}{\partial p^\alpha}. \quad (\text{IV.271})$$

Из (IV.271) следует, что $\delta f = \psi(x, t, p_1, p_2^2, p_3^2)$, тогда из всех компонент тензора Максвелла отлична от нуля лишь продольная составляющая $F_{41} = E(x, t)$, которая определяется из единственного нетривиального уравнения Максвелла:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -4\pi j^1(x, t). \quad (\text{IV.272})$$

Вследствие зеркального отражения частиц на границах функция распределения должна быть на этих границах четной функцией p_1 [123]. Поскольку $f_0(\vec{p})$ автоматически удовлетворяет этому условию, получим граничные условия на δf :

$$\delta f(p_1) = \delta f(-p_1), \quad \text{при } x = 0; x = l. \quad (\text{IV.273})$$

Для решения (IV.271) с граничными условиями (IV.273) представим возмущения в виде:

$$\delta f = \delta f^{(0)} + \delta f^{(1)} + \delta f^{(2)}; \quad E = E_0 + E_1, \quad (\text{IV.274})$$

где $\delta f^{(0)}$ и E_0 - решения для безграничной плазмы (см. раздел ??), $\delta f^{(1)}$ - решение однородного кинетического уравнения:

$$p^1 \frac{\partial \delta f^{(1)}}{\partial x^1} + p^4 \frac{\partial \delta f^{(1)}}{\partial t} = 0, \quad (\text{IV.275})$$

причем такое, что $\delta f^{(0)} + \delta f^{(1)}$ удовлетворяет граничным условиям (IV.273), и, наконец, $\delta f^{(2)}$ - решение уравнения

$$p^i \frac{\partial \delta f^{(2)}}{\partial x^i} - e E_1 p^4 \frac{\partial \delta f_0}{\partial p^1} = 0, \quad (\text{IV.276})$$

где E_1 определяется из решения (IV.272) с суммарным током $j^{1(1)} + j^{1(2)}$. Используя стандартную процедуру, запишем асимптотическое при больших временах решение (IV.275):

IV.9. Влияние границ на движение плазмы в поле ПГВ

$$\begin{aligned}
\delta f_{t \rightarrow \infty}^{(1)} &= -2\Psi(p)|p_1| \exp[i(\omega t + zx)] \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ U_+(p^1) U_+ \left(t - \frac{x}{v} \right) - \right. \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-iz(|v|)2nl] U_+ \left(t - \frac{x}{v} - \frac{2nl}{|v|} \right) + \\
&+ \left. \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-iz(|v|)(2n+1)l + kl] U_+ \left(t - \frac{x}{v} - \frac{2n+1}{|v|}l - l \right) \right\} = \\
&= -2\Psi(P)|p^1| \exp[i(\omega t + zx)] \left\{ U_+(p^1) + \frac{e^{ikl} - e^{-iz(|v|)l}}{2i \sin[z(|v|)l]} \right\}, \quad (\text{IV.277})
\end{aligned}$$

где $z(v) = -\frac{\omega - i\epsilon}{v}$,

$$\begin{aligned}
\Psi(p) &= \frac{1}{2p^1} [\delta f^{(0)}(p^1) - \delta f^{(0)}(-p^1)] \exp[-i\omega(t-x)] = \\
&= \left[-h_+(p_2^2 - p_3^2) + \frac{2ie^0 E_0 p^4}{\omega} \right] \frac{p^4}{m^2 + p_\perp^2} \frac{df_0}{d\varepsilon}. \quad (\text{IV.278})
\end{aligned}$$

Вычисляя асимптотическое значение плотности тока относительно (IV.277), получим для нерелятивистской плазмы:

$$j_\infty^{1(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{i(\omega t + zx)} \bar{\Phi}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (\text{IV.279})$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}(z) &= -\frac{e\pi}{m^2} \left[h_+(\gamma_{22} - \gamma_{33}) \bar{f}_0^0 \left(\frac{\omega^2 m^2}{z^2} \right) + \frac{4i^0 E_0 m}{\omega} f_0^0 \left(\frac{\omega^2 m^2}{z^2} \right) \right] \times \\
&\times \left[U_+(z) + (e^{-kl} - e^{-i||z|l}) \frac{\mathcal{P}}{2i \sin(|z|)l} \right] \frac{\omega^3 m^3}{z^3 |z|}; \\
\Phi_n &= -\frac{e\pi}{m^2} \left[h_+(\gamma_{22} - \gamma_{33}) \bar{f}_0^0(p_n^2) + \frac{4i^0 E_0 m}{\omega} f_0^0(p_n^2) \right] [e^{-ikl} - (-1)^n] \frac{ip_n}{n^3}; \\
\bar{f}_0^0 &= \int_x^\infty (x') dx'; \quad f_0^0(\bar{p}) = f_{\gamma \rightarrow 0}^0(\bar{p}) = f_0(p^2); \quad p_n = \frac{\omega m l}{\pi n}; \quad (\text{IV.280})
\end{aligned}$$

Глава IV. Кинетика плазмы в гравитационной волне

Интегрируя (IV.276) с учетом граничных условий (IV.273), получим:

$$\delta f^{(2)} = 2e \int \frac{dz e^{izx} \tilde{E}_1(z)}{i(\omega - zv)} \frac{df_0}{d\mathcal{E}} p_1, \quad (\text{IV.281})$$

где $\tilde{E}_1(z)$ - Фурье-образ функции $\tilde{E}_1(x)$, являющейся аналитическим продолжением функции $E_1(x)$ на всю вещественную ось:

$$\tilde{E}_1(x) = E_1(x); \quad \tilde{E}_1(x + nl) = -\tilde{E}_1(-x + nl) \text{ при } x \in [0, l].$$

Вычисляя $j^{1(2)}$ относительно распределения (IV.281) и подставляя Фурье-образ полного тока $j^{1(1)} + j^{1(2)}$ в Фурье-образ уравнения Максвелла (IV.272), получим:

$$\omega \mathcal{E}_{\parallel}(\omega, z) \tilde{E}_1(z) = 4\pi j_{\infty}^1(z), \quad (\text{IV.282})$$

где \mathcal{E}_{\parallel} - продольная диэлектрическая проницаемость плазмы, а $j_{\infty}^1(z)$ - Фурье-образ тока (IV.279), который равен:

$$j_{\infty}^{1(1)}(z) = \bar{\Phi}(z) + \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \delta\left(\frac{\pi n}{l} - |z|\right). \quad (\text{IV.283})$$

Тем самым задача о колебаниях ограниченной анизотропной плазмы формально решена. В качестве конкретного примера рассмотрим вырожденную плазму, для которой

$$f_0^0(p^2) = \frac{(p_F^2 - p^2)}{4\pi^2} U_+(p_F - p);$$

$$\bar{f}_0^0(p^2) = \frac{1}{8\pi^4} U_+(p_F - p).$$

Из предыдущих формул видно, что при $p_F = p_n$ в плазме возникает резонанс, и ток $j_{\infty}^{1(1)}$ логарифмически расходится. Вводя в правую часть кинетического уравнения малый модельный интеграл столкновений, получим в условиях резонанса

$$\omega = \frac{\pi n p_F}{ml} \quad (\text{IV.284})$$

асимптотическое выражение для резонирующей гармоники тока:

$$j_{\infty}^{1(1)}(n) = \frac{eN_e p_F^2}{n^3 m_e^2} \ln(\omega \tau_{eff}) h_+(\gamma_{22} - \gamma_{33}) e^{i\omega t} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \quad (\text{IV.285})$$

Формула (IV.285) описывает незатухающие стоячие колебания. Этого значения плотность тока достигает за время $t \gg \tau_{eff}$. В отличие от безграничной плазмы резонанс в ограниченной плазме возможен на частотах, гораздо меньше плазменной.

Глава V

Гравимагнитные ударные волны

V.1 Условия вмороженности в плазму магнитного поля

В предыдущей главе методами релятивистской кинетической теории исследовалось действие ПГВ на плазмоподобные среды в приближении, когда обратным влиянием среды на ПГВ можно пренебречь:

$$\varepsilon \ll \omega^2, \quad (\text{V.1})$$

где ω - характерная частота ПГВ, ε - плотность энергии среды ($G = \hbar = c = 1$). В цитированных в этой главе работах обнаружен ряд интересных эффектов, заключающихся в индуцировании ПГВ в плазме продольных электрических колебаний. Несмотря на строгость полученных в [82], [83], [84], [94], [97] результатов, обнаруженные в этих работах эффекты имеют весьма слабое отношение к реальной проблеме детектирования. Более того, указанные расчеты показывают бесперспективность детекторов ГВ, основанных на динамическом возбуждении электрических колебаний гравитационным излучением. Это вызвано двумя обстоятельствами: малым отношением констант гравитационного и электромагнитного взаимодействий ($m^2 G/e^2 = 10^{-43}$) и малым релятивистским фактором стандартных плазмоподобных систем. Коэффици-

ент трансформации энергии ГВ в плазменные колебания пропорционален произведению этих факторов.

Ситуация, однако, может радикально измениться, если в плазме присутствуют сильные электрические или магнитные поля. В [97] исследовано индуцирование ПГВ поверхностного тока на границе «металл-вакуум» и показано, что величина индуцируемых токов может представлять экспериментальный интерес. В [84] на основе релятивистских кинетических уравнений получена система уравнений магнитной гидродинамики, описывающая в дрейфовом приближении движение бесстолкновительной магнитоактивной плазмы в поле ПГВ произвольной амплитуды и показано, что при условии поперечного распространения ПГВ в плазме возникает дрейф в направлении распространения ПГВ. Полученная в [84] система уравнений достаточно сложна и громоздка: это система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В [98], однако, показано, что при условии изначальной электронейтральности плазмы и ее однородности решение указанной системы уравнений строго стационарно, т.е., зависит лишь от запаздывающего времени. Это обстоятельство позволяет существенно упростить задачу и найти ее точное решение, обладающее рядом замечательных особенностей [112, 113]. Указанная система уравнений получается в так называемом *дрейфовом приближении*, т.е., в первом приближении по малому параметру ξ :

$$\xi = \frac{\omega}{\omega_B} \ll 1, \quad (V.2)$$

где $\omega_B = eH/m_e c$ - ларморовская частота. Однако уравнения, полученные в [84], применимы лишь в случае *строго* поперечного распространения ПГВ, когда первоначальное магнитное поле перпендикулярно направлению распространения гравитационной волны. Нетрудно проверить, что при нарушении условия строгой поперечности распространения ПГВ уравнения [84] нарушают законы сохранения энергии - импульса. Для наших же целей необходимо рассмотреть более общий случай, поэтому ниже мы получим уравнения магнитной гидродинамики на основе других, более общих, принципов.

Нетрудно убедиться, что следствием уравнений магнитной гидродинамики [84] является замороженность магнитного поля в плазму, что отражает общий характер поведения магнитоактивной плазмы при выполнении условия (V.2). Поэтому для описания движения плазмы в дрейфовом приближении проще сразу потребовать выполнения условий замороженности в плазму магнитного поля.

V.1. Условия вмороженности в плазму магнитного поля

Математически это требование означает совпадение собственных времениподобных векторов тензора энергии-импульса (ТЭИ) плазмы, T_{ik}^p , и тензора энергии-импульса электромагнитного поля, T_{ik}^f , т.е., по Сингу [41] - совпадение динамических скоростей плазмы и электромагнитного поля, -

$$T_k^i u^k = \varepsilon_p u^i, \quad (\text{V.3})$$

$$T_k^i u^k = \varepsilon_H u^i, \quad (\text{V.4})$$

причем

$$(u, u) \stackrel{Def}{=} g_{ik} u^i u^k = 1. \quad (\text{V.5})$$

В качестве ТЭИ плазмы сначала рассмотрим ТЭИ *идеальной изотропной жидкости*

$$T^{ik} = (\varepsilon + p)v^i v^k - pg^{ik}, \quad (\text{V.6})$$

где

$$(v, v) = 1, \quad (\text{V.7})$$

а ε, p - плотность энергии и давление жидкости, связанные некоторым уравнением состояния

$$p = p(\varepsilon). \quad (\text{V.8})$$

Таким образом, v^i является собственным времениподобным вектором ТЭИ плазмы ($v^i = u^i$), а ε - собственным значением T^{ik} ($\varepsilon_p = \varepsilon$), и остаются условия (V.4):

$$T_k^i v^k = \varepsilon_H v^i. \quad (\text{V.9})$$

Условия (V.9) и являются, таким образом, условиями *вмороженности магнитного поля в плазму*. Нашей задачей является выяснение всех ограничений, налагаемых этими условиями на тензор Максвелла F_{ik} .

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

С помощью вектора скорости плазмы v^i введем векторы *напряженности электрического* E_i и *магнитного* H_i поля, наблюдаемые в системе отсчета (СО), сопутствующей плазме [55]:

$$E_i = v^k F_{ki}; \quad H_i = v^k F_{ki}^*, \quad (\text{V.10})$$

где F_{ki}^* - тензор, дуальный к косимметрическому тензору Максвелла F_{ki} , -

$$F_{ki}^* = \frac{1}{2} \eta_{kilm} F^{lm}, \quad (\text{V.11})$$

а η_{kilm} - ковариантно постоянный *дискриминантный тензор* (см., например, [41]), удовлетворяющий тождеству:

$$\eta_{iklm} \eta^{iqps} = -\delta_{klm}^{qps} \stackrel{Df}{=} - \begin{vmatrix} \delta_k^q & \delta_l^q & \delta_m^q \\ \delta_k^p & \delta_l^p & \delta_m^p \\ \delta_k^s & \delta_l^s & \delta_m^s \end{vmatrix}. \quad (\text{V.12})$$

Вследствие (V.10) векторы E и H пространственноподобны и ортогональны вектору скорости:

$$(v, E) = 0; \quad (v, H) = 0. \quad (\text{V.13})$$

Соотношения (V.10) можно разрешить относительно тензора Максвелла [55]:

$$\begin{aligned} F_{ik} &= v_i E_k - v_k E_i - \eta_{iklm} v^l H^m; \\ F_{ik}^* &= v_i H_k - v_k H_i + \eta_{iklm} v^l E^m. \end{aligned} \quad (\text{V.14})$$

Представим ТЭИ электромагнитного поля

$$T_k^i = \frac{1}{4\pi} (F_l^i F^l_k + \frac{1}{4} \delta_k^i F^{lm} F_{lm}) \quad (\text{V.15})$$

через тройку векторов $(v; E; H)$, один из которых, (v) , - времениподобен, а два других, $(E$ и $H)$, пространственноподобны:

$$\begin{aligned} T_k^i &= -\frac{1}{8\pi} \left[\delta_k^i (E^2 + H^2) - 2v^i v^k (E^2 + H^2) + \right. \\ &\quad \left. + 2E^i E_k + 2H^i H_k + 2v^i \eta_{kpqs} E^p v^q H^s + 2v^k \eta^{ipqs} E_p v_q H_s \right], \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

V.1. Условия вмороженности в плазму магнитного поля

где введены обозначения:

$$E^2 \stackrel{Df}{=} -(E, E); \quad H^2 \stackrel{Df}{=} -(H, H). \quad (\text{V.17})$$

Потребуем, чтобы вектор v являлся собственным вектором ТЭИ (V.16). Сворачивая (V.16) с v^k и учитывая тождества (V.12), (V.13), получим:

$$\frac{1}{8\pi} [v^i (E^2 + H^2) - 2\eta^{ipqs} E_p v_q H_s] = \varepsilon_H v^i. \quad (\text{V.18})$$

Из (V.18) найдем необходимое условие того, чтобы v^i являлся собственным вектором ТЭИ электромагнитного поля:

$$\eta^{ipqs} E_p v_q H_s = \lambda v^i, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (\text{V.19})$$

Сворачивая это соотношение с v^i , получим $\lambda = 0$. Таким образом необходимое условие совместности (V.3) и (V.4) есть:

$$\eta^{ipqs} E_p v_q H_s = 0. \quad (\text{V.20})$$

Необходимым и достаточным условием выполнения (V.20) является, как известно, компланарность векторов E, H, v , т.е.,:

$$\alpha v_i + \beta E_i + \gamma H_i = 0.$$

Сворачивая это соотношение с v^i , получим вследствие (V.7) и (V.13) $\alpha = 0$, откуда получаем необходимое и достаточное условие выполнения (V.20):

$$\beta E_i + \gamma H_i = 0.$$

Поскольку мы рассматриваем *магнитоактивную плазму*, в дальнейшем будем полагать:

$$F_{ik} F^{ik} \equiv 2(H^2 - E^2) > 0. \quad (\text{V.21})$$

Вследствие (V.21) необходимым и достаточным условием выполнения (V.20) является:

$$E_i = \lambda H_i; \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{V.22})$$

При этом согласно ((V.18)

$$\varepsilon_H = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}. \quad (\text{V.23})$$

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

Однако, мы извлекли еще не всю алгебраическую информацию, содержащуюся в (V.3) и (V.4). Учтем определение векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} (V.10), - тогда соотношения (V.22) могут быть записаны в форме:

$$\mathcal{F}_{ik}v^k = 0, \quad (\text{V.24})$$

где введен новый кососимметрический тензор \mathcal{F}_{ik} :

$$\mathcal{F}_{ik} = F_{ik} - \lambda F_{ik}^*. \quad (\text{V.25})$$

Соотношения (V.24) можно рассматривать как систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно вектора скорости v^i . Необходимым и достаточным условием нетривиальной совместности этих уравнений является:

$$\text{Det}\|\mathcal{F}_{ik}\| = 0. \quad (\text{V.26})$$

Поскольку $\|\mathcal{F}_{ik}\|$ - антисимметрическая матрица *четного порядка*, -

$$\text{Det}\|\mathcal{F}_{ik}\| = \frac{1}{16}(\sqrt{-g}\mathcal{F}^{ik} \mathcal{F}_{ik}^*)^2. \quad (\text{V.27})$$

Поэтому условие (V.26) сводится к следующему:

$$\eta^{ijkl}\mathcal{F}_{ij}\mathcal{F}_{kl} = 0, - \quad (\text{V.28})$$

при этом

$$\text{rank}\|\mathcal{F}_{ik}\| = 2, \quad (\text{V.29})$$

т.е., система (V.24) допускает два линейно независимые решения для собственного вектора v^i .

Подставляя в (V.28) выражения F_{ik} и F_{ik}^* из (V.14), получим:

$$\eta^{ijkl}\mathcal{F}_{ij}\mathcal{F}_{kl} = 4\lambda(1 + \lambda^2)H^2 = 0,$$

откуда следует единственно возможное решение при условии (V.21):

$$\lambda = 0.$$

Таким образом приходим к следующему строгому выводу:

V.1. Условия вмороженности в плазму магнитного поля

Для того, чтобы ТЭИ электромагнитного поля (V.15) при условии (V.21) допускал в качестве собственного вектор динамической скорости изотропной идеальной жидкости, необходимо и достаточно, чтобы вектор напряженности электрического поля в сопутствующей СО был равен нулю:

$$E_i = 0. \quad (V.30)$$

При этом условия (V.23)-(V.29) дают:

$$F^{ik} F_{ik} = 0; \quad (V.31)$$

$$Det\|F_{ik}\| = 0 \implies rank\|F_{ik}\| = 2, \quad (V.32)$$

а собственный вектор ТЭИ жидкости должен удовлетворять системе однородных алгебраических уравнений:

$$F_{ik} v^k = 0. \quad (V.33)$$

Отметим, что при выполнении (V.32) автоматически выполняются аналогичные условия и для дуального тензора Максвелла:

$$Det\|F_{ik}^*\| = 0 \implies rank\|F_{ik}^*\| = 2. \quad (V.34)$$

С учетом (V.30) запишем тензор Максвелла и ТЭИ электромагнитного поля (V.15):

$$F_{ik} = -\eta_{iklm} v^l H^m, \quad (V.35)$$

$$F_{ik}^* = v_i H_k - v_k H_i;$$

$$T_{ik}^f = \frac{1}{8\pi} (2H^2 v^i v_k - 2H^i H_k - \delta_k^i H^2). \quad (V.36)$$

Отметим, что вследствие (V.35) выполняется более жесткое, чем (V.31), условие:

$$F_{ik}^* F^{lk} = 0. \quad (V.37)$$

Суммарный ТЭИ магнитоактивной плазмы

$$T_{ik} = T_{ik}^p + T_{ik}^f$$

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

принимает вид:

$$T_{ik} = (\mathcal{E} + P)v_i v_k - P g_{ik} - 2P_H n_i n_k, \quad (\text{V.38})$$

где

$$P_H = \frac{H^2}{8\pi}; \quad \mathcal{E} = \varepsilon + \varepsilon_H; \quad P = p + P_H, \quad (\text{V.39})$$

P, \mathcal{E} - суммарные давление и плотность энергии магнитоактивной плазмы, а

$$n_i = \frac{H_i}{H} - \quad (\text{V.40})$$

единичный пространственноподобный вектор направления магнитного поля:

$$(n, n) = -1, \quad (\text{V.41})$$

причем

$$(n, v) = 0. \quad (\text{V.42})$$

V.2 Уравнения релятивистской магнитной гидродинамики плазмы в гравитационном поле

Уравнения *релятивистской магнитной гидродинамики плазмы*¹ получаются из требования равенства нулю дивергенции суммарного ТЭИ магнитоактивной плазмы (V.38) и добавлением к полученным уравнениям первой группы уравнений Максвелла:

$$T^k_{i,k} = 0, \quad (\text{V.43})$$

$$F^{ik}_{*,k} = 0. \quad (\text{V.44})$$

Эта система уравнений с учетом уравнения состояния (V.8), определения ТЭИ плазмы (V.38) и алгебраических соотношений (V.7), (V.13), (V.14), (V.30), (V.35), (V.38) полностью описывает самосогласованное

¹В дальнейшем - РМГД

V.2. Уравнения релятивистской МГД плазмы в гравитационном поле

движение магнитоактивной плазмы и замороженного в нее магнитного поля в заданном гравитационном поле. Действительно (V.43), (V.44) представляет систему 8-ми дифференциальных уравнений относительно 10-ти величин ε, p, H^i, v^i , однако, уравнение состояния (V.8), нормировка вектора скорости (V.7), условия ортогональности (V.13) а также (V.30) доводят число уравнений до 12. Оказывается, тем не менее, что не все из этих соотношений независимы, в чем мы убедимся ниже.

Для вывода уравнений магнитной гидродинамики учтем известное соотношение (см., например, [46]):

$$T^k_{i,k} = -\frac{1}{4\pi} F_{il} F^{kl}. \quad (\text{V.45})$$

Таким образом, уравнения (V.43) можно представить в виде:

$$F_{ik} \Phi^k = \tau_i, \quad (\text{V.46})$$

где

$$\Phi^k \stackrel{Df}{=} F^{kl}_{,l}; \quad (\text{V.47})$$

$$\tau_i \stackrel{Df}{=} -4\pi T^k_{i,k}. \quad (\text{V.48})$$

Уравнения (V.43) можно рассматривать как систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно Φ^k . Если $\text{Det}\|F_{ik}\| \neq 0$, эти уравнения элементарно решаются:

$$\Phi^k = \frac{\mathcal{A}^k \|F; \tau\|}{\text{Det}\|F\|}, \quad (\text{V.49})$$

где $\mathcal{A}^k \|F; \tau\|$ - алгебраическое дополнение расширенной матрицы системы (V.46). В частности в пустоте ($\tau_i = 0$) получаем тривиальное решение: $\Phi^k = 0$, и система (V.43), (V.44) сводится к уравнениям Максвелла в пустоте.

Поставим задачу разрешения системы уравнений (V.46) относительно Φ^k , т.е, задачу приведения уравнений (V.43), (V.44) к виду уравнений Максвелла при *минимальных требованиях на инварианты электромагнитного поля*:

$$F^{ik} F_{ik}^* = 0, \quad (\text{V.50})$$

$$F_{ik} F^{ik} > 0. \quad (\text{V.51})$$

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

Существование *положительного* инварианта (V.51) означает, что можно выбрать локальную СО, в которой отсутствует электрическое поле [46].

При выполнении (V.50), как мы видели в предыдущем n^o (V.32),-

$$\text{Det}\|F\| = 0 \implies \quad (\text{V.52})$$

$$\text{rank}\|F\| = 2. \quad (\text{V.53})$$

Таким образом для совместности алгебраической системы уравнений (V.46) при условии (V.50) *необходимо и достаточно*, чтобы:

$$\text{rank}\|F; \tau\| = 2. \quad (\text{V.54})$$

Вычисляя все миноры 3-го порядка расширенной матрицы $\|F; \tau\|$ с учетом (V.50), получим условие, эквивалентное (V.54):

$$F_{ik}^* \tau_k = 0 \iff \text{rank}\|F; \tau\| = 2. \quad (\text{V.55})$$

Для решения системы (V.46) рассмотрим собственные векторы матрицы $\|F_{ik}\|$:

$$F_{ik} u^k = \lambda u_i. \quad (\text{V.56})$$

Вследствие кососимметричности F_{ik} из (V.56) следует, что либо $\lambda = 0$, либо u - изотропный вектор. Можно показать, что при выполнении (V.50),(V.51) вектор u не может быть изотропным вектором, таким образом *тензор Максвелла допускает лишь неизотропные собственные векторы с равными нулю собственными значениями*:

$$F_{ik} u^k = 0. \quad (\text{V.57})$$

Вследствие (V.50),(V.52),(V.53) это собственное значение двукратно вырождено, но тогда по известной теореме алгебры ему отвечают два линейно независимых собственных вектора $u_{(1)}$ и $u_{(2)}$.

При условии (V.51) всегда можно выбрать локальную СО, в которой $F_{i4} = 0$; в этой СО всегда существует собственный вектор тензора Максвелла $u^k = \delta_4^k$, поэтому один из собственных векторов матрицы $\|F\|$, например, $u_{(1)}$ - времениподобен, тогда второй, $u_{(2)}$, - пространственноподобен. Стандартным процессом ортогонализации нормируем их следующим образом:

$$\left(u_{(1)}, u_{(1)}\right) = 1; \quad \left(u_{(2)}, u_{(2)}\right) = -1; \quad \left(u_{(1)}, u_{(2)}\right) = 0. \quad (\text{V.58})$$

V.2. Уравнения релятивистской МГД плазмы в гравитационном поле

Тогда общее решение (V.57) можно записать в виде:

$$u^k = \alpha u_{(1)}^k + \beta u_{(2)}^k, \quad (\text{V.59})$$

где α, β - произвольные скаляры.

Исследуем теперь соотношения (V.55), которые можно рассматривать как алгебраические уравнения относительно τ . Поскольку

$$-F_{ik}F^{ik} = F_{ik}^*F^{ik*} < 0, \quad (\text{V.60})$$

а соотношение (V.50) инвариантно относительно замены $F \leftrightarrow F^*$, как и выражение для $\text{Det}\|F\|$ (V.27), дуальная матрица $\|F_{ik}^*\|$ также допускает два и только два линейно независимых пространственноподобных собственных вектора $w_{(1)}, w_{(2)}$, отвечающих нулевому собственному значению. Нетрудно убедиться (переходя, например, в СО, в которой $F_{\alpha 4} = 0$) в том, что ранг объединенной матрицы $\|F, F^*\|$ при условии (V.50) равен 4. Поэтому собственные векторы матриц $\|F\|$ и $\|F^*\|$ линейно независимы, и можно выбрать их следующую нормировку:

$$\begin{aligned} (w_{(1)}, w_{(1)}) &= -1; & (w_{(2)}, w_{(2)}) &= -1; \\ (w_{(1)}, w_{(2)}) &= 0; & (w_{(\alpha)}, u_{(\beta)}) &= 0, \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \end{aligned} \quad (\text{V.61})$$

Таким образом, общее решение (V.55) есть:

$$\tau_i = \lambda w_{(1)i} + \mu w_{(2)i}, \quad (\text{V.62})$$

где λ, μ - произвольные скаляры, причем вследствие (V.61):

$$(\tau, u_{(\alpha)}) = 0. \quad (\text{V.63})$$

Вследствие (V.53),(V.55) тензор Максвелла и дуальный ему можно представить с помощью собственных векторов матриц $\|F\|$ и $\|F^*\|$:

$$F_{ik} = -\sigma \eta_{iklm} u_{(1)}^l u_{(2)}^m; \quad (\text{V.64})$$

$$F_{ik}^* = \varrho \eta_{iklm} w_{(1)}^l w_{(2)}^m, \quad (\text{V.65})$$

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

где σ, ϱ - некоторые скаляры. Сворачивая эти соотношения с дискриминантным тензором, получим дуальные соотношения:

$$F^{ik} = \sigma \left(u_{(1)}^i u_{(2)}^k - u_{(2)}^i u_{(1)}^k \right); \quad (\text{V.66})$$

$$F^{ik} = -\varrho \left(w_{(1)}^i w_{(2)}^k - w_{(2)}^i w_{(1)}^k \right). \quad (\text{V.67})$$

Из (V.64), (V.66), в частности, следует соотношение:

$$F_{ik}^* F^{kl} = 0. \quad (\text{V.68})$$

Используя представление тензора Максвелла (V.64) и соотношения ортонормированности (V.58), получим полезную формулу:

$$F_{ik} F^{il} = \sigma^2 \left(-u_{(1)}^k u_{(1)}^l + u_{(2)}^k u_{(2)}^l + \delta_k^l \right). \quad (\text{V.69})$$

Сворачивая (V.69), получим:

$$\frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} = \sigma^2 > 0. \quad (\text{V.70})$$

Сворачивая уравнения (V.46) с помощью F^{il} и учитывая соотношения (V.69), (V.70), получим уравнение, эквивалентное (V.46):

$$\sigma^2 \left[\Phi_{(1)}^l - u_{(1)}^l (u, \Phi) + u_{(2)}^l (u, \Phi) \right] = F^{il} \tau_i. \quad (\text{V.71})$$

Частным решением (V.71) является:

$$\Phi_{(1)}^i = \frac{1}{\sigma^2} F^{il} \tau_i, \quad (\text{V.72})$$

поэтому общее решение уравнений (V.46) можно представить в форме:

$$F_{,k}^{ik} \equiv \Phi^i = \frac{8\pi F^{ik} T_{k,j}^j}{F^{lm} F_{lm}} + \alpha u_{(1)}^i + \beta u_{(2)}^i. \quad (\text{V.73})$$

Этим исчерпывается задача о приведении системы уравнений (V.43), (V.44) к виду стандартных уравнений Максвелла.

Если отсутствуют внешние токи ($\alpha = \beta = 0$), (V.73) приводятся к виду второй группы уравнений Максвелла:

$$F_{,k}^{ik} = -4\pi J_{dr}^i, \quad (\text{V.74})$$

V.2. Уравнения релятивистской МГД плазмы в гравитационном поле

где:

$$J_{dr}^i = -\frac{2F^{ik} T_{k,l}^p}{F_{jm} F^{jm}} \quad (\text{V.75})$$

дрейфовый ток, который согласно (V.68) удовлетворяет соотношению:

$$F_{ij}^* J_{dr}^i = 0, \quad (\text{V.76})$$

поэтому вследствие (V.55),(V.63):

$$(J_{dr}, u_{(\alpha)}) = 0, \quad (\text{V.77})$$

$$(J_{dr}, J_{dr}) < 0 - \quad (\text{V.78})$$

- дрейфовый ток пространственноподобен.

Вычисляя ковариантную дивергенцию ∇_l от соотношения (V.68) с использованием первой группы уравнений Максвелла (V.44), получим дифференциальное следствие:

$$F^{kl} F_{kl,i}^* = F^{kl} F_{kl,i}^* = 0. \quad (\text{V.79})$$

Вычисляя ковариантную дивергенцию ∇^i от соотношения (V.68) с использованием второй группы уравнений Максвелла (V.74) и соотношения (V.76), получим еще одно дифференциальное следствие:

$$F^{kl} F_{i[k,l]}^* = 0. \quad (\text{V.80})$$

Полагая далее в формулах (V.57),(V.58), (V.61),(V.64)-(V.67) $u_{(1)}^i = v^i$, $u_{(2)}^i = n^i \equiv (H^i/H)$, мы найдем полное совпадение указанных формул с соответствующими выражениями из предыдущего n^o . Тогда:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} F_{lm} F^{lm} = -(H, H) \equiv H^2. \quad (\text{V.81})$$

Таким образом, вследствие (V.63) должны выполняться дифференциальные соотношения:

$$v^i T_{i,k}^p = 0, \quad (\text{V.82})$$

$$H^i T_{i,k}^p = 0. \quad (\text{V.83})$$

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

Подставляя в (V.82),(V.83) выражение для T_{ik}^p (V.6), получим с учетом (V.7),(V.13):

$$v_{,k}^k = -\frac{\varepsilon_{,k} v^k}{\varepsilon + p}; \quad (\text{V.84})$$

$$v_{i,k} H^i v^k = \frac{p_{,i} H^i}{\varepsilon + p}. \quad (\text{V.85})$$

Вычисляя с учетом (V.6),(V.33),(V.81) дрейфовый ток (V.75), найдем:

$$J_{dr}^i = -2 \frac{F^{ik} [v_{k,l} v^l (\varepsilon + p) - p_{,k}]}{F_{lm} F^{lm}}. \quad (\text{V.86})$$

Из (V.35) получим полезное соотношение (при $H \neq 0$):

$$v^i = \frac{F^{ki} H_k}{H^2}, \quad (\text{V.87})$$

вследствие которого и определения вектора H^i автоматически выполняются соотношения ортонормированности (V.7), (V.13).

Отметим, что вследствие (V.68) решением уравнения (V.35) является

$$v^i = F^{ki} S_k, \quad (\text{V.88})$$

где S_k - произвольный пространственноподобный вектор, удовлетворяющий единственному условию:

$$F^{ki} F^l_i S_k S_l = 1. \quad (\text{V.89})$$

Обратимся к первой группе уравнений Максвелла (V.44). Используя представление (V.35) для дуального тензора Максвелла, получим для (V.44):

$$v^i H_{,k}^k + v_{,k}^i H^k - v_{,k}^k H^i - v^k H_{,k}^i = 0. \quad (\text{V.90})$$

Последовательно сворачивая уравнения (V.90) с v^i и H^i с использованием (V.7),(V.13), получим:

$$-v_{i,k} H^i v^k = H_{i,k} v^i v^k = H_{,k}^k; \quad (\text{V.91})$$

V.3. Решение уравнений РМГД в метрике ПГВ для изотропной плазмы

$$H_{i,k} v^i H^k = -v_{i,k} H^i H^k = H(Hv^k)_{,k}. \quad (\text{V.92})$$

Поскольку ранг матрицы $\| F_{ik}^* \|$ равен 2, соотношения (V.90) - (V.92) эквивалентны первой группе уравнений Максвелла (V.44). С учетом (V.91) уравнение (V.85) может быть приведено к форме, аналогичной (V.84):

$$H_{,k}^k = -\frac{p_{,k} H^k}{\varepsilon + p}. \quad (\text{V.93})$$

V.3 Решение уравнений релятивистской магнитной гидродинамики для изотропной плазмы на фоне метрики плоской гравитационной волны

V.3.1 Начальные условия и симметрия задачи

Метрика ПГВ с поляризацией e_+ описывается выражением [47]:

$$ds^2 = 2dudv - L^2[e^{2\beta}(dx^2)^2 + e^{-2\beta}(dx^3)^2], \quad (\text{V.94})$$

где $\beta(u)$ -произвольная функция (амплитуда ПГВ), функция $L(u)$ (фоновый фактор ПГВ) подчиняется обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка; $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x^1)$ - запаздывающее, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + x^1)$ - опережающее время. Абсолютному будущему соответствует область

$$\mathbf{T}^+ : \{ u > 0; v > 0 \},$$

абсолютному прошлому -

$$\mathbf{T}^- : \{ u < 0; v < 0 \}.$$

Метрика (V.94) допускает группу движений \mathcal{G}_5 , которой соответствует три линейно независимых вектора Киллинга:

$$\xi_{(1)}^i = \delta_v^i; \quad \xi_{(2)}^i = \delta_2^i; \quad \xi_{(3)}^i = \delta_3^i. \quad (\text{V.95})$$

Пусть при $u \leq 0$ ГВ отсутствует, т.е.,-

$$\beta(u)|_{u \leq 0} = 0; \quad L(u)|_{u \leq 0} = 1, \quad (\text{V.96})$$

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

плазма однородна и покоится:

$$\begin{aligned} v_{|u \leq 0}^v &= v_{|u \leq 0}^u = \frac{1}{\sqrt{2}}; & v^2 &= v^3 = 0; \\ \varepsilon_{|u \leq 0} &= \varepsilon_0; & p_{|u \leq 0} &= p_0, \end{aligned} \quad (\text{V.97})$$

а однородное магнитное поле направлено в плоскости $\{x^1, x^2\}$:

$$\begin{aligned} H_{1|u \leq 0} &= H_0 \cos \Omega; & H_{2|u \leq 0} &= H_0 \sin \Omega; \\ H_{3|u \leq 0} &= 0; & E_{i|u \leq 0} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{V.98})$$

где Ω - угол между осью $0x^1$ (направлением распространения ПГВ) и направлением магнитного поля \mathbf{H} . Условиям (V.98) соответствует векторный потенциал:

$$\begin{aligned} A_v &= A_u = A_2 = 0; \\ A_3 &= H_0(x^1 \sin \Omega - x^2 \cos \Omega); & (u \leq 0). \end{aligned} \quad (\text{V.99})$$

В [98] показано, что решение уравнений магнитной гидродинамики в метрике (V.94) с начальными условиями (V.96) - (V.99) при $\varepsilon \neq 0$ строго стационарно, т.е., все наблюдаемые величины являются лишь функциями запаздывающего времени u . Поэтому сразу потребуем, чтобы решение задачи наследовало симметрию метрики (V.94):

$$L_{\xi(\alpha)} \mathbf{P} = 0; \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (\text{V.100})$$

для всех наблюдаемых величин \mathbf{P} . Таким образом:

$$p = p(u); \quad \varepsilon = \varepsilon(u); \quad v^i = v^i(u); \quad (\text{V.101})$$

$$F_{ik} = F_{ik}(u). \quad (\text{V.102})$$

Учитывая условия (V.102), из первой группы уравнений Максвелла (V.44) получим следствия:

$$L^2 F^{u\alpha} = C_{(\alpha)} \quad (= Const); \quad \alpha = \{v, 2, 3\}, \quad (\text{V.103})$$

V.3. Решение уравнений РМГД в метрике ПГВ для изотропной плазмы

таким образом, используя начальные условия (V.98) - (V.99), найдем:

$$\begin{aligned} L^2 F^{uv*} &= -F_{23} = H_0 \cos \Omega; \\ L^2 F^{u2*} &= F_{v3} = \frac{1}{\sqrt{2}} H_0 \sin \Omega; \\ L^2 F^{u3*} &= -F_{v2} = 0. \end{aligned} \quad (\text{V.104})$$

Условие (V.50) ($F_{ik}^* F^{ik} = 0$) с учетом (V.104) сводится к соотношению:

$$L^2 F^{v3*} = F_{u2} = \sqrt{2} F_{uv} \cot \Omega, \quad (\text{V.105})$$

а условия вмороженности (V.30) с учетом (V.104), (V.105) дают:

$$v^3 = \frac{\sqrt{2} F_{uv}}{H_0 \sin \Omega} v_v; \quad (\text{V.106})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} H_0 v_u \sin \Omega + F_{u3} v_v - H_0 v^2 \cos \Omega = 0. \quad (\text{V.107})$$

V.3.2 Законы сохранения и векторный потенциал

Следствием второй группы уравнений Максвелла (V.74) является, как известно, закон сохранения тока, который с учетом (V.100) и начальных условий (V.97) - (V.98) принимает вид:

$$J_{dr}^u = 0. \quad (\text{V.108})$$

Вычисляя J_{dr}^u с помощью (V.86), (V.104), (V.106), приведем (V.108) к виду:

$$v_v (L^2 e^{-2\beta} F_{uv})' = 0, \quad (\text{V.109})$$

где F' означает производную функции F по аргументу u . Таким образом, вследствие начальных условий ($F_{uv}(u)|_{u \leq 0} = 0$) и требования времениподобности вектора скорости ($v_v \neq 0$) приходим к выводу, что закон сохранения тока (V.108) эквивалентен требованию:

$$F_{uv} = 0. \quad (\text{V.110})$$

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

Но тогда вследствие (V.105),(V.106):

$$F^{v3} = F_{u2} = 0; \quad (\text{V.111})$$

$$v^3 = 0. \quad (\text{V.112})$$

Как известно, первая группа уравнений Максвелла (V.44) эквивалентна условию существования векторного потенциала A_i :

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i. \quad (\text{V.113})$$

Таким образом, для нулевых компонент тензора Максвелла (V.104), (V.110), (V.111) можно записать:

$$\partial_\sigma A_\gamma - \partial_\gamma A_\sigma = 0; \quad (\{\gamma, \sigma\} = \{u, v, 2\}). \quad (\text{V.114})$$

Как известно из векторного анализа, единственным решением уравнений (V.114) на трехмерной гиперповерхности $\Sigma_3 : \{x^3 = \text{Const}\}$ является градиентная функция:

$$A_\sigma = \partial_\sigma \Phi, \quad (\sigma = u, v, 2), \quad (\text{V.115})$$

где $\Phi = \Phi(u, v, x^2, x^3)$ - произвольная скалярная функция.

Ненулевые компоненты тензора Максвелла, $F_{\sigma 3}$, вследствие (V.115) можно представить в виде:

$$F_{\sigma 3} = \partial_\sigma \tilde{A}_3, \quad (\sigma = \{v, u, 2\}) \quad (\text{V.116})$$

где

$$\tilde{A}_3 \stackrel{Df}{=} A_3 - \partial_3 \Phi \quad (\text{V.117})$$

- градиентно перенормированный векторный потенциал. Подсчитывая ненулевые компоненты тензора Максвелла $F_{\sigma 3}$ с помощью (V.116) - (V.117) и с учетом соотношений (V.102), (V.104), найдем окончательно:

$$\tilde{A}_3 = -H_0 x^2 \cos \Omega + \frac{1}{\sqrt{2}} H_0 [v - \psi(u)] \sin \Omega, \quad (\text{V.118})$$

где $\psi(u)$ - произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяющая начальному условию:

$$\psi|_{u \leq 0} = u. \quad (\text{V.119})$$

V.3. Решение уравнений РМГД в метрике ПГВ для изотропной плазмы

При этом единственная зависящая от ψ отличная от нуля компонента тензора Максвелла есть:

$$F_{u3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}H_0\psi' \sin \Omega, \quad (\text{V.120})$$

а условие вмороженности (V.107) принимает вид:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(v_v\psi' - v_u) \sin \Omega + v^2 \cos \Omega = 0. \quad (\text{V.121})$$

Вычисляя с помощью (V.104),(V.110),(V.111) остальные компоненты дрейфового тока, найдем:

$$J^v = J^2 = 0, \quad (\text{V.122})$$

а для единственной нетривиальной компоненты J^3 получим выражение, совпадающее в случае строго поперечного распространения ПГВ ($\cos \Omega = 0$) с найденным в [84]. Для других значений углов Ω выражение для дрейфового тока, полученное в [84], как и выражение для скорости дрейфа (сравни с (V.121)), ошибочно. Мы, однако, не будем здесь интегрировать уравнение Максвелла с дрейфовым током, поскольку оно является следствием законов сохранения (V.43) и условий вмороженности, - проще в нашем случае проинтегрировать непосредственно законы сохранения.

V.3.3 Интегралы движения

Вследствие законов сохранения полного ТЭИ плазмы (V.43) и наличия трех линейно независимых векторов Киллинга (V.95) существует 3 интеграла уравнений (V.43):

$$L^2 \xi^k_{(\alpha)} T^u_k = C; \quad (\alpha = \overline{1,3}; C = \text{Const}), \quad (\text{V.123})$$

где T^u_k описывается выражениями (V.36),(V.38):

$$T^u_k = \left(\varepsilon + p + \frac{H^2}{4\pi} \right) v_v v_k - \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) \delta^u_k - \frac{H_v H_k}{4\pi}. \quad (\text{V.124})$$

Вычисляя согласно (V.10),(V.81) вектор напряженности магнитного поля H^i и скаляр H^2 , найдем:

$$H_v = -H_0 L^{-2} \left(v_v \cos \Omega + \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 \sin \Omega \right);$$

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

$$H_u = H_0 L^{-2} (v_u \cos \Omega - \frac{1}{\sqrt{2}} \psi' v_2 \sin \Omega);$$

$$H_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} H_0 e^{2\beta} \sin \Omega (v_u + v_v \psi'); \quad H_3 = 0; \quad (\text{V.125})$$

$$H^2 \stackrel{Df}{=} \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} = H_0^2 \left(\frac{\cos^2 \Omega}{L^4} + \frac{\sin^2 \Omega}{L^2} \psi' e^{2\beta} \right). \quad (\text{V.126})$$

Нетрудно проверить, что согласно (V.125) тождественно удовлетворяется соотношение ортогональности (V.13) $((v, H) = 0)$. Соотношение же нормировки вектора скорости (V.7) с учетом (V.121), (V.125) можно записать в виде:

$$\left(v_v \cos \Omega + \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 \sin \Omega \right)^2 = \frac{H^2}{H_0^2} v_v^2 L^4 - \frac{\sin^2 \Omega}{2} L^2 e^{2\beta}. \quad (\text{V.127})$$

Один из интегралов (V.123), C , оказывается тривиальным, - два оставшиеся дают с учетом (V.121), (V.126), (V.127):

$$(\varepsilon + p) L^2 v_v^2 + \frac{H_0^2 \sin^2 \Omega}{8\pi} e^{2\beta} \stackrel{(3)}{=} C = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 + p_0 + \frac{H_0^2 \sin^2 \Omega}{4\pi} \right); \quad (\text{V.128})$$

$$(\varepsilon + p) L^2 v_v v_2 - \frac{H_0^2 \cos \Omega \sin \Omega}{4\sqrt{2}\pi} e^{2\beta} \stackrel{(2)}{=} C = -\frac{H_0^2 \cos \Omega \sin \Omega}{4\sqrt{2}\pi}. \quad (\text{V.129})$$

Таким образом:

$$v_v^2 = \frac{\varepsilon_0 + p_0}{2L^2(\varepsilon + p)} \Delta(u); \quad (\text{V.130})$$

$$\frac{v_2}{v_v} = \sqrt{2} (\Delta^{-1} - 1) \cot \Omega, \quad (\text{V.131})$$

где:

$$\Delta(u) \stackrel{Df}{=} 1 - \alpha^2 (e^{2\beta} - 1) \quad (\text{V.132})$$

и введен безразмерный параметр α :

$$\alpha^2 = \frac{H_0^2 \sin^2 \Omega}{4\pi(\varepsilon_0 + p_0)}. \quad (\text{V.133})$$

V.3. Решение уравнений РМГД в метрике ПГВ для изотропной плазмы

Обратимся теперь к следствиям уравнений Максвелла. Интегрируя (V.85), найдем еще один интеграл:

$$\sqrt{2}L^2|v_v| = \exp \left[- \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p(\varepsilon)} \right]. \quad (\text{V.134})$$

Таким образом, если задано уравнение состояния $p = p(\varepsilon)$ (V.8), то с помощью (V.130), (V.131), (V.134) определяются функции $v_v(u)$, $v_2(u)$, $\varepsilon(u)$, $p(u)$. Однако для определения $v_u(u)$ необходимо найти функцию $\psi(u)$, для чего необходим еще один интеграл. Этим интегралом как раз и является соотношение нормировки в форме (V.127). Умножая (V.128) на $\cos \Omega$, а (V.129) - на $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \Omega$ и складывая полученные выражения, найдем следствие ²:

$$L^2 v_v (v_v \cos \Omega + \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 \sin \Omega) = \frac{\varepsilon_0 + p_0}{2(\varepsilon + p)} \cos \Omega. \quad (\text{V.135})$$

Возводя обе части (V.135) в квадрат, учитывая соотношение нормировки в форме (V.127) а также (V.130), найдем:

$$H^2 = \frac{H_0^2}{\Delta} \left(\frac{\cos^2 \Omega}{L^4 \Delta} + \frac{\varepsilon + p}{\varepsilon_0 + p_0} e^{2\beta} \sin^2 \Omega \right). \quad (\text{V.136})$$

Сравнивая (V.136) и (V.126), найдем окончательно:

$$\psi' = \frac{L^2(\varepsilon + p)}{\Delta(\varepsilon_0 + p_0)} + \left(\frac{1}{\Delta^2} - 1 \right) e^{-2\beta} \frac{\cot^2 \Omega}{L^2}. \quad (\text{V.137})$$

Наконец с помощью (V.121), (V.131), (V.137) получим выражение для v_u :

$$\frac{v_u}{v_v} = \frac{L^2(\varepsilon + p)}{\Delta(\varepsilon_0 + p_0)} + \left(\frac{1}{\Delta} - 1 \right)^2 e^{-2\beta} \frac{\cot^2 \Omega}{L^2}. \quad (\text{V.138})$$

Таким образом, при заданном уравнении состояния (V.8) определяются все неизвестные функции, причем решения (V.130), (V.131), (V.134) - (V.138) автоматически удовлетворяют начальным условиям (V.97), (V.98), (см. также (V.119)). Тем самым найдено в квадратурах точное решение самосогласованной задачи о движении магнитоактивной изотропной плазмы на фоне ПГВ [113].

²Нетрудно показать, что этот интеграл можно получить непосредственно из (V.93).

V.4 Исследование решения

Возводя в квадрат обе части уравнения (V.134) и используя в левой части полученного уравнения выражение для v_v^2 из (V.130), после некоторых очевидных преобразований представим (V.134) в виде:

$$\Lambda(u) = e^{-J(\varepsilon; \varepsilon_0)}, \quad (\text{V.139})$$

где

$$\Lambda \stackrel{Df}{=} L^2(u)\Delta(u), \quad (\text{V.140})$$

$$J(\varepsilon; \varepsilon_0) = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{1 - p'_\varepsilon}{\varepsilon + p(\varepsilon)} d\varepsilon. \quad (\text{V.141})$$

При заданном уравнении состояния (V.8) уравнение (V.139) полностью определяет функции $\varepsilon(u)$ и $p(u)$ и, таким образом, явно определяет решение поставленной задачи. Исследуем эти функции при достаточно общем предположении об уравнении состояния плазмы:³

$$p(\varepsilon) < \varepsilon. \quad (\text{V.142})$$

Тогда

$$p'_\varepsilon < 1; \quad \frac{1 - p'_\varepsilon}{\varepsilon + p(\varepsilon)} > 0 \quad (\text{V.143})$$

и, таким образом, -

$$\text{sgn}[J(\varepsilon; \varepsilon_0)] = \text{sgn}(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (\text{V.144})$$

Из (V.139) видно, что ε зависит от запаздывающего времени лишь посредством функции $\Lambda(u)$:

$$\varepsilon = \varepsilon(\Lambda(u)). \quad (\text{V.145})$$

³Напомним, что ε и $p(\varepsilon)$ - плотность энергии и давления плазмы без учета электромагнитного поля.

V.4. Исследование решения

V.4.1 Исследование сингулярности

Исследуем зависимость $\varepsilon(\Lambda)$. Из (V.130) следует, что решение определено на интервале: $\Lambda \in [0, +\infty)$. При $\Lambda \rightarrow +0$ согласно (V.139) $J(\varepsilon; \varepsilon_0) \rightarrow +\infty$, что согласно (V.144) возможно лишь при $\varepsilon \rightarrow +\infty$. Таким образом можно сделать общий вывод, что

Решение уравнений магнитной гидродинамики на фоне ПГВ всегда содержит физическую сингулярность на гиперповерхностях $u = u_$:*

$$\Lambda(u_*) \equiv L^2(u_*)\Delta(u_*) = 0. \quad (\text{V.146})$$

Согласно определения функций $\Lambda(u)$ и $\Delta(u)$ таких гиперповерхностей может быть два типа:

$$\begin{aligned} A). \quad L^2(u) &= 0; \\ B). \quad 1 - \alpha^2(e^{2\beta(u)} - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{V.147})$$

Первый тип сингулярности хорошо известен - он связан с координатной сингулярностью метрики (V.94) и всегда возникает в плазме (см., например, [82]). Второй тип сингулярности является новым и не связан с координатной сингулярностью метрики ПГВ (V.94) - это чисто физическая сингулярность, на ее существование впервые было указано Автором в 1993 году [112]⁴. Согласно (V.147) условиями возникновения сингулярности второго типа являются:

$$\beta(u) > 0; \quad (\text{V.148})$$

$$\alpha^2 > 1. \quad (\text{V.149})$$

Известно (см., например, [47]), что значениям $\beta(u) > 0$ соответствует фаза сжатия геодезической трубки вдоль оси $0x^3$, $\beta(u) < 0$ - фаза расширения. Условие же (V.149) согласно (V.133) означает, что в начальном состоянии $\varepsilon_H \sin^2 \Omega > \frac{1}{2}(\varepsilon_0 + p_0)$, т.е., плазма сильно замагничена.

⁴В этой же работе содержалось и точное частное решение уравнений РМГД.

Чрезвычайно важным является тот факт, что сингулярное состояние типа B возможно даже в слабой ПГВ ($|\beta| \ll 1$) при условии сильной замагниченности плазмы ($\alpha^2 \gg 1$), - в этом случае сингулярное состояние согласно (V.147) возникает на гиперповерхностях $u = u_*$:

$$\beta(u_*) = \frac{1}{2\alpha^2}. \quad (\text{V.150})$$

Далее согласно (V.139), (V.141) при $\Lambda(u) = 1 : \varepsilon = \varepsilon_0, p = p_0$ и, таким образом, согласно (V.130) - (V.138) на гиперповерхностях $\Lambda(u) = 1$ восстанавливаются начальные условия. При $\Lambda(u) \rightarrow +\infty$ согласно (V.139) $J(\varepsilon; \varepsilon_0) \rightarrow -\infty$, что возможно согласно (V.144) лишь при $\varepsilon \rightarrow +0; p(\varepsilon) \rightarrow +0$:

$$\Lambda(u) \rightarrow +\infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0; \quad p(\varepsilon) \rightarrow 0. \quad (\text{V.151})$$

Исследуем общее поведение решения вблизи сингулярности типа B , т.е., при $\Delta(u) \rightarrow 0$, потребовав более жесткого чем (V.142) ограничения на уравнение состояния:

$$p(\varepsilon) \leq \frac{1}{3}\varepsilon, - \quad (\text{V.152})$$

тогда справедливы неравенства:

$$\frac{1}{2\varepsilon} \leq \frac{1 - p'_\varepsilon}{\varepsilon + p(\varepsilon)} < \frac{1}{\varepsilon}, \quad (\text{V.153})$$

причем равенство в левой части (V.153) достигается лишь в случае ультрарелятивистского уравнения состояния ($\varepsilon = 3p$). Тогда из (V.141), (V.153) следуют ограничения на $J(\varepsilon; \varepsilon_0)$:

$$\ln \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \leq J(\varepsilon; \varepsilon_0) < \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad (\text{V.154})$$

вследствие чего согласно (V.139): ⁵

$$\frac{1}{\Lambda} < \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \leq \frac{1}{\Lambda^2}. \quad (\text{V.155})$$

⁵Если вместо (V.152) ограничиться более слабым условием (V.142), то сохранится лишь ограничение снизу на плотность энергии.

V.4. Исследование решения

Но тогда из (V.130) сразу получим:

$$\frac{3}{8}L^2\Delta^3 \leq v_v^2 < \frac{2}{3}\Delta^2. \quad (\text{V.156})$$

Используя (V.155), (V.156) и выделяя главные части выражений (V.131), (V.136) - (V.138) вблизи сингулярности типа B , получим асимптотические оценки:

$$\Delta \rightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \sim \varepsilon_0 \Delta^{-\nu}; \\ v_v \sim \Delta^\nu; \\ H \sim H_0 \Delta^{-\mu}; \\ v_u/v_v \sim \Delta^{-\gamma}; \\ v_2/v_v \sim \sqrt{2} \cot \Omega \Delta^{-1}. \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \nu \in (1, 2] \\ \mu \in (1, \frac{3}{2}]; \\ \gamma \in (2, 3]; \end{array} \right. \quad (\text{V.157})$$

Компоненты 3-вектора физической скорости $V^\alpha = dx^\alpha/dt$ можно представить в виде:

$$V^1 = \frac{v_u/v_v - 1}{v_u/v_v + 1};$$

$$V^2 = \frac{\sqrt{2}e^{-2\beta}}{L^2(1 + v_u/v_v)} \frac{v_2}{v_v}. \quad (\text{V.158})$$

Используя оценки функций вблизи сингулярности (V.157) получим для компонент вектора физической скорости:

$$\Delta \rightarrow 0 : \quad \begin{array}{l} V^1 \rightarrow 1; \\ V^2 \sim -\frac{2e^{-2\beta}}{L^2} \cot \Omega \Delta^{\gamma-1} \rightarrow 0. \end{array} \quad (\text{V.159})$$

Таким образом на гиперповерхности $u = u_*$ возникает физическая сингулярность: плотности энергии плазмы и магнитного поля стремятся к бесконечности, динамическая скорость плазмы как целого стремится к скорости света в направлении распространения ПГВ. При этом поперечное движение плазмы исчезает ($V^2 \rightarrow 0$), а отношение плотности энергии магнитного поля к плотности энергии плазмы стремится к бесконечности:

$$\Delta \rightarrow 0; \quad \frac{\varepsilon_H}{\varepsilon} \sim \alpha^2 e^{2\beta} \Delta^{-1} \rightarrow \infty. \quad (\text{V.160})$$

V.4.1.1 Поведение решения вблизи сингулярности

В связи с наличием сингулярности типа B естественно возникает вопрос о применимости магнитогидродинамической модели плазмы вблизи гиперповерхности (V.147), т.е., о выполнении условия дрейфового приближения (V.2).

Отметим, что (V.2) является локальным условием, т.е., для применимости магнитогидродинамической модели описания плазмы это условие должно выполняться в сопутствующей СО во всей исследуемой области. Предположим, что (V.2) выполняется в начальном состоянии $u \leq 0$:

$$\xi_0 = \frac{\omega}{\omega_B^0} \ll 1, \quad (\text{V.161})$$

где $\omega_B^0 = \omega_B|_{(H=H_0)}$. Частота ГВ в системе отсчета, движущейся со скоростью v^i есть $\omega' = k_i v^i$, где \mathbf{k} - волновой вектор ГВ: $\mathbf{k} = (-\omega, 0, 0, \omega)$. Таким образом $\omega' = \sqrt{2}v_v\omega$. Скаляр H (V.17) является модулем напряженности магнитного поля в сопутствующей СО. Таким образом локальное значение дрейфового параметра ξ , измеряемого в сопутствующей СО, связано с начальным значением (V.161) соотношением:

$$\xi = \sqrt{2} \frac{v_v H_0}{H} \xi_0. \quad (\text{V.162})$$

Используя асимптотические оценки (V.157), (V.159) поведения решения вблизи сингулярности типа B , получим из (V.162):

$$\Delta \rightarrow 0 : \quad \xi \sim \xi_0 \Delta^{2\mu} \rightarrow 0.$$

Таким образом приходим к выводу:

Если условие применимости дрейфового приближения изначально выполнялось, то при приближении к сингулярности типа B движение плазмы все более точно описывается магнитогидродинамической моделью. Поэтому в рамках рассматриваемой задачи: о движении первоначально однородной магнитоактивной плазмы *на фоне метрики ПГВ* не существует никаких механизмов предотвращения сингулярности.

Отметим *существенно нелинейную природу выявленного эффекта*: при разложении исходных уравнений в ряд Тейлора по малости амплитуды ПГВ, β , подобного эффекта не возникает, что подтвердило, в частности, исследование, проведенное в [101]. Причина такого расхождения

V.4. Исследование решения

результатов заключается в том, что управляющей функцией данного процесса является, как видно из решений (V.130) - (V.132), функция Δ^{-1} , которая в слабой ПГВ ($|\beta| \ll 1$) принимает вид:

$$\Delta^{-1} \approx \frac{1}{1 - 2\alpha^2\beta(u)}. \quad (\text{V.163})$$

Разложение этой функции в ряд Тейлора по малости β предполагает малость величины $2\alpha^2\beta$, но параметр α в сильно замагниченной плазме может оказаться настолько большим, что выполняется условие $2\alpha^2|\beta| > 1$. Прямое разложение в ряд Тейлора по малости β функции $S(u)$, управляющей процессом движения плазмы

$$S(u) = \Delta^{-1}(u) - 1$$

дало бы:

$$S(u) \approx 2\alpha^2\beta(u) -$$

это выражение линейно по амплитуде ГВ и не содержит особенностей.

Таким образом, данный эффект является *пороговым эффектом*, возникающим при достижении амплитуды ПГВ в фазе сжатия вдоль оси Ox^3 величины (V.150), и может быть интерпретирован как *нелинейная пороговая генерация гравитационной волной ударной магнитогидродинамической волны, распространяющейся с околосветовой скоростью вдоль направления распространения ПГВ*. В дальнейшем будем называть этот новый класс эффектов *гравимагнитными ударными волнами* или кратко - GMSW [112], [113].

Заметим, что, во-первых, присутствие плазмы качественно меняет характер электромагнитного поля [98], [101]: при действии ПГВ на вакуумное магнитное поле решение уравнений Максвелла существенно нестационарно (точное решение приведено в [84]) и, во-вторых, ни в жидкости при любом уравнении состояния (точные решения приведены в [107],[108]), ни в вакуумном магнитном поле не возникает сингулярностей кроме координатной сингулярности типа A . Единственным, но экзотическим примером является плазма со скалярным взаимодействием в случае отталкивания одноименно заряженных частиц (точное решение приведено в [110]). Отметим также, что в случае *предельно жесткого уравнения состояния* ($p = \varepsilon$) решение уравнений гидродинамики нестационарно, т.е., зависит от переменных u, v [108]. Такое же поведение обнаруживает и магнитоактивная плазма: как видно из (V.139) - (V.141), при $p = \varepsilon$ стационарного решения не существует.

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

Механизм образования ударной волны, по-видимому, заключается в следующем. Слабая ГВ, как известно, не взаимодействуют с жидкостью, но возмущает магнитное поле. Это в свою очередь вызывает дрейф плазмы. Частицы с меньшими значениями координаты x^1 имеют большее значение координаты u , поэтому на стадии сжатия геодезической трубки в направлении $0x^3$: ($\beta > 0$; $\beta' > 0$) такие частицы имеют скорость большую, чем частицы с большими значениями координаты x^1 . Поэтому задние слои плазмы догоняют передние и тем самым способствуют возникновению ударной волны.

Вычисляя дрейфовый ток с помощью уравнений Максвелла (V.74), найдем (см. также [84],[101]):

$$J_3 = \frac{e^{-2\beta}}{4\pi} (L^2 F_v^3)' = -\frac{H_0 \sin \Omega}{2\sqrt{2}\pi} \beta'. \quad (\text{V.164})$$

Поэтому в сингулярном состоянии B плотность дрейфового тока остается конечной.

V.4.2 Баротропное уравнение состояния

В качестве конкретного примера рассмотрим баротропное уравнение состояния:

$$p = k\varepsilon, 0 \leq k < 1. \quad (\text{V.165})$$

Тогда

$$J(\varepsilon; \varepsilon_0) = \frac{(1-k)}{(1+k)} \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad (\text{V.166})$$

и, таким образом, согласно (V.141), (V.130) - (V.133) получим точное решение [113], [114]:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \Lambda^{-1+\kappa}; \quad (\text{V.167})$$

$$v_v = \frac{1}{\sqrt{2}} L^\kappa \Delta^{1+\frac{\kappa}{2}}; \quad (\text{V.168})$$

$$\frac{v_u}{v_v} = \Delta^{-2} [\Lambda^{-\kappa} + (\Delta - 1)^2 L^{-2} e^{-2\beta} \cot^2 \Omega]; \quad (\text{V.169})$$

$$H^2 = \frac{H_0^2}{\Lambda^2} = \left(\cos^2 \Omega + L^2 \Lambda^{-\kappa} e^{2\beta} \sin^2 \Omega \right), \quad (\text{V.170})$$

V.4. Исследование решения

В частности для *нерелятивистской плазмы*⁶ ($p = 0, \Rightarrow \kappa = 0$) получим из (V.167) - (V.170):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \Lambda^{-1}; \quad v_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta; \quad (\text{V.171})$$

$$\frac{v_u}{v_v} = \Delta^{-2} [1 + (\Delta - 1)^2 L^{-2} e^{-2\beta} \cot^2 \Omega]; \quad (\text{V.172})$$

$$H^2 = \frac{H_0^2}{\Lambda^2} (\cos^2 \Omega + L^2 \sin^2 \Omega e^{2\beta}); \quad (\text{V.173})$$

а для *ультрарелятивистской плазмы* ($p = \varepsilon/3 \Rightarrow \kappa = 1$) получим из (V.167)- (V.170):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \Lambda^{-1}; \quad v_v = \frac{1}{\sqrt{2}} L \Delta^{3/2}; \quad (\text{V.174})$$

$$\frac{v_u}{v_v} = L^{-2} \Delta^{-2} [\Delta^{-1} + (\Delta - 1)^2 e^{-2\beta} \cot^2 \Omega]; \quad (\text{V.175})$$

$$H^2 = \frac{H_0^2}{\Lambda^2} (\cos^2 \Omega + \Delta^{-1} e^{2\beta} \sin^2 \Omega). \quad (\text{V.176})$$

Приведенные точные решения (V.167) - (V.170) подтверждают асимптотические оценки общего поведения плазмы вблизи сингулярности (V.157).

V.4.3 Дрейф нерелятивистской плазмы в слабой ПГВ

Рассмотрим практически важный случай *слабой ПГВ*:

$$|\beta(u)| \ll 1 \quad (\text{V.177})$$

и *нерелятивистской плазмы* ($k = 0$). Известно (см., например, [47]), что $L^2 \sim O(\beta^2)$. Учитывая этот факт, в первом приближении по β (но не по $\alpha^2 \beta!$) получим из (V.173):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \Delta^{-1}; \quad v_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta;$$

⁶Для нерелятивистской плазмы точное решение впервые было найдено гораздо раньше в [99]

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

$$\frac{v_u}{v_v} = \Delta^{-2}[1 + (2\alpha^2\beta \cot \Omega)^2];$$

$$H = \frac{H_0}{\Delta}; \quad \frac{v_2}{v_v} = \sqrt{2}(\Delta^{-1} - 1) \cot \Omega, \quad (\text{V.178})$$

где для Δ^{-1} необходимо использовать выражение (V.163). Тогда из (V.158) найдем в явном виде ненулевые компоненты физической скорости:

$$V^1 = 2\alpha^2\beta \frac{1 + \alpha_0^2\beta \cos 2\Omega}{1 - 2\alpha^2\beta(1 - \alpha_0^2\beta)};$$

$$V^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_0^2\beta \sin 2\Omega \frac{1 - 2\alpha^2\beta}{1 - \alpha^2\beta + 2\alpha_0^4\beta^2 \cos^2 \Omega}, \quad (\text{V.179})$$

где $\alpha_0^2 = H_0^2/4\pi(\varepsilon_0 + p_0)$.

Из (V.179) следует, что в случае достаточно слабой ПГВ:

$$2\alpha^2|\beta| < 1) V^1 > 0 \text{ при } \beta > 0 \text{ и } V^1 < 0 \text{ при } \beta < 0,$$

т.е., в фазе сжатия геодезической трубки в направлении оси Ox^3 плазма дрейфует как целое в направлении распространения ПГВ, а в фазе расширения - в противоположном направлении.

Предположим теперь, $\beta(u)$ - квазипериодическая функция с периодом T , такая что:

$$\langle \beta(u) \rangle = 0, \quad (\text{V.180})$$

где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по интервалу $\Delta u = u - u_0 \gg T$;

$$\left| e^{2\beta(u+T)} - e^{2\beta(u)} \right| \ll \frac{1}{\alpha^2}; \quad \left| e^{2\beta(u+T/2)} + e^{2\beta(u)} - 2 \right| \ll \frac{1}{\alpha^2}, \quad (\text{V.181})$$

- т.е., амплитуда ПГВ мало изменяется в течение «периода» T . Полагая в (V.179) $\Omega = \pi/2$ и усредняя V^1 при условиях (V.180)-(V.181) по достаточно большому промежутку запаздывающего времени, найдем:

$$\langle V^1 \rangle \sim 2\alpha_0^4 \langle \beta^2(u) \rangle, \quad (\text{V.182})$$

V.5. Передача энергии ГВ в плазме: уравнение энергодбаланса

- таким образом *средний дрейф плазмы* происходит в направлении распространения ПГВ и даже в слабой ГВ отличен от нуля. При $\Omega = \pi/2$ согласно (V.178)

$$v_u/v_v \equiv v^v/v^u = \Delta^{-2},$$

поэтому:

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{\Delta^2} = \frac{1}{(1 - 2\alpha_0^2\beta(u))^2}; \Rightarrow v - v_0 = \int_0^u \frac{du'}{(1 - 2\alpha_0^2\beta(u'))^2}. \quad (\text{V.183})$$

Переходя в (V.183) к пределу $u \rightarrow u_*$ при условии непрерывности функции $\beta(u)$, получим:

$$u \rightarrow u_*; \quad v(u) - v_0 \simeq \frac{1}{(2\alpha^2\beta'(u_*))^2} \frac{1}{(u_* - u)} \rightarrow \infty. \quad (\text{V.184})$$

Уравнение (V.183) в неявном виде описывает траекторию $x \equiv x^1 = f(t)$ бесконечно малого объема плазмы. Пусть до прихода ПГВ этот объем находился в точке x_0 , тогда $t_0 = x_0$ - момент прихода ПГВ в эту точку. Сингулярности соответствует $u = u_* = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x)_*$. Тогда из (V.184) следует, что этому состоянию соответствуют $x_* \rightarrow +\infty; t_* \rightarrow +\infty$. Таким образом, по часам внешнего наблюдателя частица плазмы достигает сингулярной гиперповерхности $u = u_*$ (на которой скорость плазмы стремится к скорости света, а плотность энергии - к бесконечности) за бесконечно большое время и сама при этом оказывается в бесконечно удаленной точке. Если в метрике ПГВ (V.94) возможны значения $|\beta(u)| > 1/2\alpha_0^2$, решение уравнений магнитной гидродинамики бессмысленно продолжать за гиперповерхность $u = u_*$, - на этом фронте ударной волны все инварианты претерпевают разрыв второго рода.

V.5 Передача энергии ГВ в плазме: уравнение энергодбаланса

V.5.1 Сохранение полного импульса

Поскольку на сингулярной поверхности $\Delta(u) = 0$ плотности энергии плазмы и магнитного поля стремятся к бесконечности, а скорость плаз-

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

мы как целого - к скорости света, - суммарная энергия магнитогидродинамической ударной волн и ее поток в направлении распространения ГВ стремятся к бесконечности. Сингулярное состояние, возникающее в плазме под действием ПГВ, нарушает основное предположение о слабости взаимодействия ГВ с плазмой. В более полной самосогласованной *и по гравитации* задаче учет обратного воздействия ударной волны на ПГВ должен привести к потери энергии ПГВ и затуханию ее амплитуды до значений

$$\max(|\beta|) < 1/2\alpha^2. \quad (\text{V.185})$$

Таким образом, GMSW является эффективным механизмом перекачки энергии гравитационной волны к плазме [113]. Строгое решение вопроса о трансформации энергии ПГВ в энергию ударной волны возможно лишь на основе исследования самосогласованной системы уравнений Эйнштейна и уравнений магнитной гидродинамики.

В [113] было предложено полуквантовое решение этого вопроса на основе простой модели энергобаланса. Вследствие чрезвычайной важности, не ограничиваясь рассмотрением в [113], вернемся к более полному решению вопроса о передаче энергии от ГВ к магнитоактивной плазме [114]. При этом вместо решения системы уравнений Эйнштейна мы воспользуемся их следствием - законом сохранения полного импульса «плазма + гравитационные волны». Ясно, что данная модель является приближенной и не может заменить строгого решения уравнений Эйнштейна. Согласно [46] в произвольном гравитационном поле имеет место закон сохранения полного импульса системы:

$$\mathbf{P}^i = \frac{1}{c} \int (-g)(T^{i4} + t^{i4})dV, \quad (\text{V.186})$$

где t^{ik} - псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля, и интегрирование приводится по всему трехмерному пространству. Учтем, что приведенное выше решение является плоскосимметричным и зависит лишь от запаздывающего «времени» u . Вследствие этого интегрирование по «плоскости» $\{x^2, x^3\}$ в (V.186) сводится к простому умножению на «площадь» бесконечной двумерной площадки. Поделив обе части (V.186) на эту площадь и учитывая что при $\Omega = \pi/2$ из трехмерных потоков отличен от нуля лишь P^1 , получим закон сохранения

V.5. Передача энергии ГВ в плазме: уравнение энергодоланса

соответствующей поверхностной плотности импульса P_{Σ}^1 :

$$P_{\Sigma}^1 = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} (-g)(T^{14} + t^{14})dx \quad (= \text{Const}). \quad (\text{V.187})$$

Пусть правое полупространство $x > 0$ заполнено магнитоактивной плазмой, а левое $x < 0$ - материей, не взаимодействующей со слабой ГВ. Пусть далее весь гравитационный импульс сосредоточен в интервале $u \in [0, u_f]$, где $t_f = \sqrt{2}u_f$ - длительность гравитационного импульса. Поскольку интеграл в (V.187) сохраняется во все времена, рассмотрим его во времена $t_0 < 0$, когда ГВ еще не попала в магнитоактивную плазму, и $-t_f > t > 0$, когда ГВ уже достигла плазмы. Учитывая, что вакуумное решение зависит лишь от запаздывающего времени, получим для интеграла в (V.187):

$$\int_0^{u_f} t_0^{14} du = \int_0^{t/\sqrt{2}} (T^{14} + t^{14})du + \int_{t/\sqrt{2}}^{u_f} t_0^{14} du, \quad (\text{V.188})$$

где $t_0^{14} = t^{14}(\beta_v(u))$; $t^{14} = t^{14}(\beta)$, $\beta_v(u)$ - вакуумная амплитуда ПГВ, $\beta(u)$ - амплитуда ПГВ, с учетом взаимодействия с плазмой. Переносим один из интегралов в левую часть (V.188), получим соотношение:

$$\int_0^u t_0^{14} du = \int_0^u (T^{14} + t^{14})du, \quad (\text{V.189})$$

где переменная $u = t/\sqrt{2} > 0$ - теперь уже может принимать *любые положительные* значения.

Аналогичный закон можно записать и для полной энергии плазмы; в этом случае вместо (V.189) получим:

$$\int_0^u t_0^{44} du = \int_0^u (T^{44} - \mathcal{E}_0 + t^{14})du,$$

где, \mathcal{E}_0 - суммарная плотность энергии невозмущенной плазмы.

V.5.2 Локальный закон сохранения

Поскольку соотношение (V.189) должно выполняться при любых значениях переменной u , то должно выполняться и соответствующее локальное соотношение:

$$T^{14}(\beta) + t^{41}(\beta) = t^{41}(\beta_v), \quad (\text{V.190})$$

т.е. должен выполняться локальный закон сохранения плотности потока энергии, что и предполагалось в [113]. Следует отметить, что локальный закон сохранения (V.190) является прямым следствием стационарности решения, т.е., зависимости решения лишь от запаздывающего времени $u = (ct - x)/\sqrt{2}$. В строгой модели стационарности решения препятствуют два фактора: 1). взаимодействие ПГВ с плазмой; 2). граничные условия на поверхности $x = 0$. Далее, обратным влиянием вещества на метрику можно пренебречь при выполнении условия [43]:

$$\frac{8\pi G}{c^2}\varepsilon \ll \omega^2, \quad (\text{V.191})$$

Поэтому в соответствии с приближением (V.191) введем малый безразмерный параметр χ [113]:

$$\chi^2 = \frac{\pi G(\varepsilon_0 + p_0)(1 + \alpha^2)}{c^2\omega^2} \sim \frac{\omega_g^2}{\omega^2}, \quad (\text{V.192})$$

где ω - характерная частота ГВ, $\omega_g^2 = 8\pi G\varepsilon_0/c^2$. Приближение (V.191) эквивалентно условию:

$$\chi^2 \ll 1. \quad (\text{V.193})$$

При выполнении условия (V.193) скорость ГВ стремится к скорости света, что обеспечивает требуемую стационарность решения даже в неоднородной плазме [43].

Пусть далее $\beta_0 = \text{Const} > 0$ - максимальное значение вакуумной амплитуды ПГВ, β_* . Введем еще один безразмерный параметр - *первый параметр* GMSW, ξ^2 :

$$\xi^2 = \frac{\chi^2}{\beta_0^2} \sim \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{GW}}, \quad (\text{V.194})$$

где

$$\varepsilon_{GW} = \frac{\beta_0^2\omega^2 c^2}{4\pi G}.$$

V.5. Передача энергии ГВ в плазме: уравнение энергодоланса

Таким образом, параметр ξ^2 порядка отношения суммарной энергии магнитоактивной плазмы к энергии вакуумной гравитационной волны.

Используя решение уравнений магнитной гидродинамики в случае *строго поперечного* распространения ПГВ ($\Omega = \pi/2$), а также выражение для суммарного ТЭИ плазмы:

$$T^{14} = \frac{1}{4}(\varepsilon_0 + p_0)(1 + \alpha^2)(\Delta^{-n} - 1) \quad (\text{V.195})$$

и выражение для потока энергии слабой ПГВ [47]:

$$ct^{14} = \mathcal{P} = \frac{c^3}{16\pi G} \left[\dot{h}_{23}^2 + \frac{1}{4}(\dot{h}_{22} - \dot{h}_{33})^2 \right], \quad (\text{V.196})$$

приведем (V.190) к виду:

$$\dot{\beta}^2 + \bar{V}(\beta) = \dot{\beta}_*^2, \quad (\text{V.197})$$

где

$$\bar{V}(\beta) = \chi^2[\Delta^{-n}(\beta) - 1], \quad (\nu = 1), \quad (\text{V.198})$$

- функция β ; $\dot{\beta}$ теперь уже означает производную по безразмерному «времени» $s = \sqrt{2\omega u}/c$.

Введем далее относительную амплитуду ПГВ:

$$q = \frac{\beta}{\beta_0}; \quad q_* = \frac{\beta_*}{\beta_0} \quad (\text{V.199})$$

Тогда окончательно (V.197) можно переписать в виде:

$$\dot{q}^2 + V(q) = \dot{q}_*^2, \quad (\text{V.200})$$

где:

$$V(q) = \xi^2[(1 - \Upsilon q)^{-n} - 1], \quad (\text{V.201})$$

и введен новый безразмерный параметр:

$$\Upsilon = 2\alpha^2\beta_0 \quad (\text{V.202})$$

- второй параметр GMSW. К такому же результату приводит и закон сохранения полной энергии. Соотношение (V.200) можно рассматривать как уравнение относительно переменных q . С другой стороны (V.200) полностью совпадает с законом сохранения энергии одномерной механической системы, описываемой каноническими переменными $\{q(s), \dot{q}(s)\}$

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

[117], причем $V(q)$ - потенциал, \dot{q}^2 - ее кинетическая, $\dot{q}_*^2 = E_0$ - полная энергия системы.

Любому положительному значению E_0 соответствуют две точки на потенциальной кривой, (A и B). Эти точки являются точками поворота траекторий системы. Под потенциальной кривой $V(q)$ не существует реальных состояний системы. В точке

$$q = q_c = \Upsilon^{-1}; \quad (\beta = 1/2\alpha^2) \quad (\text{V.203})$$

$$V(q_c) \rightarrow \infty \quad (\text{V.204})$$

Для анализа поведения системы предположим, что момент $s = 0$ соответствует переднему фронту ГВ, причем

$$\beta_* \approx \beta_0 \sin s \Rightarrow q_* \approx \sin(s). \quad (\text{V.205})$$

Таким образом, при выполнении начальных условий [43] система всегда стартует с точки S_0 по линии (AB) в направлении к точке A (при $\beta > 0$). Так как эта точка является поворотной, максимально достижимое в системе значение переменной q есть $q(A)$. Это значение является наименьшим корнем, $q_- = q(\chi, \Upsilon, E_0)$, алгебраического уравнения

$$V(q) - E_0 = 0. \quad (\text{V.206})$$

Максимально достижимая в системе амплитуда ПГ, β_{max} , равна:

$$\beta_{max} = q_- \beta_0. \quad (\text{V.207})$$

Таким образом, q_- по смыслу совпадает с введенным в работе [113] «коэффициентом затухания амплитуды ПГВ», γ .

Решая уравнение (V.206), найдем искомый корень q_- :

$$q_- = \frac{1}{\Upsilon} \left[1 - \left(1 + \frac{\dot{q}_*^2}{\xi^2} \right)^{-1/n} \right]. \quad (\text{V.208})$$

Из (V.206) следует, что всегда:

$$q_- \leq \Upsilon^{-1}, \quad (\text{V.209})$$

причем при $E_0 \rightarrow 0$

$$q_- \approx \frac{\dot{q}_*^2}{4\Upsilon\xi^2} \rightarrow 0. \quad (\text{V.210})$$

V.6. Уравнения РМГД для анизотропной плазмы

С увеличением E_0 эта амплитуда растет и при $E_0 \rightarrow \infty$ достигает значения ($q = q_c$):

$$\beta_{max} \rightarrow \frac{\beta_0}{\Upsilon}. \quad (V.211)$$

После точки поворота амплитуда ГВ уменьшается, переходя в область отрицательных значений. При

$$s \rightarrow +\infty \quad \beta' \rightarrow \beta'_\infty = \text{Const} < 0;$$

$$\beta \sim \beta'_\infty u \rightarrow -\infty;$$

метрика (??) вырождается ($g_{22} \rightarrow 0, g_{33} \rightarrow -\infty$); единственные отличные от нуля компоненты тензора кривизны с учетом вакуумных уравнений Эйнштейна принимают вид:

$$R_{u2u2} = (L^2)' \beta'_\infty \exp(2\beta'_\infty u) \rightarrow -0;$$

$$R_{u3u3} = (L^2)' \beta'_\infty \exp(2\beta'_\infty u) \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, при $s \rightarrow +\infty$ в системе возникает истинная сингулярность. Нетрудно убедиться, что при этом $H^2 \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0, V^1 \rightarrow -c$. Плазма в конечном состоянии движется навстречу первоначальному направлению распространения ГВ. Этот *реверс* плазмы нуждается в более полном самосогласованном анализе.

V.6 Уравнения РМГД для анизотропной плазмы

В предыдущих разделах рассматривалась локально изотропная плазма ($p_\perp = p_\parallel = p$); анизотропия создавалась лишь исключительно магнитным полем. В сильных магнитных полях в результате магнитотормозного излучения нарушается локальное термодинамическое равновесие (ЛТР) в плазме, поэтому, вообще говоря:

$$p_\perp \neq p_\parallel. \quad (V.212)$$

Данный раздел посвящен выяснению влияния степени анизотропии плазмы на формирование электромагнитного отклика плазмы на ПГВ [119]. В основу теоретической модели описания магнитоактивной плазмы в

поле ПГВ положены уравнения релятивистской магнитной гидродинамики [113], которые, как это следует из [118], могут быть получены и из кинетических уравнений для бесстолкновительной плазмы в дрейфовом приближении (V.2):

$$\omega \ll \omega_B, \quad (\text{V.213})$$

где ω - частота ГВ, $\omega_B = eH/m_e$ - ларморовская частота.

V.6.1 Уравнения РМГД для произвольной структуры ТЭИ плазмы

V.6.1.1 Основные уравнения

Подводя резюме предыдущим разделам, можно сказать, что в наиболее общем виде уравнения РМГД получаются из законов сохранения для полного тензора энергии - импульса (ТЭИ) плазмы и электромагнитного поля (V.43) при требовании совпадения динамических скоростей плазмы и электромагнитного поля (V.3), (V.4) и наложении требований на инварианты тензора Максвелла (V.50), (V.51). При этом оказывается, что напряженность электрического поля (V.10) в сопутствующей системе отсчета равна нулю (V.30), а напряженность пространственноподобного вектора магнитного поля (V.10), ортогонального вектору скорости плазмы (V.13), отлична от нуля. При этом из указанных соотношений также следуют [113]:

1. вторая группа уравнений Максвелла (V.74) с пространственноподобным дрейфовым током (V.75);
2. дифференциальные соотношения на тензор энергии - импульса: (V.82), (V.83),
3. а также полезные дифференциальные тождества: (V.90) - (V.92).

Указанные соотношения представляют полную систему алгебраических и дифференциальных следствий (V.4), (V.3), (V.43), (V.44), (V.50), (V.51) и при фиксации ТЭИ плазмы, фактически, являются и системой уравнений релятивистской магнитной гидродинамики плазмы в гравитационном поле.

V.6. Уравнения РМГД для анизотропной плазмы

V.6.2 Вывод уравнений РМГД для анизотропной плазмы

Перейдем к выводу этих уравнений. Введем согласно [113] единичный пространственноподобный вектор — орт напряженности магнитного поля n^i :

$$n^i = \frac{N^i}{H}; \quad (n, n) = -1. \quad (\text{V.214})$$

Два независимых вектора v^i , n^i и метрический тензор g^{ij} однозначно определяют следующую алгебраическую структуру ТЭИ анизотропной плазмы:

$$\overset{p}{T}{}^{ij} = (\varepsilon + p_{\perp}) v^i v^j - p_{\perp} g^{ij} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) n^i n^j, \quad (\text{V.215})$$

где v^i - единичный времениподобный вектор скорости:

$$(v, v) = 1. \quad (\text{V.216})$$

След ТЭИ (V.215) равен:

$$\overset{p}{T} = \varepsilon - p_{\parallel} - 2p_{\perp}, \quad (\text{V.217})$$

поэтому вследствие известной теоремы вириала (см., например, [46]) должно выполняться условие:

$$p_{\parallel} + 2p_{\perp} \leq \varepsilon. \quad (\text{V.218})$$

ТЭИ электромагнитного поля равен ([113]):

$$\overset{f}{T}{}_{ij} = \frac{1}{8\pi} (2H^2 v_i v_j - 2H_i H_j - g_{ij} H^2). \quad (\text{V.219})$$

Подставляя в (V.82), (V.83) ТЭИ плазмы в форме (V.215), получим с использованием тождеств (V.90) - (V.92) уравнения:

$$\varepsilon_{,i} v^i + (\varepsilon + p_{\parallel}) v_{,i}^i + (p_{\parallel} - p_{\perp}) v^i (\ln H)_{,i} = 0; \quad (\text{V.220})$$

$$(\varepsilon + p_{\parallel}) H_{,i}^i - (p_{\parallel} - p_{\perp}) H^i (\ln H)_{,i} + (p_{\parallel})_{,i} H^i = 0. \quad (\text{V.221})$$

V.7 Решение уравнений РМГД в метрике ПГВ для анизотропной плазмы

V.7.1 Метрика ПГВ и начальные условия

Рассмотрим метрику ПГВ с поляризацией e_+ (V.94)

$$ds^2 = 2dudv - L^2[e^{2\beta}(dx^2)^2 + e^{-2\beta}(dx^3)^2], \quad (\text{V.222})$$

где $\beta(u)$ - амплитуда, а $L(u)$ - фоновый фактор ПГВ; $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x^1)$ - запаздывающее, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + x^1)$ - опережающее время. Как известно, метрика (V.273) допускает группу движений G_5 , которой соответствует три линейно независимых в точке вектора Киллинга:

$$\xi_{(1)}^i = \delta_v^i; \quad \xi_{(2)}^i = \delta_2^i; \quad \xi_{(3)}^i = \delta_3^i. \quad (\text{V.223})$$

Пусть в отсутствие ПГВ ($u \leq 0$):

$$\beta(u)|_{u \leq 0} = 0; \quad L(u)|_{u \leq 0} = 1, \quad (\text{V.224})$$

плазма однородна и покоится:

$$v_{|u \leq 0}^v = v_{|u \leq 0}^u = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad v^2 = v^3 = 0; \quad (\text{V.225})$$

$$\varepsilon_{|u \leq 0} = \varepsilon_0; \quad (\text{V.226})$$

$$(p_{\parallel})_{|u \leq 0} = \overset{0}{p}_{\parallel}; \quad (p_{\perp})_{|u \leq 0} = \overset{0}{p}_{\perp}, \quad (\text{V.227})$$

а однородное магнитное поле направлено в плоскости $\{x^1, x^2\}$:

$$H_1|_{u \leq 0} = H_0 \cos \Omega; \quad H_2|_{u \leq 0} = H_0 \sin \Omega; \quad (\text{V.228})$$

$$H_3|_{u \leq 0} = 0; \quad E_i|_{u \leq 0} = 0, \quad (\text{V.229})$$

V.7. Решение уравнений РМГД для анизотропной плазмы

где Ω - угол между осью $0x^1$ (направлением распространения ПГВ) и направлением магнитного поля \mathbf{H} . Условиям (V.228)-(V.229) соответствует векторный потенциал:

$$\begin{aligned} A_v &= A_u = A_2 = 0; \\ A_3 &= H_0(x^1 \sin \Omega - x^2 \cos \Omega); \quad (u \leq 0). \end{aligned} \quad (\text{V.230})$$

В разделе V.3 было показано, что в присутствии ПГВ компонента A_3 векторного потенциала принимает вид:

$$A_3 = -H_0 x^2 \cos \Omega + \frac{1}{\sqrt{2}} H_0 [v - \psi(u)] \sin \Omega, \quad (\text{V.231})$$

где $\psi(u)$ - произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяющая начальному условию:

$$\psi|_{u \leq 0} = u. \quad (\text{V.232})$$

Компоненты вектора напряженности магнитного поля относительно векторного потенциала (V.224) равны:

$$\begin{aligned} H_v &= -H_0 L^{-2} (v_v \cos \Omega + \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 \sin \Omega); \\ H_u &= H_0 L^{-2} (v_u \cos \Omega - \frac{1}{\sqrt{2}} \psi' v_2 \sin \Omega); \\ H_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} H_0 e^{2\beta} \sin \Omega (v_u + v_v \psi'); \quad H_3 = 0, \end{aligned} \quad (\text{V.233})$$

а условия вмороженности (V.30) сводятся к одному уравнению [113]:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (v_v \psi' - v_u) \sin \Omega + v^2 \cos \Omega = 0. \quad (\text{V.234})$$

При этом инвариант H^2 равен:

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\cos^2 \Omega}{L^4} + \frac{\sin^2 \Omega}{L^2} \psi' e^{2\beta} \right). \quad (\text{V.235})$$

Далее, в [113] показано, что соотношение нормировки вектора скорости (V.216) с помощью (V.233) - (V.235) может быть представлено в эквивалентной форме:

$$(v_v \cos \Omega + \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 \sin \Omega)^2 = \frac{N^2}{N_0^2} v_v^2 L^4 - \frac{\sin^2 \Omega}{2} L^2 e^{2\beta}. \quad (\text{V.236})$$

V.7.2 Интегралы движения

Вследствие существования движений (V.223) законы сохранения полного ТЭИ плазмы в поле ПГВ имеют следующие интегралы [113]:

$$L^2 \underset{(a)}{\xi^i} T_{vi} = C_a = Const; \quad (a = \overline{1,3}), \quad (\text{V.237})$$

из которых лишь первые два нетривиальны. В [113] указано, что следствие этих законов эквивалентно единственному нетривиальному уравнению Максвелла. Подставляя в интегралы (V.239) выражения для ТЭИ плазмы и электромагнитного поля (V.215), (V.219), используя соотношения (V.233) - (V.238) а также начальные условия (V.224), (V.225), приведем нетривиальные интегралы к виду:

$$2L^2 v_v^2 (\varepsilon + p_{\parallel}) - e^{2\beta} \frac{(\overset{0}{H}_{\perp})^2}{H^2} (p_{\parallel} - p_{\perp}) = (\overset{0}{\varepsilon} + \overset{0}{p}) \Delta(u); \quad (\text{V.238})$$

$$\begin{aligned} L^2 (\varepsilon + p_{\parallel}) v_v v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2\beta} \cos \Omega \sin \Omega \frac{H_0^2}{H^2} (p_{\parallel} - p_{\perp}) = \\ = (e^{2\beta} - 1) \frac{H_0^2 \cos \Omega \sin \Omega}{4\sqrt{2}\pi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \Omega \sin \Omega (\overset{0}{p}_{\parallel} - \overset{0}{p}_{\perp}), \end{aligned} \quad (\text{V.239})$$

где:

$$\overset{0}{p} = \cos^2 \Omega \overset{0}{p}_{\parallel} + \sin^2 \Omega \overset{0}{p}_{\perp}; \quad (\text{V.240})$$

$$(\overset{0}{H}_{\perp})^2 = H_0^2 \sin^2 \Omega \quad (\text{V.241})$$

и введена так называемая *управляющая функция GMSW*:

$$\Delta(u) = \left[1 - \alpha^2 (e^{2\beta} - 1) \right], \quad (\text{V.242})$$

отличающаяся от аналогичной функции для изотропной плазмы [113], [115] определением безразмерного параметра α^2 :

$$\alpha^2 = \frac{(\overset{0}{H}_{\perp})^2}{4\pi(\overset{0}{\varepsilon} + \overset{0}{p})}. \quad (\text{V.243})$$

Разрешая (V.238), (V.239) относительно v_v , v_2 , получим выражения для координат вектора скорости через скаляры: ε , p_{\parallel} , p_{\perp} , ψ и явные функции запаздывающего времени:

V.7. Решение уравнений РМГД для анизотропной плазмы

$$v_v^2 = \frac{\overset{0}{\varepsilon} + \overset{0}{p}}{2L^2(\varepsilon + p_{\parallel})} \Delta(u) + e^{2\beta} \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{2L^2(\varepsilon + p_{\parallel})} \frac{(H_{\perp})^2}{H^2}; \quad (\text{V.244})$$

$$\frac{v_2}{v_v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \Omega \cos \Omega \times \frac{(e^{2\beta} - 1) \frac{H_{\perp}^2}{4\pi} - \left[e^{2\beta} \frac{H_{\perp}^2}{H^2} (p_{\parallel} - p_{\perp}) - (\overset{0}{p}_{\parallel} - \overset{0}{p}_{\perp}) \right]}{\left[(\overset{0}{\varepsilon} + \overset{0}{p}) \Delta(u) + e^{2\beta} \frac{(H_{\perp})^2}{H^2} (p_{\parallel} - p_{\perp}) \right]}. \quad (\text{V.245})$$

С помощью (V.244), (V.245) из соотношения нормировки вектора скорости (V.216) найдем координату v_u этого вектора:

$$\frac{v_u}{v_v} = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-2\beta}}{L^2} \left(\frac{v_2}{v_v} \right)^2 + \frac{1}{v_v^2} \right], \quad (\text{V.246})$$

а из условия вмороженности (V.234) найдем значение производной потенциала ψ' :

$$\psi' = \frac{v_u}{v_v} + \frac{e^{-2\beta}}{L^2} \text{ctg} \Omega \frac{v_2}{v_v}, \quad (\text{V.247})$$

с помощью которой из соотношения (V.235) определяется инвариант H^2 .

Используя интегралы (V.238), (V.239), можно показать, что из двух дифференциальных уравнений (V.220), (V.221) лишь одно независимое. В качестве такого возьмем уравнение (V.220), которое в метрике ПГВ принимает вид:

$$L^2 \varepsilon' v_v + (\varepsilon + p_{\parallel})(L^2 v_v)' + \frac{1}{2} L^2 (p_{\parallel} - p_{\perp}) v_v (\ln H^2)' = 0. \quad (\text{V.248})$$

Таким образом, оставшееся уравнение (V.248) в конечном счете представляет собой дифференциальное уравнение на 3 неизвестные скалярные функции: ε , p_{\parallel} и p_{\perp} . Такая недоопределенность является известным следствием неполноты гидродинамического описания плазмы. Для решения этого уравнения необходимо наложить две дополнительные связи между функциями ε , p_{\parallel} , p_{\perp} , т.е., уравнения состояния вида:

$$p_{\parallel} = f(\varepsilon); \quad p_{\perp} = g(\varepsilon). \quad (\text{V.249})$$

V.7.3 Баротропное уравнение состояния анизотропной плазмы

V.7.3.1 Общие формулы

Рассмотрим баротропное состояние анизотропной плазмы, когда связи (V.249) являются линейными:

$$p_{\parallel} = k_{\parallel} \varepsilon; \quad p_{\perp} = k_{\perp} \varepsilon, \quad (\text{V.250})$$

причем вследствие (V.218) постоянные коэффициенты k_{\parallel} , k_{\perp} удовлетворяют неравенству:

$$k_{\parallel} + 2k_{\perp} \leq 1, \quad (\text{V.251})$$

вследствие которого всегда:

$$p_{\parallel} \leq 1; \quad p_{\perp} \leq \frac{1}{2}. \quad (\text{V.252})$$

Уравнение (V.248) при связях (V.250) легко интегрируется, и мы получим еще один интеграл:

$$\varepsilon(\sqrt{2}L^2v_v)^{(1+k_{\parallel})} H^{(k_{\parallel}-k_{\perp})} = \varepsilon^0 H_0^{(k_{\parallel}-k_{\perp})}. \quad (\text{V.253})$$

Таким образом, формально задача решена, так как свелась к решению системы алгебраических уравнений, которая, однако, все еще слишком сложна для ее решения и анализа. Решение задачи существенно определяется тремя безразмерными параметрами: $\cos \Omega$, k_{\perp} и k_{\parallel} . Ниже мы рассмотрим частные значения этих параметров.

V.7.4 Поперечное распространение ПГВ

В этом случае $\cos \Omega = 0$, и из (V.245) сразу получим:

$$v_2 = 0. \quad (\text{V.254})$$

Тогда (V.216), (V.234), (V.250) дают:

$$v_u = \frac{1}{2v_v}; \quad \psi' = \frac{1}{2v_v^2}; \quad (\text{V.255})$$

$$H = \frac{H_0 e^{\beta}}{\sqrt{2}L v_v}, \quad (\text{V.256})$$

V.7. Решение уравнений РМГД для анизотропной плазмы

и подстановка (V.256) в (V.244) приводит к результату:

$$v_v^2 = \frac{1}{2} \frac{\overset{0}{\varepsilon}}{L^2 \varepsilon} \Delta(u). \quad (\text{V.257})$$

Подставляя (V.256), (V.257) в (V.253), получаем замкнутое уравнение на переменную ε , решая которое, найдем окончательно:

$$\varepsilon = \overset{0}{\varepsilon} \left[\Delta^{1+k_\perp} L^{2(1+k_\parallel)} e^{2\beta(k_\parallel - k_\perp)} \right]^{-g_\perp}; \quad (\text{V.258})$$

$$v_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\Delta L^{k_\parallel + k_\perp} e^{\beta(k_\parallel - k_\perp)} \right]^{g_\perp}; \quad (\text{V.259})$$

$$H = H_0 \left[\Delta L^{(1+k_\parallel)} e^{-\beta(1-k_\parallel)} \right]^{-g_\perp}, \quad (\text{V.260})$$

где

$$g_\perp = \frac{1}{1 - k_\perp} \in [1, 2]. \quad (\text{V.261})$$

В частности, для ультрарелятивистской плазмы с нулевым продольным давлением:

$$k_\parallel \rightarrow 0; \quad k_\perp \rightarrow \frac{1}{2} \quad (\text{V.262})$$

получим из (V.258) - (V.261):

$$v_v = \frac{1}{\sqrt{2}} L \Delta^2 e^{-\beta}; \quad (\text{V.263})$$

$$\varepsilon = \overset{0}{\varepsilon} L^{-4} \Delta^{-3} e^{2\beta}; \quad H = H_0 L^{-2} \Delta^{-2} e^{2\beta}. \quad (\text{V.264})$$

С учетом полученных решений уравнение энергобаланса:

$$(\beta'_*)^2 = (\beta')^2 + 4\pi(T_{uu} - \overset{0}{T}_{uu}), \quad (\text{V.265})$$

можно записать в форме в стандартной форме:

$$\dot{q}_*^2 = \dot{q}^2 + \xi^2 V(q), \quad (\text{V.266})$$

где потенциальная функция $V(q)$ теперь имеет вид:

$$V(q) = \left[\Delta(q) \right]^{-4g_\perp} - 1, \quad (\text{V.267})$$

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

а ξ^2 - так называемый *первый параметр GMSW* [113]:

$$\xi^2 = \frac{H_0^2}{4\beta_0^2\omega^2}. \quad (\text{V.268})$$

Из (V.266) получаем минимально возможное значение управляющей функции:

$$\Delta_{min} = \left(\frac{1}{\xi^2} + 1 \right)^{-\gamma_\perp}, \quad (\text{V.269})$$

где:

$$\gamma_\perp = \frac{1}{4g_\perp} = \frac{1 - k_\perp}{4} \leq \frac{1}{4}. \quad (\text{V.270})$$

При этом максимально достижимая плотность энергии магнитного поля равна:

$$\left(\frac{H^2}{8\pi} \right)_{max} = \frac{H_0^2}{8\pi} \sqrt{1 + \frac{1}{\xi^2}} \quad (\text{V.271})$$

и вообще не зависит от уравнений состояния плазмы (V.249). Скорость плазмы в GMSW также оказывается не зависящей от уравнения состояния. Максимальная же плотность энергии плазмы без магнитного поля оказывается зависящей от степени анизотропии плазмы:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon^0 \left(1 + \frac{1}{\xi^2} \right)^{\frac{1}{4}(1+k_\perp)} \quad (\text{V.272})$$

и максимальна для ультрарелятивистской плазмы с равным нулю продольным давлением.

Таким образом, максимальное значение амплитуды локального отклика сильно замагниченной плазмы с линейными уравнениями состояния (V.249) не зависит от степени анизотропии плазмы и ее уравнения состояния. Глобальный же магнитотормозной GMSW-отклик плазмы зависит от степени ее анизотропии и уравнения состояния, поскольку интенсивность магнитотормозного излучения отдельного электрона пропорциональна произведению квадрата напряженности магнитного поля на квадрат поперечного импульса P_\perp^2 , связанного с соответствующей компонентой давления, p_\perp . Для выявления этой связи и установления реальных уравнений состояния вместо (V.249) необходимо построение кинетической модели GMSW в анизотропной плазме.

V.8. Дрейфовое решение для анизотропной плазмы

V.8 Дрейфовое решение кинетического уравнения для анизотропной плазмы

Итак, приступим к построению более полной, кинетической модели GMSW.

V.8.1 Бесстолкновительное кинетическое уравнение

Рассмотрим бесстолкновительную плазму в метрике ПГВ с поляризацией e_+ (V.94)[47]:

$$ds^2 = 2dudv - L^2[e^{2\beta}(dx^2)^2 + e^{-2\beta}(dx^3)^2] \equiv \quad (V.273)$$

$$\equiv 2dudv - A(dx^2)^2 - B(dx^3)^2, \quad (V.274)$$

- все обозначения описаны в разделе V.3.

Пусть при $u \leq 0$ ГВ отсутствует, т.е.,-

$$\beta(u)|_{u \leq 0} = 0; \quad L(u)|_{u \leq 0} = 1, \quad (V.275)$$

и выполняются начальные условия (V.96)-(V.99) раздела V.3.

Бесстолкновительное кинетическое уравнение для 8 -мерной функции распределения заряженных частиц сорта a , $F_a(x^i, \mathcal{P}_i)$ имеет вид [49]:

$$[\mathcal{H}_a, F_a] \equiv \frac{\partial F_a}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial \mathcal{P}_i} + \frac{\partial F_a}{\partial \mathcal{P}_i} \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial x^i} = 0, \quad (V.276)$$

где

$$\mathcal{P}_i = p_i + e_a A_i \quad (V.277)$$

- обобщенный импульс частицы, а

$$\mathcal{H}_a(x^i, \mathcal{P}_i) = \frac{1}{2} g^{ij} (\mathcal{P}_i - e_a A_i) (\mathcal{P}_j - e_a A_j) \quad (V.278)$$

- функция Гамильтона заряженной частицы.

Процедура получения уравнений дрейфового приближения на основе бесстолкновительных кинетических уравнений (V.276) была разработана автором в [84]. Здесь мы лишь несколько трансформируем эту процедуру на случай первоначально анизотропного распределения [118].

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

Рассмотрим случай, когда ГВ распространяется перпендикулярно направлению магнитного поля $\Omega = \pi/2$ и будем искать решения кинетического уравнения, не зависящие от переменных v, x^2, x^3 . В соответствии с [118] введем единичный времениподобный вектор v^i :

$$\begin{aligned} v_2 = v_3 = 0; \\ v_u = \sqrt{\frac{\psi'}{2}}; \quad v_v = \sqrt{\frac{1}{2\psi'}} \end{aligned} \quad (\text{V.279})$$

и преобразуем кинетические уравнения в систему отсчета (СО), движущуюся со скоростью дрейфа плазмы v^i :

$$\mathcal{P}_v = v_u(\mathcal{P}_4 + \mathcal{P}_1) \quad \mathcal{P}_u = v_v(\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_1). \quad (\text{V.280})$$

Якобиан этого преобразования равен единице:

$$\frac{D(\mathcal{P}_v, \mathcal{P}_u)}{D(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_4)} = 1. \quad (\text{V.281})$$

В результате получим уравнение:

$$\begin{aligned} v_v(\mathcal{P}_4 + \mathcal{P}_1) \frac{\partial F_a}{\partial u} - v'_v(\mathcal{P}_4 + \mathcal{P}_1) \left(\mathcal{P}_1 \frac{\partial F_a}{\partial \mathcal{P}_4} + \mathcal{P}_4 \frac{\partial F_a}{\partial \mathcal{P}_1} \right) - \frac{eH}{\sqrt{B}} \mathcal{P}_3 \frac{\partial F_a}{\partial \mathcal{P}_1} + \\ + \frac{1}{2} [(A^{-1})' \mathcal{P}_2^2 + (B^{-1})' \mathcal{P}_3^2] v_u \left(\frac{\partial F_a}{\partial \mathcal{P}_4} + \frac{\partial F_a}{\partial \mathcal{P}_1} \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{V.282})$$

где:

$$H^2 = -\frac{2}{B} \partial_u A_3 \partial_v A_3 = H_0^2 \psi' \frac{e^{2\beta}}{L^2} \quad (\text{V.283})$$

- инвариант электромагнитного поля (квадрат напряженности магнитного поля в СО, движущейся со скоростью v^i).

На фронте ПГВ решение (V.282) должно удовлетворять начальному условию, соответствующему *однородной анизотропной бестоковой плазме*:

$$F_a(x^i, \mathcal{P}_i)|_{u=0} = f_a(p_\perp^2, p_\parallel^2) \delta(\mathcal{H}_a - \frac{1}{2} m_a^2), \quad (\text{V.284})$$

где f_a - произвольная функция своих аргументов и введены обозначения:

$$p_\perp^2 = p_1^2 + p_3^2; \quad p_\parallel = -p_2. \quad (\text{V.285})$$

Кинетическое уравнение (V.282) имеет 3 точных интеграла:

V.8. Дрейфовое решение для анизотропной плазмы

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_a(x^i, \mathcal{P}_i) &= \frac{1}{2} m_a^2 = \text{Const}; \\ \mathcal{P}_2 &= \text{Const}; \quad \mathcal{P}_3 = \text{Const}. \end{aligned} \tag{V.286}$$

Для полного решения задачи необходим еще один независимый интеграл. Этот интеграл мы будем искать приближенно, используя так называемое *дрейфовое приближение*.

V.8.2 Дрейфовое приближение

Итак, будем решать уравнение (V.286) в дрейфовом приближении, когда ларморовская частота каждого сорта заряженных частиц:

$$\omega_a = \frac{e_a H}{m_a} \tag{V.287}$$

гораздо больше характерной частоты, ω , гравитационной волны:

$$\Lambda = \frac{\omega}{\omega_a} \ll 1. \tag{V.288}$$

В нулевом порядке по параметру Λ (V.282) принимает вид:

$$H \frac{\partial F_a}{\partial \mathcal{P}_1} = 0, \tag{V.289}$$

т.е., в дрейфовом приближении F_a не зависит явно от \mathcal{P}_1 . Таким образом, в дрейфовом приближении кроме указанных точных интегралов кинетическое уравнение имеет еще дрейфовые (приближенные) интегралы [118]:

$$\mathcal{P}_4 \approx \text{Const}; \quad u \approx \text{Const}. \tag{V.290}$$

Соответствующее дрейфовому приближению решение кинетического уравнения, переходящее в отсутствие ГВ в анизотропное и бестоковое, можно записать в виде:

$$F_a = f_a(\mathcal{P}_4^2 - \mathcal{P}_2^2, \mathcal{P}_2^2, u) \delta(\mathcal{H}_a - \frac{1}{2} m_a^2), \tag{V.291}$$

где f_a - произвольная функция своих аргументов. В частности, можно выбрать:

$$f_a = f_a^0 \left[\mu_{\perp}^{-2} (\mathcal{P}_4^2 - \mathcal{P}_2^2 - m_a^2) + \mu_{\parallel}^{-2} \mathcal{P}_2^2 \right], \quad (\text{V.292})$$

где $\mu_{\parallel}(u)$, $\mu_{\perp}(u)$ - произвольные функции своих аргументов. Таким образом, в СО (V.280), движущейся со скоростью v^i , дрейфовое решение локально совпадает с невозмущенным распределением (V.284).

Подставляя найденную функцию распределения нулевого дрейфового приближения (V.291) в кинетическое уравнение (V.282), легко получить поправку первого дрейфового приближения, $\delta F_a \sim \Lambda^{-1}$, к функции распределения, определенную с точностью до аддитивного члена, являющегося произвольной функцией указанных дрейфовых интегралов (см. [118]). Однако, точным следствиями бесстолкновительного кинетического уравнения (V.282) являются законы сохранения числа каждого сорта частиц и полного тензора энергии - импульса (ТЭИ) плазмы и электромагнитного поля [65]. Эти законы налагают определенные ограничения на указанный аддитивный член и приводят к дифференциальным уравнениям на функции $\mu_{\parallel}(u)$ и $\mu_{\perp}(u)$.

Вследствие свойств симметрии оказывается, что поправка первого порядка к функции распределения дает вклад лишь в компоненту n_3 вектора плотности потока числа частиц и компоненты T_{v3}^a и T_{u3}^a ТЭИ частиц. Однако, компонента $n_3(u, v)$ не влияет на уравнение непрерывности, в уравнение же переноса полного ТЭИ для компоненты $i = 3$ входят лишь указанные две компоненты ТЭИ частиц; которые не входят в остальные уравнения переноса. С другой стороны дрейфовый ток, определяемый первой поправкой к функции распределения, можно получить как следствие законов сохранения энергии-импульса и уравнений Максвелла, не прибегая к решению кинетического уравнения (см. [113]). В результате оказывается, что система уравнений переноса и уравнений Максвелла распадается на две подсистемы, из которой одна, определяемая функцией нулевого дрейфового приближения, является автономной и замкнутой и полностью определяет функции $\psi(u)$, $\mu_{\parallel}(u)$, $\mu_{\perp}(u)$. Поправка первого дрейфового приближения к функции распределения не влияет на уравнения магнитной гидродинамики.

V.9 Кинетическое обоснование гравимагнитных ударных волн

V.9.1 Алгебраическая структура моментов функции распределения

Возвращаясь в исходную СО с помощью (V.280), введем проекции вектора импульса:

$$\begin{aligned} p_{\parallel} &= (p, n); & p^2 &= (v^i v^j - g^{ij}) p_i p_j; \\ p_{\perp} &= p^2 - p_{\parallel}^2 = (v^i v^j - g^{ij} - n^i n^j) p_i p_j, \end{aligned} \quad (\text{V.293})$$

где n^i - единичный пространственноподобный вектор в направлении вектора напряженности магнитного поля $H_i = v^j F_{ji}^*$:

$$n_i = \frac{H_i}{H}; \quad H^2 = -(H, H). \quad (\text{V.294})$$

Тогда функция распределения нулевого дрейфового приближения (V.292) принимает вид:

$$f_a = f_a^0 (\mu_{\parallel}^{-2} p_{\parallel}^2 + \mu_{\perp}^{-2} p_{\perp}^2). \quad (\text{V.295})$$

Нетрудно показать, что моменты этого распределения:

$$n_a^i(x) = \int_{P(x)} f_a(x, p) p^i dP; \quad T_a^{ij}(x) = \int_{P(x)} f_a(x, p) p^i p^j dP, \quad (\text{V.296})$$

где

$$dP = \frac{\sqrt{-g}(2S+1) dp^1 dp^2 dp^3}{(2\pi\hbar)^3 p_4}$$

(S - спин частиц), имеют следующую алгебраическую структуру:

$$n_a^i(u) = n v^i; \quad (\text{V.297})$$

$$T_a^{ij}(u) = (\varepsilon + P_\perp)v^i v^j - P_\perp g^{ij} + (P_\parallel - P_\perp)n^i n^j, \quad (\text{V.298})$$

где n , ε , P_\parallel , P_\perp - некоторые скалярные функции переменной u ; индексы сорта частиц, a , у этих скаляров для простоты обозначений сняты. След ТЭИ частиц равен:

$$T_a(u) = \varepsilon - 2P_\perp - P_\parallel. \quad (\text{V.299})$$

Из (V.297) следует, что введенный нами в (V.279) вектор скорости v^i совпадает с вектором кинематической скорости плазмы. Легко проверить выполнение условия [113]:

$$(v, n) = 0, \quad (\text{V.300})$$

вследствие которого вектор v^i является собственным вектором ТЭИ частиц, т.е., и вектором динамической по Сингу [41] скорости плазмы. Таким образом, введенная соотношениями (V.280), система отсчета является сопутствующей с плазмой.

Заметим, что в первом дрейфовом приближении равенство кинематических и динамических скоростей частиц нарушается, вследствие чего и возникает дрейфовый ток.

V.9.2 Уравнения магнитной гидродинамики для анизотропной плазмы в поле ПГВ

В разделе 3 работы [119] получены уравнения РМГД для плазмы в произвольном гравитационном поле и для произвольной структуры ТЭИ плазмы, $\overset{p}{T}_{ij}$, с собственным вектором v^i :

$$\overset{p}{T}_{ij} v^j = \varepsilon v_i, \quad (\text{V.301})$$

где инвариант $\varepsilon > 0$ есть плотность энергии плазмы в сопутствующей СО. При этом на инварианты электромагнитного поля налагались условия:

$$F^{ij} F_{ij}^* = 0; \quad (\text{V.302})$$

$$F_{ij} F^{ij} = 2H^2 > 0. \quad (\text{V.303})$$

В [113] показано, что при выполнении этих условий из закона сохранения

$$T_{,j}^{ij} = 0 \quad (\text{V.304})$$

V.9. Кинетическое обоснование гравимагнитных ударных волн

полного ТЭИ плазмы и электромагнитного поля

$$T_{ij} = T_{ij}^p + T_{ij}^f$$

и первой группы уравнений Максвелла:

$$F^{ij}_{,j} = 0 \quad (\text{V.305})$$

следуют:

1. Условия вмороженности магнитного поля в плазму:

$$F_{ij} v^j = 0 \quad (\text{V.306})$$

(при этом автоматически вектор скорости v^i становится и собственным вектором ТЭИ электромагнитного поля);

2. Вторая группа уравнений Максвелла:

$$F^{ij}_{,j} = -4\pi J_{dr}^i \quad (\text{V.307})$$

с дрейфовым током:

$$J_{dr}^i = -\frac{2F^{ik} T^l_{k,l}}{F_{jm} F^{jm}}; \quad (\text{V.308})$$

3. Дифференциальные соотношения:

$$v^i T^k_{i,k} = 0, \quad (\text{V.309})$$

$$H^i T^k_{i,k} = 0. \quad (\text{V.310})$$

Нетрудно убедиться в том, что тензор Максвелла, определяемый векторным потенциалом (V.118) автоматически удовлетворяет соотношениям (V.303), а вектор скорости (V.279) — условиям вмороженности (V.306). Поэтому вследствие законов сохранения ТЭИ (V.305), которые являются точным следствием кинетических уравнений, в нашем случае

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

также должны выполняться соотношения (V.307) - (V.310). Изотропный вектор Киллинга $\xi^i = \delta_v^i$ дает один точный интеграл уравнений (V.305):

$$L^2 T_v^u = \text{Const} . \quad (\text{V.311})$$

Таким образом, с учетом (V.279) и (V.298) а также начальных условий (V.96)-(V.99) получим из (V.311):

$$L^2(\varepsilon + P_\perp) = \psi'(\varepsilon^0 + P_\perp^0)\Delta(u) . \quad (\text{V.312})$$

где введена так называемая *управляющая функция GMSW* (см. [113]):

$$\Delta(u) = 1 - \alpha^2(e^{2\beta} - 1) \quad (\text{V.313})$$

и безразмерный параметр GMSW:⁷

$$\alpha^2 = \frac{H_0^2}{4\pi(\varepsilon^0 + P_\perp^0)} . \quad (\text{V.314})$$

Далее можно показать, что следствие (V.310) превращается в тождество, а (V.309) дает:

$$\varepsilon' + (\ln H)'(P_\parallel - P_\perp) - \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\psi'}{L^4} \right)' (\varepsilon + P_\parallel) = 0 . \quad (\text{V.315})$$

Других независимых соотношений уравнения сохранения ТЭИ и уравнения Максвелла не дают.

Недостающие уравнения получаются из законов сохранения числа частиц, которые также является точным следствием кинетических уравнений:

$$n_{,i}^i = L^{-2} (L^2 n v_v)' = 0 \Rightarrow$$

$$n_a(u)L^2 = \sqrt{\psi'} n_a^0 . \quad (\text{V.316})$$

Таким образом, получаем систему уравнений (V.312), (V.315), (V.316) для определения трех неизвестных скалярных функций: ψ , μ_\parallel , μ_\perp . Необходимо лишь получить явные выражения скаляров: n , ε , P_\parallel , P_\perp через указанные $(1 + 2n)$ скаляров, где n - число сортов частиц.

⁷Уточненный наличием анизотропии плазмы.

V.9. Кинетическое обоснование гравимагнитных ударных волн

Заметим, что в плазме имеется, по крайней мере, два сорта заряженных частиц (в интересующем нас случае это электроны и протоны). Таким образом, имеется два сорта скаляров μ_{\parallel} и μ_{\perp} , каждую пару которых связывает один закон сохранения числа частиц данного сорта (V.316). В уравнения же (V.312), (V.315) входят суммарные компоненты давления и плотность энергии. Вследствие изначальной электронейтральности плазмы и (V.316) получаем соотношение между локальными концентрациями электронов и протонов (см. раздел V.3) [118]:

$$n_e(u) = n_p(u). \quad (\text{V.317})$$

V.9.3 Вычисление моментов функции распределения

Для вычисления указанных скалярных функций нужно вычислить моменты функции распределения (V.296). Проще всего это сделать, воспользовавшись формулами (V.297), (V.298) в сопутствующей СО согласно формулам (V.280), используя свойство (V.281) этого преобразования и вводя сферические координаты в пространстве импульсов:

$$\begin{aligned} p_1 &= \mu_{\perp} p \cos \theta \cos \phi; \\ p_3 &= \mu_{\perp} p \cos \theta \sin \phi; \\ p_2 &= \mu_{\parallel} p \sin \theta. \end{aligned} \quad (\text{V.318})$$

Поступая таким образом, получим:

$$n = n_0 \mu_{\perp}^2 \mu_{\parallel}, \quad (\text{V.319})$$

где

$$n_0 = \frac{2S+1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} f(p^2) p^2 dp, \quad (\text{V.320})$$

и введена переменная интегрирования:

$$p^2 = \mu_{\parallel}^{-2} p_{\parallel}^2 + \mu_{\perp}^{-2} p_{\perp}^2. \quad (\text{V.321})$$

Таким образом, получим из (V.319), (V.316) и (V.317):

$$(\mu_{\parallel}^2 \mu_{\perp})_e = (\mu_{\parallel}^2 \mu_{\perp})_p = \frac{\sqrt{\psi^T}}{L^2} (\mu_{\parallel}^2 \mu_{\perp})_0. \quad (\text{V.322})$$

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

Далее получим, полагая для определенности:

$$\mu_{\perp} \leq \mu_{\parallel},$$

получим выражения для компонент давления и плотности энергии плазмы:

$$P_{\parallel} = \frac{(2S+1)\mu_{\perp}^2\mu_{\parallel}^3}{4\pi^2(\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2)} \int_0^{\infty} f(p^2)p^2 dp \left[\sqrt{m^2 + \mu_{\parallel}^2 p^2} - \frac{m^2 + \mu_{\perp}^2 p^2}{p\sqrt{\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2}} \ln \left(\frac{\sqrt{m^2 + \mu_{\parallel}^2 p^2} + p\sqrt{\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2}}{\sqrt{m^2 + \mu_{\perp}^2 p^2}} \right) \right]; \quad (\text{V.323})$$

$$P_{\perp} = \frac{(2S+1)\mu_{\perp}^4\mu_{\parallel}}{8\pi^2(\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2)} \int_0^{\infty} f(p^2)p^2 dp \times \left[-\sqrt{m^2 + \mu_{\parallel}^2 p^2} + \frac{m^2 + p^2(2\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2)}{p\sqrt{\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2}} \ln \left(\frac{\sqrt{m^2 + \mu_{\parallel}^2 p^2} + p\sqrt{\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2}}{\sqrt{m^2 + \mu_{\perp}^2 p^2}} \right) \right]; \quad (\text{V.324})$$

$$\varepsilon = \frac{2S+1}{4\pi^2} \mu_{\perp}^2 \mu_{\parallel} \int_0^{\infty} f(p^2)p^2 dp \left[\sqrt{m^2 + \mu_{\parallel}^2 p^2} + \frac{m^2 + \mu_{\perp}^2 p^2}{p\sqrt{\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2}} \ln \left(\frac{\sqrt{m^2 + \mu_{\parallel}^2 p^2} + p\sqrt{\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2}}{\sqrt{m^2 + \mu_{\perp}^2 p^2}} \right) \right]. \quad (\text{V.325})$$

Заметим, что все приведенные выражения (V.323) - (V.325) имеют конечные пределы при $\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2 = 0$. Из (V.323) - (V.325) можно получить следствие:

$$T_i^i \equiv \varepsilon - P_{\parallel} - 2P_{\perp} = \frac{(2S+1)m^2\mu_{\perp}^2\mu_{\parallel}}{2\pi^2\sqrt{\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2}} \times \int_0^{\infty} \ln \left(\frac{\sqrt{m^2 + \mu_{\parallel}^2 p^2} + p\sqrt{\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2}}{\sqrt{m^2 + \mu_{\perp}^2 p^2}} \right) f(p^2)p dp. \quad (\text{V.326})$$

V.10. Ультрарелятивистская анизотропная плазма

Заметим также, что в случае $\mu_{\parallel} \leq \mu_{\perp}$ логарифмические функции в найденных моментах необходимо заменить на функции \arcsin .

V.10 Ультрарелятивистская анизотропная плазма

V.10.1 Плотность энергии и давление

Известные модели магнитосфер пульсаров (см., например, [120]) приводят к очень высоким значениям кинетической энергии электронов и протонов (до 10^{18} eV). Таким образом, GMSW, по - видимому, всегда реализуется в ультрарелятивистской плазме.

В ультрарелятивистской плазме масса покоя частиц не влияет на макроскопические моменты в дрейфовом приближении, поэтому можно полагать:

$$(\mu_{\parallel})_e = (\mu_{\parallel})_p; \quad (\mu_{\perp})_e = (\mu_{\perp})_p. \quad (V.327)$$

Для ультрарелятивистской плазмы:

$$\mu_{\perp} p \gg m; \quad \mu_{\parallel} p \gg m; \quad (V.328)$$

приведенные выражения становятся явными функциями μ_{\perp} и μ_{\parallel} :

$$P_{\parallel} = \frac{E_0}{2} \frac{\mu_{\perp}^2 \mu_{\parallel}^3}{\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2} \left[\mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\perp}^2}{\sqrt{\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2}} \ln \left(\frac{\mu_{\parallel} + \sqrt{\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2}}{\mu_{\perp}} \right) \right]; \quad (V.329)$$

$$P_{\perp} = \frac{E_0}{4} \frac{\mu_{\perp}^4 \mu_{\parallel}}{\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2} \left[\frac{2\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2}{\sqrt{\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2}} \ln \left(\frac{\mu_{\parallel} + \sqrt{\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2}}{\mu_{\perp}} \right) - \mu_{\parallel} \right], \quad (V.330)$$

$$\varepsilon = \frac{E_0}{2} \mu_{\perp}^2 \mu_{\parallel} \left[\mu_{\parallel} + \frac{\mu_{\perp}^2}{\sqrt{\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2}} \ln \left(\frac{\mu_{\parallel} + \sqrt{\mu_{\parallel}^2 - \mu_{\perp}^2}}{\mu_{\perp}} \right) \right], \quad (V.331)$$

где

$$E_0 = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} f(p^2) p^3 dp = \text{Const} \quad (V.332)$$

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

- плотность энергии изотропной однородной плазмы. Из (V.326) в рассматриваемом приближении следует:

$$\varepsilon - P_{\parallel} - 2P_{\perp} = 0. \quad (\text{V.333})$$

V.10.2 Частные решения

Полученные выражения все еще слишком сложны для того, чтобы извлечь с помощью них какую-либо информацию из уравнений (V.312) и (V.315). Поэтому рассмотрим эти уравнения при предельных значениях параметра анизотропии плазмы:

$$\delta = \frac{\mu_{\perp}}{\mu_{\parallel}}. \quad (\text{V.334})$$

V.10.2.1 Изотропная плазма: $\delta \rightarrow 1$

Вычисляя пределы при $\delta \rightarrow 1$ в выражениях (V.328) - (V.332), получим:

$$P_{\parallel} = P_{\perp} = \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{1}{6}\mu^4 E_0, \quad (\text{V.335})$$

где $\mu_{\parallel} = \mu_{\perp} = \mu$. Тогда нетрудно убедиться, что уравнения (V.312) и (V.322) имеют одинаковые решения:

$$\mu^3 = \frac{\mu_0^3}{L^2} \sqrt{\psi'}. \quad (\text{V.336})$$

Этот факт имеет принципиальную важность, так как он обеспечивает микроскопическое обоснование уравнений РМГД [113]. Действительно, если бы уравнения (V.312) и (V.322) имели независимые следствия, это означало бы, что изначальная изотропия бесстолкновительной плазмы нарушается гравитационной волной, т.е., уравнения РМГД были бы непригодны для описания бесстолкновительной плазмы.

Подставляя (V.336) в уравнение (V.315), получим известные решения [113] для изотропной ультрарелятивистской плазмы:

$$\psi' = \frac{1}{L^2 \Delta^3}; \quad (\text{V.337})$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{L^4 \Delta^2}; \quad (\text{V.338})$$

V.10. Ультрарелятивистская анизотропная плазма

$$H^2 = H_0^2 \frac{e^{2\beta}}{L^4 \Delta^3}; \quad (\text{V.339})$$

при этом:

$$\mu = \frac{\mu_0}{L} \frac{1}{\sqrt{\Delta}}. \quad (\text{V.340})$$

V.10.2.2 Плазма с вымороженным поперечным импульсом: $\delta \rightarrow 0$

В этом случае из (V.328) - (V.332) получим:

$$P_{\parallel} \approx \varepsilon = \frac{1}{2} E_0 \mu_{\parallel}^2 \mu_{\perp}^2; \quad P_{\perp} \approx 0. \quad (\text{V.341})$$

Тогда уравнение (V.312) имеет интеграл:

$$\frac{\varepsilon H L^4}{\psi'} = \varepsilon_0 H_0. \quad (\text{V.342})$$

Используя в (V.342) интеграл (V.322) и выражение для H (V.283), получим выражение для μ_{\perp} :

$$\mu_{\perp} = (\mu_{\perp})_0 \frac{e^{-\beta}}{L}. \quad (\text{V.343})$$

Подставляя теперь (V.343) в (V.341), а полученный результат - в (V.312), найдем с учетом интеграла (V.322):

$$\begin{aligned} \psi' &= \frac{e^{-2\beta}}{L^2 \Delta^2}; \\ \mu_{\parallel} &= \frac{(\mu_{\parallel})_0}{L \sqrt{\Delta}}; \end{aligned} \quad (\text{V.344})$$

$$\varepsilon = P_{\parallel} = \varepsilon_0 \frac{e^{-2\beta}}{L^4 \Delta}; \quad P_{\perp} = P_{\perp}^0 \frac{e^{-4\beta}}{L^4}; \quad (\text{V.345})$$

$$H^2 = \frac{H_0^2}{L^4 \Delta^2}. \quad (\text{V.346})$$

Из приведенных решений видно, что на фронте GMSW ($\Delta \rightarrow 0$) значение поперечной компоненты давления, оставаясь малым, фактически сохраняется - ($P_{\perp} \approx P_{\perp}^0$), в то время как значение продольной компоненты давления стремится к бесконечности пропорционально Δ^{-1} . Таким образом, на фронте GMSW первоначальная анизотропия плазмы усиливается.

V.11 Влияние анизотропии плазмы на магнитотормозное излучение

Средние значения квадратов проекций импульса относительно распределения (V.295) в сопутствующей СО порядка:

$$\langle p_{\perp}^2 \rangle \sim \mu_{\perp}^2; \quad \langle p_{\parallel}^2 \rangle \sim \mu_{\parallel}^2. \quad (\text{V.347})$$

Тогда среднее значение энергии ультрарелятивистской частицы есть:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \sqrt{p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2} \sim \sqrt{\mu_{\perp}^2 + \mu_{\parallel}^2}. \quad (\text{V.348})$$

Таким образом, в случае сильно анизотропной плазме (при $\delta \rightarrow 0$) получим из (V.348):

$$\langle \mathcal{E} \rangle \sim \mu_{\parallel}. \quad (\text{V.349})$$

Подставляя в эти выражения значения μ_{\perp} и μ_{\parallel} из (V.343), (V.344), найдем:

$$\langle p_{\perp}^2 \rangle \approx \langle p_{\perp}^2 \rangle_0 \frac{e^{-2\beta}}{L^2} \approx \text{Const}; \quad \langle p_{\parallel}^2 \rangle \approx \frac{\langle p_{\parallel}^2 \rangle_0}{L^2 \Delta}; \quad \langle \mathcal{E} \rangle \approx \frac{\langle \mathcal{E} \rangle_0}{L \sqrt{\Delta}}. \quad (\text{V.350})$$

При малых значениях δ мало и среднее значение угла χ между вектором микроскопической скорости ультрарелятивистской частицы \mathbf{V} и вектором напряженности магнитного поля \mathbf{H} :

$$\sin \chi = \frac{V_{\perp}}{V} \approx \frac{\sqrt{\langle p_{\perp}^2 \rangle}}{\langle \mathcal{E} \rangle} \Rightarrow \chi \approx \chi_0 e^{-\beta} \sqrt{\Delta}, \quad (\text{V.351})$$

где $\chi_0 = \delta$.

Как известно (см., например, [43]), интенсивность магнитотормозного излучения ультрарелятивистской частицы сосредоточено в узком конусе с осью \mathbf{H} и углом 2χ при вершине. Таким образом, если $2\chi_0$ есть угол выхода магнитотормозного излучения невозмущенной плазмы, то 2χ есть угол выхода магнитотормозного излучения в GMSW. На фронте GMSW ($\Delta(u) \rightarrow 0$) угол выхода излучения стремится к нулю. При этом полная интенсивность магнитотормозного излучения электрона [43]:

$$I = \frac{2e^4}{3m^4} p_{\perp} H^2 \quad (\text{V.352})$$

V.12. Исследование уравнения энергодбаланса

согласно (V.346 и (V.350) в GMSW равна:

$$I(u) = I_0 \frac{e^{-2\beta(u)}}{L^6(u)\Delta^2(u)} \quad (\text{V.353})$$

(где I_0 - невозмущенная интенсивность излучения) и стремится к бесконечности на фронте GMSW.

Если угол выхода магнитотормозного излучения магнитосферы пульсара связывать с длительностью импульса излучения, то при прохождении гравитационной волны через магнитосферу пульсара будет наблюдаться сильное сжатие импульса излучения с одновременным увеличением его интенсивности. Этот эффект открывает альтернативную по сравнению с [97] возможность объяснения гигантских импульсов пульсаров, скорее всего соответствующую карандашной диаграмме направленности излучения.

V.12 Исследование уравнения энергодбаланса

V.12.1 Математическая модель

В этом разделе мы проведем полное исследование уравнения энергодбаланса (V.200), к которому сводится теория взаимодействия гравитационных волн в магнитоактивной плазме [113, 115]. Перепишем это уравнение в более удобных для наших целей обозначениях.

$$y'^2 + \xi^2 \Upsilon^2 V(y) = \Upsilon^2 g^2(x), \quad (\text{V.354})$$

где функция $y(x)$ ⁸ (см. (V.132)):

$$y(x) = 1 - \Upsilon \frac{\beta(u)}{\beta_0} \equiv \Delta(u); \quad (\text{V.355})$$

удовлетворяет начальному условию:⁹

$$y(0) = 1, \quad (\text{V.356})$$

⁸Так называемая управляющая функция GMSW [113], Υ - второй параметр GMSW (V.202).

⁹Функция $\beta(u)$ - амплитуда ПГВ с учетом поглощения в плазме.

причем:

$$g(x) = f'(x), \quad f(x) = \beta_*(x)/\beta_0 \quad (\text{V.357})$$

- безразмерная амплитуда вакуумной ПГВ; производные берутся по переменной $x = \sqrt{2}u\omega$, ω - частота вакуумной ПГВ). В уравнении (V.357) появляется еще один безразмерный параметр, ξ^2 , так называемый первый параметр GSMW [113]:

$$\xi^2 = \frac{H_0^2}{4\beta_0^2\omega^2}. \quad (\text{V.358})$$

В [115] на основе компьютерного решения уравнения (V.354) были вычислены основные параметры отклика плазмы на ПГВ. Как показал более детальный анализ, некоторые результаты, полученные численным моделированием, в частности, выводы о сильной зависимости длительности импульса GSMW от второго параметра GSMW, оказались ошибочными. Основные причины компьютерных ошибок кроются в некоторых принципиальных особенностях уравнения (V.354), которые не отслеживаются компьютером при прямом применении стандартных программ решения дифференциальных уравнений. Внешняя простота уравнения энергобаланса (V.354) оказалась обманчивой, скрывающей неожиданно сложное поведение его решений. Принципиальная важность для теории гравитации и гравитационно - волновых экспериментов характеристик импульса GSMW, отождествляемого в [115], [116] с так называемыми гигантскими импульсами пульсаров, приводит к необходимости более детального исследования уравнения энергобаланса. Выяснение поведения решений уравнения (V.354) и определения формы отклика магнитоактивной плазмы на гравитационную волну потребовало специальных аналитических исследований и модифицирования программ численных расчетов. Ниже приведены некоторые результаты этих исследований [121].

V.12.2 Общие свойства решения

Вследствие своего определения:

$$|f(x)| \leq 1. \quad (\text{V.359})$$

Относительно заданных функций $f(x)$ и $g(x)$ будем предполагать следующее:

V.12. Исследование уравнения энергобаланса

1. функции $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $(0, +\infty)$ принадлежат классу C^∞ ;

2. на этом промежутке функция $g(x)$, как и $f(x)$, ограниченная:

$$|g(x)| \leq g_0 \sim 1; \quad (V.360)$$

3. функция $f(x)$ имеет экстремумы (т.е., функция $g(x)$ имеет нули):

$$\begin{aligned} f'(x_j^*) = g(x_j^*) = 0; \quad x_0^* = 0; \\ \pi j < x_j^* \leq \pi(j+1); \quad (j = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (V.361)$$

причем функция $g(x)$ знакопеременная:

$$\begin{aligned} g(x) > 0; \quad x \in (x_{2n}^*, x_{2n+1}^*); \\ g(x) < 0; \quad x \in (x_{2n+1}^*, x_{2n+2}^*); \quad (n = 0, 1, \dots); \end{aligned} \quad (V.362)$$

4. функция $g(x)$ имеет экстремумы:

$$g'(\bar{x}_k) = 0; \quad \pi(k-1) < \bar{x}_k \leq \pi k, \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (V.363)$$

причем при $k = 2n$ - минимумы, а при $k = 2n+1$ - максимумы, т.е.:

$$\begin{aligned} g''(\bar{x}_{2n}) \stackrel{Def}{=} g''_{2n} > 0; \\ g''(\bar{x}_{2n+1}) \stackrel{Def}{=} g''_{2n+1} < 0; \end{aligned} \quad (V.364)$$

5. кроме того будем полагать:

$$\bar{x}_k < x_k^*, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (V.365)$$

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

Примерами функции $f(x)$, удовлетворяющей указанным условиям, являются:

$$f(x) = 1 - \cos(x); \quad (\text{V.366})$$

$$f(x) = x \sin(x) e^{-ax}. \quad (\text{V.367})$$

Далее, все вычисления, основанные на гидродинамических моделях приводят к следующему виду «потенциальной» функции $V(y)$:

$$V(y) = y^{-p} - 1, \quad (\text{V.368})$$

где параметр p принимает значения на отрезке $[4, 8]$ в зависимости от уравнения состояния плазмы и степени ее анизотропии, причем нижний предел соответствует нерелятивистской плазме, верхний - анизотропной ультрарелятивистской (см. [113], [118]):

$$p = \frac{4}{1 - k_{\perp}}, \quad (\text{V.369})$$

$k_{\perp} \leq 1/2$ коэффициент связи поперечного давления и плотности энергии плазмы: $p_{\perp} = k_{\perp} \varepsilon$.

Таким образом, функция $V(y)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{cases} y < 1; & V(y) > 0; \\ y = \pm 1; & V(y) = 0; \\ y > 1; & V(y) < 0. \end{cases} \quad (\text{V.370})$$

При $\xi^2 \equiv 0$ решением уравнения (V.354), удовлетворяющим начальному условию (V.356), является невозмущенное квазипериодическое решение:

$$y_0 = 1 - \Upsilon f(x), \quad (\text{V.371})$$

которое при достаточно больших значениях параметра Υ может быть отрицательным.

При $\xi^2 \neq 0$ поведение решения (V.354) радикально меняется. При $y \rightarrow +0$ $V(y) \rightarrow +\infty$, при этом в левой части уравнения (V.354) оказывается бесконечно большая положительная величина, тогда как правая

V.12. Исследование уравнения энергобаланса

часть этого уравнения остается конечной. Следовательно, в решении уравнения (V.354) при $\xi^2 \neq 0$ всегда должно быть:

$$y > 0. \quad (\text{V.372})$$

Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать поведение решений $y(x)$ на интервале $(0, +\infty)$. На этом интервале уравнение $V(y) = 0$ имеет единственное решение:

$$V(y) = 0 \Leftrightarrow y = 1; \quad (y > 0), \quad (\text{V.373})$$

а производные функции $V(y)$ обладают следующими свойствами:

$$V'_y < 0; \quad V''_{yy} > 0, \quad (y > 0). \quad (\text{V.374})$$

Так как $y'^2 \geq 0$, из (V.354) сразу следует:

$$\xi^2 V(y) \leq g^2(x) \leq g_0^2, \quad (\text{V.375})$$

таким образом, всегда:

$$y \geq y_{\min} \sim \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right)^{-1/p}. \quad (\text{V.376})$$

При $\xi^2 \rightarrow 0$ получим отсюда $y > y_{\min} \rightarrow +0$ вместо неравенства $y \geq 1 - 2\Upsilon$, которое получалось из решения уравнения (V.354) при $\xi^2 \equiv 0$.

Таким образом -

Решение уравнения (V.354) при $\xi^2 \rightarrow 0$ не переходит в решение этого же уравнения, полученного при $\xi^2 \equiv 0$.

Такое поведение решений уравнения (V.354) есть следствие существенно нелинейного характера последнего. Действительно, если бы мы сразу разложили уравнение (V.354) в ряд Тейлора по малости амплитуды ГВ, т.е., в ряд по малости отклонения от единицы функции $y = 1 + \delta y$, мы получили бы вместо (V.354) в линейном приближении:

$$\delta y'^2 - \Upsilon^2 \xi^2 p \delta y = \Upsilon^2 g^2(x),$$

откуда извлекли бы вместо (V.375) неравенство:

$$y \geq 1 - \frac{\Upsilon^2 g^2(x)}{p \xi^2}.$$

Таким образом, при $\xi^2 \rightarrow 0$ получили бы вместо (V.376) неравенство: $y > -\infty$, которое не налагает никаких ограничений на функцию $y(x)$.

V.12.3 Экстремумы

Для более детального исследования решений уравнения (V.354) разрешим его относительно производной:

$$y' = \mp \Upsilon \sqrt{g^2(x) - \xi^2 V(y)}. \quad (\text{V.377})$$

Так как выражение под радикалом должно быть неотрицательным, то вследствие (V.361) и свойств функции $V(y)$ (V.370) из (V.377) сразу вытекает следующее свойство решения:

$$y(x_j^*) \geq 1; \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (\text{V.378})$$

Ветвь решений (V.377), совпадающая при малых значениях $x \rightarrow +0$ с невозмущенным решением (V.374), соответствует знаку « $-$ » в (V.377):

$$y' = -\Upsilon \sqrt{g^2(x) - \xi^2 V(y)}. \quad (\text{V.379})$$

При $x = 0$ согласно (V.356) $y = 1$, тогда из (V.379) следует: $y'(0) = 0$, следовательно, $x = 0$ - точка максимума. При $x > 0$ согласно (V.379) $y' < 0$, следовательно, функция $y(x)$ убывает. Убывание это не может быть неограниченным вследствие условия (V.376), поэтому функция $y(x)$ должна либо стремиться сверху к асимптоте $y = \text{Const} \geq y_{\min}$ при $x \rightarrow +\infty$, либо достигать минимума при $x > 0$. Однако, первый случай невозможен, что непосредственно видно из (V.379).

Итак, функция $y(x)$ обязана иметь минимум $y_* > 0$ в некоторой точке $x = x_* > 0$. Так как функция $y(x)$ убывает, то $0 < y < 1$, следовательно, согласно (V.370) $V(y) > 0$ и функция $V(y)$ растет с ростом x . Этот рост не может продолжаться до точки $x = x_0^* < \pi$, так как в этом случае выражение под радикалом в (V.379) стало бы отрицательным, чего не может быть. Поэтому точка минимума x_* функции $y(x)$ должна находиться внутри промежутка $(0, x_0^*)$. В точке минимума $y'_* = 0$, т.е:

$$g^2(x_*) = \xi^2 V(y_*); \quad (\text{V.380})$$

после прохождения минимума необходимо выбрать другую ветвь решений (V.377):

$$y' = +\Upsilon \sqrt{g^2(x) - \xi^2 V(y)}; \quad (x > x_*). \quad (\text{V.381})$$

До тех пор, пока y' не обратится в нуль, функция $y(x)$ будет возрастать. Таким образом, для более детального исследования свойств решений уравнения (V.354) необходимо исследовать вторые производные функции $y(x)$.

V.12.4 Вторые производные

Дифференцируя (V.354), получим следствие:

$$y' \left(y'' + \frac{1}{2} \xi^2 \Upsilon^2 V_y' \right) = \Upsilon^2 g g'. \quad (\text{V.382})$$

Из (V.382) сразу следует, что в точках подозрительных на экстремум, в которых $y' = 0$, должно быть $g g' = 0$, поэтому согласно (V.361) и (V.363) экстремум функции $y(x)$ возможен лишь в точках:

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\rightarrow x_* = x_j, \\ g'(x) = 0 &\rightarrow x = \bar{x}_k \end{aligned} \quad (\text{V.383})$$

Полагая для таких точек: $y'(x_*) = 0$, разложим функцию $y(x)$ в ряд Тейлора вблизи таких точек:

$$y(x) = y_* + \frac{1}{2} y_*'' (x - x_*)^2 + O((x - x_*)^3). \quad (\text{V.384})$$

Таким образом, вблизи этих точек:

$$y'(x) \approx y_*'' (x - x_*). \quad (\text{V.385})$$

Подставляя приближенные выражения из (V.383) - (V.385) в уравнение (V.382), разлагая в ряд Тейлора его правую часть и произведя необходимые вычисления, получим уравнение для определения второй производной y_*'' :

$$y_*'' \left(y_*'' + \frac{1}{2} \Upsilon^2 \xi^2 V_y'(y_*) \right) = \Upsilon^2 F(g), \quad (\text{V.386})$$

где:

$$F(g) = \begin{cases} g'^2(x_j^*), & x_* = x_j^*; \\ g(\bar{x}_k) g''(\bar{x}_k), & x_* = \bar{x}_k. \end{cases} \quad (\text{V.387})$$

Разрешая с учетом сказанного (V.386) относительно y_*'' , найдем:

$$y_*'' = -\frac{1}{4} \Upsilon^2 \xi^2 V_y'(y_*) - \sqrt{\frac{1}{16} \Upsilon^4 \xi^4 V_y'^2(y_*) + \Upsilon^2 F(g)}. \quad (\text{V.388})$$

Знак перед квадратным корнем в решении (V.388) выбран таким образом, чтобы с учетом свойств потенциальной функции (V.374) это решение в отсутствие ГВ давало бы $y'' = 0$.

Как мы отмечали выше, при $x \geq 0$ функция $y(x)$ убывает от значения $y(0) = 1$. На промежутке $(0, \pi)$ есть две точки, подозрительные на экстремум: \bar{x}_1 и x_1^* . Но в точке $x = x_1^*$ согласно (V.378) $y(x_1^*) \geq 1$, к тому же вследствие (V.365): $\bar{x}_1 < x_1^*$, поэтому минимум функции $y(x)$ достигается в точке $x = \bar{x}_1$. Согласно (V.362), (V.364): $g(\bar{x}_1) > 0$; $g''(\bar{x}_1) = g_1'' < 0$, поэтому в этой точке $gg'' < 0$, и из (V.386) получаем значение второй производной в этой точке:

$$y''(\bar{x}_1) = -\frac{1}{4}\Upsilon^2\xi^2V_y'(y_1) - \sqrt{\frac{1}{16}\Upsilon^4\xi^4V_y'^2(y_1) - \Upsilon^2g(\bar{x}_1)|g_1''|}, \quad (\text{V.389})$$

которое, как это следует из (V.374) положительно, т.е., действительно соответствует минимуму функции $y(x)$. Выражение под радикалом в (V.389) неотрицательно при выполнении условия:

$$(\Upsilon\xi^2V_y'(y_1))^2 \geq 16g(\bar{x}_1)|g_1''|. \quad (\text{V.390})$$

Если условие (V.389) не выполняется, то вместо (V.379) мы должны взять другую ветвь (V.381) решения уравнения (V.354). Но в этом случае функция $y(x)$ неограниченно возрастает, плазма согласно [?] движется в обратную сторону, и гравимагнитная волна не возникает. Поэтому (V.389) есть необходимое условие возбуждения GMSW. При выполнении этого условия в точке $x = \bar{x}_1$ достигается минимум:

$$y_{\min} = \left(1 + \frac{g_1^2}{\xi^2}\right)^{-1/p}, \quad (\text{V.391})$$

где $g_1 = g(\bar{x}_1)$.

После прохождения минимума функции $y(x)$ в точке $x = \bar{x}_1$ мы должны вместо (V.379) взять ветвь (V.381) решения уравнения (V.354). Таким образом, после прохождения минимума функция $y(x)$ растет, и в точке $x = x_1^* < \pi$ согласно (V.378) должна достигнуть значения $y(x_1^*) \geq 1$. В случае $y(x_1^*) = 1$ вследствие (V.373) получим: $y'(x_1^*) = 0$. Нетрудно проверить с помощью (V.388), что при этом в данной точке $y''(x_1^*) < 0$. т.е., точка x_1^* является точкой максимума функции $y(x)$. Тогда после прохождения этого максимума надо снова поменять ветвь решения уравнения (V.354). Поэтому условие $y(x_1^*) = 1$ фактически является условием квазипериодичности решения. Из (V.380) и свойств потенциальной функции (V.374) следует, что указанное условие квазипериодичности решения эквивалентно условию:

$$y'(x_1^*) = 0. \quad (\text{V.392})$$

V.12. Исследование уравнения энергобаланса

Если же $y'(x_1^*) \neq 0$, решение неограниченно возрастает после прохождения этой точки. Из (V.382) следует, что в этом случае должно быть:

$$y''(x_1^*) = -\frac{1}{2}\xi^2\Upsilon^2 V_y'(y_1^*) > 0, \quad (\text{V.393})$$

т.е., вторая производная функции в этой точке должна сохранить свое положительное значение. В этом случае, как мы отмечали выше, функция $y(x)$ после прохождения минимума неограниченно растет и при $x \rightarrow \infty$:

$$y \approx \Upsilon \int^x |g(x)| dx \sim \Upsilon x. \quad (\text{V.394})$$

V.12.5 Поведение управляющей функции вблизи минимума

Итак, в точке $x = \bar{x}_1$ управляющая функция $y(x)$ имеет минимум, достигая значения y_{min} (V.391). Используя это минимальное значение и вид потенциальной функции $V(y)$ (V.368), получим из (V.375) выражение для второй производной y''_* в точке минимума:

$$y''(\bar{x}_1) = \frac{p}{4}\Upsilon^2\xi^2 \times \left(1 + \frac{g_1^2}{\xi^2}\right)^{1+1/p} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{16g_1|g_1''|}{p^2\Upsilon^2\xi^4} \left(1 + \frac{g_1^2}{\xi^2}\right)^{-2(1+1/p)}}\right], \quad (\text{V.395})$$

причем данный минимум возникает при выполнении условия:

$$p\Upsilon\xi^{-2/p}(g_1^2 + \xi^2)^{1+1/p} \geq 4\sqrt{g_1|g_1''|}. \quad (\text{V.396})$$

При малых значениях первого параметра GMSW $\xi^2 \ll 1$ неравенство (V.396) принимает вид:

$$p\Upsilon g_1^{2+2/p} \geq \xi^{2/p} \sqrt{g_1|g_1''|}; \quad (\xi^2 \ll 1). \quad (\text{V.397})$$

В случае выполнения сильного неравенства (V.396):

$$p\Upsilon(g_1^2 + \xi^2)^{1+1/p} \gg 4\xi^{2/p} \sqrt{g_1|g_1''|} \quad (\text{V.398})$$

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

выражение (V.395) принимает вид:

$$y''(\bar{x}_1) \approx \frac{2g_1|g_1''|\xi^{2/p}}{p(g_1^2 + \xi^2)^{1+1/p}}. \quad (\text{V.399})$$

В частности, при малых значениях первого параметра GMSW ($\xi^2 \ll 1$) последнее выражение упрощается:

$$y''(\bar{x}_1) \approx \frac{2|g_1''|\xi^{2/p}}{pg_1^{1+2/p}} \ll 1. \quad (\text{V.400})$$

При этом достигается минимальное значение функции $y(x)$:

$$y_{\min} = \left(\frac{\xi}{g_1}\right)^{2/p} \ll 1. \quad (\text{V.401})$$

Таким образом, согласно (V.384) при выполнении условия (V.379) и $\xi^2 \ll 1$ функция $y(x)$ вблизи точки минимума имеет вид:

$$y = \left(\frac{\xi}{g_1}\right)^{2/p} \left[1 + \frac{|g_1''|}{pg_1}(x - \bar{x}_1)^2\right]. \quad (\text{V.402})$$

Как известно, кривизна k плоской кривой $y = y(x)$, в точке экстремума, x_0 , есть:

$$k = y''(x_0), \quad (\text{V.403})$$

а радиус кривизны, ρ , равен:

$$\rho = \frac{1}{k}. \quad (\text{V.404})$$

Таким образом, кривизна управляющей функции в точке ее минимума \bar{x}_1 описывается выражением (V.399), а радиус кривизны этой функции при выполнении условия (V.398) равен:

$$\rho = \frac{pg_1^{1+2/p}}{|g_1''|\xi^{2/p}}, \quad (\text{V.405})$$

и при $\xi^2 \rightarrow 0$ стремится к бесконечности. Таким образом, при $\xi^2 \rightarrow 0$ в области минимума управляющей функции образуется плато, характеризующееся малыми значениями самой функции и ее первых двух производных. Эта особенность решения уравнения (V.354) явилась первой причиной компьютерных ошибок в [115].¹⁰

¹⁰Указанная особенность первоначально была обнаружена Д.Н.Гороховым при компьютерном анализе уравнения (V.354).

V.12.6 Существование решения

Все вышеописанные свойства решения уравнения энергобаланса имеют место лишь в том случае, если существует вещественное решение уравнения (V.379) на отрезке $[0, \bar{x}_1]$ и уравнения (V.381) на отрезке $[\bar{x}_1, x_1^*]$. Решение уравнения (V.379) должно обеспечивать достижение минимума (V.391) функции $y(x)$ в точке \bar{x}_1 , а решение уравнения (V.381) обеспечивать достижение значений $y \geq 1$ в точке x_1^* . На отрезке $[0, \bar{x}_1]$ функция $y(x)$ должна успеть изменить свое значение от 1 до y_{\min} . Формально интегрируя (V.379) на этом отрезке, получим:

$$1 - y_{\min} = -\Upsilon \int_0^{\bar{x}_1} \sqrt{g^2 - \xi^2 V(y)} dx, \quad (\text{V.406})$$

Так как на этом отрезке $y \leq 1$ и $g = f' > 0$, то справедливо неравенство:

$$1 - y_{\min} < \Upsilon [f(\bar{x}_1) - f(0)] = \Upsilon f(\bar{x}_1). \quad (\text{V.407})$$

Таким образом, для достижения минимума необходимо выполнение условия:

$$\Upsilon > \frac{1 - y_{\min}}{f(\bar{x}_1)} \sim 1. \quad (\text{V.408})$$

Если условие (V.408) не будет выполнено, то подкоренное выражение в правой части уравнения (V.379) обратится в нуль до достижения минимума, и далее решение станет мнимым. Поэтому в этом случае также надо сразу выбирать положительную ветвь решений уравнения (V.354). Тогда функция $y(x)$ будет расти сразу, начиная с точки $x = 0$.

Аналогично и с поведением решения на отрезке $[\bar{x}_1, x_1^*]$: здесь функция $y(x)$, подчиняющаяся уравнению (V.381) должна успеть вырасти от значения y_{\min} до 1. Учитывая, что и на этом отрезке функция g неотрицательна, получим аналогичное неравенство:

$$\Upsilon > \frac{1 - y_{\min}}{f(x_1^*) - f(\bar{x}_1)}. \quad (\text{V.409})$$

Если это неравенство не выполняется, для обеспечения вещественности решения мы также с самого начала должны выбрать другую ветвь решений уравнения (V.354).

Таким образом, существование минимума управляющей функции определяется областью параметров GMSW, удовлетворяющим неравенствам (V.390), (V.408), (V.409). В частности, второй параметр GMSW, Υ должен быть достаточно большим:

$$\Upsilon \geq \Upsilon_0 > 1. \quad (\text{V.410})$$

V.12.7 Периодическое решение класса C^∞

Рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ на промежутке $[0, +\infty)$ является строго периодической функцией с периодом 2π :

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad (\text{V.411})$$

причем:

1.

$$g(\pi - x) = g(x); \quad (\text{V.412})$$

2.

$$f'(x_j^*) = g(x_j^*) = 0; \quad x_j^* = \pi j; \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (\text{V.413})$$

3. при нечетных значениях $j = 2k + 1$ точки x_j^* являются точками максимума, при четных значениях $j = 2k$ - точками минимума;

4.

$$\begin{aligned} g(x) &> 0; \quad x \in (\pi 2n, \pi(2n + 1)); \\ g(x) &< 0; \quad x \in (\pi(2n + 1), \pi(2n + 2)); \quad (n = 0, 1, \dots); \end{aligned} \quad (\text{V.414})$$

5.

$$g'(\bar{x}_k) = 0; \quad (\text{V.415})$$

6.

$$\bar{x}_k = \frac{\pi}{2}(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (\text{V.416})$$

Таким образом, первый минимум управляющей функции $y(x)$ достигается в точке $x = \bar{x}_1 = \pi/2$, относительно которой вследствие (V.413)

V.12. Исследование уравнения энергобаланса

симметрична функция $g(x)$ ($g(\pi/2 - x) = g(\pi/2 + x)$). Поэтому при выполнении условий существования действительного решения (V.406), (V.407) решение $y(x)$ на отрезке $[0, \pi/2]$ также должно быть симметрично относительно точки минимума, т.е.:

$$y(\pi/2 - x) = y(\pi/2 + x). \quad (\text{V.417})$$

Но последнее означает, что $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 0$, т.е., функция $y(x)$ также является периодической (но с периодом π вместо 2π !):

$$y(\pi + x) = y(x). \quad (\text{V.418})$$

Поскольку в указанном периодическом решении всегда $y(x) \leq 1$, то вследствие (V.355) при выполнении вышеуказанных условий существования GMSW амплитуда ПГВ с учетом взаимодействия с плазмой GMSW всегда остается неотрицательной: $\beta \geq 0$.

На Рис. 3 показано соответствующее компьютерное решение уравнения (V.354) для различных значений параметров GMSW. Это решение получено сшивкой численных решений двух задач Коши: первой с начальной точкой $x = 0$ и второй с начальной точкой $x = \pi$. В первом случае интегрирование осуществлялось на интервале $[0, \pi/2]$, во втором — $[\pi/2, \pi]$.

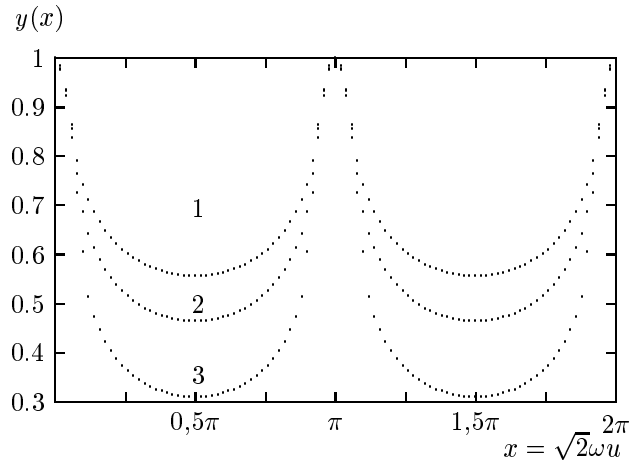


Рис. 3. Результаты численного интегрирования уравнения (V.354) для периодической ПГВ (V.366): $y(x)$ 1 — $p = 8$; 2 — $p = 6$; 3 — $p = 4$. Всюду: $\xi^2 = 0, 1$, $\Upsilon = 10$.

V.12.8 Неустойчивость

Исследуем описанное выше периодическое решение на устойчивость. Пусть $y_0(x)$ есть такое периодическое решение, соответствующее периодической ПГВ $f_0(x), g_0(x)$, а $\delta y(x), \delta g(x)$ - малые возмущения соответствующих функций. Разлагая уравнение энергобаланса (V.354) в ряд Тейлора по малости этих возмущений, в линейном приближении получим уравнение:

$$y'_0 \delta y' + \frac{1}{2} \xi^2 \Upsilon^2 V'(y_0) \delta y = \Upsilon^2 g_0(x) \delta g(x). \quad (\text{V.419})$$

Решая линейное уравнение (V.419), найдем:

$$\begin{aligned} \delta y(x) = \exp \left[-\frac{1}{2} \xi^2 \Upsilon^2 \int_{x_0}^x \frac{V'(y_0)}{y'_0} dx' \right] \delta y(x_0) + \\ + 2 \Upsilon^2 \int_{x_0}^x \exp \left[-\frac{1}{2} \xi^2 \Upsilon^2 \int_{x'}^x \frac{V'(y_0)}{y'_0} dx'' \right] g_0 \delta g dx'. \end{aligned} \quad (\text{V.420})$$

Заметим, что вследствие (V.374) $V'(y_0) < 0$. Пусть точки x_0 и x лежат левее точки \bar{x}_1 минимума функции $y_0(x)$, причем $x > x_0$. В этой области $y'_0 < 0$, поэтому аргументы экспонент в (V.420) (выражения в квадратных скобках) отрицательны и при $x \rightarrow \bar{x}_1 - 0$ стремятся к $-\infty$. Следовательно, решение $y_0(x)$ на отрезке $[0, \bar{x}_1]$ устойчиво. При переходе же через точку минимума ситуация качественно меняется: при $x > \bar{x}_1$ производная меняет знак ($y'_0 > 0$), поэтому аргументы экспонент в (V.420) становятся положительными и при $x \rightarrow \bar{x}_1 + 0$ стремятся к $+\infty$. Следовательно, при переходе через точку минимума гладкое периодическое решение $y_0(x)$ становится сильно неустойчивым. Как видно из (V.420) данная экспоненциальная неустойчивость может быть вызвана как отклонениями функции $y(x)$ от значения $y_0(x)$, так и нарушениями свойств симметрии вакуумной амплитуды ПГВ. Данная неустойчивость решения явилась второй причиной компьютерных ошибок в [115].

Пусть теперь, наоборот, точки x и x_0 лежат правее точки \bar{x}_1 минимума функции $y_0(x)$, причем $x < x_0$, т.е., мы движемся к точке минимума справа. В этой области $y'_0 > 0$, но аргументы экспонент в этом случае отрицательны теперь уже правее минимума и положительны - левее. Таким образом, решение становится устойчивым правее минимума и — неустойчивым левее его. Это свойство решений уравнения (V.374) и

V.12. Исследование уравнения энергобаланса

дает возможность компьютерного построения его «точного» периодического решения $y_0(x)$. Именно таким образом и были построены графики, представленные на Рис. 3.

Согласно (V.419) $\delta y'(\bar{x}_1+0) \rightarrow +\infty$ при $\delta g(\bar{x}_1) = 0$, так как $\delta y(\bar{x}_1) \geq 0$ вследствие того, что \bar{x}_1 является точкой минимума функции $y(x)$. Таким образом, при переходе через точку минимума сразу развивается неустойчивость, и функция $y(x)$ меняется скачкообразно в сторону больших значений до тех пор, пока не выйдет на асимптотику (V.394). Заметим, что интегралы в квадратных скобках (V.420) существуют в смысле главного значения при $x = \bar{x}_1 + \Delta x$:

$$\text{V.p.} \int_{x_0}^x \frac{V'(y(\bar{x}_1))}{y'(\bar{x}_1)} dx \approx -\frac{p}{y^{p+1}(\bar{x}_1)y''(\bar{x}_1)} \ln \left| \frac{\Delta x}{x_0 - \bar{x}_1} \right|. \quad (\text{V.421})$$

Бесконечно большое значение производной $\delta y'(x)$ в точке $\bar{x}_1 + 0$ является, однако, следствием линейного приближения, используемого в уравнении (V.419). Согласно точному нелинейному уравнению (V.381) значение производной $y'(x)$ при $x = \bar{x}_1 + 0$ и $y \leq 1$ ограничена величиной:

$$y' \leq \Upsilon g_1. \quad (\text{V.422})$$

При больших значениях второго параметра GMSW эта производная хотя и может быть большой, но все же остается конечной. Согласно (V.422) длина отрезка Δx , на котором управляющая функция может достигнуть значений порядка 1 и выйти на асимптотику (V.394), порядка:

$$\Delta x \sim \Upsilon^{-1}, \quad (\text{V.423})$$

на этом интервале и должна развиваться неустойчивость в нелинейном варианте.

На Рис. 4 продемонстрирована реализация указанной неустойчивости, всегда возникающая в компьютерном решении при прохождении точки минимума функции $y(x)$. При больших значениях параметра $\Upsilon \gg 1$ неустойчивость развивается весьма быстро, поэтому в крупном масштабе поведение управляющей функции $y(x)$ при переходе через точку минимума $x = \bar{x}_1$ имеет характер излома. Однако, при повышении точности вычислений и уменьшении масштаба оказывается, что функция $y(x)$ всюду остается гладкой (Рис. 5).

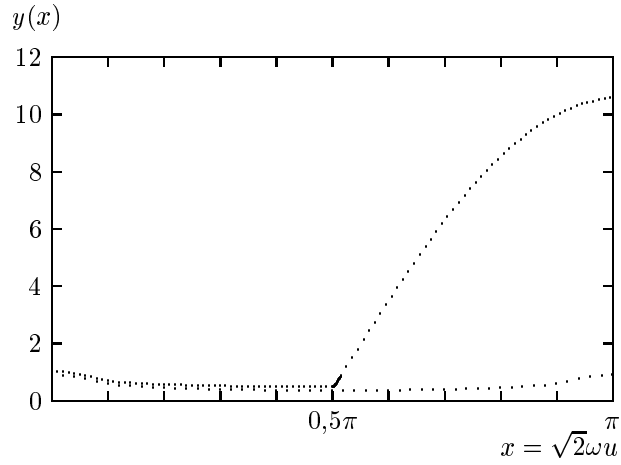


Рис. 4. Развитие неустойчивости решения уравнения (V.354) для периодической ПГВ (V.366).

Нижняя пунктирная линия — «точное» периодическое решение, полученное указанным выше способом; верхняя пунктирная линия — развитая неустойчивость, получающаяся при прямом численном решении.

Принято: $p = 6$, $\Upsilon = 10$, $\xi^2 = 0,1$.

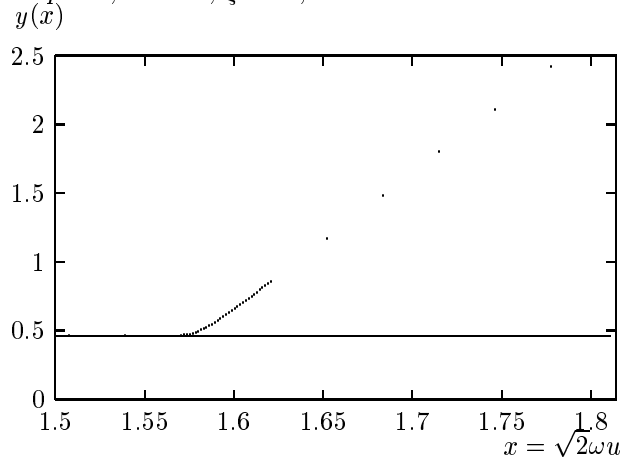


Рис. 5. Тонкая структура «излома» на Рис. 4 при 30 - кратном увеличении.

Сплошная горизонтальная линия - «точное решение», пунктирная линия - развитая неустойчивость. Ее участок, кажущийся сплошным, содержит 35 точек.

V.12.9 Параметры GMSW-отклика

V.12.9.1 Значения наблюдаемых величин в максимуме

Решения уравнений релятивистской магнитной гидродинамики плазмы в поле ПГВ дают следующие законы изменения наблюдаемых физических величин в магнитоактивной плазме [113], [119]:

1. Плотность энергии магнитного поля в сопутствующей системе отсчета:

$$\frac{H^2}{8\pi} = \frac{H_0^2}{8\pi} y^{-p/2}(u); \quad (\text{V.424})$$

2. Плотность энергии плазмы в сопутствующей системе отсчета:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 y^{-\frac{1+k_{\perp}}{1-k_{\perp}}}; \quad (\text{V.425})$$

3. Физическая скорость плазмы:

$$V^1 = \frac{1 - 2v_v^2}{1 + 2v_v^2} = \frac{1 - y^{p/2}}{1 + y^{p/2}}. \quad (\text{V.426})$$

Таким образом, согласно (V.391) получим выражения для максимальных значений этих величин, достигаемых в минимуме управляющей функции при выполнении условий существования GMSW:

$$\left(\frac{H^2}{8\pi}\right)_{\max} = \frac{H_0^2}{8\pi} \frac{\sqrt{g_1^2 + \xi^2}}{\xi}; \quad (\text{V.427})$$

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{g_1^2}{\xi^2}\right)^{\frac{1+k_{\perp}}{4}}; \quad (\text{V.428})$$

$$(V^1)_{\max} = \frac{\sqrt{g_1^2 + \xi^2} - \xi}{\sqrt{g_1^2 + \xi^2} + \xi}. \quad (\text{V.429})$$

V.12.9.2 Кривизна импульса в максимуме

Согласно (V.424), (V.425) плотности энергии плазмы и магнитного поля пропорциональны отрицательным степеням управляющей функции

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

$y(x)$. Вычислим согласно (V.403) кривизну кривой $y^{-a}(x)$ в максимуме этой функции:

$$k = ay^{-(a+1)}y''(\bar{x}_1). \quad (\text{V.430})$$

Подставляя в (V.430) значения функций $y(x)$, $y''(x)$ в минимуме согласно (V.400), (V.401) и полагая согласно (V.424) для плотности энергии магнитного поля $a = p/2$, получим для кривизны функции $H^2(x)$ в максимуме этой функции:

$$k_{H^2} = \frac{|g_1''|}{2\xi} \gg 1 \quad (\text{V.431})$$

и для радиуса кривизны:

$$\rho_{H^2} = \frac{2\xi}{|g_1''|} \ll 1. \quad (\text{V.432})$$

Таким образом, в отличие от управляющей функции $y(x)$ локальный импульс GMSW имеет острый максимум.

V.12.9.3 Форма GMSW - импульса

Если бы при выполнении условий существования GMSW реализовалось описанное в разделе V.12.7 периодическое решение уравнения (V.354), то плазма с магнитным полем согласно (V.426) в поле ПГВ всегда двигались бы лишь в одном направлении - в направлении распространения ПГВ. При этом минимальные значения плотности энергии плазмы и магнитного поля достигались бы согласно (V.424), (V.425) в точках остановки плазмы, в которых $y(x) = 1$. Наличие неустойчивости периодического решения качественно изменяет поведение магнитоактивной плазмы в поле ПГВ. После прохождения минимума управляющей функции, соответствующего максимуму наблюдаемых величин, быстро развивается неустойчивость, в результате которой плазма делает необратимый реверс в направлении, противоположном направлению распространения ПГВ. Таким образом, магнитоактивная плазма реагирует на ПГВ одиночным импульсом [113], [116]. Как видно из предыдущего, длительность этого импульса с большой точностью можно полагать равным $\pi/2$, или в обычных величинах:

$$\Delta\tau = \frac{T}{4}, \quad (\text{V.433})$$

V.12. Исследование уравнения энергобаланса

где T - период ПГВ. В [116] приведена оценка $\delta\tau \leq T/4$, в [115] же на основе численных расчетов получен неверный вывод: $\delta\tau \ll T/4$ при $\Upsilon \gg 1$. Именно развитие неустойчивости снижает длительность GMSW ровно в 2 раза! Быстрое развитие неустойчивости решения после прохождения максимума сигнала при больших значениях $\Upsilon \gg 1$ приводит к резкому падению до нулевых значений плотности энергии плазмы и магнитного поля и изменению направления скорости плазмы на противоположное. Таким образом, задний фронт импульса GMSW должен быть более крутым, чем передний.

На Рис. 6 - 8 представлены результаты численного моделирования локального GMSW - отклика магнитоактивной плазмы на периодическую ПГВ (V.366) в условиях развитой неустойчивости. Как видно из этих рисунков, максимальная амплитуда локального отклика GMSW действительно достигается в точке $x = \bar{x}_1 = \pi/2$, причем величина отклика определяется лишь значением первого параметра GMSW ξ^2 , как мы и отмечали выше. Второй параметр GMSW, Υ , влияет лишь (внутри области существования GMSW) лишь на крутизну фронта импульса: с увеличением этого параметра крутизна фронта импульса растет. При этом надо иметь в виду, что переменная x , используемая в данной работе равна $x = \omega(ct - x^1)$. Поэтому наблюдатель сначала встречает фронт GMSW, отвечающий меньшим значениям переменной x . Таким образом, для правильной интерпретации наблюдений необходимо повернуть представленные здесь графики на 180° вокруг оси Oy .

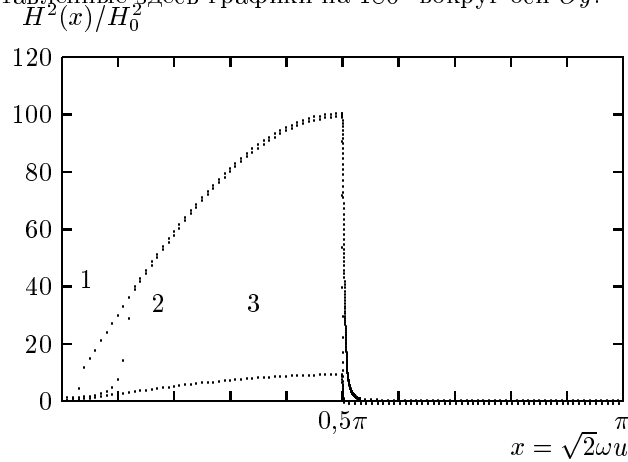


Рис. 6. Эволюция относительной плотности энергии магнитного поля $H^2(x)/H_0^2$ в периодической ПГВ (V.366).

1 — $\Upsilon = 100$, $\xi^2 = 0,01$; 2 — $\Upsilon = 10$, $\xi^2 = 0,01$; 3 — $\Upsilon = 100$, $\xi^2 = 0,1$;
 всюду $p = 6$.

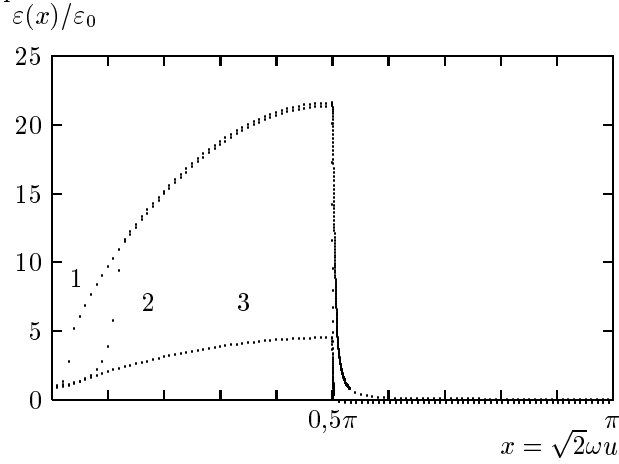


Рис. 7. Эволюция относительной плотности энергии плазмы $\varepsilon(x)/\varepsilon_0$ в периодической ПГВ (V.366).

1 — $\Upsilon = 100$, $\xi^2 = 0,01$; 2 — $\Upsilon = 10$, $\xi^2 = 0,01$; 3 — $\Upsilon = 100$, $\xi^2 = 0,1$;
 всюду $p = 6$.

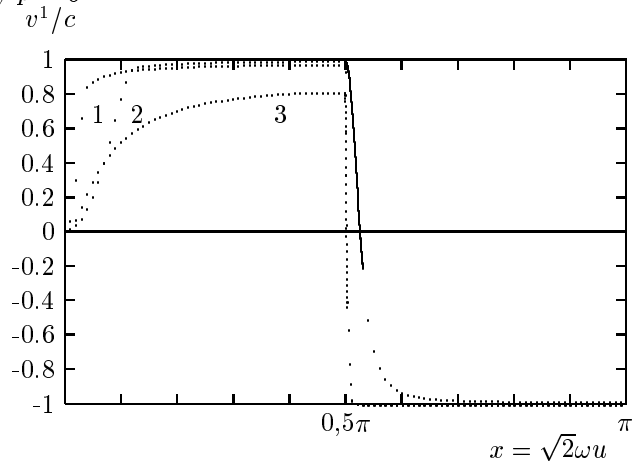


Рис. 8. Эволюция скорости дрейфа плазмы v^1/c в периодической ПГВ (V.366).

1 — $\Upsilon = 100$, $\xi^2 = 0,01$; 2 — $\Upsilon = 10$, $\xi^2 = 0,01$; 3 — $\Upsilon = 100$, $\xi^2 = 0,1$;
 всюду $p = 6$.

V.13 Численное моделирование электромагнитного отклика GMSW в пакете Mathematica

V.13.1 Математическая модель

Появление в начале 2000-х годов хорошо проработанных систем компьютерной математики, в частности, математических пакетов Mathematica5 — Mathematica7 позволило провести полноценное компьютерное моделирование процесса GMSW и всех его характеристик. Итак, выберем в качестве безразмерной амплитуды ПГВ, $q(x)$ функцию $1 - \cos(x)$ (V.366). Тогда уравнение энергобаланса (V.379) примет вид:

$$\dot{\Delta} = \mp \Upsilon \sqrt{\sin^2(s) - \xi^2 [\Delta^{-p} - 1]}, \quad (\text{V.434})$$

где параметр p описывается выражением (V.270). При интегрировании системы соответственно начальным условиям сначала необходимо выбирать отрицательную ветвь уравнения (V.434), при достижении минимума функции Δ необходимо заменить ее на положительную. Отметим необходимые в дальнейшем выражения раздела V.7: для минимального значения управляющей функции $\Delta(u)$, достигаемое при значении $s = \pi/2$, (V.269), параметра и максимально достижимых значений плотности энергии магнитного поля (V.271) и плотности энергии плазмы (V.272).

Заметим, что прямое применение встроенных в пакет компьютерной математики Mathematica методов численного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений к уравнению энергобаланса (V.354), опять-таки, не приводит к результату, поскольку в точке $s = \pi/2$ производная управляющей функции меняет знак, в связи с чем исчезает возможность управления длиной шага в зависимости от параметров уравнения. Эмпирически было установлено что неявный метод Адамса второй степени решает уравнение максимально быстро и правильно в сравнении с другими явными и неявными методами. Для проведения численного моделирования в пакете Mathematica была создана программа процедура численного решения дифференциального уравнения, которая автоматически регулирует шаг интегрирования в зависимости от величины параметров ξ^2 , Υ . При этом дифференциальное уравнение решается с помощью неявного метода Адамса второй степени до точки $\pi/2$ с отрицательным значением производной. Значение

функции в этой точке используется в качестве начального при перемене ветви уравнения (V.434) на положительную; при этом меняется шаг интегрирования и метод интегрирования - с неявного метода Адамса на явный метод Эйлера, который лучше работает в области неустойчивости решения.

Созданная процедура позволила провести исследование численных решений (V.434) в зависимости от первого и второго параметров ГМВ и построить модель отклика магнитоактивной плазмы на гравитационную волну, а также рассчитать физические характеристики плазмы. Численные расчеты, проведенные с использованием описанной программной процедуры полностью подтвердили аналитические предсказания о виде управляющей функции. Решение сначала быстро убывает, затем, выходя на плато медленно приближается к точке минимума $\pi/2$ со значением управляющей функции, близким к (V.269); после прохождения минимума в системе быстро развивается неустойчивость. При этом управляющая функция остается гладкой на всем интервале. На рис. 9 показаны результаты численного интегрирования уравнения энергобаланса в случае очень малого значения параметра ξ^2 и большого значения Υ , когда, с одной стороны, наиболее сложна процедура численного интегрирования, а с другой, - наиболее отчетливо проявляются указанные свойства поведения решения. Кажущиеся изломы графика функции при малых значениях s и при $s = \pi/2$ фиктивны, - на самом деле они исчезают при увеличении масштаба.

Анализ результатов численного интегрирования уравнения энергобаланса позволил установить, что управляющая функция в области плато (малые значения производной) весьма близка к функции Δ_0 , обращающейся в нуль значение радикала в правой части (V.434):

В точке минимума $s = \pi/2$ это значение совпадает со значением минимума управляющей функции (V.269). При увеличении значений параметра Υ совпадение управляющей функции $\Delta(s)$ с функцией $\Delta_0(s)$ устанавливается при меньших значениях времени s . При малых значениях временной переменной s управляющая функция хорошо аппроксимируется параболическим законом (V.435):

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}(s) &\approx -\Upsilon \sin s \approx -\Upsilon s; \\ \Delta(s) &\approx 1 - \Upsilon(1 - \cos s) \approx 1 - \Upsilon \frac{s^2}{2}; \end{aligned} \quad (s \rightarrow +0), \quad (\text{V.435})$$

V.13. Численное моделирование электромагнитного отклика GMSW

а при значениях внутри плато — формулой:

$$\Delta_0(s) = \left(1 + \frac{\sin(s)^2}{\xi^2}\right)^{-\gamma_{\perp}}. \quad (\text{V.436})$$

На рис. 10 показаны графики функций $\Delta(s)$ и $\Delta_0(s)$:

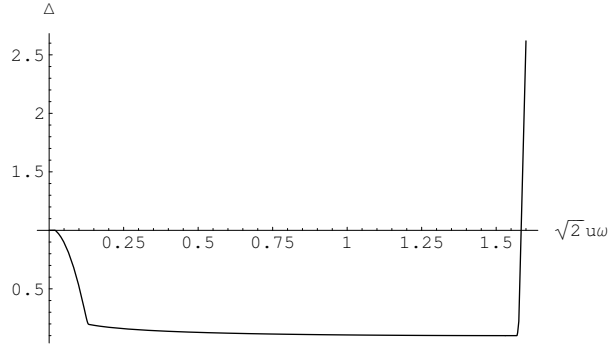


Рис. 9. График управляющей функции $\Delta(s)$ при $\xi^2 = 10^{-6}$, $\Upsilon = 100$, $\gamma_{\perp} = 1/6$.

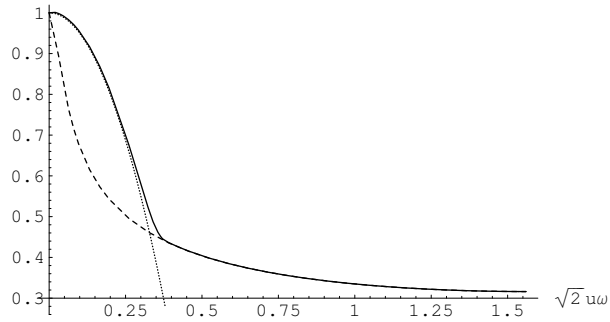


Рис. 10. График функций $\Delta(s)$ (сплошная линия), $\Delta_0(s)$ (пунктирная линия), точечная линия - асимптотика (V.436) при малых значениях s : $1 - \Upsilon s^2/2$. Всюду: $\xi^2 = 0.001$, $\Upsilon = 10$, $\gamma_{\perp} = 1/6$.

Этот результат позволяет аппроксимировать отклик плазмы, H^2/H_0^2 , в области плато управляющей функции, т.е., в области максимума отклика, выражением:

$$\frac{H^2}{H_0^2} \approx \sqrt{1 + \frac{\sin^2 s}{\xi^2}}. \quad (\text{V.437})$$

V.13.2 Формулы для расчета магнитотормозного отклика плазмы на ПГВ

Выпишем основные формулы, определяющие электромагнитный отклик анизотропной магнитоактивной плазмы на слабую гравитационную волну:¹¹

$$|\beta(s)| \ll 1; \quad L(s) \approx 1 \quad (\text{V.438})$$

1. Плотность энергии магнитного поля в сопутствующей системе отсчета:

$$\frac{H^2}{8\pi} = \frac{H_0^2}{8\pi} \Delta^{-1/2\gamma_\perp}. \quad (\text{V.439})$$

2. Плотность энергии плазмы в сопутствующей системе отсчета:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \Delta^{-\frac{1+k_\perp}{1-k_\perp}}. \quad (\text{V.440})$$

3. Физическая скорость плазмы:

$$v^1 = \frac{1 - 2v_v^2}{1 + 2v_v^2} = \frac{1 - \Delta^{1/2\gamma_\perp}}{1 + \Delta^{1/2\gamma_\perp}}. \quad (\text{V.441})$$

4. Плотность заряженных частиц:

$$n = n_0 \Delta^{-1/4\gamma_\perp}. \quad (\text{V.442})$$

5. Полная наблюдаемая интенсивность магнитотормозного излучения, регистрируемого покоящимся наблюдателем:

$$W = W_0 \Delta^{-\frac{3+2k_\perp}{1-k_\perp}} \frac{1}{2} \left(\Delta^{1/4\gamma_\perp} + \Delta^{-1/4\gamma_\perp} \right), \quad (\text{V.443})$$

¹¹См. [113, 115, 118, 119]

V.13. Численное моделирование электромагнитного отклика GMSW

где W_0 - полная интенсивность магнитотормозного излучения плазмы в отсутствие гравитационной волны [46]:

$$W_0 = \frac{2e^4 H_0^2}{3m^2 c^3} n_0 \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2, \quad (\text{V.444})$$

где \mathcal{E} - кинетическая энергия заряженной частицы.

6. Спектральное распределение интенсивности излучения в области достаточно больших частот, сравнимых с невозмущенной циклотронной частотой ω_c^0 ,

$$\omega_c^0 = \frac{3eH_0}{2mc} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2, \quad (\text{V.445})$$

и больших ее, можно вычислить с помощью стандартных формул электродинамики [46]. Это дает:

$$J = J_0 \Delta^{-3} F \left(\frac{\omega}{\omega_c^0} \Delta^{-5/2} \right), \quad (\text{V.446})$$

где

$$J_0 = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^3 H_0 n_0}{mc^2}, \quad (\text{V.447})$$

$$F(x) = x \int_x^\infty K_{5/3}(y) dy, \quad (\text{V.448})$$

$K_\nu(z)$ - модифицированная функция Бесселя - функция Макдональда (см. [85]):

$$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi} z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \sinh^{2\nu} t dt.$$

V.13.3 Результаты численного моделирования электромагнитного отклика магнитоактивной плазмы на ПГВ

Ниже на рисунках 11-15 показаны результаты численного моделирования отклика магнитоактивной плазмы на гравитационную волну в зависимости от параметров GMSW.

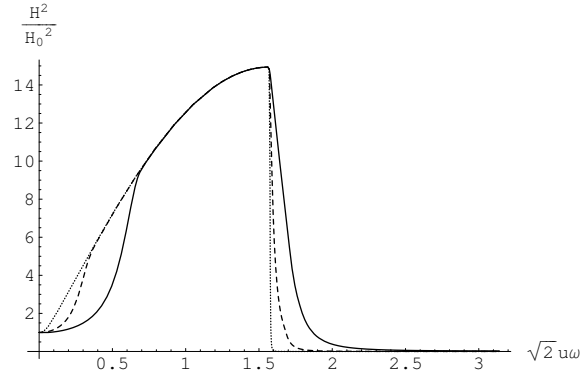


Рис. 11. Влияние второго параметра GMSW, Υ , на эволюцию относительной плотности энергии магнитного поля, $\frac{H^2}{H_0^2}$, при $\xi^2 = 0.0045$, $\gamma_{\perp} = 1/6$: $\Upsilon = 3$ (сплошная линия), $\Upsilon = 10$ (пунктирная линия), $\Upsilon = 100$ (точечная линия).

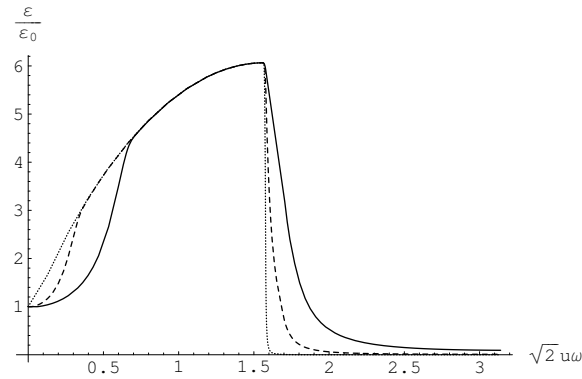


Рис. 12. Влияние второго параметра GMSW, Υ , на эволюцию плотности энергии плазмы, ϵ/ϵ_0 , при $\xi^2 = 0.0045$, $\gamma_{\perp} = 1/6$: $\Upsilon = 3$ (сплошная линия), $\Upsilon = 10$ (пунктирная линия), $\Upsilon = 100$ (точечная линия).

V.13. Численное моделирование электромагнитного отклика GSMW

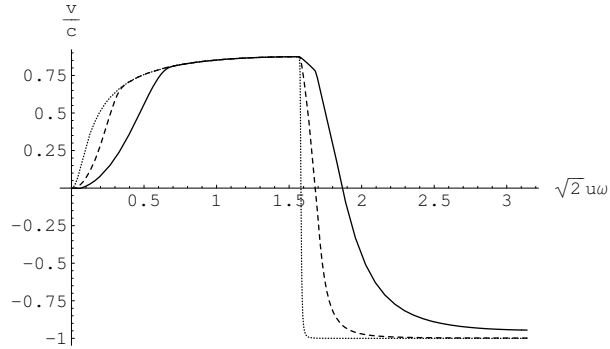


Рис. 13. Влияние второго параметра GSMW, Υ , на эволюцию скорости дрейфа плазмы v^1/c при $\xi^2 = 0.0045$, $\gamma_{\perp} = 1/6$: $\Upsilon = 3$ (сплошная линия), $\Upsilon = 10$ (пунктирная линия), $\Upsilon = 100$ (точечная линия).

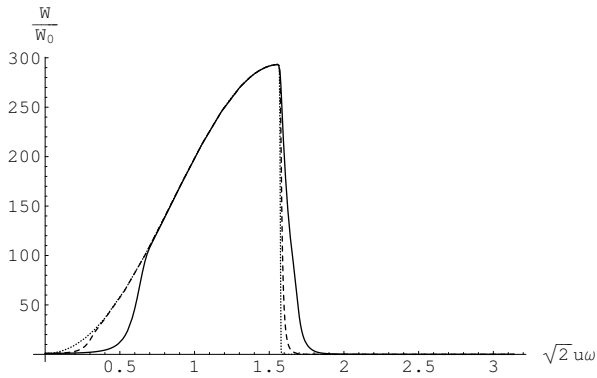


Рис. 14. Влияние второго параметра GSMW, Υ , на эволюцию полной наблюдаемой интенсивности магнитотормозного излучения W/W_0 при $\xi^2 = 0.0045$, $\gamma_{\perp} = 1/6$: $\Upsilon = 3$ (сплошная линия), $\Upsilon = 10$ (пунктирная линия), $\Upsilon = 100$ (точечная линия).

Результаты численного моделирования позволяют определить область параметров GSMW, ξ^2 и Υ , в которой механизм возбуждения гравимагнитной ударной волны становится достаточно эффективным. При этом эффект считался существенным, если полная наблюдаемая

интенсивность излучения в максимуме превышает свое первоначальное значение примерно в 2 раза. Вследствие существенной зависимости полной интенсивности излучения от параметра ξ^2 эта область оказывается весьма близкой к эллипсу (рис. 15).

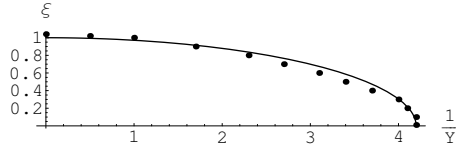


Рис. 15. Область существования GMSW на фоне четверти эллипса с полуосями 4.2 и 1.

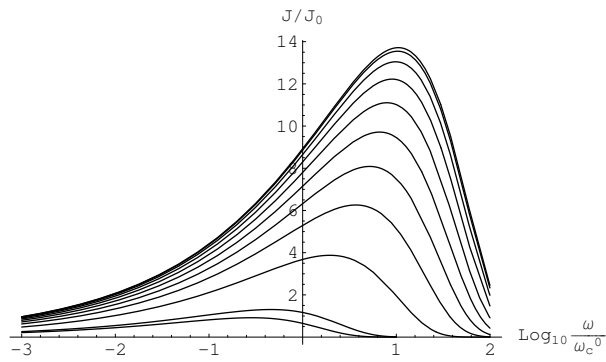


Рис. 16. Временная эволюция спектральной плотности интенсивности магнитотормозного излучения в относительных единицах при $\xi^2 = 0.0045$, $\Upsilon = 10$, и относительных временах: $s=0$; 0.15; 0.31; 0.47; 0.63; 0.78; 0.94; 1.10; 1.25; 1.41; $1.56 \approx \pi/2$ (снизу – вверх).

На Рис. 16 вдоль оси абсциссы отложены значения десятичного логарифма частоты магнитотормозного излучения в единицах невозмущенной циклотронной частоты ω_c^0 (V.445). Вдоль оси ординат на рис.16 отложены значения относительной интенсивности излучения, J/J_0 . Мак-

V.13. Численное моделирование электромагнитного отклика GMSW

симум спектрального распределения (V.446) смещается по закону:

$$\omega_{max} = 0,29\omega_c^0 \Delta^{-5/2}(s).$$

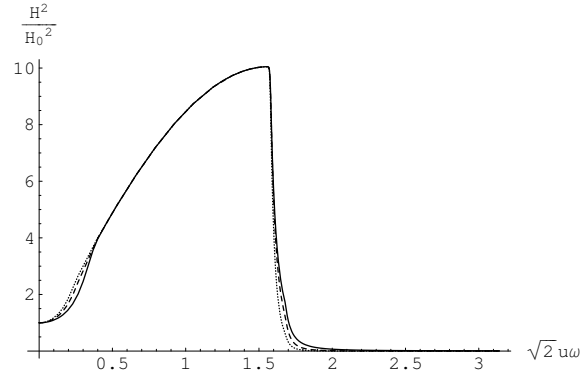


Рис. 17. Влияние параметра анизотропии плазмы, γ_{\perp} , на эволюцию плотности энергии магнитного поля H^2/H_0^2 при $\xi^2 = 0.01$, $\Upsilon = 10$: $\gamma_{\perp} = 1/4$ (сплошная линия), $\gamma_{\perp} = 1/6$ (пунктирная линия), $\gamma_{\perp} = 1/8$ (точечная линия).

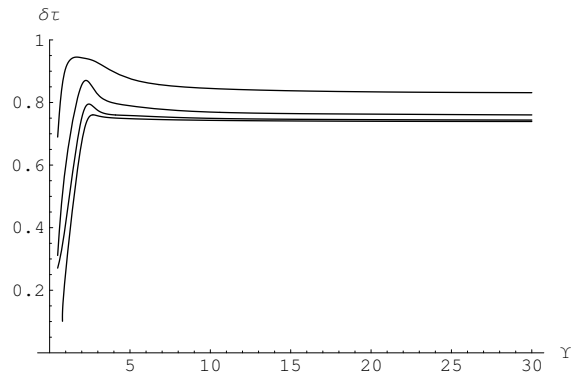


Рис. 18. Зависимость полуширины полной наблюдаемой интенсивности магнитотормозного излучения W/W_0 от Υ при $\gamma_{\perp} = 1/6$, $\xi^2 = 0.1$, $\xi^2 = 0.01$, $\xi^2 = 0.0001$ (сверху — вниз).

Как отмечалось выше, после прохождения минимума управляющей функции, соответствующего максимуму наблюдаемых величин, быстро развивается неустойчивость, в результате которой плазма делает необратимый реверс в направлении, противоположном направлению распространения ПГВ. Эту ситуацию хорошо иллюстрирует рисунок 13. Таким образом, магнитоактивная плазма реагирует на ПГВ одиночным импульсом [115], [116].

На рис.17 показаны результаты численного исследования влияния параметра анизотропии γ_{\perp} на наблюдаемую плотность энергии магнитного поля. Видно, что результирующее влияние фактора анизотропии оказывается незначительным, несмотря на существенную зависимость точного решения (V.258)-(V.261) от этого фактора.

Исследовалась зависимость полуширины полной наблюдаемой интенсивности магнитотормозного излучения от параметров GMSW. Как видно из рис. 18, длительность импульса GMSW, т.е., полуширину этого импульса с большой точностью можно полагать равной $\pi/4 \approx 0.79$, или в обычных величинах:

$$\delta\tau = \frac{T}{8}, \quad (\text{V.449})$$

где T - период ПГВ.

V.13.4 Заключение

Численное моделирование электромагнитного отклика магнитоактивной плазмы на гравитационную волну на основе разработанных программных процедур позволило обнаружить следующие закономерности процесса возбуждения гравимагнитной ударной волны:

1. При выполнении условий возникновения GMSW

$$\xi < 1; \quad \Upsilon > 1 \quad (\text{V.450})$$

магнитоактивная плазма реагирует на гравитационную волну одиночным импульсом, в котором плазма движется в направлении распространения гравитационной волны - полуширина импульса порядка $1/8$ периода гравитационной волны;

2. Импульс заканчивается откатом плазмы в обратном направлении; при этом возникает характерная форма импульса, показанная на рис.19, слабо зависящая от второго параметра GMSW, Υ , а определяется, в основном, функцией $\Delta_0(s)$.

V.13. Численное моделирование электромагнитного отклика GMSW

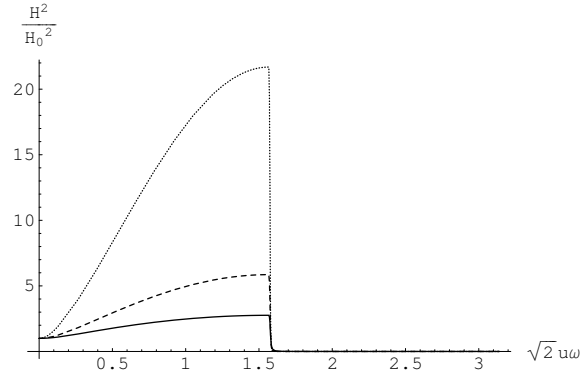


Рис. 19. Влияние первого параметра GMSW на эволюцию плотности энергии магнитного поля H^2/H_0^2 при $\Upsilon = 100$, $\gamma_{\perp} = 1/6$: $\xi^2 = 0.5$ (сплошная линия), $\xi^2 = 0.3$ (пунктирная линия), $\xi^2 = 0.1$ (точечная линия).

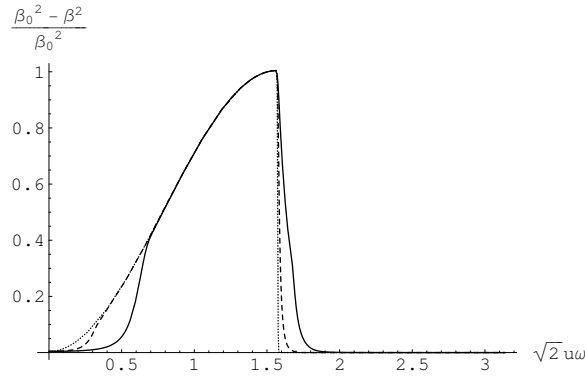


Рис. 20. Влияние второго параметра GMSW, Υ , на поглощение плотности энергии гравитационной волны $\Delta\varepsilon_g/\varepsilon_g = (\beta_0^2 - \beta^2)/\beta_0^2$ при $\xi^2 = 0.0045$, $\gamma_{\perp} = 1/6$: $\Upsilon = 3$ (сплошная линия), $\Upsilon = 10$ (пунктирная линия), $\Upsilon = 100$ (точечная линия).

Второй параметр GMSW, Υ , при выполнении условий (V.450) лишь несколько влияет на форму переднего (малые значения времени s) и заднего (значения времени s , близкие к $\pi/2$) фронтов импульса.

3. Спектр магнитотормозного излучения во время прохождения ударной волны становится более жестким.
4. В максимуме отклика магнитоактивной плазмы практически вся энергия гравитационной волны передается плазме, магнитному полю и магнитотормозному излучению (см. рис.20).

V.14 GSMW и гравитационно-волновые эксперименты

V.14.1 Введение

В истории физики XX-го столетия нет, пожалуй, такой серьезной экспериментальной проблемы (кроме проблемы управляемых термоядерных реакций), которая бы решалась на протяжении более 40-лет в различных исследовательских группах, при достаточно больших средствах, вложенных в ее решение, и за все это время не имела ни одного достаточно убедительного положительного результата, как это имеет место в проблеме детектирования гравитационных волн (ПДГВ). В чем причины такого положения: в ошибочности теории гравитации? в неумении экспериментаторов? Имеются ли вообще реальные возможности регистрации гравитационного излучения в сколь-нибудь обозримом будущем? На эти вопросы мы и попытаемся ответить в этом разделе.

Как и всякая проблема регистрации излучения ПДВГ распадается на две самостоятельные проблемы: 1) «Источники гравитационного излучения» и 2) «Детекторы гравитационного излучения». Важно при решении конкретной экспериментальной задачи не забывать о стыковке этих проблем.

V.14.2 Источники гравитационного излучения

V.14.2.1 Оценки мощности гравитационного излучения

Средняя мощность гравитационного возмущения подсчитывается по формуле [47]

$$L_{GW} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{t}_{ik} \ddot{t}_{ik} \rangle, \quad (V.451)$$

V.14. GSMW и гравитационно-волновые эксперименты

где G - гравитационная постоянная, c - скорость света,

$$t_{ik} = \int \rho(x_i x_k - \frac{1}{3} \delta_{ik} r^2) dV \quad (V.452)$$

- приведенный квадрупольный момент источника; точка означает дифференцирование во времени. В задачах детектирования гравитационной волны (ГВ) нас интересуют два ее параметра: амплитуда ГВ (т.е., отклонение метрики от плоской $h_{ik} = g_{ik} - \eta_{ik}$) и частота ГВ, ω . Поток энергии ГВ выражается через эти величины по формуле [47]:

$$ct^{14} = \mathcal{P} = \frac{c^3}{16\pi G} \left[\dot{h}_{23}^2 + \frac{1}{4} (\dot{h}_{22} - \dot{h}_{33})^2 \right]. \quad (V.453)$$

(Здесь и в дальнейшем используется сигнатура метрики $(-1, -1, -1, +1)$). Из (V.451 - V.453) следуют оценочные формулы для мощности гравитационного излучения и амплитуды ГВ:

$$L_{GW} = \frac{GE_q^2 \omega^2}{5c^5}; \quad (V.454)$$

$$L_{GW} = \frac{c^3 \omega^2 R^2}{4G} h^2, \quad (V.455)$$

где E_q - энергия квадрупольных колебаний источника с характерной частотой ω ($L_0 = \omega E_q$ - мощность квадрупольных колебаний), R - расстояние от источника до наблюдателя.

V.14.2.2 Ограничения на амплитуду ГВ

Из (V.454) - (V.455), в частности вытекает полезная формула:

$$\frac{h}{h_0} = \frac{E_q}{Nc^2}, \quad (V.456)$$

где h_0 - гравитационный потенциал источника полной массы M :

$$h_0 = \frac{GM}{c^2 R}. \quad (V.457)$$

Согласно (V.456), (V.457) отношение амплитуды ГВ к ньютоновскому гравитационному потенциалу источника порядка отношения квадрупольной энергии колебаний источника к полной энергии покоя этого

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

источника $E_0 = Mc^2$. Ясно, что всегда $E_q < E_0$, а в типичных ситуациях $E_q/E_0 \ll 1$, поэтому (V.457) дает максимальный верхний предел для амплитуды ГВ источника, который уже сам по себе является хорошим отрезвляющим фактором. Приведем для справки некоторые значения. Для массы порядка массы Солнца ($M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ г) и расстояния 1 пс ($3,26$ св.года $= 3 \cdot 10^{18}$ см)¹² получим из (V.457):

$$h_0 \cdot (\text{пс}/M_\odot) = 4,8 \cdot 10^{-14}.$$

Для массы 1 кг, удаленной на расстояние 1 м:

$$h_0 \cdot (\text{м кг}^{-1}) = 7,4 \cdot 10^{-18}.$$

Поэтому взрыв атомной бомбы ($\Delta M/M \sim 10^{-3}$) при условии перехода *всей* энергии взрыва в энергию квадрупольных колебаний на расстоянии 1 м(!) от эпицентра получим величину амплитуды ГВ: $h \sim 10^{-21}$. Если заставить колебаться *все* атомы компактного гразера в оптическом диапазоне ($\hbar\nu \sim 1$ эв, $l \sim 1$ м [124]), для максимальной амплитуды ГВ на торце гразера получим оценку: $h \sim 10^{-28}$. Источники гравитационного излучения можно разделить на два класса: 1 - стабильные (квазистабильные), не разрушающиеся в процессе излучения гравитационных волн; 2 - катастрофические, разрушающиеся в процессе излучения ГВ. Гразер представляет источник первого типа, атомная бомба - второго. Для источников первого типа энергия квадрупольных колебаний не может превышать энергии связи источника как целого. Для катастрофических источников энергия квадрупольных колебаний может превышать энергию связи источника как целого. Источники 2-го типа являются источниками одноразового использования. К астрофизическим источникам первого типа относятся, например, тесные двойные звездные системы, квадрупольные колебания нейтронных звезд; к источникам второго типа - Сверхновые.

Стабильные источники излучения, как отмечалось выше, подчиняются условию:

$$E_{\text{кин}} < E_c, \quad (\text{V.458})$$

где $E_{\text{кин}}$ - внутренняя кинетическая отдельных частиц источника, E_c - энергия связи этих частей в источнике. Поскольку всегда $E_q \leq E_{\text{кин}}$, условие (V.458) примет вид:

$$E_q \leq E_c, \quad (\text{V.459})$$

¹²Расстояние до ближайших звезд порядка 1,3 пс

V.14. GSMW и гравитационно-волновые эксперименты

Таким образом, верхний предел амплитуды ГВ для таких источников находится по формуле:

$$h < h_0 \frac{F_c}{Mc^2}. \quad (\text{V.460})$$

Для астрофизических источников роль энергии связи в конечном итоге играет роль гравитационного притяжения. Пусть ΔM - часть массы астрофизического объекта, совершающая квадрупольные колебания. Энергия ее гравитационной связи равна:

$$E_c < G \frac{\Delta M \cdot M}{l}, \quad (\text{V.461})$$

где l - характерный размер системы. Таким образом, для верхнего предела амплитуды ГВ от такого источника согласно (V.460), (V.461) найдем:

$$h \leq h_0 \frac{r_g}{2l} \frac{\Delta M}{M}, \quad (\text{V.462})$$

где $r_g = 2GM/c^2$ - гравитационный радиус излучающей системы.

V.14.2.3 Частота излучения

Рассмотрим сначала источник с полной массой M , состоящий из двух частей, причем вторая часть ΔM , совершает свободное движение в гравитационном поле системы (вращение, свободное падение). Пусть ω - характерная частота этого процесса¹³. Приравнявая центростремительное ускорение ускорению свободного падения, получим известную формулу:

$$GM = \omega^2 l^3, \quad (\text{V.463})$$

связывающую характерный размер системы с характерной частотой.

Пусть теперь гравитационное притяжение в системе удерживается силами давления (квадрупольные колебания звезды). Приравнявая эти силы, получим условие гидростатического равновесия:

$$|\vec{\nabla} P| = \rho \frac{GM}{l^2}, \quad (\text{V.464})$$

¹³ Очевидно, что эта величина по порядку совпадает и с частотой гравитационного излучения системы.

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

где P - давление, ρ - плотность. Используя известное соотношение $dP = v_f^2 d\rho$, где v_f - скорость звука, получим из (V.464):

$$lv_f^2 \approx MG. \quad (V.465)$$

Но $v_f/l \approx \omega$ - частота собственных колебаний системы. Поэтому и для систем, поддерживаемых силами давления, мы снова приходим к оценке (V.463). Таким образом

Для стабильных астрофизических источников ГВ формула (V.463) имеет универсальный характер, если в ней под ω понимать характерную частоту колебаний системы.

По закону (V.463) можно оценивать характеристики излучения коллапсирующих объектов, сталкивающихся звезд и т.д. Из этого закона следует, что максимальная частота излучения может достигаться для объектов, близких к состоянию гравитационного коллапса. В этом же случае согласно (V.462) достигается и максимальная амплитуда излучаемых ГВ (см. [82]). Для объектов порядка массы Солнца ($r_g = 2,96\text{км}$) максимальная частота излучения составляет:

$$\omega_{max} \sim c/r_g \approx 10^5 \text{сек}^{-1}.$$

V.14.2.4 Тесные двойные звездные системы

Для мощных астрофизических источников гравитационного излучения основным механизмом потери энергии квадрупольных колебаний является гравитационное излучение. Поэтому более строго такие источники надо называть квазистабильными. Мощность гравитационного излучения системы двух вращающихся тяготеющих масс m_1 и m_2 подсчитывается по известной формуле [46]:

$$L_g = -\frac{dE}{dt} = \frac{32G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5c^5 r^5}, \quad (V.466)$$

где r - расстояние между центрами масс. Баланс энергии приводит к закону сближения масс [46]:

$$\dot{r} = \frac{64G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5c^5 r^3}, \quad (V.467)$$

V.14. GSMW и гравитационно-волновые эксперименты

интегрируя который, получим формулу для времени сближения t центров масс от расстояния r до r_0 :

$$t = \frac{5c^5}{192G^3m_1m_2(m_1+m_2)}(r^4 - r_0^4). \quad (\text{V.468})$$

В дальнейшем для простоты будем рассматривать пару одинаковых звезд, полагая $m_1 = m_2 = M$, $r_0 = 2R_0$, где R_0 - радиус звезды, т.е., будем вычислять время до катастрофического столкновения звезд, τ (время жизни). Тогда из формул (V.468) - (V.468) найдем:

$$\tau = \frac{5c^5(l^4 - 16R_0^4)}{384G^3M^3}$$

и при $l \gg R_0$

$$\tau \approx \frac{5}{384} \left(\frac{l}{r_g}\right)^3 \frac{l}{c}. \quad (\text{V.469})$$

Частота гравитационного излучения двойной системы увеличивается со временем; отношение сдвига частоты $\Delta\omega$ за один период к частоте излучения ω по-порядку величины равно:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim \left(\frac{r_g}{l}\right)^{\frac{5}{2}}. \quad (\text{V.470})$$

Оценим *вероятность обнаружения тесной двойной системы* в Галактике с заданным периодом обращения, полагая, что возраст Галактики составляет порядка $1 \cdot 10^{10}$ лет. Далее будем полагать, что средняя плотность числа звезд в галактике порядка $0,120$ звезд/пс³ [125] объем Галактики 300 кпс³ [126], тогда число звезд в Галактике порядка $0,35 \cdot 10^{11}$. Кроме того учтем, что примерно половина звезд находится в двойных системах [127]. Тогда вероятность существования в Галактике двойной системы с заданным временем жизни, τ , будет пропорциональна отношению τ/t , где t - возраст Галактики. В ряде клеток Таблицы 2, соответствующих времени жизни системы менее одного года, указана вероятность регистрации таких систем при экспериментах, продолжающихся в течении одного года. Очевидно, что для таких систем вероятность обнаружения системы в течении годового эксперимента совпадает с вероятностью обнаружения двойной системы в Галактике с временем жизни 1 год. По оценкам в Галактике существует порядка одной такой системы.

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

Приведенные данные показывают, что в момент, предшествующий катастрофическому столкновению, мощность гравитационного излучения двойной системы порядка светимости Сверхновой. Как мы отвечали выше, вероятность обнаружения в Галактике двойной системы с временем жизни порядка 1 года близка к единице. Это означает, что катастрофические явления с выделением энергии порядка $1 \cdot 10^{54}$ эрг/сек должны были бы происходить каждый год. Однако, в действительности такие события происходят в Галактике 1 раз в 40-80 лет [128].

Таблица 2. Характеристики гравитационного излучения тесных двойных систем*

l	5(4)	2(4)	1(4)	7(3)	4(3)	1(3)	320	100	40	20
τ	8,2(10)	2,1(9)	1,3(8)	3,15(7)	3,3(6)	1,3(4)	129	1,30	0,031	0
ω	0,046	0,18	0,52	0,88	2,05	16,4	92,6	518	2047	5790
T	136	34,3	12,1	7,10	3,07	0,38	0,068	0,012	0,003	0,001
L_g	1,1(38)	1,1(40)	3,4(41)	2,0(42)	3,3(43)	3,4(46)	1,1(49)	3,4(51)	3,3(53)	1,1(55)
h	7,5(-21)	1,9(-20)	3,7(-20)	5,4(-20)	9,4(-20)	3,7(-19)	1,2(-18)	3,7(-18)	9,4(-18)	1,9(-17)
\mathcal{P}	9,7(-14)	9,5(-12)	3,0(-10)	1,8(-9)	3,0(-8)	3,0(-5)	9,8(-3)	3,0	296	9463
N	2343	60	3,7	1	1	1	1	1	1	1
R	0,50	1,71	4,32	14,4	14,4	14,4	14,4	14,4	14,4	14,4
h_{\oplus}	1,5(-20)	4,4(-21)	1,7(-21)	3,7(-21)	6,5(-21)	2,6(-20)	8,3(-20)	2,6(-19)	6,5(-19)	1,3(-18)
\mathcal{P}_{\oplus}	3,8(-13)	3,2(-12)	1,6(-11)	9,0(-12)	1,5(-10)	1,5(-7)	4,7(-5)	1,5(-2)	1,4	46

*) Из работы [115]. Цифры в круглых скобках указывают порядок величины; амплитуды гравитационных волн h и плотность потока энергии гравитационных волн \mathcal{P} вычислены для расстояния 1 кпс от двойной системы; $T = 2\pi/\omega$ - период ГВ. N - ожидаемое число двойных систем в Галактике; $\langle R \rangle$ - ожидаемое среднее расстояние до двойной системы в кпс; h_{\oplus} - ожидаемая на Земле амплитуда ГВ; \mathcal{P}_{\oplus} - ожидаемая на Земле плотность потока энергии гравитационных волн. Величины T, τ даны в секундах, ω - в сек^{-1} , l - в км, L_g - в эрг/сек, $\mathcal{P}, \mathcal{P}_{\oplus}$ в $\text{вт}/\text{см}^3$.

Заметим, что в связи с этим трудно понять экспериментальные программы, рассчитанные на регистрацию гравитационного излучения от тесных двойных систем с периодом порядка нескольких секунд и менее. Время жизни таких систем не превышает 5 лет, а в этом случае разумнее было бы подождать эти 5 лет и зарегистрировать гравитационное излучение при катастрофическом столкновении, мощность которого по крайней мере на 13 порядков выше, а амплитуда ГВ больше на 3 поряд-

V.14. GSMW и гравитационно-волновые эксперименты

ка (!), как это следует из Таблицы 2 работы [115]. Однако, по крайней мере, в последние 10 лет никто не регистрировал катастрофических событий такого масштаба на расстоянии 15 кпс. А это автоматически означает, что в течение этого времени в сфере радиуса 15 кпс не было ни одной тесной двойной системы с периодом вращения порядка нескольких секунд.

Таблица 3. Данные о пульсарах, находящихся на расстоянии менее или порядка 1 кпс от Солнца. (Из работы [115].)

№	Пульсар	Расст. (кпс)	P (сек)	P/\dot{P} (лет)
1	MP 0031	0,21	0,94	7,1(7)
2	MP 0450	0,33	0,55	
3	NP 0532	2,0	0,033	2,5(3)
4	MP 0628-28	0,170	1,24	1,6(7)
5	CP 0809	0,19	1,29	2,5(8)
6	AP 0823+26	0,38	0,53	1,0(7)
7	PSR 0833-45	0,5	0,089	2,3(4)
8	CP 0834	0,43	1,27	5,9(6)
9	PP 0943	0,30	1,098	
10	CP 0950	0,10	0,253	3,5(7)
11	CP 1133	0,16	1,188	1,0(7)
12	AP 1237+25	0,20	1,382	4,6(7)
13	PSR 1451-68	0,40	0,263	>2,8(6)
14	HP 1508	0,26	0,740	4,7(6)
15	CP 1919	0,42	1,337	3,2(7)
16	PSR 1929+10	0,27	0,227	6,2(6)
17	JP 1933+16	3	0,359	1,9(6)
18	AP 2016+28	0,47	0,558	1,2(8)
19	PSR 2045	0,38	1,962	5,7(6)

Поскольку пульсары отождествляются с остатками Сверхновых, среднюю частоту вспышек Сверхновых в нашей Галактике можно оценить по данным о распределении пульсаров в окрестности Солнца. Всего в окрестности Солнца радиусом около 1 кпс наблюдается около 20 пульсаров. В Таблице 2 приведены данные о ближайших к солнечной системе пульсарах. ¹⁴ Как следует из этой таблицы, практически все пульсары моложе 10^8 лет. Поэтому можно утверждать, что наблюдаемые пульсары - это остатки сверхновых, взорвавшихся в течение последних ста

¹⁴из книг [120],[125]

миллионов лет. Это дает 1 вспышку в 50 лет, что совпадает с оценкой [128]. По-видимому, эта величина близка к средней частоте катастрофических столкновений в тесных двойных системах (Таблица 3).

Таким образом нам в лучшем случае предстоит иметь дело с линейными размерами системы порядка $10000 \div 20000$ км. Это дает: $T \sim 10 \div 40$ сек, $h_{\oplus} \sim (1 \div 5) \cdot 10^{-21}$, $\mathcal{P}_{\oplus} \sim 10^{-11} \div 3 \cdot 10^{-12}$ вт.см². Вряд-ли ГВ с такими параметрами смогут быть зарегистрированы в ближайшие десятилетия. В этой ситуации остается надеяться только на редкий и одновременно опасный для Земли случай (вспышку Сверхновой или катастрофический конец тесной двойной звездной системы в непосредственной близости).

V.14.3 GMSW и детектирование ГВ

Причина неудовлетворительного состояния в ПД - ГВ заключается по мнению автора в ошибочности первоначально выбранного направления ее решения-программы создания детекторов гравитационного излучения. Прямое детектирование гравитационных волн может осуществляться либо посредством приливного воздействия ГВ на нерелятивистский детектор (твердое тело), либо посредством релятивистского воздействия ГВ на детектор, имеющий релятивистскую компоненту (луч лазера). В обоих случаях действие ГВ на детектор (смещение пробного тела или отклонение луча лазера) пропорционально амплитуде ГВ. Ожидаемые же от астрофизических источников значения амплитуды гравитационных волн ничтожно малы (см., например, [47]).

Существующие программы детектирования гравитационного излучения рассчитаны, в основном, на астрофизические источники двух типов: 1. - Сверхновые; 2 - тесные двойные системы. В первом случае можно ожидать амплитуду ГВ порядка $10^{-17} - 10^{-18}$ с излучением в широком диапазоне частот с характерной частотой порядка 10^3 сек⁻¹, во втором - амплитуду порядка $10^{-20} - 10^{-21}$ на фиксированной частоте в интервале $0, 1 - 10$ сек⁻¹. Вследствие весьма малой ожидаемой амплитуды гравитационного излучения в условиях Земли экспериментальные программы, ориентируемые на прямое детектирование гравитационного излучения, неизбежно сталкиваются с проблемой борьбы с шумами, как внешнего, так и внутреннего — теплового и квантового характера. Эта борьба продолжается в течение 40-лет и требует создания высокопрецизионных глубоко охлажденных детекторов.

С другой стороны хорошо известно, что даже такие слабые по ампли-

V.14. GSMW и гравитационно-волновые эксперименты

туда гравитационные волны несут на себе достаточно высокую энергию - для указанных примеров эта энергия порядка единиц $\text{вт}/\text{см}^2$ - в первом случае и порядка 10^{-13} - 10^{-11} $\text{вт}/\text{см}^2$ - во втором. Регистрация электромагнитного сигнала такой мощности не представляет проблем. Поэтому проблему детектирования гравитационного излучения необходимо перенести в другую плоскость - поиска специфических электромагнитных сигналов в результате воздействия гравитационных волн на вещество в тех областях Галактики, где велика интенсивность гравитационного излучения. В такой постановке проблема упирается прежде всего в исследование воздействия гравитационных волн на плазмopodobные среды. Соответствующие исследования были выполнены в 80-е годы, в основном, в казанской школе гравитации и обнаружили ряд специфических электромагнитных откликов плазмы на гравитационные волны.

В [113] получено точное решение уравнений релятивистской МГД на фоне ПГВ произвольной амплитуды, на основе которого открыт принципиально новый класс существенно нелинейных пороговых эффектов, названных GSMW (Gravi-Magnetically Shock Waves) - гравимагнитными ударными волнами.

В [115, 116] показано, что GSMW в магнитосферах пульсаров могут являться высокоэффективным детектором гравитационного излучения нейтронных звезд. В частности, наблюдательным следствием перекачки энергии гравитационной волны в энергию GSMW могут, например, являться так называемые гигантские импульсы, спорадически возникающие в излучении ряда пульсаров. Оценки, сделанные в в этих работах, позволяют интерпретировать гигантские импульсы в излучении пульсара PSR B0531+21 с гравитационным излучением этого пульсара на основной квадрупольной моде нейтронной звезды. В действительности, пока трудно говорить о достоверности идентификации гигантских импульсов как электромагнитных проявлений развившейся в магнитосфере пульсара гравимагнитной ударной волны, и тем самым - однозначно связать эти импульсы с гравитационным излучением пульсаров. Тем не менее, сама идея об анализе особенностей электромагнитного излучения компактных астрофизических объектов на предмет выявления влияния на это излучение гравитационных волн от самих же объектов представляется нам весьма плодотворной для решения проблемы детектирования гравитационных волн.

Действительно, основными препятствиями детектирования гравитационных волн астрофизического происхождения в земных условиях являются следующие:

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

1. чрезвычайная малость амплитуды гравитационных волн в земных условиях ($h \lesssim 10^{-19}$) ввиду значительной удаленности релятивистских астрофизических объектов от Земли;
2. спорадический характер катастрофических событий в релятивистских астрофизических объектах, приводящих к излучению гравитационных волн достаточной мощности, не позволяющий однозначно идентифицировать полученные сигналы с фактом регистрации гравитационной волны;
3. невозможность в условиях земных лабораторий создать релятивистские детекторы с аномальными, наиболее эффективными параметрами для регистрации гравитационного излучения (сверхсильные магнитные поля, релятивистское уравнение состояния рабочего тела детектора, высокая анизотропия рабочего тела детектора, низкий уровень шумов и т.п.).

При переносе же детектора в непосредственную близость к релятивистскому астрофизическому объекту эти проблемы автоматически снимаются, - при этом всегда имеется готовый электромагнитный сигнал, который нет необходимости конвертировать в какие-либо другие формы, что дает возможность проведения корреляционного анализа. В случае, когда рабочим телом детектора является магнитосфера релятивистского астрофизического объекта, автоматически достигаются и оптимальные с точки зрения детектирования гравитационных волн параметры рабочего тела детектора: сверхсильные магнитные поля, ультрарелятивистское уравнение состояния детектора, высокая анизотропия и т.п.

Принципиальная важность для теории гравитации GMSW, как прямого эффекта преобразования энергии гравитационных волн в электромагнитную энергию, приводит к необходимости более детального и всестороннего исследования этого явления.

V.14.4 GMSW в магнитосферах нейтронных звезд

Естественно возникает вопрос: существуют ли в природе GMSW, т.е., реализуется ли условие их возникновения (V.150)? В лабораторных экспериментах указанное необходимое условие ($2\alpha^2|\beta| \geq 1$) недостижимо вследствие как слабости гравитационных волн в земных условиях, так и слабости стабильных лабораторных магнитных полей. Для галактических магнитных полей ($H \sim 10^{-5} \div 10^{-6}$) и межзвездной среды

V.14. GSMW и гравитационно-волновые эксперименты

($\rho \sim 10^{-24} \text{ г/см}^3$) $\rightarrow \alpha^2 \sim 10^{-8}$, - поэтому в межзвездной среде GSMW не возникает.

Единственным возможным источником GSMW, по-видимому, могут являться магнитосферы нейтронных звезд либо на стадии квадрупольных колебаний нейтронной звезды, либо на стадии Сверхновой. В Таблице 4 приведены результаты расчета параметра $2\alpha^2 \langle |\beta| \rangle$, ($\langle |\beta| \rangle$ - средняя амплитуда излучаемых ГВ) для магнитосфер нейтронных звезд, совершающих квадрупольные колебания на основной квадрупольной моде ($n = 0$). Данные, помещенные в первые четыре колонки Таблицы, взяты (или пересчитаны) из книги [47]. Средняя амплитуда ГВ подсчитывалась с помощью стандартных формул по средней мощности гравитационного излучения, N , (см., например, [46]) в предположении, что средняя относительная амплитуда квадрупольных колебаний нейтронной звезды (параметр $\langle (\delta R/R)^2 \rangle^{1/2}$ в книге [47]) равна 10^{-6} . Предполагалось, что магнитосфера нейтронной звезды состоит из полностью ионизированного водорода. При этом параметр n_0 (плотность числа ионов водорода на поверхности нейтронной звезды) находился из требования $\tau = 1$, где $\tau = \int n \sigma dl$ - оптическая толщина магнитосферы. Предполагалось также, что масштаб плотности магнитосферы порядка радиуса нейтронной звезды R .

Заметим, что значения концентраций ионов у поверхности нейтронной звезды, полученные нами из условия равенства единицы оптической толщины магнитосферы, примерно на 4 порядка выше оценок n_0 , приведенных в [132] и полученных на основе размерностного анализа уравнений Максвелла, описывающих стационарную магнитосферу нейтронной звезды. При принятии оценок n_0 , предложенных Пачини [132], величина фактора GSMW, приведенная в Таблице 4, вырастет соответственно на 4 порядка.

Для звезды с массой $0,682 M_\odot$ в соответствие с Таблицей 4 получим: $\chi = 1,33 \cdot 10^{-11}$; $\chi / \langle |\beta_0| \rangle = 0,317$. Тогда найдем коэффициент затухания ГВ [113]: $\gamma = 0,206$, таким образом, амплитуда ГВ в этом случае падает в 5 раз, а мощность гравитационного излучения - в 25 раз. Для звезды с массой $1,954 M_\odot$ $\chi = 1,42 \cdot 10^{-11}$; $\chi / \langle |\beta_0| \rangle = 1,01 \cdot 10^{-3} \rightarrow \gamma = 0,032$, т.е., в этом случае амплитуда ГВ может уменьшиться в 30 раз, а мощность гравитационного излучения - в 900 раз! Таким образом, в магнитосферах нейтронных звезд имеются *необходимые* условия для существования GSMW.

Таблица 4.

Параметр GMSW: $2\alpha^2\langle|\beta|\rangle$ в магнитосфере нейтронных звезд

M/M_\odot	R	ω	$N/\langle(\delta R/R)^2\rangle$	$\langle \beta \rangle$	n_0	$2\alpha^2\langle \beta \rangle$
0,405	5,00	5249	1,2(50)	2,93(-10)	5,97(18)	0,260
0,682	8,42	2,02(4)	2,9(53)	4,20(-9)	3,54(18)	3,32
0,677	12,60	8987	7,0(52)	1,64(-9)	2,36(18)	3,670
1,954	9,99	1,66(4)	1,6(55)	1,41(-8)	2,99(18)	30,0

Числа в скобках указывают степень 10. Обозначения: M/M_\odot - масса нейтронной звезды в ед.солнечной массы; R - радиус звезды в км.; ω - частота гравитационного излучения в s^{-1} ; $N/\langle(\delta R/R)^2\rangle$ - мощность гравитационного излучения звезды в эрг/сек; $\langle|\beta|\rangle$ - средняя амплитуда ГВ; n_0 - концентрация ионов водорода у поверхности звезды в cm^{-3} .

Данные, помещенные в колонки 1 – 7, 9, 12, взяты из книги [47]. $\delta M = M/M_\odot$ - масса нейтронной звезды в ед.солнечной массы; R - радиус звезды в км; T_n - период собственных колебаний нейтронной звезды на основной квадрупольной моде (в миллисекундах); τ_n - время затухания колебаний (в секундах); $\Delta_R = \langle(\delta R/R)^2\rangle$ - среднеквадратичная относительная амплитуда колебаний нейтронной звезды; E_m - кинетическая энергия колебаний в эрг; L_g - мощность гравитационного излучения звезды в эрг.сек. При этом значение амплитуды ГВ на поверхности нейтронной звезды, $\beta_0(R)$, полагалось равным 10^{-8} . $H(R)$ - напряженность магнитного поля (в Гс). Данные, помещенные в колонки 8 ÷ 11, получены с помощью формул (V.453), (V.472), (V.477) по наблюдаемым параметрам пульсара в Крабе (NP 0532): $P = 0,033$ сек, $t_0 = 2500$ лет. Данные, помещенные в последнюю строку Таблицы (колонки 2 - 7,9), получены экстраполяцией значений из книги [47]. Значения параметров α^2 и Υ приведены для магнитосферы у поверхности нейтронной звезды.

Если описывать магнитное поле нейтронной звезды полем диполя, то географический угол Θ , отсчитываемый от магнитного экватора связан с введенным нами углом Ω соотношением $\Omega = \pi/2 - \Theta$. Поэтому условие возникновения MGSW зависит от угла Θ :

$$\sin^2 \Theta < 1 - \frac{1}{2\alpha_0^2|\beta|}.$$

V.14. GSMW и гравитационно-волновые эксперименты

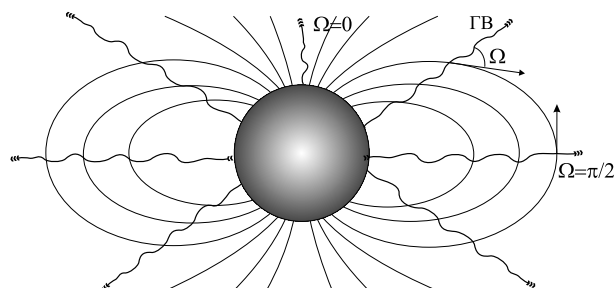


Рис. 21. GSMW в магнитосфере звезды

Таким образом, в магнитосфере нейтронной звезды (или Сверхновой) может образоваться GSMW в области магнитного экватора подобно пульсарам с ножевой диаграммой излучения. В этой области, как показывают вышеприведенные примеры, гравитационное излучение может быть практически полностью поглощено на возбуждение ударной волны. Такая нейтронная звезда будет излучать гравитационные волны лишь с магнитных полюсов подобно пульсарам с карандашной диаграммой излучения. Вероятность обнаружения гравитационных источников при этом может быть резко снижена. Однако, GSMW неожиданно открывает другой косвенный путь обнаружения гравитационных волн. Если такая ударная волна образуется и оторвется от магнитосферы, то она унесет с собой (с околосветовой скоростью) в межзвездное пространство сверхсильные магнитные поля. Взаимодействие космической плазмы с такими полями должно привести к аномальным электромагнитным явлениям, в том числе и в оптическом диапазоне. Следует особо подчеркнуть, что не существует других механизмов, способных разогнать ударную волну до околосветовых скоростей.

Таким образом, эффект GSMW может сместить центр тяжести гравитационно - волновых экспериментов с непосредственного детектирования гравитационных волн на оптические наблюдения Сверхновых и их остатков.

Параметры GSMW в магнитосферах нейтронных звезд

В [116] показано, что в магнитосферах нейтронных звезд, совершающих квадрупольные колебания, реализуются большие значения второго параметра GSMW, и, таким образом, реализуется необходимое усло-

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

вие для возбуждения GMSW. Рассмотрим этот вопрос более детально. Плотность числа электронов в магнитосфере пульсара, $n_e(r)$, необходимую для вычисления параметра Υ , можно найти на основе размерностей оценки из уравнений Максвелла [132]:

$$n_e(r) \sim \frac{H(r)}{4\pi cr}. \quad (\text{V.471})$$

Далее, как известно [125], скорость замедления периода пульсара t_0 связана с параметрами пульсара следующим образом:

$$t_0 \approx \frac{3c^2MP^2}{8\pi^2H^2R^4}, \quad (\text{V.472})$$

где R - радиус нейтронной звезды, M - ее масса, H - напряженность магнитного поля на поверхности звезды, P - период вращения. Эта формула по известной скорости замедления периода пульсара дает для пульсара NP 0532 $H \approx 5 \cdot 10^{12}$ Гс. (см. Таблицу 3). На самом деле, как отмечается в [120], напряженность магнитного поля на поверхности пульсара NP 0532 несколько ниже значения, полученного на основании формулы скорости замедления периода (V.472) и составляет порядка 10^{12} Гс. Это значение и принимается нами в дальнейшем. На представленных ниже рисунках (кроме особо оговоренных случаев) приняты следующие значения параметров: $R = 1,2 \cdot 10^6$ см., $\beta_0(R) = 10^{-8}$ и магнитное поле в магнитосфере подразумевается дипольным: $H(r) \sim (R/r)^3$.

Если магнитное поле нейтронной звезды описывается полем диполя, то географический угол Θ , отсчитываемый от магнитного экватора связан с введенным нами углом Ω соотношением: $\Omega = \pi/2 - \Theta$. Поэтому условие возникновения GMSW зависит от угла Θ :

$$\sin^2 \Theta < 1 - \frac{1}{2\alpha_0^2|\beta|} \sim 1 - \Upsilon^{-1}.$$

Таким образом, в магнитосфере нейтронной звезды (или Сверхновой) может образоваться GMSW в области магнитного экватора подобно пульсарам с ножевой диаграммой излучения. В этой области, как показывают многочисленные расчеты, гравитационное излучение может быть практически полностью поглощено на возбуждение ударной волны. Согласно Таблице 4 таким значениям параметров $\beta_0(R)$ и R в случае NP 0532 соответствует мощность гравитационного излучения $L_g \approx 4,5 \cdot 10^{42}$ эрг/сек.

Расчеты показывают, что область, благоприятная для развития GMSW, оказывается заключенной в пределах $6R \div 16R$, т.е. в области

V.14. GSMW и гравитационно-волновые эксперименты

локальной напряженности магнитного поля $3 \cdot 10^8 \div 4 \cdot 10^9$ Гс [116]. При прохождении импульса GSMW эти локальные значения увеличиваются в $10 \div 30$ раз. Таким образом, нейтронная звезда, в магнитосфере которой образуется зона GSMW, может излучать гравитационные волны лишь с магнитных полюсов подобно пульсарам с карандашной диаграммой направленности излучения. Вероятность обнаружения гравитационных источников путем прямого детектирования ГВ при этом может быть резко снижена.

Как мы отмечали выше, отклик однородной магнитоактивной плазмы даже на строго периодическое гравитационное излучение имеет характер одиночного импульса. Но даже, если бы это и не было так, отклик магнитосферы нейтронной звезды на ГВ все равно бы имел такой же характер. Действительно, ударная волна (GMSW), возникшая при возбуждении квадрупольных колебаний нейтронной звезды, должна выбросить экваториальный сектор магнитосферы в межзвездное пространство. Для возникновения следующего импульса магнитосфера должна восстановиться. Время, необходимое для ее восстановления порядка $\Delta t \sim l/v_c$, где l - характерный размер магнитосферы, v_c - скорость звука. Для типичной магнитосферы нейтронной звезды $\Delta t \sim 1$ сек. Типичные же значения времени затухания квадрупольных колебаний согласно Таблице 4 составляют десятые доли секунды.

V.14.4.1 Применимость WKB-приближения

Для корректного применения теории GSMW к неоднородной плазме необходимо, во-первых, выполнение условий WKB-приближения, т.е., малости длины гравитационной волны по сравнению с масштабами неоднородности системы. Таковым масштабом для астрофизических задач является расстояние до центра звезды, т.е.:

$$\lambda = \frac{c}{\omega} \ll r. \quad (\text{V.473})$$

Нулевая (радиальная) мода собственных колебаний звезды имеет частоту порядка джинсовской:

$$\omega_0 \simeq \sqrt{\frac{3MG}{R^3}}, \quad (\text{V.474})$$

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

где R - радиус звезды. Таким образом, длина волны нулевой гармоники колебаний звезды порядка:

$$\lambda_0 = \frac{c}{\omega_0} \simeq \sqrt{\frac{R^3}{3r_g}}, \quad (\text{V.475})$$

где $r_g = \sqrt{MGc^2}$ - гравитационный радиус звезды. Учитывая тот факт, что отношение r_g/r для большинства релятивистских нейтронных звезд лежит в диапазоне 0.16 – 0.6 (см., например, [?]), приходим к выводу, что приближении WKB (V.473) эквивалентно следующему:

$$r \gg R, \quad (\text{V.476})$$

т.е., чтобы GMSW развивалась в удаленных от поверхности звезды областях. Сразу отметим, что для нулевой гармоники колебаний это условие является наиболее трудновыполнимым, однако для более высоких гармоник колебаний это условие выполняется.

V.14.4.2 Параметры магнитосфер нейтронных звезд

Далее, плотность числа электронов в магнитосфере пульсара, $n_e(r)$, необходимую для вычисления параметра Υ , можно найти на основе размерностной оценки из уравнений Максвелла:¹⁵

$$\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi en_e \frac{\mathbf{v}}{c},$$

откуда получим, полагая $v \simeq c$ [132]:

$$n_e(r) \sim \frac{H(r)}{4\pi er}. \quad (\text{V.477})$$

При принятии дипольной модели магнитного поля его напряженность в ближней зоне вращающейся нейтронной звезды:

$$r \ll \frac{c}{\Omega}, \quad (\text{V.478})$$

(Ω - частота вращения звезды) находится по формуле [132] (при малых углах между осью вращения звезды и ее магнитной осью):

$$H_r = H_0 \sin \theta \left(\frac{R}{r} \right)^3, \quad H_\theta = H_0 \cos \theta \left(\frac{R}{r} \right)^3. \quad (\text{V.479})$$

¹⁵Материал этого раздела взят из работы [133].

V.14. GSMW и гравитационно-волновые эксперименты

а в дальней, волновой зоне $r > c/\Omega$ напряженность магнитного поля падает пропорционально $1/r$.

Учитывая неопределенность в распределении магнитного поля внутри нестационарной магнитосферы нейтронной звезды, для оценок в дальнейшем будем полагать:

$$H_r = H_0 \left(\frac{R}{r}\right)^\mu \sin \theta, \quad H_\theta = H_0 \left(\frac{R}{r}\right)^\mu \cos \theta, \quad (\text{V.480})$$

где θ - угол между плоскостью магнитного экватора и радиусом-вектором точки, $\mu \leq 3$. С другой стороны, степень μ должна быть меньше 1, иначе по теореме Гаусса в магнитосфере должны существовать сильные токи для поддержания магнитного поля. Таким образом:

$$1 < \mu \leq 3. \quad (\text{V.481})$$

Далее, амплитуда гравитационной волны, излученной при колебаниях нейтронной звезды, изменяется по закону:

$$\beta(r) \simeq \beta(R) \frac{R}{r}. \quad (\text{V.482})$$

Как показывают многочисленные оценки, плазма магнитосфер пульсаров является заведомо ультрарелятивистской, причем сильно анизотропной по отношению к направлению напряженности магнитного поля. Вследствие сильного магнитотормозного излучения ультрарелятивистских электронов быстро высвечивается поперечный к магнитному полю импульс электронов, поэтому в среднем поперечный импульс электронов магнитосферы нейтронной звезды должен быть гораздо меньше продольного. С другой стороны поперечный импульс электронов накачивается мощным низкочастотным излучением пульсара. Таким образом, имеется в наличие конкуренция двух процессов - высвечивания поперечного импульса и его накачки. Поэтому для такой плазмы можно положить:

$$\varepsilon = n_e \mathcal{E}, \quad (\text{V.483})$$

где \mathcal{E} - средняя суммарная энергия электронов и протонов. Далее, давление анизотропной плазмы можно выразить в виде отношений:

$$p_\perp = \kappa_\perp \varepsilon, \quad p_\parallel = \kappa_\parallel \varepsilon, \quad (\text{V.484})$$

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

где p_{\perp} , p_{\parallel} - перпендикулярная и параллельная составляющие давления плазмы, κ_{\perp} , κ_{\parallel} - соответствующие коэффициенты баротропы (см. [?]), так что:

$$2\kappa_{\perp} + \kappa_{\parallel} \leq 1. \quad (\text{V.485})$$

Оценим теперь среднюю кинетическую энергию электронов плазмы магнитосферы, полагая, что она поддерживается излучением пульсара. Из релятивистских уравнения движения заряда в электромагнитном поле следует [46]

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v}, \quad (\text{V.486})$$

где \mathbf{E} - напряженность электрического поля, откуда следует, что при равновесии между притоком энергии и высвечиванием ее:

$$\mathcal{E} \sim E. \quad (\text{V.487})$$

Поэтому в случае изотропного источника излучения $E \sim 1/r$ (так что поток энергии $4\pi r^2 c \mathbf{E}^2 / 8\pi = \text{Const}$):

$$\mathcal{E} \sim \frac{1}{r}. \quad (\text{V.488})$$

Вообще же говоря, при анизотропном распределении потока излучения:

$$\mathcal{E} \sim \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma}, \quad \gamma \leq 1. \quad (\text{V.489})$$

Таким образом, для плотности энергии и давления плазмы магнитосферы получим оценки:

$$\varepsilon(r) = \varepsilon(R) \left(\frac{R}{r}\right)^{\mu+\gamma+1}, \quad p(r) = p(R) \left(\frac{R}{r}\right)^{\mu+\gamma+1}. \quad (\text{V.490})$$

Подставляя найденные оценки в выражения для первого и второго параметров GSMW, найдем:

$$\Upsilon(r) = \Upsilon(R) \left(\frac{R}{r}\right)^{\mu+\gamma}; \quad (1 \leq k + \gamma \leq 4), \quad (\text{V.491})$$

$$\xi^2(r) = \xi^2(R) \left(\frac{R}{r}\right)^{2\mu-2}, \quad (0 < 2\mu - 2 \leq 4). \quad (\text{V.492})$$

V.14. GSMW и гравитационно-волновые эксперименты

Как указывалось в предыдущих разделах, все наблюдаемые физические величины в гравимагнитной волне определяются управляющей функцией $\Delta(x)$, которая достигает своего минимума в четверти периода ГВ:

$$\Delta_{min} = \left(\frac{1}{\xi^2} + 1 \right)^{-\gamma_{\perp}}, \quad (\text{V.493})$$

Относительные же изменения этих величин фактически определяются функцией

$$\zeta(\nu; x) = \frac{1}{\Delta^{\nu}(x)} - 1, \quad (\text{V.494})$$

где $\nu > 0$ - некоторое число, определяемое спецификой наблюдаемой величины. Таким образом, согласно (V.493) получим для максимума относительного изменения физической величины:

$$\zeta(\nu)_{max} = \left(1 + \frac{1}{\xi^2} \right)^{\nu\gamma_{\perp}} - 1. \quad (\text{V.495})$$

Для получения заметного эффекта необходимы малые значения первого параметра $\xi < 1$, и, таким образом, условия, определяющие область эффективного механизма преобразования энергии гравитационной волны в энергию плазмы, имеют вид:

$$\xi < 1; \quad \Upsilon > 1, \quad (\text{V.496})$$

откуда с использованием явных зависимостей от радиуса параметров GSMW (V.491) и (V.492), получим для области развитого эффекта:

$$\xi^{\frac{1}{\mu-1}} < \rho < \Upsilon^{\frac{1}{\mu+\gamma}}, \quad (\text{V.497})$$

где $\rho = r/R \geq 1$ - безразмерный радиус. Из последнего соотношения следует сразу, что необходимым условием для существования достаточно эффективного механизма перекачки энергии гравитационной волны в энергию магнитоактивной плазмы является:

$$\xi(R) < \Upsilon^{\frac{\mu-1}{\mu+\gamma}}. \quad (\text{V.498})$$

V.14.4.3 Интенсивность магнитотормозного излучения

Наблюдатель, находящийся вне магнитосферы нейтронной звезды, будет регистрировать магнитотормозное излучение электронов магнитосферы в течении всего времени прохождения локального импульса через зону магнитосферы $r_- < r < r_+$, в которой реализуются условия благоприятные для развития GMSW. С известной степенью осторожности эти условия можно конкретизировать: $\xi^2 < 0,5$ - нижняя граница зоны GMSW, r_- ; $\Upsilon > 5$ - верхняя граница зоны GMSW, r_+ . Таким образом, размер зоны GMSW определяется соотношением:

$$\delta r = r_+ - r_-.$$

Поскольку, как мы видели выше, скорость распространения импульса GMSW весьма близка к скорости света, все магнитотормозное излучение, регистрируемое внешним наблюдателем будет сосредоточено внутри временного "окна" длительностью ΔT :

$$\Delta T = \Delta r/c = t_+ - t_-, \quad (\text{V.499})$$

где $t_{\pm} = r_{\pm}/c$ - моменты времени, когда передний фронт ГВ достигает верхней и нижней границы зоны GMSW. Вблизи границ зоны r_- , r_+ GMSW еще плохо развит (в первом случае слишком большой первый параметр GMSW, во втором - слишком мал второй). Поэтому у границ окна интенсивность электромагнитного сигнала мала, в средних областях окна достигается максимум излучения (большие Υ и малые ξ^2). При этом саму форму наблюдаемого сигнала еще предстоит вычислить.

Заметим, что локальная плотность интенсивного тормозного излучения, $W(r, t)$, определяется локальными значениями квадрата напряженности магнитного поля, $H^2(t, r)$ и локальной плотностью электронов в магнитосфере, $n_e(t, r)$. Для ультрарелятивистских электронов согласно [46] это будет:

$$W = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c^3} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 n_e,$$

где E - энергия электрона. Будем полагать в дальнейшем, что размер локального импульса гораздо меньше не только характерного масштаба неоднородности магнитосферы, r , но и ширины окна, δr . В этом случае GMSW может описываться формулами для однородной плазмы, в которых необходимо использовать локальные значения параметров

V.14. GSMW и гравитационно-волновые эксперименты

GMSW, $\xi^2(r)$, $\Upsilon(r)$. При этом в указанных точных стационарных решениях появится зависимость от радиальной координаты r , например, $\Delta(u; r)$, $v_v(u; r)$. Для упрощения обозначений мы, однако, по-прежнему будем писать $\Delta(u)$, $v_v(u)$. Итак, из закона сохранения числа частиц и стационарности решения следует:

$$L^2 n_e(r, t) v_v(u) = \text{Const} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} n_e^0(r), \quad (\text{V.500})$$

где $n_e^0(r)$ - невозмущенная плотность электронов в магнитосфере. Учитывая, что $En_e = 1/2\varepsilon$ (половина энергии релятивистской магнитосферы приходится на электроны) и используя решения для слабой ГВ, получим:

$$n_e(r, t) = n_e^0(r) \Delta^{-3/2}(u); \quad (\text{V.501})$$

$$E(r, t) = E_0(r) \Delta^{-1/2}(u); \quad (\text{V.502})$$

где $E_0(r)$ - невозмущенная энергия электронов магнитосферы:

$$H^2(u) = H_0^2(r) \Delta^{-3}(u). \quad (\text{V.503})$$

Таким образом, для плотности магнитотормозного излучения ультра-релятивистской магнитосферы получим формулу:

$$W(r, t) = W_0(r) \Delta^{-11/2}(u), \quad (\text{V.504})$$

где $W_0(r)$ - плотность интенсивности магнитотормозного излучения невозмущенной магнитосферы. В формуле (V.504) необходимо сделать релятивистскую поправку, учитывающую движение плазмы. Для этого плотность излучения необходимо умножить на релятивистский фактор $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Окончательно получим:

$$W(r, t) = W_0(r) \Delta^{-11/2} \frac{1}{2} (\Delta^{3/2} + \Delta^{-3/2}). \quad (\text{V.505})$$

Таким образом, $W(r, t) \sim W_0(r) \Delta^{-7}$.

Оценим относительное изменение полной интенсивности магнитотормозного излучения плазмы во время эффекта ГМВ:

$$K = \frac{\int_1^{\infty} (W - W_0) d\rho}{\int_1^{\infty} W d\rho}, \quad (\text{V.506})$$

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

где W_0 - интенсивность магнитормозного излучения в отсутствии ГВ. Производя разложение интеграла по областям, получим окончательно:

$$K = \frac{\int_1^{\rho_1} (W_0 - W_0) d\rho + \int_{\rho_1}^{\rho_2} (W - W_0) dx + \int_{\rho_2}^{\infty} (W_0 - W_0) d\rho}{\int_1^{\infty} W_0 d\rho} = \frac{\int_{\rho_1}^{\rho_2} (W - W_0) dx}{\int_1^{\infty} W d\rho},$$

где ρ_1 и ρ_2 - нижняя и верхняя границы области существования GMSW. В случае $p = 6$ согласно (V.505):

$$W - W_0 = W_0 \left[\frac{1}{2} \Delta^{-11/2} \left(\Delta^{-3/2} + \Delta^{3/2} \right) - 1 \right]. \quad (\text{V.507})$$

Минимально возможное значение управляющей функции в случае $p = 6$:

$$\Delta_{min} = \left(\frac{1}{\xi^2} + 1 \right)^{-1/6}. \quad (\text{V.508})$$

Тогда:

$$K \simeq \frac{1}{2} \xi_0^{-14/6} \frac{2\gamma + 3\mu}{2\gamma + \mu(3 - \frac{14}{6}) + \frac{14}{6}} \rho_1^{-(2\gamma + \mu(3 - \frac{14}{6}) + \frac{14}{6})}. \quad (\text{V.509})$$

Для случая $\mu = 3$, $\gamma = 1$ это дает:

$$K = \frac{1}{2} \xi_0^{-7/3} \frac{15}{19} \rho_1^{-19/3}. \quad (\text{V.510})$$

V.14.4.4 Источник квадрупольных колебаний

Естественно возникает вопрос о природе квадрупольных колебаний пульсаров. Источником энергии для таких колебаний могли бы быть, ядерные реакции взрывного характера с тяжелыми гиперонами типа $n + n \leftrightarrow p + \Sigma_-$, протекающие в ядрах нейтронных звезд при плотностях выше 10^{15} г/см^3 [129]. Наличие же сильного магнитного поля должно привести к асимметрии взрывов, т.е., к возбуждению квадрупольного момента. Для того, чтобы такие процессы еще происходили в нейтронной звезде, она должна быть достаточно молодой. Численное моделирование процесса охлаждения нейтронной звезды показывает [130], что после взрыва Сверхновой температура нейтронной звезды падает примерно на порядок за 10^4 лет. Следовательно, GMSW необходимо искать в излучении достаточно молодых пульсаров, образовавшихся не ранее 10000 лет назад.

V.14.4.5 Пульсар в Крабе NP 0532 излучает гравитационные волны

Пульсар с требуемыми параметрами существует - это знаменитый пульсар в Крабовидной туманности NP 0532, время жизни которого менее 1000 лет (Сверхновая 1054 года). Этот пульсар является самым молодым из известных (а, следовательно, самым горячим) и имеет самый короткий период: $P = 0,033$ сек. Удивительно то, что в радиоизлучении этого пульсара давно наблюдаются аномалии, которые с большой степенью уверенности можно отождествить с GSMW. Именно: в радиоизлучении NP 0532 наблюдаются отдельные нерегулярные, так называемые, *гигантские импульсы* (в среднем 1 импульс в каждые 5 - 10 минут) [120]. Интенсивность излучения в гигантских импульсах в десятки раз больше (примерно в 60 раз), чем в обычных импульсах. Но самым интересным является то обстоятельство, что длительность гигантских импульсов не более $9 \cdot 10^{-5}$ сек, т.е., в 56 раз короче обычных импульсов NP 0532 ($\tau \sim 5 \cdot 10^{-3}$ сек). Длительность обычных импульсов, как нетрудно видеть, порядка 1/7 периода вращения NP 532. Таким образом, обычные импульсы объясняются чисто геометрически вращением пульсара. Длительность же гигантских импульсов в 300 раз короче периода вращения NP 0532, вследствие этого до сих пор не существует сколь-нибудь удовлетворительной теоретической модели образования гигантских импульсов.

Однако, гигантские импульсы легко объясняются как GSMW, при этом длительность гигантских импульсов связывается не с периодом вращения пульсара и углом ножевой диаграммы направленности излучения, а с периодом его собственных колебаний, T_0 . Сравнение длительности гигантских импульсов NP 0532 с длительностью импульса GSMW показывает поразительное совпадение этих величин. Действительно, для пульсара NP 0532 по сдвигу аннигиляционной линии в спектре γ - излучения (400 keV вместо 511) известно гравитационное красное смещение [131], [134]:

$$\Delta E/E = MG/Rc^2 = 0,217.$$

Тогда из Таблицы 4 найдем массу пульсара NP 0532: $M = 1,67M_{\odot}$ и радиус соответствующей нейтронной звезды: $R = 12$ км. Согласно приведенным формулам и Таблице 4 длительность импульса GSMW для пульсара NP 0532 должна составлять примерно 87 микросекунд, в то время как наблюдаемая длительность гигантского импульса NP 0532 составляет примерно около 90 микросекунд [120] (!).

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

Для пульсара в Крабе $t_0 = 2,5 \cdot 10^3$ лет [125]; тогда найдем, полагая $\delta M = 1,67$, $R = 12$ км: $H \sim 5,2 \cdot 10^{12}$ Гс. Угол Θ_0 ножевой диаграммы излучения пульсара связан с наблюдаемой длительностью импульса излучения τ соотношением: $\Theta_0 = 2\pi\tau/P$. Для пульсара *NP 0532* этот угол составляет $0,48 \approx 28^\circ$. Полагая, что полная светимость пульсара *NP 0532* в непрерывном спектре порядка $5 \cdot 10^{36}$ эрг/сек и что энергия квадрупольных колебаний уносится гравитационными волнами равномерно с поверхности пульсара, найдем интенсивность гравитационного излучения, соответствующую энергии в гигантском импульсе:

$$L_g \approx \frac{P}{\tau} L_{gig} \approx 4 \cdot 10^{39} \text{ эрг/сек},$$

Согласно расчетам [47] (см. Таблицу 4) такой мощности соответствует энергия квадрупольных колебаний $E_m \approx 1,7 \cdot 10^{38}$ эрг и $(\beta) = 1,9 \cdot 10^{-10}$ (при этом средняя амплитуда колебаний поверхности нейтронной звезды составляет всего 0,02 см). Поскольку гигантские импульсы возникают примерно раз в 5 минут (т.е. 10^5 раз в год), то за все время существования пульсара *NP 0532* должно было выделиться порядка $2 \cdot 10^{46}$ эрг. Вычисляя с помощью этих оценок фактор *GMSW*, найдем: $\Upsilon = 6 \cdot 10^4 \gg 1$. Итак, первоначальное предположение о существовании *GMSW* в магнитосфере пульсара *NP 0532* полностью подтверждается.

Таким образом, с большой степенью достоверности можно утверждать, что наблюдающиеся в излучении пульсара NP 0532 гигантские импульсы являются оптическим проявлением гравимагнитных ударных волн (GMSW), возбуждаемых гравитационным излучением нейтронной звезды, соответствующей пульсару NP 0532 [116].

V.15 Самосогласованные уравнения движения неоднородной магнитоактивной плазмы в поле ПГВ

Заметим, что рассмотренные выше решения уравнений РМГД существенно стационарны, т.е., зависят лишь от одной переменной u - запаздывающего времени, и соответствуют первоначально однородной магнитоактивной плазме. Поэтому эти решения не могут раскрыть динамику

V.15. Движение неоднородной магнитоактивной плазмы в поле ПГВ

ку механизма возбуждения ударной волны. В этом разделе мы исследуем задачу распространения ПГВ в изотропной магнитоактивной плазме с граничными условиями [138, 139]. Заметим, что при этом плазма сразу становится неоднородной, поэтому для решения задачи с граничными условиями необходимо рассматривать неоднородную плазму, но, как известно (см., например, [135], [136], [137]), в такой плазме всегда возникает фоновое электростатическое поле, которое необходимо учитывать в сильных гравитационных полях. Этот фактор сильно усложняет задачу. Итак, будем полагать в дальнейшем, что изотропная гиперповерхность:

$$\Sigma_0 : u = 0 \quad (\text{V.511})$$

есть поверхность фронта ГВ, т.е., ГВ отсутствует при $u \leq 0$, -

$$\beta(u)|_{u \leq 0} = 0; \quad \beta'(u)|_{u \leq 0} = 0; \quad L(u)|_{u \leq 0} = 1. \quad (\text{V.512})$$

В отсутствие ГВ плазма покоится, т.е. :

$$\psi(u, v)|_{u \leq 0} = \psi_0(x^1); \quad (\text{V.513})$$

$$p|_{u \leq 0} = p_0(x^1); \quad \varepsilon|_{u \leq 0} = \varepsilon_0(x^1), \quad (\text{V.514})$$

где $\psi_0, p_0, \varepsilon_0$ - некоторые заданные функции переменной x^1 ;

$$v|_{u \leq 0} = v_v|_{u \leq 0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies - \left(\frac{\partial_u \psi}{\partial_v \psi} \right) |_{u \leq 0} = 1. \quad (\text{V.515})$$

Таким образом, вследствие (V.515):

$$-(\partial_u \psi)|_{u \leq 0} = (\partial_v \psi)|_{u \leq 0}. \quad (\text{V.516})$$

В отсутствие ГВ плотность энергии, давление и напряженность магнитного поля всюду одинаковы:

$$\varepsilon|_{u \leq 0} = \varepsilon_0 = \text{Const}; \quad p|_{u \leq 0} = p_0 = \text{Const}; \quad (\text{V.517})$$

$$H|_{u \leq 0} = H_0 = \text{Const} \implies \psi|_{u \leq 0} = \frac{1}{\sqrt{2}} H_0 (v - u), \quad (\text{V.518})$$

$$u \leq 0; \quad \forall v \in \mathcal{R}. \quad (\text{V.519})$$

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

В [113] показано, что при этом макроскопические параметры плазмы равны:

$$v_u = \sqrt{-\frac{\partial_u Z}{\partial_v Z}}; \quad v_v = \sqrt{-\frac{\partial_v Z}{\partial_u Z}}. \quad (\text{V.520})$$

$$H^2 = -L^{-4} e^{2\beta} \partial_u Z \partial_v Z, \quad (\text{V.521})$$

$$\varepsilon = L^{-2} \varepsilon_0 \sqrt{-\partial_u Z \partial_v Z} \quad (\text{V.522})$$

где

$$Z = \frac{\sqrt{2}\psi}{H_0} \quad (\text{V.523})$$

- безразмерная функция.

Функция $Z(u, v)$ должна удовлетворять граничному условию на пространственноподобной гиперповерхности $\Sigma_r : u = v$ ($x = 0$). Положим, следуя [113], на этой гиперповерхности:

$$H|_{u=v} = \text{Const}. \quad (\text{V.524})$$

Тогда, учитывая соотношение (см. [?]):

$$H_2 = F_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}(F_{v3} - F_{u3}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_v \psi - \partial_u \psi). \quad (\text{V.525})$$

приведем граничное условие (V.524) к виду:

$$-(\partial_u Z \partial_v Z)|_{u=v} = 1. \quad (\text{V.526})$$

С учетом этих условий система уравнений РМГД сводится к одному дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} \partial_{uv} Z + \beta' \partial_v Z = & \frac{2\pi e^{-2\beta}}{H_0^2} \frac{dp}{d\varepsilon} (\varepsilon + p) \frac{(L^2)'}{\partial_u Z} - \frac{\pi L^2}{H_0^2} e^{-2\beta} (\varepsilon + p) \times \\ & \times \left\{ \left[\frac{\partial_{vv} Z}{(\partial_v Z)^2} + \frac{\partial_{uu} Z}{(\partial_u Z)^2} - 2 \frac{\partial_{uv} Z}{\partial_u Z \partial_v Z} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{dp}{d\varepsilon} \left[\frac{\partial_{vv} Z}{(\partial_v Z)^2} + \frac{\partial_{uu} Z}{(\partial_u Z)^2} + 2 \frac{\partial_{uv} Z}{\partial_u Z \partial_v Z} \right] \right\}, \quad (\text{V.527}) \end{aligned}$$

которое для нерелятивистской плазмы принимает вид:

$$\begin{aligned} \partial_{uv} Z + \beta' \partial_v Z = & -\frac{1}{4\alpha^2} e^{-2\beta} \sqrt{-\partial_v Z \partial_u Z} \times \\ & \times \left[\frac{\partial_{vv} Z}{(\partial_v Z)^2} + \frac{\partial_{uu} Z}{(\partial_u Z)^2} - 2 \frac{\partial_{uv} Z}{\partial_u Z \partial_v Z} \right]. \quad (\text{V.528}) \end{aligned}$$

V.15.1 Исследование решения в слабой гравитационной волне

Поскольку GMSW образуется в сильно замагниченной плазме, то в дальнейшем будем полагать параметр α большим. Поэтому при разложении уравнения (V.528) по малому безразмерному параметру задачи α^{-1} , это уравнение в линейном по α приближении принимает вид:

$$\partial_{uv}Z + \beta' \partial_v Z = 0 \quad (\text{V.529})$$

Решая его, получаем первое приближение, удовлетворяющее указанным условиям:

$$Z_0 = (v - u) e^{-\beta} - 2 \int_0^u \sinh(\beta(u)) du \quad (\text{V.530})$$

Поведение магнитного поля соответствующее решению (V.530) представлено на рис. 22:

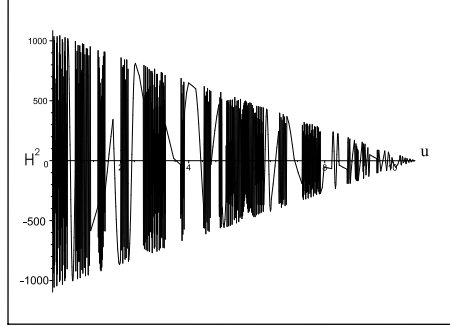


Рис. 22. Зависимость напряженности магнитного поля от запаздывающего времени, рассчитанная относительно решения (V.530).

Для проверки применимости линейного приближения, подставляя найденное решение в правую часть уравнения (V.528), получим:

$$\partial_{uv}Z + \beta' \partial_v Z = \Phi(u, v), \quad (\text{V.531})$$

где $\Phi(u, v)$ представляет собой очень громоздкое выражение. Нетрудно, однако, видеть, что подкоренное выражение $-\partial_u Z_0 \partial_v Z_0$ может становится отрицательным на некоторой поверхности $\Sigma(u, v)$ (анализ выражения показывает, что именно $\partial_u Z_0$ меняют знак). Это означает, что

Глава V. Гравимагнитные ударные волны

вблизи данной поверхности линейное решение уравнения (V.530) становится непригодным. Полагая, что амплитуда ГВ β всюду мала:

$$|\beta(u)| \ll 1 \quad (\text{V.532})$$

и разлагая подкоренное выражение в правой части уравнения (V.531) в ряд по малости β , получим уравнение этой поверхности:

$$\Sigma(u, v) : (v - u)\beta' + \beta + 1 = 0, \quad (\text{V.533})$$

откуда видно, что эта поверхность находится при достаточно больших значениях переменной $(v - u) = \sqrt{2}x$, т. е. далеко от границы:

$$|v - u| \sim \frac{1}{\beta_0 \omega}, \quad (\text{V.534})$$

где β_0 - амплитуда ГВ, а ω - ее частота.

Вблизи же поверхности $\Sigma(u, v)$:

$$1 + \beta'(v - u) = \sigma \ll 1 \quad (\text{V.535})$$

откуда, положив $\beta(u) = \beta_0(1 - \cos \omega u)$, получим уравнение поверхности $\Sigma(u, v)$, разрешенное в явном виде относительно запаздывающего времени:

$$v = \frac{-1 + \sigma}{\beta_0 \omega \sin(\omega u) + u}. \quad (\text{V.536})$$

В работе [140] проведен численный анализ уравнения (V.528), а в работе [141] дана постановка точной самосогласованной и по гравитации задачи о движении магнитоактивной плазме в поле гравитационной волны и приведено точное статическое решение этой задачи, соответствующее фоновому решению.

Глава VI

Кинетические процессы с элементарными частицами на ранних стадиях космологического расширения

VI.1 Асимптотическая конформная инвариантность кинетической теории в ультрарелятивистском пределе

Возможность поддержания глобального термодинамического равновесия в ультрарелятивистской расширяющейся плазме тесно связана с асимптотической конформной инвариантностью кинетической теории в ультрарелятивистском пределе [51]. Выясним трансформационные свойства скобок Пуассона (I.14) по отношению к конформным преобразованиям метрического пространства V_4 . Наряду с Римановым V_4 в общей координате $\{x^i\}$ рассмотрим конформно ему соответствующее рима-

ново \bar{V}_4 :

$$d\bar{s}^2 = a^2 ds^2. \quad (\text{VI.1})$$

Предположим, что при таком преобразовании потенциалы физических полей преобразуются следующим образом:

$$\bar{\Phi} = \Phi/a; \quad \bar{A}_i = A_i + \partial_i \varphi, \quad (\text{VI.2})$$

где $\varphi(x)$ — скалярная функция, выбранная таким образом, чтобы при конформном преобразовании не изменялось калибровочное условие, налагаемое на векторный потенциал. Связь между каноническими переменными \mathbb{P}_i и $\bar{\mathbb{P}}_i$ выберем в виде [51]

$$\bar{\mathbb{P}}_i = \mathbb{P}_i - e\partial_i \varphi. \quad (\text{VI.3})$$

Функция Гамильтона (I.20) после преобразований (VI.1) — (VI.3) принимает вид

$$\bar{\mathcal{H}}(x, \mathbb{P}) = \frac{1}{2} \left[\frac{g^{ik}(\mathbb{P}_i - eA_i)(\mathbb{P}_k - eA_k)}{a^2(1 + q\Phi/am)} - \frac{mq\Phi}{a} \right], \quad (\text{VI.4})$$

а соответствующая скобка Пуассона равна

$$\begin{aligned} [\bar{\mathcal{H}}, \bar{\psi}] = & a^{-1}(a + q\Phi/m)^{-1} \left\{ g^{ik}(\mathbb{P} - eA_i) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^k} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \partial_i \left[g^{lm}(\mathbb{P}_l - eA_l)(\mathbb{P}_m - eA_m) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbb{P}_i} \right] \right\} + \frac{m}{a} \partial_i \left(a + \frac{q\Phi}{m} \right) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbb{P}_i}. \end{aligned} \quad (\text{VI.5})$$

Из (VI.4) следует соотношение нормировки

$$g^{ik}(\mathbb{P}_i - eA_i)(\mathbb{P}_k - eA_k) = m^2 \left(a + \frac{q\Phi}{m} \right)^2. \quad (\text{VI.6})$$

При наличии в системе скалярного поля $\Phi(x) \neq 0$ ультрарелятивистское состояние необходимо понимать следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{P} &\gg m & ; & \quad |q\bar{\Phi}| \gg m; \\ P &\gg am & ; & \quad |q\Phi| \gg am, \end{aligned} \quad (\text{VI.7})$$

— в этом состоянии соотношение нормировки для обобщенного импульса не изменяется при конформном отображении (VI.1) — (VI.3):

$$g^{ik}(\mathbb{P}_i - eA_i)(\mathbb{P}_k - eA_k) = q^2 \Phi^2; \quad (\text{VI.7}), \quad (\text{VI.8})$$

VI.1. Конформная инвариантность кинетической теории

а функция Гамильтона (VI.4) преобразуется по закону

$$\bar{\mathcal{H}}(x, \bar{\mathbb{P}}) = a^{-1} \mathcal{H}(x, \mathbb{P}), \quad (\text{VI.9})$$

где $\mathcal{H}(x, \mathbb{P})$ — функция Гамильтона в V_4 при $m \rightarrow 0$

$$\mathcal{H}(x, \mathbb{P}) = \frac{m}{2} \left[\frac{g^{ik}(\mathbb{P}_i - eA_i)(\mathbb{P}_k - eA_k)}{q\Phi} - q\Phi \right]. \quad (\text{VI.10})$$

Переходя в (VI.5) к пределу $am \rightarrow 0$, получим

$$[\bar{\mathcal{H}}, \bar{\psi}] = a^{-1} [\mathcal{H}, \bar{\psi}] + O^2(am); \quad (|q\Phi| \gg am). \quad (\text{VI.11})$$

Если скалярное поле отсутствует, соотношения (VI.8) — (VI.10) в ультрарелятивистском пределе необходимо заменить на следующие [51]:

$$g^{ik}(\mathbb{P}_i - eA_i)(\mathbb{P}_k - eA_k) = 0; \quad (|q\Phi| \ll am), \quad (\text{VI.12})$$

$$\bar{\mathcal{H}}(x, \bar{\mathbb{P}}) = a^{-2} \mathcal{H}(x, \mathbb{P}) = (2a^2)^{-1} g^{ik}(\mathbb{P}_i - eA_i)(\mathbb{P}_k - eA_k); \quad (\text{VI.13})$$

$$[\bar{\mathcal{H}}, \bar{\psi}] = a^{-2} [\mathcal{H}, \bar{\psi}] + O^2(am). \quad (\text{VI.14})$$

Выясним теперь трансформационные свойства уравнений Власова в ультрарелятивистском пределе, для чего получим сначала асимптотические законы преобразования моментов функции распределения (I.113) — (I.116). Согласно (VI.11) и (VI.14) —

Бесстолкновительные кинетические уравнения в ультрарелятивистском пределе инвариантны относительно преобразований (VI.1) — (VI.3) как в случае сильных, так и слабых скалярных полей [51].

Таким образом, если $f(x, \mathbb{P})$ — решение бесстолкновительного кинетического уравнения в V_4 , то асимптотическим решением этого уравнения в конформно соответствующем \bar{V}_4 будет $\bar{f}(x, \bar{\mathbb{P}}) = f(x, \mathbb{P}) + O^2(am)$ [51]. Элемент объема пространства импульсов в соответствии с (VI.11), (VI.14) преобразуется по закону

$$d\bar{\mathbb{P}} \cdot \delta(\bar{\mathcal{H}}) = \begin{cases} a^{-3} d\mathbb{P} \cdot \delta(\mathcal{H}); & |q\Phi| \gg am; \\ a^{-2} d\mathbb{P} \cdot \delta(\mathcal{H}); & |q\Phi| \ll am. \end{cases} \quad (\text{VI.15})$$

Законы же преобразования моментов функции распределения оказываются одинаковыми в этих двух крайних случаях [51]:

$$\begin{aligned}\bar{T}_p^{ik} &= a^{-6}T_p^{ik} + O^2(am); \\ \bar{n}^i &= a^{-4}n^i + O^2(am).\end{aligned}\tag{VI.16}$$

Закон преобразования плотности скалярного заряда имеет вид:

$$\bar{\sigma} = \begin{cases} a^{-3}\sigma; & |q\Phi| \gg am; \\ a^{-2}\sigma; & |q\Phi| \ll am.\end{cases}\tag{VI.17}$$

Преобразуя теперь полевые уравнения для потенциалов $\bar{\Phi}$, \bar{A}_i , на фоне заданного гравитационного поля \bar{g}_{ik}

$$\bar{\nabla}_k \bar{F}^{ik} = -4\pi \bar{j}^i; \quad \bar{\nabla}_i \bar{F}_{kl} = 0;\tag{VI.18}$$

$$\bar{\Delta}_2 \bar{\Phi} - \frac{\bar{R}}{6} \bar{\Phi} + \lambda \bar{\Phi}^3 = -4\pi \bar{\sigma},\tag{VI.19}$$

в которых вектор плотности тока \bar{j}^i и плотность скалярного заряда $\bar{\sigma}$ определяются с помощью функции распределения $\bar{f}(x, \mathbb{P})$ формулами (IV.139), (IV.144), найдем и

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_k \bar{F}^{ik} &= a^{-4} \nabla_k F^{ik}; \quad \bar{\nabla}_{(i} \bar{F}_{kl)} = \nabla_{(i} F_{kl)}; \\ \bar{\Delta}_2 \bar{\Phi} - \frac{\bar{R}}{6} \bar{\Phi} + \lambda \bar{\Phi}^3 &= a^{-3} (\Delta_2 \Phi - \frac{R}{6} \Phi + \lambda \Phi^3).\end{aligned}\tag{VI.20}$$

Таким образом, сравнивая законы преобразования источников (VI.16), (VI.17) с законами преобразования соответствующих полевых операторов (VI.20), сформулируем следующее утверждение [51].

Теорема TVI.1. Система уравнений Власова для заряженных частиц с безмассовыми векторными и скалярными взаимодействиями конформно инвариантна в ультрарелятивистском пределе (VI.7) с точностью до $O^2(am)$. В случае же слабых скалярных полей ($|q\Phi| \ll am$) конформная инвариантность уравнения для скалярного поля нарушается источником:

$$\Delta_2 \Phi - \frac{R}{6} \Phi + \lambda \Phi^3 = -4\pi \epsilon_5 a \sigma.\tag{VI.20}$$

VI.1. Конформная инвариантность кинетической теории

Обратимся теперь к кинетическим уравнениям с интегралом столкновений. Согласно принципу конформной инвариантности [143] при высоких энергиях элементарных частиц должна восстанавливаться конформная инвариантность соответствующих полевых уравнений, следствием которой является асимптотическое скейлинговое поведение полных сечений рассеяния. Рассмотрим, например, трансформационные свойства интеграла столкновений в ультрарелятивистском пределе для 4-частичных взаимодействий в случае $q\Phi = 0$.

$$J_{ab\leftrightarrow cd} = \int d\pi_b d\pi_c d\pi_d \delta^{(4)}(\mathbb{P}_F - \mathbb{P}_I) \{ (1 \pm f_a)(1 \pm f_b) f_c f_d \cdot W_{cd\rightarrow ab} - (1 \pm f_c)(1 \pm f_d) f_a f_b W_{ab\rightarrow cd} \}. \quad (\text{VI.21})$$

Элементы импульсных объемов $d\pi$ при конформном отображении преобразуются по закону (VI.15): $d\bar{\pi} = a^{-2}d\pi$. В четырехмерную δ -функцию вследствие локального взаимодействия входят реперные проекции компонент обобщенного импульса, поэтому $\delta^{(4)}(\bar{\mathbb{P}}_F - \bar{\mathbb{P}}_I) = a^4 \delta^{(4)}(\mathbb{P}_F - \mathbb{P}_I)$. Наконец, вероятности переходов $W_{ab\leftrightarrow cd}$ определяются инвариантными амплитудами рассеяния $|M_{ab\leftrightarrow cd}|$, которые для 4-х частичных взаимодействий являются скалярными функциями двух кинематических инвариантов [142]

$$\begin{aligned} s &= (\mathbb{P}_a + \mathbb{P}_b)^2 = m_a^{*2} + m_b^{*2} - 2(\mathbb{P}_a, \mathbb{P}_b); \\ t &= (\mathbb{P} - \mathbb{P}_c) - 2(\mathbb{P}_a, \mathbb{P}_c); \end{aligned} \quad (\text{VI.22})$$

$$|M_{ab\leftrightarrow cd}| = |M_{ab\leftrightarrow cd}(s, t)|. \quad (\text{VI.23})$$

При отображении (VI.1) – (VI.3) в ультрарелятивистском пределе (VI.7) кинематические инварианты преобразуются по закону

$$\bar{s} = a^{-2}s; \quad \bar{t} = a^{-2}t. \quad (\text{VI.24})$$

При ультрарелятивистских энергиях частиц вследствие масштабной инвариантности амплитуд рассеяния:

$$|M(s, t)| = |M(t/s)| \quad (\text{VI.25})$$

последние являются и конформно инвариантными —

$$|\bar{M}_{ab\leftrightarrow cd}(\bar{s}, \bar{t})| = |M_{ab\leftrightarrow cd}(s, t)|. \quad (\text{VI.26})$$

Таким образом —

В ультрарелятивистском пределе, когда энергии всех частиц превышают их массы, интеграл 4-х частичных столкновений преобразуется по закону [51]:

$$\bar{J}_{ab\leftrightarrow cd}(\bar{\mathbb{P}}_a) = a^{-2} J_{ab\leftrightarrow cd}(\mathbb{P}_a). \quad (\text{VI.26})$$

Поскольку по такому же закону преобразуется и скобка Пуассона (VI.14), то справедлива теорема:

Теорема TVI.2. При условии выполнения законов преобразования полевых величин (VI.1), (VI.2) релятивистская кинетическая теория конформно инвариантна в ультрарелятивистском пределе.

Вопрос о преобразовании интеграла столкновений при наличии скалярного поля остается открытым, поскольку не ясно, каким образом преобразуются инвариантные амплитуды рассеяния при конформных преобразованиях классического скалярного поля.

Фактически теорема TVI.2 устанавливает фундаментальный закон релятивистской кинетической теории, связывающий симметрию микромира (масштабную инвариантность взаимодействий) с глобальной симметрией макромира (конформное соответствие геометрии вселенной геометрии Евклида). В дальнейшем этот фундаментальный закон будем называть, развивая терминологию Н.А. Черникова [143], *принципом асимптотической конформной инвариантности кинетической теории в ультрарелятивистском пределе*.

VI.2 Космологическая эволюция бесстолкновительных частиц

Исследуем решение бесстолкновительного кинетического уравнения

$$[\mathcal{H}, f] = 0 \quad (\text{VI.27})$$

в метрике изотропной космологической модели

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - d\chi^2 - b^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (\text{VI.28})$$

VI.2. Космологическая эволюция бесстолкновительных частиц

где $b = \text{sh } \chi$ — для открытой, $b = \sin \chi$ — для закрытой и $b = \chi$ для пространственно-плоской космологической модели. В отсутствие векторных и скалярных полей (VI.27) допускает линейные интегралы движения, генерируемые группой вращений

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\varphi &= \text{Const}; \quad \sin \varphi \cdot \mathbb{P}_\theta + \cos \varphi \cdot \text{ctg } \theta \mathbb{P}_\varphi = \text{Const}; \\ \cos \varphi \cdot \mathbb{P}_\theta - \sin \varphi \cdot \text{ctg } \theta \mathbb{P}_\varphi &= \text{Const}, \end{aligned} \quad (\text{VI.29})$$

независимыми из которых являются лишь два. Эти интегралы сохраняются и при наличии физических полей, не зависящих от угловых переменных: $\Phi(\chi, \eta)$; $A_i(\chi, \eta)$. Кроме того (VI.27) допускает еще квадратичный интеграл движения, связанный с существованием в (VI.28) тензорного поля Киллинга ξ_i :

$$\xi_{(ik, l)} = 0, \implies a^2 \mathbb{P}^2 = \text{Const}, \quad (\text{VI.30})$$

где

$$\mathbb{P}^2 = -g^{\alpha\beta} \mathbb{P}_\alpha \mathbb{P}_\beta$$

— квадрат физического импульса частицы. Для безмассовых частиц существует еще один линейный интеграл движения

$$\mathbb{P}_4 = \text{Const}; \quad (m = 0), \quad (\text{VI.31})$$

связанный с существованием в (VI.28) времениподобного вектора конформного движения:

$$\xi^i = \delta_4^i; \quad \mathcal{L}_\xi g_{ik} = \xi_{i,k} = \xi_{k,i} = \frac{a'}{a} g_{ik}. \quad (\text{VI.32})$$

Изотропным и однородным решением (VI.27) в метрике (VI.28) является произвольная функция $f(a \mathbb{P})$ [144]. Определим это решение таким образом, чтобы в некоторый момент времени $\eta = \eta_0$ оно совпадало с локально равновесным [145], [86], [88], [87]:

$$f^0(\mathbb{P}, \eta) = \left\{ \exp \left[\frac{-\mu_0 + \sqrt{m^2 + a^2 \mathbb{P}^2 / a_0^2}}{T_0} \right] \pm 1 \right\}^{-1}. \quad (\text{VI.33})$$

где μ_0 , T_0 — постоянные, $a_0 = a(\eta_0)$. Для безмассовых частиц $m \rightarrow 0$ и $a \mathbb{P} = \mathbb{P}_4$, т.е. распределение (VI.33) совпадает с равновесным во все

Глава VI. Кинетика ранних стадий космологического расширения

времена. То же самое верно и для ультрарелятивистских частиц, для которых

$$\frac{a}{a_0} \mathbb{P} \gg m. \quad (\text{VI.34})$$

В ультрарелятивистском пределе (VI.33) является равновесным распределением с постоянным отношением μ/T и температурой

$$T = \frac{a_0}{a(\eta)} T_0. \quad (\text{VI.35})$$

В нерелятивистском пределе

$$a\mathbb{P}/a_0 \ll m, \quad (\text{VI.36})$$

разлагая выражение в (VI.33) в ряд Тейлора, опять-таки получим равновесное нерелятивистское распределение

$$f^0(\mathbb{P}, \eta) = \left[\exp\left(-\frac{\mu' + \varepsilon}{T'}\right) \pm 1 \right]^{-1}, \quad (\text{VI.37})$$

где $\varepsilon = \mathbb{P}^2/2m$, $\mu' = a_0^2(\mu_0 - m)/a^2$ — нерелятивистской химический потенциал,

$$T' = T_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2. \quad (\text{VI.38})$$

Таким образом и в ультрарелятивистском (VI.34) и в нерелятивистском (VI.36) пределе решение бесстолкновительного кинетического уравнения (VI.33) совпадает с равновесным распределением; закон эволюции температуры, однако, различен в этих пределах. Заметим, что впервые космологическое решение нерелятивистского бесстолкновительного кинетического уравнения было получено В.Б. Магалинским [146]. В области промежуточных значений импульсов

$$\mathbb{P} \sim ma_0/a(\eta) \quad (\text{VI.39})$$

должны наблюдаться максимальные отклонения распределения (VI.33) от равновесных значений. Поскольку распределение (VI.33) при $a(\eta) \rightarrow 0$ асимптотически стремится к равновесному, то при высоких температурах, превышающих массы всех взаимодействующих частиц, в расширяющейся плазме асимптотически достигается состояние ГТР, т.е.

VI.2. Космологическая эволюция бесстолкновительных частиц

функции (VI.33) являются асимптотически точными решениями и полных кинетических уравнений в пределе $T/m \rightarrow \infty$. С другой стороны, этот факт является следствием асимптотической конформной инвариантности кинетической теории в ультрарелятивистском пределе. Действительно, метрика (VI.28) является конформно стационарной, - в конформно соответствующем \bar{V}_4 возможно состояние ГТР. Однако и в области низких температур $T/m \rightarrow 0$, когда массы всех взаимодействующих частиц гораздо больше температуры плазмы, состояние ГТР опять-таки достигается для этих частиц, но с другой температурой T' (VI.38).

Отсюда следует вывод: в плазме, содержащей безмассовые частицы, ГТР не установится до тех пор, пока безмассовые частицы не прекратят взаимодействовать с массивными. Когда же это произойдет, расширяющаяся плазма распадется на две не взаимодействующие компоненты: столкновительную нерелятивистскую с температурой T' (VI.38) и бесстолкновительную ультрарелятивистскую с температурой T (VI.35). Последняя компонента представляет собой реликтовые частицы. Таким образом, с точки зрения кинетической теории космологическая эволюция плазмы представляет собой *фазовый переход из равновесного ультрарелятивистского состояния* ($\varepsilon = 3P$), *в результате которого образуются две не взаимодействующие между собой фазы: нерелятивистская* ($P = 0$) *и ультрарелятивистская* ($\varepsilon = 3P$). Факторам, выводящим плазму из ГТР с ультрарелятивистским уравнением состояния, являются массы частиц, которые согласно современным представлениям могут генерироваться хиггсовым механизмом спонтанного нарушения симметрии.

Пусть τ_{eff} — эффективное время столкновений для данной частицы (см. формулы (III.32), (III.35), (III.36)). Характерный масштаб временной неоднородности системы совпадает с космологическим временем $t = \int a d\tau$, поэтому условие прекращения взаимодействия данного сорта частиц «a» с частицами сорта «b» имеет вид:

$$\tau_{eff} = [n_b \sigma_{ab} \langle v_e \rangle]^{-1} > t. \quad (\text{VI.40})$$

Время t_0 , являющееся решением уравнения, соответствующего неравенству (VI.40), будем называть временем отключения взаимодействий частиц сорта «a» и «b». Если к этому времени все взаимодействующие частицы являются еще ультрарелятивистскими, то дальнейшая эволюция реликтовых частиц сорта «a» описывается решением (VI.33), в котором η_0 — момент отключения столкновений. Если же к моменту t_0

Глава VI. Кинетика ранних стадий космологического расширения

не все взаимодействующие частицы остаются ультрарелятивистскими, то равновесное распределение частиц сорта « a » может исказиться во времена, предшествующие отключению столкновений, и далее, являясь изотропным решением, $f(a, \mathbb{P})$ может, тем не менее, отличаться от распределения (VI.33).

Исследуем космологическую эволюцию моментов распределения (VI.33) [87], [88], [89]. Определим согласно [147], [148] макроскопические скаляры

$$N_a(x) = \int_P (u, p) f_a(x, p) d\pi_a; \quad (\text{VI.41})$$

$$\mathcal{E}_a(x) = \int_P (u, p)[(u, p) - m_a] f_a(x, p) d\pi_a; \quad (\text{VI.42})$$

— плотность числа частиц и плотность средней кинетической энергии, регистрируемых наблюдателем, движущимся со скоростью $u^i(x)$. С помощью (VI.41) и (VI.42) определим и среднюю кинетическую энергию частицы

$$\langle E_a \rangle = \mathcal{E}_a(x) / N_a(x). \quad (\text{VI.43})$$

В синхронной метрике (VI.28) $CO \ u^i = q^{-1} \delta_4^i$. Для скаляров $N_a(x)$ и $\mathcal{E}_a(x)$ после интегрирования по угловым переменным и переходам к конформному импульсу [145]

$$\mathcal{P} = a P / a_0 \quad (\text{VI.44})$$

получим выражения

$$N = \frac{(2s+1)a_0^3}{2\pi^2 a^3(\eta)} \int_0^\infty \frac{\mathcal{P}^2 d\mathcal{P}}{\exp\left[\frac{-\mu_0 + \sqrt{m^2 + \mathcal{P}^2}}{T_0}\right] \pm 1}, \quad (\text{VI.45})$$

$$\mathcal{E} = \frac{(2s+1)a_0^3}{2\pi^2 a^3(\eta)} \int_0^\infty \frac{(\sqrt{m^2 + a_0^2 \mathcal{P}^2 / a^2} - m) \mathcal{P}^2 d\mathcal{P}}{\exp\left[\frac{-\mu_0 + \sqrt{m^2 + \mathcal{P}^2}}{T_0}\right] \pm 1}. \quad (\text{VI.46})$$

VI.2. Космологическая эволюция бесстолкновительных частиц

Таким образом плотность числа частиц падает обратно пропорционально $a^3(\eta)$, локальное же ее выражение ничем не отличается от соответствующего ЛТР (III.19). Из (VI.45), (VI.46) видно, что если отключаются при ультрарелятивистских температурах $T_0 \gg m$, то распределение (VI.33) все время эффективно остается ультрарелятивистским, т.е. главный вклад в макроскопические моменты вносят значения конформного импульса (который является интегралом движения) $\mathcal{P} \sim T_0 \gg m$ [88]. Рассмотрим этот случай, полагая $\mu_0 = 0$ и рассматривая времена в (VI.46), когда частицы уже стали нерелятивистскими: $p \ll m$. Проводя разложение (VI.46) в ряд Тейлора по параметру $a_0 \mathcal{P}/am$, получим для фермионов [86], [88], [89]:

$$\begin{aligned} N_F(\eta) &= \frac{3\xi(3)T^3(\eta)}{2\pi^2}; \\ \mathcal{E}_F(\eta) &= \frac{45\xi(5)T^5(\eta)}{4\pi^2 m_F}; \\ \langle E_F \rangle &= \frac{15\xi(5)T^2(\eta)}{2m_F \xi(3)} \approx 6,47T^2(\eta)/m_F. \end{aligned} \quad (\text{VI.47})$$

Аналогичные выражения для бозонов были получены позже в работе [149]. Реликтовые нейтрино отрываются от плазмы при температуре порядка 2 Мэв [150]; при массе покоя $m_\nu \sim 30$ эв [151] они в этот момент времени являются ультрарелятивистскими. Кинетическую энергию реликтовых массивных нейтрино можно связать с температурой реликтовых фотонов T_γ в современной Вселенной;

$$\langle E_\nu \rangle = \frac{13T_\gamma^2}{\sqrt{11}m_F}. \quad (\text{VI.48})$$

Эта энергия на пять порядков меньше энергии реликтовых фотонов [88], [89]. Для бoльцмановского распределения вместо (VI.47) получим $\langle E \rangle = 6T^2(\eta)/m$ [86], [88]. С другой стороны, средняя энергия частиц в бoльцмановском распределении равна $\frac{3}{2}\theta$, где θ — температура бoльцмановского газа. Сравнивая с (VI.38), найдем связь $\theta = 4T'T_0/m \gg T'$. В том же случае, когда столкновения отключаются на нерелятивистской стадии, эти температуры совпадают.

VI.3 Кинетика космологического расширения плазмы в условиях локального термодинамического равновесия

Требования изотропии и однородности пространства приводит к условиям на функцию распределения и макроскопические поля:

$$f_a(x, \mathbb{P}) = f_a(\eta, \mathbb{P}),$$

$$\Phi = \Phi(\eta); \quad A_i = A(\eta)\delta_i^4 \quad (\text{VI.49})$$

ГЭИ частиц и полей при этом имеет гидродинамическую структуру вида (III.18) с $u^i = a^{-1}\delta_4^i$. Проще всего кинетические уравнения записываются не в канонических переменных η, \mathbb{P}_4 , а в переменных η, \mathcal{P} , где \mathcal{P} — конформный импульс (VI.44):

$$a^{-2}\sqrt{m_*^2 a^2 + \mathcal{P}^2} \frac{\partial f_a(\eta, \mathcal{P})}{\partial \eta} = J_a(\eta, \mathcal{P}). \quad (\text{VI.50})$$

Вычисляя макроскопические скаляры $N_a(\eta)$, $\mathcal{E}_a(\eta)$, $P_a(\eta)$ и $\sigma(\eta)$ (см. (III.19), (III.20), (III.21)), найдем

$$\begin{aligned} N_a(\eta) &= a^{-3}N_a^*(\eta); & P_a(\eta) &= a^{-4}P_a^*(\eta); \\ \mathcal{E}_a(\eta) &= a^{-4}\mathcal{E}_a^*(\eta); & \sigma(\eta) &= a^{-3}\sigma^*(\eta), \end{aligned} \quad (\text{VI.51})$$

где введены надчеркнутые конформные величины:

$$\begin{aligned} N_a^*(\eta) &= \frac{2s+1}{2\pi^2} \int_0^\infty \mathcal{P}^2 f_a(\eta, \mathcal{P}) d\mathcal{P}; \\ \mathcal{E}_a^*(\eta) &= \frac{2s+1}{2\pi^2} \int_0^\infty \mathcal{P}^2 \sqrt{a^2 m_*^2 + \mathcal{P}^2} f_a(\eta, \mathcal{P}) d\mathcal{P}; \\ P_a^*(\eta) &= \frac{2s+1}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{\mathcal{P}^4 f_a(\eta, \mathcal{P}) d\mathcal{P}}{\sqrt{a^2 m_*^2 + \mathcal{P}^2}}; \\ \sigma^*(\eta) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum q(2s+1)(am + q\Phi^*) \int_0^\infty \frac{\mathcal{P}^4 f_a(\eta, \mathcal{P}) d\mathcal{P}}{\sqrt{a^2 m_*^2 + \mathcal{P}^2}}, \end{aligned} \quad (\text{VI.52})$$

VI.3. Кинетика космологического расширения плазмы в условиях ЛТР

которые совпадают с обычными определениями, если в последних произвести замену $m \rightarrow am$ и $\Phi = \Phi^*/a$. Полевые уравнения (II.31) и (II.36) в этих величинах принимают вид:

$$a^2 \mu_\nu^2 A = -4\pi \epsilon_\nu \sum e N^*; \quad (\text{VI.53})$$

$$\Phi^{*''} + \Phi^*(k + \mu_s^2 a^2) + \lambda \Phi^{*3} = -4\pi \epsilon_s \sigma^*, \quad (\text{VI.54})$$

где $k = +1$ — для закрытой, $k = -1$ — для открытой и $k = 0$ для пространственно-плоской Вселенной, $\epsilon = +1$ — для полей с притяжением одноименно заряженных частиц, $\epsilon = -1$ — для полей с отталкиванием. Из (VI.53) в частности следует, что в однородной и изотропной Вселенной отличным от нуля зарядом могут обладать лишь массивные векторные поля. Законы сохранения энергии и заряда (если последний сохраняется) можно записать в форме:

$$E_p^{*'} - \sigma^* \Phi^{*'} = \frac{a'}{a} (\mathcal{E}_p^* - 3P_p^* - \sigma^* \Phi^*) - \frac{\mu_\nu^2}{4\pi} A (a^2 A)', \quad (\text{VI.55})$$

$$\sum g N^* = \text{Const}, \quad (\text{VI.56})$$

где $\mathcal{E}_p^* = \sum \mathcal{E}_a^*$, $P_p^* = \sum P_a^*$. Конформные плотность энергии векторного и скалярного полей равны

$$\mathcal{E}_v^* = \frac{\epsilon_v \mu_\nu^2 a^2 A^2}{4\pi}; \quad \mathcal{E}_s^* = \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left[\Phi^{*'}^2 + \Phi^{*2} (k + \mu_s^2 a^2) + \frac{\lambda \Phi^{*4}}{6} \right]. \quad (\text{VI.57})$$

Таким образом, единственное нетривиальное решение уравнения Эйнштейна имеет вид

$$8\pi \mathcal{E}^* = 3(ka^2 + a'^2), \quad (\text{VI.58})$$

где

$$\mathcal{E}^* = \mathcal{E}_p^* + \mathcal{E}_v^* + \mathcal{E}_s^*.$$

Перечисленные выше уравнения (VI.50), (VI.53), (VI.54), (VI.58) совместно с определениями (VI.51), (VI.52) и (VI.57) составляют замкнутую кинетическую модель однородной и изотропной Вселенной с отличными от нуля плотностями векторного и скалярного зарядов. К этим уравнениям необходимо добавить лишь ту или иную модель частиц, т.е. перечислить все возможные частицы, указать алгебру их взаимодействий и соответствующие амплитуды рассеяния. Кроме того на нулевой

Глава VI. Кинетика ранних стадий космологического расширения

пространственноподобной гиперповерхности необходимо задать начальные условия:

$$f_a(\eta_0, \mathcal{P}) = f_a^0(\mathcal{P}); \quad \Phi^*(\eta_0) = \Phi_0^*; \quad \Phi^{*'}(\eta_0) = \Phi_0^{*'} . \quad (\text{VI.59})$$

Отметим наиболее общие свойства этой модели при $a \rightarrow 0$. Предположим, что при $a \rightarrow 0$ все частицы являются ультрарелятивистскими

$$\langle \mathcal{P} \rangle \gg am_* = |(am + q\Phi^*)|,$$

или

$$\langle p \rangle \gg m_* . \quad (\text{VI.60})$$

Тогда вследствие функциональных уравнений Больцмана и унитарности S — матрицы асимптотически точным решением (VI.50) при $a \rightarrow 0$ являются равновесные распределения (VI.33), в которых $m \rightarrow 0$ и постоянные μ_0 удовлетворяют соответствующим условиям химического равновесия. Из (VI.52) следует, что при этом

$$N_a^* = \text{Const}; \quad \mathcal{E}_a^* = \text{Const}; \quad P_a^* = \text{Const}; \quad (\text{VI.61})$$

$$\sigma^* = \sum (am + q\Phi^*)qB_4,$$

где

$$B_a = \frac{2s+1}{2\pi^2} \int_0^\infty \mathcal{P} f_a^0(\mathcal{P}) d\mathcal{P} = \text{Const} .$$

Вследствие (VI.61) при ненулевой суммарной плотности векторного заряда ($\sum eN^* \neq 0$)

$$A \sim a^{-2}. \quad (\text{VI.62})$$

Но тогда из (VI.61) и (VI.55) следует, что $\Phi^* \sim a$ либо $\sigma^* = 0$. Второй из этих случаев, однако сводится, к первому. Поэтому получим из (VI.54) с учетом (VI.61) в пределе $a \rightarrow 0$:

$$\Phi = -\frac{4\pi\epsilon_s \sum qmB}{k + 4\pi\epsilon_s \sum q^2 B}. \quad (\text{VI.63})$$

В этом случае главный вклад в плотность энергии вносит векторное поле, которому отвечает предельное жесткое уравнение состояния, и

VI.3. Кинетика космологического расширения плазмы в условиях ЛТР

$a \sim \sqrt{\eta} \sim t^{1/3}$. Если же векторный заряд строго равен нулю, асимптотически точным решением (VI.58) является $a \sim \eta \sim \sqrt{t}$, чему соответствует ультрарелятивистское уравнение состояния. В [?], где исследовалась вырожденная плазма, состоящая из одного сорта фермионов, показано, что при $a \rightarrow 0$ решение (VI.63) является устойчивым для случая притяжения ($\epsilon_s = +1$).

Как мы отмечали в предыдущем разделе, массы частиц являются фактором, выводящем плазму из состояния ГТР. Предполагая, однако, ЛТР слабо нарушенным, чему соответствует условие, противоположное (VI.40), будем искать функцию распределения в виде (I.121)

$$f_a(\mathcal{P}, \eta) = \left\{ \exp \left[\frac{-\mu_a^* + \sqrt{a^2 m_*^2 + \mathcal{P}^2} + \varphi_a(\mathcal{P}, \eta)}{T^*} \right] \pm 1 \right\}^{-1}, \quad (\text{VI.64})$$

где $\mu^* = \mu a$ и $T^* = T a$ — конформные химический потенциал и температура соответственно, а $\varphi(\mathcal{P}, \eta)$ — малая неравновесная поправка к функции распределения. Несколько отступая от метода, развитого в работах [86], [87], получим уравнения для определения величин $\mu(\eta)$, $T(\eta)$ и $\varphi(\mathcal{P}, \eta)$. Подставляя (VI.64) в кинетическое уравнение (VI.50) и разлагая последнее в ряд по малости φ/T получим с учетом функциональных уравнений Больцмана и унитарности S — матрицы

$$\begin{aligned} & a^{-2} \sqrt{m^{*2} + \mathcal{P}^2} \frac{\partial f_a^0}{\partial \eta} \equiv \\ & \equiv T a^{-1} \frac{d f_a^0}{d \mathcal{E}^*} \left[\left(\frac{m^{*2}}{T^{*2}} \right)' - \lambda'_a \sqrt{m^{*2} + \mathcal{P}^2} + \left(\frac{1}{T^*} \right)' \mathcal{P}^2 \right] = \\ & - \sum_k \nu_a^k \int \delta^{(4)}(\mathbb{P}_F - \mathbb{P}_I) \overset{0}{Z}_{IF} (\sum \varphi_I W_{IF} - \sum \varphi_F W_{FI}) \Pi' d\pi, \end{aligned} \quad (\text{VI.65})$$

где

$$m^* = a m_*; \quad f_a^0 = f_a|_{\varphi=0}; \quad \mathcal{E}^* = \sqrt{m^{*2} + \mathcal{P}^2},$$

f_a^0 — равновесное распределение.

Вследствие свойств интеграла столкновений законы сохранения (VI.45), (VI.56) должны выполняться для величин $\overset{0}{\mathcal{E}}_p^*$ и $\overset{0}{P}_p^*$, определенных относительно равновесного распределения $f_a^0(\mathcal{P}, \eta) = f_a(\mathcal{P}, \eta)|_{\varphi=0}$. Эти два уравнения и следует рассматривать как дифференциальные уравнения для определения переменных $\lambda - a$ и T^* . Поскольку величины λ_a определяются кроме того $N - 1$ линейно независимым условием

химического равновесия (III.8), то присоединяя к (VI.55), (VI.56) уравнение для определения потенциалов (VI.53), (VI.54) и уравнение Эйнштейна (VI.58), мы получим замкнутую систему уравнений, которая определяет эволюцию системы в нулевом ЛТР-приближении. В следующем приближении, подставляя в (VI.65) найденные функции m^* , λ_a^* , T^* , получим интегральные уравнения для определения неравновесных поправок $\varphi_a(\mathcal{P}, \eta)$.

Исследуем эволюцию массивных частиц в стандартной горячей модели Вселенной, когда отсутствуют макроскопические векторные и скалярные поля [86], [144]. Тогда вследствие СРТ-теоремы массы частиц и античастиц совпадают, а их суммарный химический потенциал равен нулю (III.24). Поэтому суммарная плотность обобщенного заряда g , определенная относительно равновесного распределения f_a^0 , является нечетной функцией λ_a :

$$\sum g N^0(-\lambda) = - \sum g N^0(\lambda). \quad (\text{VI.66})$$

Если все фундаментальные заряды равны нулю, то из (VI.66), (VI.56) и (III.8) следует, что и все $\lambda_a = 0$. Горячая модель Вселенной характеризуется малыми фундаментальными зарядами, чему соответствуют и малые λ_a на ультрарелятивистской стадии. Выразим фундаментальный заряд в правой части (VI.56) с помощью равновесной концентрации фотонов $N_\gamma^0 = 2\xi(3)T^{*3}/\pi^2$, пользуясь тем фактом, что на ультрарелятивистской стадии эволюции согласно (VI.52) и (VI.55)

$$\lambda_a = \text{Const}; \quad T^* = \text{Const}. \quad (\text{VI.67})$$

Таким образом, представим константу в правой части (VI.56) в виде

$$\text{Const} = G N_\gamma^0 = 2GT^{*3}\xi(3)/\pi^2,$$

где G — малый фундаментальный заряд. Разлагая левую часть (VI.56) в ряд Тейлора по малости λ_a , запишем это уравнение в виде

$$\sum (2s + 1)g\lambda\delta = 6G\xi(3)/\pi^2, \quad (\text{VI.68})$$

где $\delta = +1$ — для бозонов и $\delta = +1/2$ — для фермионов. Линейное уравнение (VI.68) совместно с линейными однородными уравнениями (III.8) полностью определяет химические потенциалы всех сортов частиц на ультрарелятивистской стадии. В суммировании в (VI.68) античастицы не участвуют.

VI.3. Кинетика космологического расширения плазмы в условиях ЛТР

С понижением температуры вследствие распада сложных симметрий на более простые возникает все больше сохраняющихся величин. Рассмотрим, например, плазму на этапе, когда в равновесии остаются лишь электроны, позитроны, ионы и фотоны, а нейтрино уже являются бесстолкновительными и поэтому не вносят вклад в законы сохранения (VI.55), (VI.56), но участвуют в уравнении Эйнштейна (VI.58). На этой стадии сохраняются барионный и лептонный заряды. Полагая температуру плазмы гораздо большей потенциала ионизации и статистику массивных частиц бальцмановской, выпишем эти законы:

$$\begin{aligned} N_i^* &= \text{Const}; \\ N_e^* - N_{e^+}^* &= \frac{2k_2(z)}{\pi^2 z} \cdot \text{sh } \lambda_e \cdot m^{*3} = \sum N_i^* = \Delta N_e^{0*}, \end{aligned} \quad (\text{VI.69})$$

где N_i^* — плотность числа ионов, $z = m_e/T$. Из (VI.69) как функцию a и T можно определить приведенный химический потенциал электронов. Подставляя затем результат в уравнение (VI.55), можно найти $T(a)$. Рассмотрим предельный случай этих уравнений, когда электроны стали нерелятивистскими, т.е. $z \gg 1$. Используя асимптотику функций МакДональда, найдем из (VI.69):

$$\lambda_e \simeq \frac{m_e}{T} + \ln \left[\Delta N_e^{0*} \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{mT^2} \right)^{3/2} \right], \quad (\text{VI.70})$$

где $\Delta N_e^{0*} = \sum N_i^{0*}$ — остаточная после аннигиляции концентрация электронов. Из (VI.52) для всех нерелятивистских компонент найдем

$$\mathcal{E}^* = m^* N^* + \frac{3}{2} T^* N^*; \quad P^* = T^* N^*.$$

Таким образом, из закона сохранения энергии (VI.55) получим уравнение для определения температуры T^* :

$$\ln aT^* + \frac{4\pi^2 T^{*3}}{135 \Delta N_e^{0*}} = \text{Const}. \quad (\text{VI.71})$$

Поскольку в (VI.55) участвуют лишь столкновительные компоненты, то второй член в левой части (VI.71) следует положить равным нулю, когда фотоны станут бесстолкновительными. Учитывая формулу для равновесного числа фотонов, перепишем (VI.71) в более удобном виде

$$\ln aT^* + \frac{2\pi^4}{135\xi(3)\beta} = \text{Const}, \quad (\text{VI.72})$$

Глава VI. Кинетика ранних стадий космологического расширения

где $\beta = N_e^0 / N_\gamma^0$. До тех пор, пока фотоны являются столкновительными, уравнение (VI.72) содержит большой параметр β^{-1} и поэтому имеет своим асимптотическим решением (VI.67): $T^* = \text{Const}$. Когда же столкновения с фотонами отключаются, решением (VI.72) будет являться $aT^* = \text{Const}$, т.е. закон эволюции нерелятивистской компоненты (VI.38) [152]. Подставляя теперь найденное из (VI.70) значение λ в уравнение (VI.65), переходя к нерелятивистскому пределу и возвращаясь к обычным обозначениям, получим уравнение для поправки к функции распределения электронов, $\varphi_e(\eta, p)$:

$$\begin{aligned} & -\frac{me}{2} \frac{d \ln a^2 T}{dt} \left(3 - \frac{p^2}{mT} \right) = \\ & = - \sum_k \nu_e^k \int \delta^{(4)}(\mathbb{P}_F - \mathbb{P}_I) Z_{IF}^{0e} \left(\sum \varphi_I W_{IF} - \sum \varphi_F W_{FI} \right) \Pi' d\pi, \end{aligned} \quad (\text{VI.73})$$

где $Z_{IF}^{0e} = Z_{IF}^0 / f_e^0$. Для фотонов уравнение (VI.65) принимает вид ($\lambda_\gamma = m_\gamma = 0$):

$$\begin{aligned} & -ap^2 \frac{d}{dt} (aT)^{-1} = \\ & = - \sum_k \nu_\gamma^k \int \delta^{(4)}(\mathbb{P}_F - \mathbb{P}_I) Z_{IF}^{0\gamma} \left(\sum \varphi_I W_{IF} - \sum \varphi_\gamma W_{FI} \right) \Pi' d\pi. \end{aligned} \quad (\text{VI.74})$$

При нерелятивистских энергиях частиц вкладом ионов во взаимодействия с фотонами можно пренебречь, как и взаимодействиями фотонов друг с другом. Поэтому при $Z \gg 1$ уравнение (VI.74) принимает более простой вид:

$$aP^2 \frac{d}{dt} (aT)^{-1} = J_{\gamma e}^{(1)}, \quad (\text{VI.75})$$

где $J_{\gamma e}^{(1)}$ — линейаризованный интеграл комптоновских столкновений. Входящий в правую часть интеграл столкновений имеет вид:

$$J_e^{(1)} = J_{e\gamma}^{(1)} + J_{ee}^{(1)} + J_{ei}^{(1)},$$

где $J_{ee}^{(1)}$ и $J_{ei}^{(1)}$ — линейаризованные интегралы кулоновских взаимодействий электронов между собой и электронов с ионами. Аналогично

VI.3. Кинетика космологического расширения плазмы в условиях ЛТР

(VI.73), можно записать и кинетические уравнения для поправок к ионным функциям распределения.

До тех пор, пока столкновения фотонов с электронами не отключились, температура плазмы при $\beta \ll 1$ с большой точностью описывается законом (VI.67). В этом случае уравнения (VI.73) и (VI.74) принимают более простой вид [86], [87]:

$$-\frac{a'}{2a} \left(3m_e - \frac{p^2}{T} \right) = J_{e\gamma}^{(1)} + J_{ee}^{(1)} + J_{ei}^{(1)}; \quad 0 = J_{\gamma e}^{(1)}. \quad (\text{VI.76})$$

Выражение в левой части (VI.73), (VI.76) порядка m_e/t ; таким образом, при выполнении условий ЛТР (IV.199)

$$t \gg \tau_{eff} \quad (\text{VI.77})$$

поправка к равновесным функциям массивных частиц порядка $\tau_{a\gamma}/t$, т.е. остается малой. Уравнения (VI.73) — (VI.76) указывают механизм нарушения ГТР в плазме, состоящей из двух компонент: нерелятивистской и ультрарелятивистской. Действительно, в изотропном мире интегралом движения является не энергия частицы $E = \sqrt{m^2 + p^2}$, а величина $ap = \text{Const}$ (VI.30). Следовательно, в промежутках между столкновениями энергия фотона меняется по закону $\delta E_\gamma \sim a^{-1}(\eta)$, в то время, как энергия нерелятивистской частицы падает со временем значительно быстрее: $\delta E_e \sim a^{-2}(\eta)$. В момент столкновения фотоны обладают в среднем большей энергией, чем нерелятивистские частицы. Перераспределение энергии при столкновениях приводит к нагреву электронной компоненты за счет охлаждения фотонной и является причиной отклонения частиц от равновесия. В радиационно-доминированной плазме, т.е. в плазме с преобладанием фотонов ($\beta \ll 1$) фотонная функция распределения мало меняется. На этот факт, в частности, указывает второе уравнение (VI.76). Следует отметить, что уравнение вида (VI.74) — (VI.76) пригодно не только для плазмы, состоящей из фотонов и нерелятивистских электронов и ионов. Эти уравнения с очевидными модификациями пригодны для описания любой двухкомпонентной (ультрарелятивистско-нерелятивистской) плазмы с преобладанием ультрарелятивистских частиц при условии сохранения соответствующих зарядов. Отметим также, что «хвосты» распределений нерелятивистских частиц в ультрарелятивистской области всегда при этом сохраняют равновесный характер с температурой (VI.35).

VI.4 Кинетика изотропного расширения однородной радиационно доминированной плазмы

Исследуем более подробно описанную выше ситуацию, когда плазма состоит лишь из фотонов, нерелятивистских электронов и ионов, причем $\beta_e \ll 1$. При температурах выше температуры рекомбинации доминирующими являются следующие упругие взаимодействия:

$$\begin{aligned} e + \gamma &= e + \gamma; & e + e &= e + e; \\ e + i &= e + i; & i + i &= i + i. \end{aligned}$$

Вследствие изотропии взаимодействий частицы при этих взаимодействиях обмениваются в среднем лишь энергией. Соответствующие эффективные времена передачи энергии равны [150], [153]:

$$\tau_{e(\gamma)} \simeq \frac{Z_e}{8N_\gamma \sigma_T}, \quad \tau_{\gamma(e)} \sim \tau_{\gamma(e)} \sim \tau_{e(\gamma)} \cdot N_\gamma / N_e;$$

$$\tau_{ee} = \frac{3m_e^{1/2} T_e^{3/2}}{4\pi^{1/2} e^4 N_e \Lambda}; \quad \tau_{ii} = \frac{3m_i^{1/2} T_i^{3/2}}{4\pi^{1/2} e^4 Z^4 N_i \Lambda};$$

$$\tau_{ei} \sim \tau_{ee} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{3/2},$$

где $\sigma_T = \frac{8\pi e^4}{3m_e^2}$ — томпсоновское сечение рассеяния, $e^2 = 1/137$, $\Lambda = \ln \frac{1}{9e^3} \frac{T^{3/2}}{\sqrt{\pi} N_e}$ — кулоновский логарифм. Следует отметить, что в равновесной радиационно- доминированной плазме кулоновский логарифм остается постоянным в процессе расширения: $\Lambda = 17,3 + 1,15 \lg 10^8 / \beta_e$.

Рассмотрим сначала идеализированную ситуацию, когда плазма состоит только из фотонов и нерелятивистских электронов [87], [154], [152], т.е. когда существенны лишь комптоновские столкновения и столкновения электронов между собой. По указанным выше причинам деформацией равновесного спектра фотонов можно пренебречь, т.е. полагать

$$f_\gamma = f_\gamma^0 = \left[\exp \left(\frac{-p}{T_\gamma} \right) + 1 \right]^{-1},$$

VI.4. Кинетика расширения радиационно доминированной плазмы

где $T_\gamma \sim a^{-1}$. Интеграл комптоновских столкновений $J_{e\gamma}$ в приближении малой передаваемой энергии ($T_\gamma/m_e \ll 1$) можно представить в виде Фоккера-Планка, причем в случае нерелятивистских электронов этот интеграл принимает вид [152]:

$$J_{e\gamma} = \frac{\Sigma}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[p^2 \left(\frac{pf_e}{T_\gamma} + m_e \frac{\partial f_e}{\partial p} \right) \right], \quad (\text{VI.78})$$

где

$$\Sigma = \frac{8\pi\sigma_T N_\gamma T_\gamma^2 \pi^4}{90\xi(3)}.$$

Тогда решением кинетического уравнения для электронов является, максвелловское предделение в $T_e(t) \neq T_\gamma(t)$ [154]:

$$f_e(t, p) = \frac{N_e}{(2\pi m_e T_e)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_e T_e}\right). \quad (\text{VI.79})$$

Действительно, это распределение обнуляет интеграл электрон - электронных столкновений; подставляя же (VI.79) в (VI.78), а затем результат в кинетическое уравнение (VI.50), получим вместо последнего столкновения обыкновенное дифференциальное уравнение на электронную температуру [154]:

$$\frac{da^2 T_e}{da} + \frac{\varkappa T_e}{a} = \frac{\varkappa T_\gamma^0 a_0}{a^2}, \quad (\text{VI.80})$$

где мы положили $a = a_0 \sqrt{\frac{t}{t_0}}$, $\varkappa = 8\pi\sigma_T N_\gamma(t_0) T_\gamma(t_0) a_0^2 \pi^4 / 90\xi(3) m_e$. Решение уравнения (VI.80), удовлетворяющее начальному условию $T_e(a_0) = T_e^0$, есть:

$$\begin{aligned} \frac{T_e}{T_\gamma} = \frac{a_0}{a} & \left\{ \frac{T_e^0}{T_\gamma^0} \cdot \exp\left[-\frac{t_0}{2\tau_k^0} \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)\right] + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{\pi t_0}{2\tau_k^0}} \cdot e^{\frac{t_0^2}{2\tau_k t}} \cdot \left[\Phi\left(\sqrt{\frac{t_0}{2\tau_k^0}}\right) - \Phi\left(\sqrt{\frac{t_0^2}{2\tau_k^0 t}}\right) \right] \right\}, \quad (\text{VI.81}) \end{aligned}$$

где $\Phi(Z)$ — интеграл вероятности, τ_k — эффективное время потери энергии электроном за счет комптоновских столкновений:

$$\tau_k = \frac{90\xi(3)Z_e}{8\pi^4 N_\gamma \sigma_T}. \quad (\text{VI.82})$$

Глава VI. Кинетика ранних стадий космологического расширения

Рассмотрим частный случай, когда при $t = t_0$ с хорошей точностью выдержаны условия ЛТР, т.е. $t_0/\tau_k^0 \rightarrow \infty$ и $T_e^0 = T_\gamma^0$. Разлагая (VI.81) в ряд, в первом приближении получим

$$\frac{T_e}{T_\gamma} = \frac{a_0}{a} \left\{ \exp \left[-\frac{t_0}{2\tau_k^0} \left(1 - \frac{t_0}{t} \right) \right] + \sqrt{\frac{\pi t_0}{2\tau_k^0}} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{t_0}{2\tau_k^0 t}} \right) \right] \right\} \quad (\text{VI.83})$$

Если ЛТР по-прежнему выполняется, т.е. при $\tau_k \ll t$, получим из (VI.83)

$$T_e(t) = T_\gamma(t) \left[1 - \frac{\tau_k^0 t}{t_0^2} + \dots \right],$$

т.е. температура электронов уменьшается линейно по времени по отношению к температуре фотонов. Если же ЛТР нарушено, т.е. $\tau_k \gg t$, то формула (VI.83) дает:

$$\frac{T_e(t)}{T_\gamma(t)} = \sqrt{\frac{\pi t_0^2}{2\tau_k^0 t}} \left[1 + \sqrt{\frac{2t_0^2}{\pi \tau_k^0 t} + \frac{t_0^2}{2\tau_k^0 t} + \dots} \right] \quad (\text{VI.84})$$

— температура электронов стремится к температуре расширяющегося нерелятивистского газа (VI.38) $T_e \sim a^{-2}$, что и утверждалось в разделах VI.2, VI.3. Учитывая, что согласно (VI.82) $\tau_k \sim a^4 \sim t^2$, придадим формуле (VI.84) более наглядный вид:

$$\frac{T_e(t)}{T_\gamma(t)} = \sqrt{\frac{\pi t}{2\tau_k}} \cdot \left[1 + \sqrt{\frac{2t}{\pi \tau_k} + \frac{t}{2\tau_k} + \dots} \right] \quad (\text{VI.85})$$

Формулы (VI.84) — (VI.85) в отличие от (VI.38) позволяют однозначно связать в каждый момент времени температуры фотонов и электронов. Ранее уже отмечалось, что присутствие сильного изотропного электромагнитного излучения максвеллизует нерелятивистские электроны (см., например, [150]). Расширение же плазмы приводит к тому, что хотя электроны и остаются максвелловскими, то с неравновесной температурой $T_e < T_\gamma$. Рассмотренный выше пример является точной реализацией фазового перехода, когда первоначально равновесная двухкомпонентная система (радиационно - доминированная плазма) в процессе расширения выходит из состояния термодинамического равновесия и распадается на две не взаимодействующие фазы — ультрарелятивистские фотоны и нерелятивистские электроны, причем температура последних ниже температуры фотонов и определяется формулой (VI.85).

VI.4. Кинетика расширения радиационно доминированной плазмы

Реальная ситуация, однако, несколько сложнее рассмотренной выше, поскольку кроме всего прочего в плазме имеются еще и ионы, взаимодействующие с электронами. Несложный анализ кинетических уравнений показывает, что при учете электрон-ионных столкновений максвелловские распределения вида (VI.79) уже не являются следствием специфической зависимости от скорости частиц кулоновского сечения рассеяния. Тем не менее и в этом случае можно сделать определенные выводы. Предположим, что выполнено условие $\tau_{ei} \ll t$, - тогда между электронами и ионами в процессе расширения поддерживается ЛТР, вследствие чего $T_i = T_e$. Поскольку в этом случае энергия фотона при каждом акте столкновения с электроном затем распределяется поровну между электроном и ионом (при $Z = 1$). Этот процесс можно снова описать уравнением (VI.78), в котором N_γ необходимо заменить на $N_\gamma/2$ ($N_\gamma/(1 + Z^{-1})$ при $Z \neq 1$). Таким образом, в этом случае, температура нерелятивистской компоненты будет описываться решением (VI.81), в котором τ_k^0 необходимо заменить на $2\tau_k^0$. Соответственно этому для конечной температуры нерелятивистской компоненты вместо (VI.85) получим выражение:

$$\frac{T_e(t)}{T_\gamma(t)} = \sqrt{\frac{\pi t}{4\tau_k}}. \quad (\text{VI.86})$$

Если же в ходе расширения выполняется обратное условие, $\tau_{ei} \gg t$, вплоть до времен, когда нарушится ЛТР между электронами и фотонами, то к моменту восстановления ЛТР между электронами и ионами последние будут иметь температуру гораздо меньшую температуры электронов. Поэтому при восстановлении ЛТР электронная температура изменится в 2 раза (в $(1 + Z^{-1})$ при $Z \neq 1$) по сравнению с (VI.85), т.е. в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с (VI.86).

Исследованные выше эффекты несущественны в стандартной горячей модели Вселенной, поскольку в этой модели вплоть до стадии рекомбинации поддерживаются ЛТР между электронами и фотонами $\tau_k/t \lesssim 10^{-5}$, хотя возможны и такие космологические сценарии, где эти эффекты принципиально важны. Перечисленные формулы могут претендовать на качественную достоверность при оценке температуры фотонов и электронов во взрывных астрофизических объектах. Критерием применимости результатов данного раздела к взрывным объектам является достаточно высокая однородность последних, т.е. $\Delta l \gg vt$, где Δl — характерный размер неоднородности объекта, v — скорость расширения, t — время расширения.

VI.5 Релятивистская кинетика столкновительного затухания гравитационных волн в горячей Вселенной

Воспользуемся результатом главы IV для исследования космологической эволюции гравитационных волн [104], [157]. Возмущения метрики пространственно плоского мира Фрийдмана (VI.28), соответствующие ГВ, представим в виде ($h_{ik} = g'_{ik} - g_{ik}$):

$$h_{ik} = \tilde{h}_{ik}(\eta)e^{-in_\alpha x^\alpha}, \quad (\text{VI.87})$$

где $n_\alpha = \text{Const}$ - волновой вектор ГВ. Реперные компоненты этого вектора, измеренные синхронным в метрике (VI.28) наблюдателем, равны

$$K(\alpha) = \frac{n_\alpha}{a}; \quad K = \frac{n}{a}, \quad (\text{VI.88})$$

где $n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$. Гравитационные возмущения, соответствующие ГВ, удовлетворяют следующим условиям [46]:

$$h_{i4} = 0; \quad h = 0; \quad h^{ik}_{,k} = 0 \implies h^\beta_\alpha n_\beta = 0. \quad (\text{VI.89})$$

Как это будет видно из дальнейшего, возмущение ТЭИ среды, обязанное появлению ГВ, представимо в форме

$$\delta T_{ik} \sim h_{ik} \tau(\eta). \quad (\text{VI.90})$$

Тогда с учетом результатов [43], [75], [81] систему линеаризованных уравнений Эйнштейна, описывающих распространение слабых ГВ в пространственно плоском мире Фрийдмана, можно записать в виде

$$\psi'' + n^2 \psi + 8\pi a^{-2} \psi \left[2\tau_* - \frac{1}{6}(\mathcal{E}^* - 2P^*) + 2P^* \right] = 0, \quad (\text{VI.91})$$

где мы положили

$$\tilde{h}_{\alpha\beta}(\eta) = S_{\alpha\beta} a \psi(\eta), \quad (\text{VI.92})$$

причем $S_{\alpha\beta} = \text{Const}$.

Для вычисления $\tau_*(\eta)$ обратимся к релятивистским кинетическим уравнениям

$$[\mathcal{H}, f] = J[f]. \quad (\text{VI.93})$$

VI.5. Столкновительное затухание ГВ в горячей Вселенной

Появление ГВ приводит к искажению массовой поверхности, вследствие чего необходимо произвести перенормировку импульса [43], [75]. Проще всего указанную перенормировку осуществить преобразованием (VI.93) от импульсных переменных P_i к переменным \mathcal{P}_i

$$\mathcal{P}_i = P_i - \frac{1}{2}h_i^k P_k; \quad P_i = \mathcal{P}_i + \frac{1}{2}h_i^k \mathcal{P}_k + O^2(h). \quad (\text{VI.94})$$

Якобиан этого преобразования в случае бесследовых возмущений метрики ($h = 0$) равен

$$\frac{\partial(P_1, P_2, P_3, P_4)}{\partial(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4)} = 1 + O^2(h). \quad (\text{VI.95})$$

В переменных \mathcal{P}_i функция Гамильтона с точностью до членов совпадает со своим невозмущенным значением

$$\bar{\mathcal{H}}(x, \mathcal{P}) = \frac{1}{2}g^{ik}\mathcal{P}_i\mathcal{P}_k = \mathcal{H}(x, \mathcal{P}). \quad (\text{VI.96})$$

Поскольку для ГВ $g' = g + O^2(h)$, элемент объема пространства импульсов инвариантен по отношению к преобразованиям (VI.94)

$$d\pi' = \frac{(2S+1)}{\sqrt{-g}(2\pi)^3} d\mathcal{P}_1 d\mathcal{P}_2 d\mathcal{P}_3 d\mathcal{P}_4 \delta\left(\mathcal{H} - \frac{1}{2}m^2\right) = d\pi. \quad (\text{VI.97})$$

Учитывая тот факт, что в инвариантные амплитуды рассеяния M_{jf} импульсные переменные могут входить лишь путем всевозможных сверток типа (P, P') можно строго показать, что интеграл столкновений инвариантен с точностью $O^2(h)$ по отношению к преобразованиям (VI.94). Таким образом, представляя функцию распределения $f(x, P)$ в виде

$$f(x^i, P_i) = f_0(\mathcal{P}, \eta) + \delta f(\eta, \Phi(x), \mathcal{P}_i), \quad (\text{VI.98})$$

где $f_0(\eta, \mathcal{P})$ - изотропное решение кинетических уравнений (VI.50), и линеаризируя кинетические уравнения, получим для функции δf :

$$\mathcal{P}^i \frac{\partial \delta f}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{P}_4} \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}^\alpha h'^{\beta\alpha} = J^1[f_0, \delta f]. \quad (\text{VI.99})$$

Здесь штрих означает дифференцирование по переменной η , J^1 - линеаризованный интеграл столкновений, введенный в разделе III.1. Вычисляя возмущение ТЭИ после преобразования (VI.94), найдем

$$\delta T_{ik} = -P h_{ik} + \sum \int \mathcal{P}_i \mathcal{P}_k \delta f d\pi. \quad (\text{VI.100})$$

Глава VI. Кинетика ранних стадий космологического расширения

Из линейных уравнений (VI.99) видно, что $\delta f \sim S_{\alpha\beta} \mathcal{P}^\alpha \mathcal{P}^\beta$. Действительно, предполагая такую зависимость, приходим к выводу, что интеграл столкновений вследствие его инвариантности может быть линейной комбинацией сверток типа $S_{\alpha\beta} \mathcal{P}^\alpha \mathcal{P}^\beta$, $S_{\alpha\beta} n^\alpha \mathcal{P}^\beta$, $S_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta$, $S_{\alpha\beta} \delta^{\alpha\beta}$, из которых лишь первая отлична от нуля. Интегралы же вида (VI.100) определяются лишь одним выделенным направлением, n_α . Поэтому эти интегралы являются линейной комбинацией сверток

$$S_{\gamma\delta} n^\gamma n^\delta n^\alpha n^\beta, \quad S_{\gamma\delta} \delta^{(\gamma\alpha} n^{\beta} n^{\delta)}, \quad S_{\gamma\delta} \delta^{(\alpha\gamma} \delta^{\beta\delta)},$$

из которых лишь последняя отлична от нуля и равна $S'_{\alpha\beta}$. В связи с этим уравнение (VI.91) может быть упрощено:

$$\psi'' + n^2 \psi + 16\pi a^{-2} \tau_f^* - \frac{4\pi a^{-2} \psi}{3} (\mathcal{E}^* - 3P^*) = 0, \quad (\text{VI.101})$$

где

$$\tau_f^* = S^{-2} \sum \int S'_{\alpha\beta} \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \delta f d\pi^*; \quad S^2 \equiv S_{\alpha\beta} S'_{\alpha\beta}. \quad (\text{VI.102})$$

Перейдем к вычислению τ_f^* . Вследствие указанных свойств интеграл столкновений J^1 для равновесных распределений может быть представлен в виде [156]

$$J^1[\delta f, f_0] = -\frac{\delta f}{1 \pm f_0} \mathcal{K}(\mathcal{P}, \eta), \quad (\text{VI.103})$$

где

$$\mathcal{K}(\mathcal{P}, \eta) = \sum \int \Pi' d\pi \delta(\mathcal{P}_f - \mathcal{P}_I) W_{IF} f_I^0 (1 + f_F^0). \quad (\text{VI.104})$$

Вычислим $\mathcal{K}(\mathcal{P}, \eta)$ для четырехчастичных взаимодействий. Для этого рассмотрим более общую задачу об упрощении интеграла четырехчастичных взаимодействий (VI.29), определенного на изотропных распределениях $f^0(P_4, \eta)$. Для выполнения двух внутренних интегрирований по импульсным пространствам конечных состояний перейдем с помощью преобразований Лоренца в локальную СО центра масс. В этой СО внутреннее интегрирование проводится элементарно. После обратного преобразования Лоренца и перехода к сферической системе координат в импульсном пространстве, найдем

VI.5. Столкновительное затухание ГВ в горячей Вселенной

$$\begin{aligned}
J_{ab}(p) = & -\frac{(2S_b + 1)}{8\pi^4 2^4 p} \int_0^\infty \frac{qdq}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \int_{s_-}^{s_+} \frac{ds}{1 + \left(\frac{m_a^2 - m_b^2}{S}\right)^2} \frac{1}{16\pi\lambda^2} \times \\
& \times \int_{-\frac{\lambda^2}{s}}^0 dt \overline{|M(s, t)|^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \{f_a(p_4) f_b(q_4) [1 \pm f_a(P_4 - \Delta)] [1 \pm f_b(q_4 + \Delta)] - \\
& - f_a(P_4 - \Delta) f_b(q_4 + \Delta) [1 \pm f_a(P_4)] [1 \pm f_b(q_4)]\}, \tag{VI.105}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta = & -\frac{ts}{\lambda^2} \left[p_4 - q_4 - (p_4 + q_4) \frac{m_a^2 - m_b^2}{s} \right] - \cos \varphi \sqrt{-\frac{ts}{\lambda^2} \left(1 + \frac{ts}{\lambda^2} \right)} \times \\
& \times \left[4p_4 q_4 \left(1 - \frac{m_a^2 + m_b^2}{S} \right) - \frac{\lambda^2}{S} - \frac{4m_b^2 p_4^2}{S} - \frac{4m_a^2 q_4^2}{S} \right]^{1/2}, \tag{VI.106}
\end{aligned}$$

$$\lambda^2 = S^2 + m_a^4 + m_b^4 - 2S(m_a^2 + m_b^2) - 2m_a^2 m_b^2 \tag{VI.107}$$

- функции треугольника [142]; S, t - кинематические инварианты (VI.22);

$$S_{\pm} = m_a^2 + m_b^2 + 2(p_4 q_4 \pm pq). \tag{VI.108}$$

При этом необходимо иметь ввиду определение полного сечения взаимодействия [142]

$$\sigma_{tot}(S) = \frac{1}{16\pi\lambda^2} \int_{-\frac{\lambda^2}{S}}^0 dt \overline{|M(S, t)|^2}. \tag{VI.109}$$

В частности, в ультрарелятивистском пределе эти выражения значительно упрощаются:

$$\begin{aligned}
J_{ab}(p) = & -\frac{(2S_b + 1)4\pi}{8p(2\pi)^4} \int_0^\infty dq \int_0^{4pq} \frac{dS}{16\pi} \int_0^1 dx \overline{|M(S, x)|^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \times \\
& \times \{f_a(p) f_b(q) [1 \pm f_c(p - \Delta)] [1 \pm f_d(q + \Delta)] - \\
& - f_c(p - \Delta) f_d(q + \Delta) [1 \pm f_a(p)] [1 \pm f_b(q)]\}, \tag{VI.110}
\end{aligned}$$

где $x = -t/s$;

$$\sigma_{t_0 t}(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx \overline{|M(s, x)|^2} \equiv \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx |F(s, x)|^2. \quad (\text{VI.111})$$

Затухание ГВ на нерелятивистских частицах всегда мало вследствие малого количества последних. Как видно из оценок $\tau \sim P\psi$, поэтому в нерелятивистской Вселенной поведение ГВ в жидкостях и газах описывается одним уравнением

$$\psi'' + n^2\psi - \frac{2}{\eta^2}\psi = 0, \quad (\text{VI.112})$$

согласно которому для высокочастотных ГВ

$$K^2 \gg 8\pi\mathcal{E} \implies n\eta \gg 1 \quad (\text{VI.113})$$

возможно бесстолкновительное затухание (см. [158], [159]); амплитуда же низкочастотных ГВ эволюционирует по закону

$$\psi = c_1\eta^2 + c_2\eta^{-1}. \quad (\text{VI.114})$$

Указанные случаи подробно проанализированы в работе [81]. Обратимся к исследованию эволюции ГВ в ультрарелятивистской плазме. В этом случае $\mathcal{E} = 3P$, и уравнение (VI.101) принимает вид:

$$\psi'' + n^2\psi + 16\pi a^{-2}\tau_f^* = 0. \quad (\text{VI.115})$$

С учетом (VI.110), (VI.112), отбрасывая несущественные в горячей Вселенной статистические множители, найдем для ультрарелятивистских частиц [156],[104],[157]¹

$$\mathcal{K}(P, \eta) = \nu(P, \eta)P;$$

$$\nu(P, \eta) = \frac{1}{8P^2} \sum \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f_0(q) dq \int_0^{4pq} S\sigma_{t_0 t}(S') dS'. \quad (\text{VI.116})$$

Кинетическое уравнение (VI.99) для ультрарелятивистских частиц принимает вид

$$\frac{\partial \delta f}{\partial \eta} + a\nu\delta f - \frac{\mathcal{P}_\alpha}{\mathcal{P}} \frac{\partial \delta f}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{df_0}{d\mathcal{P}} \frac{S_{\alpha\beta} \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta}{\mathcal{P}} \left(\frac{\psi}{a}\right)' e^{-in_\alpha x^\alpha}. \quad (\text{VI.117})$$

¹Статья [157], по существу, является более поздней англоязычной версией статьи [104], но более доступной читателю.

VI.5. Столкновительное затухание ГВ в горячей Вселенной

Будем искать решение уравнения (VI.117), обращающееся в нуль при $S_{\alpha\beta} = 0$ и имеющее структуру бесстолкновительного решения (VI.117) при $\eta \rightarrow 0$. Указанное решение удобно записать в форме

$$\delta f = -\frac{1}{2} \frac{df_0}{d\mathcal{P}} \frac{S_{\alpha\beta} \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta}{\mathcal{P}} \exp[-in_\alpha x^\alpha - i\pi_\alpha n_\alpha - \gamma(\eta)] \times \\ \times \lim_{\eta_0 \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\psi}{a} \right)_{\eta_0} e^{i\pi_\alpha n_\alpha \eta_0} + \int_{\eta_0}^{\eta} \left(\frac{\psi}{a} \right)' e^{\gamma(\eta') + i\pi_\alpha n_\alpha \eta'} d\eta' \right], \quad (\text{VI.118})$$

где введены единичный вектор $\pi_\alpha = \mathcal{P}_\alpha / \mathcal{P}$ и декремент затухания

$$\gamma(\mathcal{P}, \eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \nu(\eta', \mathcal{P}) a(\eta') d\eta' \equiv \int_{t_0}^t \nu(t, \mathcal{P}) dt. \quad (\text{VI.119})$$

Полагая $\left(\frac{\psi}{a} \right)_{\eta_0} \rightarrow 0$, $\frac{\psi}{a} = h_0 e^{-in\eta}$, $\gamma = 0$, получим из (VI.118) первый член разложения точного решения бесстолкновительного уравнения (IV.40).

Нетрудно вычислить возмущение ГЭИ, обязанное δf ,

$$\delta T_{\alpha\beta} = -\frac{\pi S_{\alpha\beta}}{4a^2} e^{-in_\alpha x^\alpha} \sum \frac{(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \mathcal{P}^4 \frac{df_0}{d\mathcal{P}} e^{-\gamma(\mathcal{P}, \eta)} \times \\ \lim_{\eta_0 \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\psi}{a} \right)_{\eta_0} J[\eta - \eta_0] + \int_{\eta_0}^{\eta} e^{\gamma(\mathcal{P}, \eta')} \left(\frac{\psi}{a} \right)' J[n(\eta - \eta')] d\eta' \right], \quad (\text{VI.120})$$

где введена функция

$$J(x) = \frac{8}{x^2} \left[\frac{\sin x}{x} \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) - \frac{3 \cos x}{x^2} \right], \quad (\text{VI.121})$$

имеющая асимптотики:

$$J(x)|_{x \rightarrow \infty} \simeq -\frac{8 \sin x}{x^3}; \quad J(0) = \frac{16}{15}. \quad (\text{VI.122})$$

Таким образом, согласно определению (VI.102) и с учетом соотношения, справедливого на ультрарелятивистской стадии расширения ($a = a_1 \eta$):

$$T^{*4} = \frac{45 a_1^2}{16 \pi^3 N} \quad (\text{VI.123})$$

получим

$$16\pi a^{-2} \tau_F^* = -\frac{45}{16\pi^2 N\eta} \sum \frac{2S+1}{2\pi^2} \int_0^\infty x^4 \frac{df_0}{dx} e^{-\gamma(x,\eta)} \times$$

$$\lim_{\eta_0 \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\psi}{\eta_0} \right)_{\eta_0} J[n(\eta - \eta_0)] + \int_{\eta_0}^\eta e^{\gamma(x,\eta')} J[n(\eta - \eta')] d\eta' \left(\frac{\psi}{\eta'} \right)' \right], \quad (\text{VI.124})$$

где $x = \mathcal{P}/T^* \equiv p/T$.

1. Рассмотрим сначала случай *сильного затухания* ($\gamma \gg 1$)

$$\nu(t, \mathcal{P}) \gg k; \quad \nu(t, \mathcal{P})t \gg 1. \quad (\text{VI.125})$$

Производя асимптотическую оценку методом Фурье интеграла (VI.124) с учетом (VI.123) приведем уравнение (VI.115) к виду:

$$\psi'' + n^2 \psi + \frac{8}{5} \left(\frac{\psi}{\eta} \right)' \frac{1}{a\bar{\nu}_{eff}\eta} = 0, \quad (\text{VI.126})$$

где

$$\frac{1}{\bar{\nu}_{eff}} \stackrel{def}{=} \frac{\sum (2S+1) \int_0^\infty x^4 \frac{df_0}{dx} \frac{dx}{\nu(x,\eta)}}{4 \sum (2S+1) \int_0^\infty x^3 f_0 dx}. \quad (\text{VI.127})$$

Вследствие (VI.125) последний член в левой части уравнения (VI.126) мал по сравнению с первыми двумя, - он отвечает слабому затуханию вакуумных колебаний ГВ:

$$h_\beta^\alpha = -\psi S_{\alpha\beta} a^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{a} \exp \left(-\int_0^\eta \frac{4d\eta}{5\bar{\nu}a\eta^2} \right) \left[S_{\alpha\beta}^+ e^{-i(n\eta - n_\alpha x^\alpha)} + S_{\alpha\beta}^- e^{i(n\eta - n_\alpha x^\alpha)} \right] \quad (\text{VI.128})$$

При $\bar{\nu}t \rightarrow \infty$ затухание ГВ исчезает: в ультрарелятивистской жидкости ГВ распространяется также как в вакууме. Такое поведение ГВ следовало бы ожидать исходя из результатов раздела IV.8.

VI.5. Столкновительное затухание ГВ в горячей Вселенной

2. Пусть теперь *затухание слабо*, т.е. имеет место одно из неравенств противоположных (VI.125), или оба одновременно. Тогда в бесстолкновительном приближении (VI.124) можно упростить:

$$\begin{aligned} 16\pi a^{-2} \tau_F^* &= \\ &= \frac{3}{2\eta} \lim_{\eta_0 \gg 0} \left[\left(\frac{\psi}{\eta} \right)_{\eta_0} J[n(\eta - \eta_0)] + \int_0^{\eta} \left(\frac{\psi}{\eta'} \right)' [n(\eta - \eta')] d\eta' \right]. \end{aligned} \quad (\text{VI.129})$$

Выражение (VI.129) имеет две асимптотики.

В *длинноволновом приближении* $n\eta \ll 1$ найдем

$$16\pi a^{-2} \tau_F^* \simeq \frac{8\psi}{5\eta^2}. \quad (\text{VI.130})$$

Подставляя (VI.130) в уравнение (VI.115), получим колебания, исследованные в работе [81]:

$$\psi = \sqrt{\eta} \left[c_+ \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \ln n\eta \right) + c_- \sin \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \ln n\eta \right) \right]. \quad (\text{VI.131})$$

Такие колебания, однако, происходят лишь в том случае, если бесстолкновительная ситуация имеет место с сингулярного состояния $\eta = 0$. Если же бесстолкновительной фазе предшествовала сильностолкновительная, окончившаяся в момент «времени» η_0 , то вместо (VI.130) τ_F^* будет описываться выражением

$$16\pi a^{-2} \tau_F^* \simeq \frac{8}{5} \left\{ \frac{\psi}{\eta^2} - \frac{\psi(\eta_0)}{\eta\eta_0} \right\}, \quad (\text{VI.132})$$

и уравнение (VI.123) становится неоднородным

$$\psi'' + \frac{8\psi}{5\eta^2} = \frac{8\psi(\eta_0)}{5\eta\eta_0}. \quad (\text{VI.133})$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию сшивки в момент $\eta = \eta_0$, имеет вид:

$$\psi = \psi(\eta_0) \frac{\eta}{\eta_0} + c_- \sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}} \sin \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \ln \frac{\eta}{\eta_0} \right). \quad (\text{VI.134})$$

При этом главная часть амплитуды ГВ, h_β^α , остается постоянной. Таким образом решение для длинных ГВ (VI.131) полученное в [81], верно в том случае, когда бесстолкновительная фаза имела место вблизи космологической сингулярности, и неверно, когда бесстолкновительному этапу предшествовал гидродинамический. В последнем случае, как это видно из (VI.134), ГВ «запоминает» свое состояние на гидродинамическом этапе $h_\beta^\alpha = \text{Const}$.

Рассмотрим теперь эволюцию *коротких* в смысле (VI.113) ГВ при произвольном затухании $\gamma(\eta, \mathcal{P})$. В этом случае удобно положить

$$\psi = \tilde{\psi}(\eta) \exp(-i \int \Omega(\eta) d\eta),$$

где $\Omega(\eta)$ - большая величина, $\tilde{\psi}(\eta)$ - медленно меняющаяся функция. При $\eta \rightarrow 0$ ГВ с любыми n являются длинными, поэтому решение (VI.118) необходимо переопределить на момент времени η_0 , когда ГВ становится короткой: $\eta_0 \gtrsim n^{-1}$. Переопределим в (VI.118) начальные условия на этот момент времени и вычислим интеграл в (VI.124) методом Фурье. При оценке методом Фурье этого интеграла необходимо иметь ввиду, что асимптотикой (VI.122) пользоваться нельзя, так как она приводит к расходящемуся выражению. Вычисление можно провести и в случае нерелятивистских частиц, при этом выражение (VI.116) необходимо заменить на $\mathcal{K} = \sqrt{m^2 + p^2} \nu(p, \eta)$. Проведя необходимые вычисления, найдем:

$$16\pi a^{-2} \tau_F^* = -\psi \frac{2\pi \Omega a^2}{n^4} \sum \frac{(2S+1)}{2\pi^2} \int_0^\infty p \sqrt{m^2 + p^2} \frac{df_0}{dp} \Omega' dp \times$$

$$\left[\frac{5}{3} p^2 n^2 \Omega'^2 (m^2 + p^2) + \frac{[\Omega'^2 m^2 + p^2 (\Omega'^2 - n^2)]^2}{2\Omega' n p \sqrt{m^2 + p^2}} \times \right.$$

$$\left. \times \ln \left| \frac{\Omega' \sqrt{m^2 + p^2} + np}{\Omega' \sqrt{m^2 + p^2} - np} \right| \right], \quad (\text{VI.135})$$

где $\Omega' = \Omega + ia(\eta)\nu(p, \eta)$. В частности, для ультрарелятивистских частиц получим из (VI.135):

VI.5. Столкновительное затухание ГВ в горячей Вселенной

$$16\pi a^{-2} \tau_F^* = -\frac{3\Omega}{4n^4\eta^2} \psi \sum \frac{(2S+1)}{2\pi^2} \times \\ \times \int_0^\infty x^4 \frac{df_0}{dx} \Omega' dx \left[\frac{2}{3} n^2 - (\Omega'^2 - n^2) + \frac{(\Omega'^2 - n^2)^2}{2\Omega' n} \ln \left| \frac{\Omega' + n}{\Omega' - n} \right| \right]. \quad (\text{VI.136})$$

Для слабостолкновительной плазмы $\Omega \approx n$, поэтому отбрасывая в (VI.136) члены, пропорциональные $\Omega^2 - n^2$, приведем уравнение (VI.115) к виду

$$\tilde{\psi}'' - 2i\tilde{\psi}'\Omega - (\Omega^2 - n^2)\tilde{\psi} + \frac{2\Omega^2}{n^2\eta^2}\tilde{\psi} - \frac{4i\bar{\nu}a}{n\eta^2}\tilde{\psi} = 0, \quad (\text{VI.137})$$

где $\bar{\nu}$ определяется формулой, аналогичной (VI.127). Решая (VI.137) в указанном приближении, найдем

$$\Omega^2 \simeq n^2 + 2\eta^{-2}; \quad (\text{VI.138})$$

$$\tilde{\psi} \simeq \mathcal{K}^{1/2}(\eta) \stackrel{def}{=} \exp \left[-\frac{1}{2}\gamma_G(\eta) \right]; \quad (\text{VI.139})$$

где

$$\gamma_G(\eta) = \frac{4}{\eta^2} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\bar{\nu}a}{\eta^2} d\eta = \int_{t_0}^t \frac{\bar{\nu}dt}{k^2 t^2}. \quad (\text{VI.140})$$

Последняя формула согласуется с выражениями для коэффициента затухания ГВ, рассмотренными в [76], [74], [156]. Отметим любопытный факт, связанный с высокочастотными ГВ. Пренебрегая затуханием ГВ и вводя вместо ψ конформно соответствующую величину $\Phi = \psi/a \sim h_\beta^\alpha$, приведем уравнение (VI.137) к виду уравнения для массивного скалярного поля без источников (скалярная кривизна в ультрарелятивистском мире равна нулю)

$$\Delta_2 \Phi - \frac{R}{6} \Phi + m_G^2 \Phi = 0 \quad (\text{VI.141})$$

с эффективной массой гравитона

$$m_G = \frac{1}{\sqrt{2}t}. \quad (\text{VI.142})$$

Глава VI. Кинетика ранних стадий космологического расширения

Выясним вопрос об эволюции энергии ГВ, которая вследствие нелокализуемости энергии гравитационного поля имеет смысл лишь в приближении геометрической оптики. Усредненный псевдотензор энергии-импульса ГВ в этом приближении равен [46]:

$$\langle t^{ik} \rangle = \frac{1}{32\pi} \langle h^{n,i} h^{*q,k} \rangle. \quad (\text{VI.143})$$

Подставляя в (VI.143) h_{β}^{α} в виде (VI.92) и усредняя полученное выражение по всем направлениям n_{α} , получим ТЭИ идеальной ультрарелятивистской жидкости с плотностью энергии

$$\mathcal{E}_G = \frac{S^2 n^2}{a^4} \exp[-\gamma_G(\eta)]. \quad (\text{VI.144})$$

Таким образом энергия ГВ в сопутствующем объеме падает пропорционально $\exp(-\gamma_G(\eta))$, т.е. в приближении (VI.113) величину $\mathcal{K}(\eta)$ можно назвать декрементом затухания энергии ГВ.

Подводя итоги, отметим, что столкновительное затухание космологических ГВ на всех мыслимых реакциях невелико. Однако причиной слабости затухания ГВ является не слабость межчастичных взаимодействий, а то обстоятельство, что в среде с обильными межчастичными взаимодействиями, т.е. в идеальной жидкости, ГВ не затухают. Для того, чтобы обеспечить заметное затухание ГВ, столкновения должны быть слишком частыми, что в свою очередь приводит к слабости затухания. Для иллюстрации проведем расчет затухания ГВ в реакциях типа $ee^+ \rightarrow$ адроны. Сечение этого процесса имеет скейлинговый характер [160]

$$\sigma_{tot}(S) = \frac{4\pi\alpha^2}{3S} \sum e_i^2 \equiv \frac{4\pi\alpha^2 Q^2(S)}{3S}, \quad (\text{VI.145})$$

где e_i - фундаментальные заряды, число которых слабо, возможно логарифмически, растет с ростом S . Проводя необходимые вычисления, найдем

$$\bar{\nu} = \frac{45\xi(3)N'}{2\pi^3} T\alpha^2 Q^2(T), \quad (\text{VI.146})$$

где

$$N' = \sum (2S + 1)\delta;$$

VI.5. Столкновительное затухание ГВ в горячей Вселенной

Изобразим схематически эволюцию ГВ в горячей Вселенной в зависимости от поведения полного сечения рассеяния. Выделим следующие ситуации:

- A : $n\eta \ll 1$, $av\eta \gg 1$ - длинные волны в жидкости,
- B : $n\eta \gg 1$, $av\eta \gg 1$ - короткие волны в жидкости,
- C : $n\eta \ll 1$, $av\eta < 1$ - длинные волны в слабостолкновительном газе,
- D : $n\eta \gg 1$, $av\eta < 1$ - короткие волны в слабостолкновительном газе.

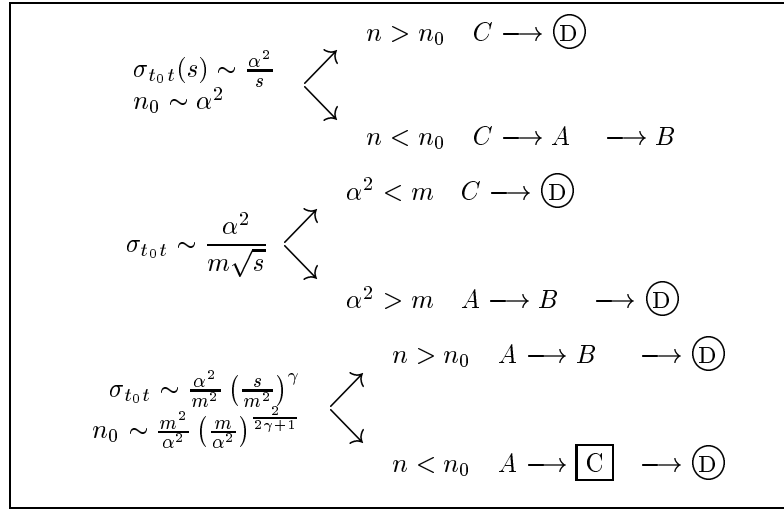


Рис.23. Столкновительные процессы в космологической плазме, приводящие к затуханию космологических гравитационных волн. Кругами обведены ситуации, в которых происходит столкновительное затухание ГВ, квадратом - область фиксации амплитуды ГВ.

Вопрос эффективности затухания требует проведения расчетов для конкретных реакций. Результаты таких расчетов, выполненных в работах [76], [74], [156], проведены в Таблице 5.

Таблица 5. Декремент затухания космологических гравитационных волн в ранней Вселенной для различных процессов в космологической плазме

Процесс	Полное сечение рассеяния $\sigma_{t_0 t}(s)$	Область современных длин волн, где затухание максимально (в см)	Максимальное значение γ_G
$e\gamma^+ \leftrightarrow e\gamma^1)$ $ee^+ \leftrightarrow \gamma\gamma$	$\frac{2\pi\alpha^2}{s} \left(\ln \frac{s}{m^2} + \frac{1}{2} \right)$	~ 100	0,01
$ee^+ \leftrightarrow \mu\mu^+ 2)$ $ee^+ \leftrightarrow$ адроны	$\frac{4\pi\alpha^2}{3s} Q^2(s)$	$\lambda > \frac{10^4 \beta^2 \lambda_\gamma}{Q^2 N'} \sim 10^3$	$4\beta^2$
$e\nu \leftrightarrow e\nu 3)$ $ee^+ \leftrightarrow \nu\bar{\nu}$ $e\bar{\nu} \leftrightarrow e\bar{\nu}$ $\nu_\mu e \leftrightarrow \nu_\mu e$ $\nu_\mu \bar{\nu}_e \leftrightarrow e+\mu^-$ $\nu_\mu \mu^+ \leftrightarrow e+\nu_e$	$G_F^2 s (g_L^2 + \frac{1}{3}g_R^2)/\pi$ $G_F^2 s (\frac{1}{3}g_L^2 + \frac{1}{3}g_R^2)/\pi$ $G_F^2 s (\frac{1}{3}g_L^2 + g_R^2)/\pi$ $G_F^2 s/\pi$ $G_F^2 s/3\pi$ $G_F^2 s/3\pi$	$\sim 2 \cdot 10^{20}$	0,74
$X \leftrightarrow \bar{q}q 4)$ $X \leftrightarrow ql$	$ M ^2 = 8\pi\alpha_x m_x^2 N$ $\sigma > 1$	$\frac{\sigma^{1/3}}{\alpha_X N}$	$0,29 \frac{N_X}{N}$ $\sim 3 \cdot 10^{-2}$

¹⁾По данным работы [47]; ²⁾по данным работ [76],[74]; ³⁾по данным работы [47];

⁴⁾по данным работ [47],[161].

В последних двух столбцах таблицы приведены результаты, просуммированные по всем реакциям данного типа. G - константа Ферми,

$$\sigma = \frac{0,1\alpha_X N^2 m_{p1}}{m_X},$$

m_{p1} - планковская масса, m_X - масса X - бозонов, α_X - константа взаимодействия, N_X - число участвующих в реакциях частиц.

$$N' = \sum (2S + 1)\delta; \quad (\text{VI.147})$$

VI.5. Столкновительное затухание ГВ в горячей Вселенной

величина δ введена в разделе VI.3. Таким образом

$$\gamma_G(\infty) = \frac{4(\bar{v}a)\eta_0}{n^2\eta_0} \sim \frac{1}{\eta_0}. \quad (\text{VI.148})$$

Как выбрать момент η_0 ? Затухание ГВ возможно при одновременном выполнении условий $n\eta > 1$ и $\bar{v}a < n$ (см. Рис. 29) - в противном случае имеем либо длинные ГВ, либо ГВ в жидкости, и в обоих случаях ГВ не затухают. Комбинируя эти два условия, приходим к выводу что $\gamma_G(\infty)$ на скейлинговых взаимодействиях может быть порядка 1: $\gamma_G(\infty) \simeq 4\beta^2$, где $\beta < 1$ - неизвестный фактор, гарантирующий строгость сделанных приближений, причем с таким декрементом затухают все ГВ, имеющие на сегодняшний момент длину волны

$$\lambda > \frac{\lambda\gamma\beta \cdot 2\pi^3}{45\xi(3)Q^2(t_0)N'\alpha^2} \sim 10^4\lambda_\gamma,$$

где λ_γ - длина волны реликтовых фотонов. Более строгий результат в случае скейлинговых взаимодействий вряд ли возможно получить, так как в этом случае коротковолновой фазе предшествует длинноволновая в газе (VI.131) и с уточнением декремента затухания все менее ясным становится его смысл.

Подводя итоги, отметим, что столкновительное затухание космологических ГВ на всех мыслимых реакциях невелико. На этот факт указывалось и ранее (см.[150]). Однако причиной слабости затухания ГВ является не слабость межчастичных взаимодействий, а то обстоятельство, что как раз в среде с интенсивными межчастичными взаимодействиями, т.е., в идеальной жидкости, ГВ не затухают. Для того, чтобы обеспечить заметное затухание ГВ, столкновения не должны быть слишком частыми, что в свою очередь приводит к слабости затухания. Единственными достаточно эффективными взаимодействиями, приводящими к затуханию ГВ, являются взаимодействия, имеющие скейлинговое поведение сечения. Именно масштабно инвариантные взаимодействия вследствие одинаковой с частотой ГВ временной зависимостью эффективной частоты столкновений могут неограниченно долго влиять на ГВ. Однако при попытке вычислить коэффициент затухания энергии ГВ в наиболее эффективной области $\bar{v} \sim k$ мы попадаем в длинноволновую бесстолкновительную фазу, в которой затруднено определение энергии ГВ. Расчеты коэффициента затухания на электрослабых взаимодействиях, в общем, подтвердили оценку Хоукинга [162] и несколько

Глава VI. Кинетика ранних стадий космологического расширения

уточнили ее. Проведенные расчеты указывают на то, что можно ожидать завала энергетического спектра космологических ГВ примерно в $1,5 \div 2$ раза при длинах волн $\lambda \gtrsim 10^4 \beta^2 / N' Q^2$ (см) и дополнительно к этому такого же эффекта при $\lambda \sim 2 \times 10^{20}$ (см). Экспериментальное обнаружение этих завалов дало бы информацию о значении фундаментальных констант взаимодействия при сверхвысоких энергиях.

Глава VII

Релятивистская кинетика бариогенезиса в симметричной горячей Вселенной

VII.1 Механизм нарушения барионной симметрии Вселенной

Важным примером нарушения локального термодинамического равновесия (ЛТР) массивными частицами в ходе космологического расширения является процесс производства барионов (бариогенезиса) в первоначально барионно-симметричной Вселенной. В [13], [14] была высказана гипотеза о том, что наблюдаемая барионная асимметрия Вселенной

$$\delta_b = \frac{n_B}{n_\gamma} \sim 10^{-9} \quad (\text{VII.1})$$

вызвана CP -неинвариантными процессами, нарушающими сохранение барионного заряда. Примером такого процесса является распад сверхмассивных X -бозонов, к которым приводят модели Великого объеди-

нения:¹

$$X \rightleftharpoons \bar{q} + \bar{q}; \quad X \rightleftharpoons q + l, \quad (\text{VII.2})$$

где q - символ кварка, l - лептона. В [163], однако, показано, что если данные процессы протекают в условиях ЛТР, то даже наличие CP - неинвариантности и нарушение сохранения барионного заряда недостаточно для возникновения избытка барионов над антибарионами. Для производства барионного заряда в первоначально барионно - симметричной Вселенной кроме указанных факторов требуется нарушение ЛТР в реакциях типа (VII.2) и вывод барионов из состояния статистического равновесия. Такая возможность:

$$\tau_x \gtrsim t \quad (\text{VII.3})$$

(τ_x - время полураспада X - бозона, t - космологическое время) реализуется при условии [164]:

$$m_X > \alpha_X m_{pl} \sqrt{N}, \quad (\text{VII.4})$$

(m_X - масса X -бозона, $m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ - планковская масса, N - число степеней свободы). Условие (VII.4) жестко ограничивает снизу допустимые значения масс X - бозонов.

В работах [164], [165], [166] (см. также [167], [168] и др.) были сделаны оценки барионной асимметрии вселенной в предположении нарушения ЛТР. Для отношения плотности числа барионов к плотности полной энтропии, \mathcal{S} , было получено:

$$\delta_{\mathcal{S}} = \frac{n_b}{\mathcal{S}} \simeq \frac{45\zeta(3)}{4\pi^4} \frac{N_X}{N} \Delta r, \quad (\text{VII.5})$$

где $\zeta(x)$ - ζ - функция Римана, N_X - число типов сверхмассивных X - бозонов, Δr - разность относительных вероятностей распадов в каналах

$$X \rightarrow q + l \text{ и } \bar{X} \rightarrow \bar{q} + \bar{l},$$

возникающая вследствие нарушения CP - инвариантности. Далее в работах [169]-[171] на основе релятивистской кинетической теории были проведены численные расчеты отношения n_B/S , в основном, подтвердившие вышеуказанные оценки. В цитированных выше работах на основании проведенных расчетов был установлен нижний предел массы X - бозона:

$$m_X \geq 10^{16} \text{ГэВ}, \quad (\text{VII.6})$$

¹Здесь и далее \bar{a} означает античастицу a .

VII.1. Механизм нарушения барионной симметрии Вселенной

который создал значительные трудности для стандартной $SU(5)$ теории.

Указанные работы, однако, имеют существенный недостаток - вместо прямого решения кинетических уравнений для X - бозонов в условиях *существенного* нарушения ЛТР бозонные функции распределения моделируются квазиравновесными распределениями, параметры которых определяются из гидродинамических уравнений для моментов функции распределения, т.е., в этих работах фактически используется гидродинамический метод Энскога-Чемпена-Града. Как следует из результатов релятивистской кинетической теории (см., например, [86]-[88]), глобальное термодинамическое равновесие в однородной изотропно расширяющейся плазме достигается лишь в крайнем нерелятивистском пределе, либо в крайнем ультрарелятивистском, что является следствием асимптотической конформной инвариантности релятивистской кинетической теории [51]. В области промежуточных энергий частиц и при условии нарушения ЛТР распределение частиц не аппроксимируется равновесным распределением. В работах [172, 173] автора в рамках кинетической модели была найдена неравновесная функция распределения X - бозонов и показано, что эта функция может существенно отличаться от равновесной. Поэтому результаты полученные в [169]-[171], правильные при выполнении *сильного* неравенства (VII.4), нуждаются в уточнении в других областях. Оценка (VII.5) хотя и является, по-видимому, достаточно надежной, ничего не говорит о тех ситуациях, когда условие (VII.4) невыполняется, тогда как ширина перекрытия экспериментальных и теоретических значений δ_S допускает возможность, когда барионный заряд производится в условиях менее выгодных, чем (VII.4).

Ответить на вопрос, какова будет величина δ_S при $m_X \leq \alpha_X m_{pl} \sqrt{N}$, может лишь детальный кинетический анализ. При условии доверия к гипотезе изначально барионно- и зарядово-симметричной Вселенной такой анализ с другой стороны позволил бы более определенно очертить область возможных значений фундаментальных констант Великого объединения. В середине 80-х - начале 90-х годов Автором была сформулирована кинетическая модель описания процессов нарушения симметрии и были получены некоторые оценки, вытекающие из предложенной модели [173], [174]. В частности, на основе сделанных оценок было высказано предположение, что учет кинетики процесса бариогенезиса позволит снизить нижнюю оценку массы сверхмассивных бозонов до величины порядка $5 \cdot 10^{14}$ Гэв. Однако детальный анализ этой модели

в этих работах произведен не был и в силу внешних обстоятельств исследования в этом направлении не были завершены. Эти работы были завершены лишь в 2005-2007 годах в связи с появлением мощных вычислительных средств прикладных математических пакетов [175, 176, 177].

Следует заметить, что несмотря на то, что ниже приведены результаты для конкретной модели взаимодействий, основанной на минимальной $SU(5)$ симметрии, обобщение результатов на другие аналогичные полевые модели или аналогичные модели спонтанного нарушения симметрии в результате T -несимметричного распада любых типов распадающихся частиц не представляет труда - оно сводится к построению соответствующей алгебры взаимодействий и простому арифметическому пересчету соответствующих кинетических коэффициентов.

VII.2 Алгебра взаимодействий $SU(5)$

Рассмотрим, например, стандартную $SU(5)$ модель взаимодействий (см., например, [168]). В этой модели участвуют 12 векторных калибровочных бозонов, представляющих два заряженных цветовых триплета:

$$\{X_{v,-4/3}^i, \bar{X}_{v,4/3}^i; X_{v,-1/3}^i, \bar{X}_{v,1/3}^i\}$$

- i - цветовой индекс (красный, зеленый, синий), число внизу - электрический заряд - и 12 скалярных хиггсовых бозонов:

$$\{X_{s,-1/3}^i, \bar{X}_{s,1/3}^i; X_{s,-4/3}^i, \bar{X}_{s,4/3}^i\}.$$

В более общих моделях число векторных бозонов доводится до 24, - при этом добавляется еще два триплета

$$\{X_{v',-1/3}^i, \bar{X}_{v',1/3}^i; X_{v',2/3}^i, \bar{X}_{v',-2/3}^i\},$$

а число хиггсовых бозонов - до 30, при этом добавляются три $SU(3)$ - триплета, входящих в три $SU(2)$ триплета:

$$\{X_{s',-1/3}^i, \bar{X}_{s',1/3}^i; X_{s',2/3}^i, \bar{X}_{s',-2/3}^i; X_{s',-4/3}^i, \bar{X}_{s',4/3}^i\}.$$

Сверхмассивные X -бозоны часто называются Y, Y, Z -бозонами соответственно их зарядам: $-4/3, -1/3, 2/3$. Законы сохранения электрического заряда позволяют протекать лишь следующим реакциям распада/рождения

VII.3. Релятивистские кинетические уравнения в $SU(5)$

этих бозонов:

$$\begin{aligned} X_{-4/3} &\rightleftharpoons \bar{q}_\alpha + \bar{q}_\alpha; X_{-4/3} \rightleftharpoons q_\kappa + l_e; \\ X_{-1/3} &\rightleftharpoons \bar{q}_\alpha + \bar{q}_\kappa; X_{-1/3} \rightleftharpoons q_\kappa + l_\nu; X_{-1/3} \rightleftharpoons q_\alpha + l_e; \\ X_{2/3} &\rightleftharpoons \bar{q}_\kappa + \bar{q}_\kappa; X_{2/3} \rightleftharpoons q_\alpha + l_\nu \end{aligned} \quad (\text{VII.7})$$

где α - индекс апокварка ($\alpha = u, c, t$ - кварки с зарядом $2/3$), κ - катокварка ($\kappa = d, s, b$ кварки с зарядом $-1/3$), e - символ заряженного лептона ($e = e, \mu, \tau$, заряд $=-1$), ν - нейтрального лептона ($\nu = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$). В реакциях (VII.7) сохраняется также цветовой заряд, поэтому в реакциях распада X -бозона и кварковой аннигиляции участвуют антикварки различных цветов, дополнительных к цвету X - бозона, например:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{-4/3}^R &= d_r^R + e_- = \bar{u}_l^{\bar{G}} + \bar{u}_l^{\bar{B}}; \\ \bar{X}_{-4/3}^G &= d_l^G + e_- = \bar{u}_l^{\bar{R}} + \bar{u}_l^{\bar{B}}, \end{aligned}$$

где R, G, B - обозначения красного, синего, зеленого цветов; соответствующие начеркнутые индексы $\bar{R}, \bar{G}, \bar{B}$ - антицвета, равные суммам соответствующих дополнительных, l, r - обозначения левых и правых частиц. Можно предположить, как это часто делается, что в правых частях реакций (VII.7) участвуют частицы с одинаковым ароматом. В этом случае в стандартном варианте $SU(5)$ будет 90 пар реакций типа (VII.7), а в расширенном варианте модели - 198 пар². Далее, число степеней свободы в стандартном варианте модели равно:

$$N = \sum_B (2s + 1) + \frac{7}{8} \sum_F (2s + 1) = 185$$

- 24 векторных бозона ($s = 1$), - 29 скалярных бозонов ($s = 0$), 36 кварков ($s = 1/2$), 12 лептонов ($s = 1/2$). В расширенных вариантах $SU(5)$ это число еще больше.

VII.3 Релятивистские кинетические уравнения в $SU(5)$

Для удобства выразим усредненные по спиновым состояниям инвариантные элементы матрицы перехода распадов сверхмассивных бозонов

²С учетом распада и рождения сверхмассивных антибозонов.

Глава VII. Релятивистская кинетика космологического бариогенезиса

с помощью безразмерных чисел (r_i, \bar{r}_i) :

$$\begin{aligned}
 |M_{X \rightarrow ql_e}|^2 &= \frac{1}{3} s^2 r_e; & |M_{X \rightarrow ql_\nu}|^2 &= \frac{1}{3} s^2 r_\nu; \\
 |M_{\bar{X} \rightarrow \bar{q} \bar{l}_e}|^2 &= \frac{1}{3} s^2 \bar{r}_e; & |M_{\bar{X} \rightarrow \bar{q} \bar{l}_\nu}|^2 &= \frac{1}{3} s^2 \bar{r}_\nu; \\
 |M_{X \rightarrow \bar{q} \bar{q}}|^2 &= \frac{1}{6} s^2 (1 - r); & |M_{\bar{X} \rightarrow q q}|^2 &= \frac{1}{6} s^2 (1 - \bar{r}),
 \end{aligned} \tag{VII.8}$$

($r = r_e + r_\nu, \bar{r} = \bar{r}_e + \bar{r}_\nu$), которые должны быть еще снабжены индексами электрического и цветового зарядов, а также ароматов кварков и лептонов.

Вследствие CPT - инвариантности усредненные матричные элементы обратных переходов (аннигиляции) равны:

$$\begin{aligned}
 |M_{ql_e \rightarrow X}|^2 &= \frac{1}{3} s^2 \bar{r}_e; & |M_{ql_\nu \rightarrow X}|^2 &= \frac{1}{3} s^2 \bar{r}_\nu; \\
 |M_{\bar{q} \bar{l}_e \rightarrow \bar{X}}|^2 &= \frac{1}{3} s^2 r_e; & |M_{\bar{q} \bar{l}_\nu \rightarrow \bar{X}}|^2 &= \frac{1}{3} s^2 r_\nu; \\
 |M_{\bar{q} \bar{q} \rightarrow X}|^2 &= \frac{1}{6} s^2 (1 - \bar{r}); & |M_{q q \rightarrow \bar{X}}|^2 &= \frac{1}{6} s^2 (1 - r).
 \end{aligned} \tag{VII.9}$$

Инвариантные матричные элементы вероятности двухчастичного распада постоянны. Вычисление полной вероятности распада в однопетлевом приближении в рамках, например, стандартной $SU(5)$ модели дает:

$$W_{X \rightarrow ql} = \frac{\pi \alpha}{108} (2\pi)^4 m_X^2 \delta^{(4)}(P_F - P_I),$$

где P -полные 4-импульсы начального и конечного состояния, $\alpha \approx 1/45$. В этом случае:

$$\sum_{A,C} s^2 = \frac{8\pi m_X^2}{27}, \tag{VII.10}$$

где суммирование проводится по всем ароматам и цветам частиц, участвующих в распаде данного X -бозона.

В дальнейшем мы, однако, не будем конкретизировать s^2 , полагая только:

$$s^2 = Const. \tag{VII.11}$$

VII.3. Релятивистские кинетические уравнения в $SU(5)$

Кроме реакций первого порядка (VII.7) возможны и реакции более высокого порядка, протекающие с участием сверхмассивных бозонов и нарушающие CP -инвариантность а также законы сохранения барионного и лептонного зарядов, например,

$$qq' \xrightarrow{X} \bar{q}l; \quad q\bar{l} \xrightarrow{X} \bar{q}q'. \quad (\text{VII.12})$$

Рассмотрим далее метрику однородной изотропной Вселенной³:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (\text{VII.13})$$

Пусть далее p^i - 4-импульс частицы, удовлетворяющий соотношению нормировки:

$$(p, p) = (p^4)^2 - p^2 = m^2 \Rightarrow E = \sqrt{m^2 + p^2}, \quad (\text{VII.14})$$

где $p^2 = a^2(t)((p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2)$ - квадрат кинематического импульса частицы, $E = p^4$ - кинетическая энергия частиц.

В [51] показано, что релятивистские кинетические уравнения являются асимптотически конформно инвариантными в ультрарелятивистском пределе:

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{m^2} \rightarrow \infty \quad (\text{VII.15})$$

с точностью до $O(m^2/p^2)$. Таким образом, в ультрарелятивистском пределе (VII.15), когда энергии всех частиц, участвующих в реакциях, гораздо больше их масс покоя, кинетические уравнения в метрике Фридмана после соответствующего конформного преобразования совпадают с кинетическими уравнениями в пространстве Минковского. Именно поэтому однородное изотропное расширение ультрарелятивистской плазмы не выводит ее из состояния *глобального* термодинамического равновесия. Далее, в противоположном, нерелятивистском, пределе:

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{m^2} \rightarrow 0, \quad (\text{VII.16})$$

когда кинетические энергии всех частиц, участвующих в процессе, гораздо меньше их масс покоя, в плазме снова восстанавливается глобальное термодинамическое равновесие [146],[86].

³Здесь и в дальнейшем мы выбираем систему единиц $\hbar = c = G = 1$.

Глава VII. Релятивистская кинетика космологического бариогенезиса

Введем согласно [51] конформные импульсы частиц, \mathbb{P}, \mathbb{Q} , являющиеся интегралами движения, по формуле:

$$\mathbb{P} = a(t)p \quad (= \sqrt{(p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2}), \quad (\text{VII.17})$$

конформную кинетическую энергию частиц $\mathbb{E} = a(t)E$:

$$\mathbb{E} = \sqrt{a^2(t)m^2 + \mathbb{P}^2} \quad (\text{VII.18})$$

и соответствующие *макроскопические конформные параметры плазмы*, которые остаются постоянными на ультрарелятивистской стадии расширения:

$$\mathcal{T} = a(t)T - \quad \text{температура;} \quad (\text{VII.19})$$

$$\mathcal{N} = a^3(t)n - \quad \text{концентрации частиц;} \quad (\text{VII.20})$$

$$\mathcal{E} = a^4(t)\varepsilon - \quad \text{плотность энергии.} \quad (\text{VII.21})$$

Кинетические уравнения для плазмы в расширяющейся однородной Вселенной с участием X -бозонов запишем в символическом виде [174]:

$$\frac{1}{a} \sqrt{a^2 m_X^2 + \mathbb{P}^2} \frac{\partial f_X}{\partial t} = \sum I_{X \rightarrow \bar{q}q'} + \sum I_{X \rightarrow ql}; \quad (\text{VII.22})$$

$$\frac{1}{a} \sqrt{a^2 m_X^2 + \mathbb{Q}^2} \frac{\partial f_F}{\partial t} = \sum I_{X \rightarrow FF'} + \sum^{(2)} I_{FF' \rightarrow \dots} + (\text{другие взаимодействия}), \quad (\text{VII.23})$$

где $f_a(P, t)$ - числа заполнения, F - индекс фермионов, \mathbb{P}, \mathbb{Q} - конформные импульсы X -бозонов и фермионов, соответственно. Выражение «другие взаимодействия» в (VII.23) означает интеграл столкновений для всех остальных взаимодействий, не нарушающих сохранение барионного и лептонного зарядов: кварко-глюонных, лептонных и кварковых распадов W - и X -бозонов, аннигиляции и т.п. Все эти реакции протекают в условиях ЛТР и приводят к установлению теплового равновесия кварков и лептонов.

Интегралы взаимодействий частиц запишем в релятивистски - инвариантном виде [49]:

$$I_a(x, P_a) = - \sum_{f,i} \int \delta^{(4)}(P_f - P_i) (Z_{fi} W_{if} - Z_{if} W_{if}) \prod_{f,i}' d\pi, \quad (\text{VII.24})$$

где суммирование проводится по всем начальным, i , и конечным, f , состояниям частиц, интегрирование $(d\pi')$ проводится по всем 4-х мерным

VII.3. Релятивистские кинетические уравнения в $SU(5)$

импульсным пространствам, кроме пространства a -й частицы, W_{fi} и W_{if} - соответствующие инвариантные матрицы рассеяния, которые связаны с инвариантными амплитудами рассеяния M_{if} формулами [60]:

$$W_{fi} = (2\pi)^4 |M_{fi}|^2 \cdot 2^{-(N_i+N_f)} \quad (\text{VII.25})$$

- N_i и N_f - числа частиц в начальном и конечном состояниях. В формулах (VII.39) введены произведения состояний:

$$Z_{fi} = \prod_f f_f \prod_i (1 \pm f_i); \quad Z_{if} = \prod_i f_i \prod_f (1 \pm f_f), \quad (\text{VII.26})$$

где знак «-» относится к фермионам, «+» - к бозонам. Инвариантные элементы объемов импульсных пространств равны:

$$d\pi_a = \frac{\rho_a \sqrt{-g} d^4 P_a}{(2\pi\hbar)^3} \delta((P_a, P_a) - \frac{m_a^2 c^2}{2}),$$

где ρ_a - статистический фактор вырождения.

Далее, поскольку реакции (VII.7), (VII.12) протекают при очень высоких температурах $T \gtrsim 10^{14}$ Гэв, все фермионы можно с очень большой степенью точности считать ультрарелятивистскими, следовательно:

$$f_{F_a} = [\exp(-\lambda_a + Q/T) + 1]^{-1}, \quad (\text{VII.27})$$

где конформная температура $\mathcal{T} = aT$, постоянна в ультрарелятивистской равновесной плазме, а *приведенные* химические потенциалы

$$\lambda_a = \frac{\mu_a}{T}$$

удовлетворяют серии условий химического равновесия, соответствующим реакциям, протекающим в условиях ЛТР. Комбинируя алгебраические уравнения, соответствующие этим условиям, можно прийти к следующему выводу: химические потенциалы каждого типа кварка не зависят от цвета и аромата. Таким образом, остается всего 4 независимых химических потенциала, которые для простоты, следуя [168], обозначим символами самих частиц - u, d, e, ν :

$$u = \lambda_{q_u}; \quad d = \lambda_{q_d}; \quad e = \lambda_{l_e}; \quad \nu = \lambda_{l_\nu}, \quad (\text{VII.28})$$

причем для них, как для ультрарелятивистских частиц в условиях ЛТР, выполняется известное условие антисимметричности:

$$\bar{\lambda}_a = -\lambda_a. \quad (\text{VII.29})$$

В случае, когда масса покоя нейтральных лептонов, m_ν равна нулю, то и их химический потенциал равен нулю: $\nu = 0$, как химический потенциал безмассовых частиц, находящихся в термодинамическом равновесии⁴. В этом случае остается всего три независимые величины: u, d, e .

VII.4 Кинетические уравнения для фермионов

При выполнении условий химического равновесия последний член в правой части (VII.23) обращается в нуль. Второй же член в правой части (VII.23) описывает все реакции, протекающие с нарушением CP -инвариантности, в которых участвуют кварки, лептоны и виртуальные X -бозоны. Поскольку эти интегралы полностью определяются равновесными функциями распределения кварков, лептонов и других частиц, то пользуясь *функциональными уравнениями Больцмана* [49]

$$Z_{fi} - Z_{if} = 0 \Rightarrow \sum_i \lambda - \sum_f \lambda' = 0, \quad (\text{VII.30})$$

фермионные интегралы взаимодействий можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sum I_{FF' \rightarrow \dots} &= - \sum \int d\pi_F d\pi_{F'} d\pi_{F''} f_F f_{F'} \times \\ &\times \int \prod d\pi_k (1 \pm f_k) (W_{FF' \rightarrow \dots} - \bar{W}_{\bar{F}\bar{F}' \rightarrow \dots}). \end{aligned} \quad (\text{VII.31})$$

Для вычисления этих интегралов нет необходимости конкретизации вероятностей многочастичных переходов W и \bar{W} , - достаточно воспользоваться оптической теоремой, являющейся следствием унитарности S -матрицы, [168], [142]:

$$\sum_k \int \prod d\pi_k (1 \pm f_k) (W_{if} - W_{fi}) = 0, \quad (\text{VII.32})$$

где суммирование проводится по всем *конечным* состояниям реакций $FF' \rightarrow \dots$. Итак, вследствие оптической теоремы получим равенство:

⁴см., например, [59].

VII.4. Кинетические уравнения для фермионов

$$\begin{aligned} \sum'_{X, F'} (1 + f_X) (W_{X \rightarrow \bar{F} \bar{F}} - W_{\bar{X} \rightarrow F F'}) d\pi_k + \\ + \sum'_k (1 \pm f_k) (W_{F F' \rightarrow \dots} - W_{\bar{F} \bar{F}' \rightarrow \dots}) d\pi_k = 0. \end{aligned} \quad (\text{VII.33})$$

Используя этот результат в уравнениях (VII.23) и интегрируя их по пространству импульсов фермионов, получим уравнения, которые в дальнейшем используем для определения химических потенциалов фермионов:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{N}_F}{dt} = a(t) \sum'_{\bar{X}, F'} \int W_{X \rightarrow F F'} d\pi_X d\pi_F d\pi_{F'} \times \\ \times [f_X (1 - f_F) (1 - f_{F'}) - (1 + f_X) f_F f_{F'}]. \end{aligned} \quad (\text{VII.34})$$

Последние уравнения можно еще упростить, учитывая соотношения, справедливые для равновесных фермионных функций распределения (VII.27):

$$\int d\pi_F d\pi_{F'} \delta^{(4)}(p_X - p_F - p_{F'}) f_F f_{F'} = \frac{1}{2^3 \pi^5} f_X^0(F + F') \beta(F, F'); \quad (\text{VII.35})$$

$$\begin{aligned} \int d\pi_F d\pi_{F'} \delta^{(4)}(p_X - p_F - p_{F'}) (1 - f_F) (1 - f_{F'}) = \\ = \frac{1}{2^3 \pi^5} [1 + f_X^0(F + F')] \beta(F, F'), \end{aligned} \quad (\text{VII.36})$$

где введены обозначения [174]:

$$\begin{aligned} f_X^0(F + F') &= [\exp(-\lambda_F - \lambda_{F'} + E_X/T) - 1]^{-1}; \\ \beta(F, F') &= \beta(F', F) = \beta(F) + \beta(F'); \end{aligned} \quad (\text{VII.37})$$

$$\beta(F) = \frac{T}{p} \ln \frac{1 + \exp(-\lambda_F + p_+/T)}{\exp(p/2T) [1 + \exp(-\lambda_F + p_-/T)]},$$

и

$$p_{\pm} = \frac{1}{2}(E \pm p); \quad E = E_X = \sqrt{m_X^2 + p^2}. \quad (\text{VII.38})$$

Функция $\beta(F, F')$ является статистическим фактором, в больцмановской статистике ($\lambda \rightarrow \infty$) равным $1/2$. Аргументы \mathbb{P} и t функций f_X^0 и β для краткости опущены. Там, где это потребуется, будем писать подробно:

$$f_X^0(x; \mathbb{P}, t); \quad \beta(x, \mathbb{P}, t).$$

С учетом (VII.35), (VII.36) уравнения (VII.34) существенно упрощаются:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{N}_F}{dt} = \\ = a(t) \sum'_{X, F} \frac{\rho_X}{(2\pi)^3} |M_{X \rightarrow FF'}|^2 \int_0^\infty \frac{p^2 [f_X - f_X^0(F + F')] \beta(F, F') dp}{\sqrt{m_X^2 + p^2}}. \end{aligned} \quad (\text{VII.39})$$

Суммирование в (VII.39) проводится по всем X -бозонам, причем в кварк-кварковых каналах сумма цветов двух кварков дополнительна к цвету X -бозона, таким образом, в сумме каждому типу X -бозона соответствует два слагаемых.

VII.5 Кинетические уравнения для X -бозонов

Для X -бозонов оптическая теорема принимает вид:

$$\sum_{F, F'} d\pi_F d\pi_{F'} (1 - f_F)(1 - f_{F'}) (W_{x \rightarrow \bar{F} \bar{F}'} - W_{\bar{X} \rightarrow FF'}) = 0 \quad (\text{VII.40})$$

и, таким образом, бозонные уравнения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2(t)m_X^2 + \mathbb{P}^2} \frac{\partial f_X}{\partial t} = \\ - \frac{a(t)}{4\pi} \sum_{F, F'} |M_{X \rightarrow \bar{F} \bar{F}'}|^2 \beta(F, F') [f_X - f_X^0(F + F')]. \end{aligned} \quad (\text{VII.41})$$

VII.5. Кинетические уравнения для X - бозонов

Обратим внимание на тот важный и *строгий* факт, что кинетические уравнения для X -бозонов становятся линейными дифференциальными уравнениями. Уравнения для античастиц получаются из (VII.39), (VII.41) инверсией начеркнутых индексов частиц - античастиц.

Если полагать, что спонтанное нарушение $SU(5)$ -симметрии произошло на очень ранних стадиях космологической эволюции, когда еще X -бозоны были ультрарелятивистскими, то указанную систему кинетических уравнений (VII.39), (VII.41) необходимо решать с начальными условиями, соответствующими изначальному глобальному термодинамическому равновесию и изначальной барионной и лептонной симметрии:

$$\lambda_a|_{t=0} = 0; \quad f_X(\mathbb{P}, 0) = f_0^0(0) = [\exp(\mathbb{P}/\mathcal{T}_0) - 1]^{-1}, \quad (\text{VII.42})$$

где:

$$\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}(0) = \left(\frac{45}{16\pi^3 N} \right)^{1/4}. \quad (\text{VII.43})$$

Из (VII.41) видно, что бозонные функции находятся в квадратурах [?], [173]. Эти уравнения в стандартной математической записи имеют вид:

$$\dot{f}_i + f_i A_i(t) = Y_i(t), \quad (\text{VII.44})$$

точка здесь и далее обозначает производную по времени, i, k - теперь индексы X -бозонов, а векторы A и Y определяются соотношениями:

$$A_i(\mathbb{P}, t) = \frac{a(t)}{4\pi\sqrt{m_i^2 a^2(t) + \mathbb{P}_i^2}} \sum_k |M_{X_i \rightarrow F, F'}|^2 \beta(F, F'); \quad (\text{VII.45})$$

$$Y_i(\mathbb{P}, t) = \frac{a(t)}{4\pi\sqrt{m_i^2 a^2(t) + \mathbb{P}_i^2}} \sum_k |M_{X_i \rightarrow F, F'}|^2 \beta(F, F') f_X^0(F + F') \quad (\text{VII.46})$$

- суммирование в (VII.45), (VII.46) проводится по всем каналам реакций, по которым распадается данный X -бозон.

Решая уравнения (VII.44) с начальными условиями (VII.42), (VII.43), получим решения для бозонных функций в квадратурах:

$$f_X(\mathbb{P}, t) = f_X(\mathbb{P}, 0) \exp\left(-\int_0^t A_i(\mathbb{P}, t') dt'\right) + \exp\left(-\int_0^t A_i(\mathbb{P}, t') dt'\right) \int_0^t \exp\left(\int_0^{t'} A_i(\mathbb{P}, t'') dt''\right) Y_i(\mathbb{P}, t'') dt'. \quad (\text{VII.47})$$

Подстановка найденного решения для бозонных функций распределения в кинетические уравнения для фермионов (VII.39) приводит к замкнутой системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений на химические потенциалы.

VII.6 Законы сохранения

В полной кинетической модели Вселенной к уравнениям (VII.39), (VII.41) необходимо добавить уравнения, определяющие эволюцию температуры и масштабного фактора. Первое из этих уравнений получается интегрированием кинетических уравнений (VII.22), (VII.23) с весом E_i и последующим суммированием [175]:

$$\dot{\mathcal{E}} = \dot{a} \sum_X m_X (\mathcal{K}_X + \mathcal{K}_{\bar{X}}), \quad (\text{VII.48})$$

где \mathcal{E} - суммарная конформная плотность энергии:

$$\mathcal{E} = \frac{\pi^2 N' T^4}{30} + \sum_X \frac{\rho_X}{2\pi^2} \int_0^\infty f_X \mathbb{P}^2 \sqrt{a^2 m_X^2 + \mathbb{P}^2} d\mathbb{P}, \quad (\text{VII.49})$$

$$\mathcal{K}_X = \frac{a m_X \rho_X}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{f_X \mathbb{P}^2}{\sqrt{a^2 m_X^2 + \mathbb{P}^2}} d\mathbb{P}, \quad (\text{VII.50})$$

где N' - число степеней свободы $SU(5)$ -модели без учета X -бозонов:

$$N' = N - N_X,$$

т.е., в стандартной $SU(5)$ -модели $N' = 185 - 53 = 132$. Уравнение же, определяющее эволюцию масштабного фактора, есть уравнение Эйнштейна, в котором можно положить $k = 0$, учитывая, что мы рассматриваем очень раннюю Вселенную $t \rightarrow 0$:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3} \mathcal{E}. \quad (\text{VII.51})$$

Уравнения (VII.39), (VII.41), (VII.48), (VII.51) совместно с определениями (VII.49), (VII.50) и начальными условиями (VII.42), (VII.43) являются полной системой уравнений, описывающих динамику бариогенезиса. Рассмотрим некоторые *строгие* следствия этих уравнений.

VII.6. Законы сохранения

1. Допустим, что X -бозоны находятся в тепловом равновесии, т.е., не обращая внимания на кинетические уравнения для X -бозонов (VII.41), положим в (VII.39)

$$f_X = f_X^0(\lambda_X) = \left[\exp \left(-\lambda_X + \frac{\sqrt{a^2 m_X^2 + \mathbb{P}^2}}{\mathcal{T}} \right) - 1 \right]^{-1},$$

где $\lambda_X = -\lambda - \lambda'$. Тогда точным решением уравнений (VII.39), отвечающим начальным условиям (VII.42) будет:

$$\mathcal{N}_a = Const; \quad \lambda_a = 0, \quad (\text{VII.52})$$

- т.е., в условиях статистического равновесия X -бозонов бариогенезис не протекает.

2. Предположим, что взаимодействия CP -инвариантны, т.е.:

$$W_{X \rightarrow \bar{F}, \bar{F}'} = W_{\bar{X} \rightarrow F, F'}.$$

В этом случае из (VII.39), (VII.41) опять-таки следует (VII.52). Таким образом, и в случае CP -инвариантности взаимодействий бариогенезис не протекает.

3. Проинтегрируем кинетические уравнения для X -бозонов (VII.41) по пространству импульсов и комбинируя этот результат с уравнениями (VII.39) с учетом начальных условий (VII.42) получим два *строгих* следствия:

$$\sum_{A,C} \left(-\frac{4}{3} \Delta n_{-4/3} - \frac{1}{3} \Delta n_{-1/3} + \frac{2}{3} \Delta n_{2/3} + \frac{2}{3} \Delta n_\alpha - \frac{1}{3} \Delta n_\kappa - \Delta n_e \right) = 0 \quad (\text{VII.53})$$

- закон сохранения электрического заряда ($\sum e_a n_a = 0$) и

$$\sum_{A,C} \left[-\frac{2}{3} (\Delta n_{-4/3} + \Delta n_{-1/3} + \Delta n_{2/3}) + \frac{1}{3} (\Delta n_\alpha + \Delta n_\kappa) - \Delta n_e - \Delta n_\nu \right] = 0 \quad (\text{VII.54})$$

- закон сохранения разности барионного и лептонного зарядов, где введено обозначение:

$$\Delta n_a = n_a - \bar{n}_a. \quad (\text{VII.55})$$

Суммирование в (VII.53), (VII.54) проводится по всем ароматам и цветам частиц.

4. Полагая теперь, что все X -бозоны распались, т.е., переходя к пределу $t \rightarrow \infty$ и комбинируя соотношения (VII.53), (VII.54) с учетом условий симметричности (VII.29) и обозначений (VII.28), получим:

$$u(\infty) = 2d(\infty); u(\infty) = 2e(\infty) \Rightarrow d(\infty) = e(\infty). \quad (\text{VII.56})$$

Из (VII.56) следует, что по окончании распада X -бозонов на каждый избыточный заряженный лептон будет приходиться по одному избыточному катокварку и по два избыточных анокварка, что с учетом цветов даст один избыточный бесцветный барион на один лептон. Таким образом, конечный барионный заряд Вселенной будет равен ее лептонному заряду:

$$\Delta n_b(\infty) = \Delta n_e(\infty). \quad (\text{VII.57})$$

Таким образом, для нахождения барионной асимметрии Вселенной достаточно определить лишь одну из трех величин:

$$u(\infty), \quad e(\infty), \quad d(\infty).$$

5. В простейшей модели бариогенезиса, когда CP -инвариантность нарушается лишь в каналах распада одного типа X -бозонов, $X_{-4/3}$, из (VII.53), (VII.54) строго следует соотношение во все времена процесса:

$$e(t) = d(t), \quad (\text{VII.58})$$

и остается всего две независимые величины, $u(t)$ и $d(t)$.

VII.7 Слабое нарушение зарядовой симметрии в стандартной SU(5) модели

Пользуясь слабостью нарушения CP -симметрии

$$\Delta r = r - \bar{r} \lesssim 10^{-6}$$

VII.7. Слабое нарушение зарядовой симметрии в стандартной $SU(5)$ модели

и тем самым малостью химических потенциалов ($\lambda_a \lesssim \Delta r \ll 1$), можно свести указанную выше систему интегро-дифференциальных уравнений к системе линейных интегро-дифференциальных уравнений. В данной работе мы рассмотрим простую модель бариогенезиса, в которой CP -инвариантность нарушена в каналах распада лишь одного типа бозонов, X -бозона. В этом случае уравнения (VII.39), (VII.41) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{f}_X + f_X \frac{a(t)S^2}{2\pi\sqrt{a^2(t)m_X^2 + \mathbb{P}^2}} [\bar{r}\beta(d) + (1 - \bar{r})\beta(-u)] = \\ = \frac{a(t)S^2}{2\pi\sqrt{a^2(t)m_X^2 + \mathbb{P}^2}} [\bar{r}\beta(d)f_X^0(2d) + (1 - \bar{r})\beta(-u)f_X^0(-2u)]; \end{aligned} \quad (\text{VII.59})$$

$$\begin{aligned} \Delta\dot{N}_\alpha = \frac{2a(t)S^2N_X}{3(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\mathbb{P}^2 d\mathbb{P}}{\sqrt{a^2(t)m_X^2 + \mathbb{P}^2}} \times \\ \times \{(1 - \bar{r})\beta(u)[f_{\bar{X}} - f_X^0(2u)] - (1 - r)\beta(-u)[f_X - f_X^0(-2u)]\}; \end{aligned} \quad (\text{VII.60})$$

$$\begin{aligned} \Delta\dot{N}_\kappa = \frac{2a(t)S^2N_X}{3(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\mathbb{P}^2 d\mathbb{P}}{\sqrt{a^2(t)m_X^2 + \mathbb{P}^2}} \times \\ \times \{r\beta(d)[f_{\bar{X}} - f_X^0(2d)] - \bar{r}\beta(-d)[f_{\bar{X}} - f_X^0(-2d)]\}. \end{aligned} \quad (\text{VII.61})$$

Здесь выписаны отдельно уравнения для анокварков - (VII.60), и катокварков - (VII.61). При выводе этих уравнений учтено, что:

$$\beta(x, x) = 2\beta(x). \quad (\text{VII.62})$$

Выпишем формулы для коэффициентов, входящих в эти уравнения в линейном по Δr , λ приближении. В нулевом приближении:

$$\beta(0) = \beta_0(\mathbb{P}, t), \quad (\text{VII.63})$$

где:

$$\beta_0(\mathbb{P}, t) = \frac{T}{p} \ln \frac{1 + \exp(p_+/T)}{\exp(p/2T)[1 + \exp(p_-/T)]} \quad (\text{VII.64})$$

и необходимо подставить:

$$\frac{p_{\pm}}{T} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a^2(t)m_X^2 + \mathbb{P}^2} \pm \mathbb{P}}{\mathcal{T}}. \quad (\text{VII.65})$$

Далее:

$$f_X^0(\xi) = f_X^0(0; \mathbb{P}, t) + \xi \frac{\exp(E_X/T)}{[\exp(E_X/T) - 1]^2}, \quad (\text{VII.66})$$

где:

$$f_X^0(0; \mathbb{P}, t) = [\exp(E_X/T) - 1]^{-1} \quad (\text{VII.67})$$

и

$$\frac{E_X}{T} = \frac{\sqrt{a^2(t)m_X^2 + \mathbb{P}^2}}{\mathcal{T}}.$$

Интегрируя кинетические уравнения для X-бозонов (VII.59) с начальными условиями (VII.42) в линейном по $\Delta r, \lambda$ приближении найдем:

$$f_X(\mathbb{P}, t) = f_X^0(0; \mathbb{P}, 0) + \delta f_0(\mathbb{P}, t) + \delta f(\lambda), \quad (\text{VII.68})$$

где $\delta f(\lambda)$ - линейный по λ функционал, вследствие чего:

$$\delta(-\lambda) = \delta(\lambda), - \quad (\text{VII.69})$$

он не вносит вклад в окончательный результат; а δf - отклонение от равновесия функции распределения:

$$\delta f_0(\mathbb{P}, t) = -e^{-\Phi(\mathbb{P}, t)} \int_0^t e^{\Phi(\mathbb{P}, t')} \dot{f}_0(0; \mathbb{P}, t') dt' \quad (\text{VII.70})$$

- отклонение от равновесия бозонной функции распределения в симметричной плазме $\lambda = 0$, и введено обозначение:

$$\Phi(\mathbb{P}, t) = \frac{1}{\tau_0} \int_0^t \frac{a(t')\beta_0(\mathbb{P}, t') dt'}{\sqrt{a^2(t') + \mathbb{P}^2/m_X^2}}; \quad (\text{VII.71})$$

τ_0 - собственное время распада свободного X-бозона:

$$\tau_0 = \frac{4\pi m_X}{s^2} \sim \frac{3}{2} (m_X \alpha)^{-1}. \quad (\text{VII.72})$$

VII.7. Слабое нарушение зарядовой симметрии в стандартной SU(5) модели

Поскольку фермионы находятся в состоянии ЛТР и являются ультррелятивистскими, их концентрации равны:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\exp(-\lambda + \mathbb{P}/\mathcal{T}) - 1} \mathbb{P}^2 d\mathbb{P}. \quad (\text{VII.73})$$

В условиях слабого нарушения CP - инвариантности, когда $\lambda_a \ll 1$ получим отсюда приближенно, разлагая по степеням малости λ :

$$\mathcal{N} \approx \frac{3}{2} \frac{\mathcal{T}^3 \zeta(3)}{\pi^2} + \lambda \frac{\mathcal{T}^3}{6} \Rightarrow \Delta N_a \approx \lambda_a \frac{\mathcal{T}^3}{3}. \quad (\text{VII.74})$$

В стандартной SU(5) модели вероятности распада X-бозона в лептонном, (qe) , и кварковом, $(\bar{q}\bar{q})$, каналах одинаковы⁵, т.е.:

$$1 - 2r = O^1(\Delta r). \quad (\text{VII.75})$$

С учетом этого фактора и соотношения (VII.74) в стандартной SU(5) модели из уравнений для анокварков- (VII.60), и катокварков- (VII.61) можно получить одно замкнутое уравнение первого порядка на величину $B = u + 2d$, т.е., на избыточную концентрацию барионов

$$\Delta \mathcal{N}_B = \frac{1}{3} \mathcal{N}_B \mathcal{T}^3 :$$

$$\frac{d}{dt} \Delta \mathcal{N}_B + \Delta \mathcal{N}_B \frac{2N_X}{\pi^2 \mathcal{T}^3} \int_0^{\infty} \mathbb{P}^2 \dot{\Phi} f_0 \beta_0 d\mathbb{P} = \frac{2\Delta r N_X}{3\pi^2} \int_0^{\infty} \mathbb{P}^2 \dot{\Phi} \beta_0 \delta f_0 d\mathbb{P}, \quad (\text{VII.76})$$

интегрируя которое с учетом начальных условий (VII.42), найдем:

$$\Delta \mathcal{N}_B(\infty) = \frac{4\Delta r N_X}{3\pi^2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\int_t^{\infty} \Psi(t') dt'\right) G(t) dt, \quad (\text{VII.77})$$

где

$$\Psi(t) = \frac{2N_X}{\pi^2 \mathcal{T}^3} \int_0^{\infty} \mathbb{P}^2 \dot{\Phi} f_0 \beta_0 d\mathbb{P}, \quad (\text{VII.78})$$

⁵с учетом цветов и ароматов

$$G(t) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \mathbb{P}^2 \dot{\Phi} \delta f_0 d\mathbb{P}. \quad (\text{VII.79})$$

Остается теперь вычислить величину $\delta_S = \delta n_B / S$, где плотность энтропии ультрарелятивистского газа равна:

$$S = \frac{2\pi^2}{45} NT^3 \Rightarrow S = \frac{2\pi^2}{45} NT^3. \quad (\text{VII.80})$$

Тем самым задача формально решена. Следует отметить, что в отличие от работ [169]-[171], в которых функция распределения X -бозонов моделировалась квазигидродинамическим распределением и находилась путем численного интегрирования кинетических уравнений, здесь функция распределения X -бозонов находится строгим интегрированием кинетических уравнений, и $B(\infty)$ определяется в квадратурах:

$$\delta_S = \frac{\Delta \mathcal{N}_B}{S}. \quad (\text{VII.81})$$

VII.8 Исследование решения

В дальнейшем будем полагать, что, во-первых, X -бозоны распадаются, в основном, на промежуточных стадиях расширения, когда $T \sim m_X$, и, во-вторых, что доля X -бозонов достаточно мала, по сравнению с общим числом частиц: $N_X \ll N$, так что с достаточной степенью точности космологическую плазму на стадии распада X -бозонов можно считать ультрарелятивистской. Это дает нам законы изменения масштабного фактора и температуры со временем:

$$a(t) = a_0 \sqrt{t}; \quad T = \mathcal{T}_0 \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad (\text{VII.82})$$

где \mathcal{T}_0 (см. (VII.43)) есть температура плазмы в планковских единицах на планковский же момент времени:

$$\mathcal{T}_0 = \left(\frac{45}{16\pi^3 N} \right)^{1/4}. \quad (\text{VII.83})$$

Исследуем полученное в предыдущем разделе линейное решение, для чего перейдем от переменных t, p к новым переменным η, ξ :

$$t = \tau_0 \eta; \quad (\text{VII.84})$$

VII.9. Функция Φ в больцмановском приближении

$$p = \frac{1}{\sqrt{\eta}} m_X \xi; \quad \Rightarrow \mathbb{P} = m_X \xi \sqrt{\tau_0}. \quad (\text{VII.85})$$

где τ_0 - собственное время распада свободного X-бозона (VII.72), таким образом значению безразмерного времени $\eta = 1$ соответствует время $t = \tau_0$. Введем далее безразмерный параметр σ [174], зависящий от констант полевой теории⁶:

$$\sigma = \frac{m_X}{T(\tau_0)} = \frac{m_X \sqrt{\tau_0}}{\mathcal{T}_0} = \frac{\chi \sqrt{m_X}}{\sqrt{\alpha} \mathcal{T}_0}, \quad (\text{VII.86})$$

равный отношению массы X-бозона к температуре на момент его полураспада, где χ - безразмерный параметр порядка 1, зависящий от параметров полевой теории, α - константа взаимодействия (от 0.1 до 0.01).

Тогда получим выражения:

$$\frac{p}{T} = \sigma \xi; \quad \frac{E}{T} = \sigma \sqrt{\eta + \xi^2}; \quad \frac{p_{\pm}}{T} = \sigma (\sqrt{\eta + \xi^2} \pm \xi); \quad (\text{VII.87})$$

$$f_0(t, \mathbb{P}) = \left[1 + \exp(\sigma \sqrt{\eta + \xi^2}) \right]^{-1}; \quad (\text{VII.88})$$

$$\beta_0(\mathbb{P}, t) = \beta_0(\xi, \eta, \sigma) = \frac{1}{\xi \sigma} \ln \frac{1 + \exp(\sigma/2(\sqrt{\eta + \xi^2} + \xi))}{\left[1 + \exp(\sigma/2(\sqrt{\eta + \xi^2} - \xi)) \right] \exp(\sigma \xi/2)}. \quad (\text{VII.89})$$

VII.9 Функция Φ в больцмановском приближении

Как показали проведенные исследования, конечные результаты вычислений весьма слабо чувствительны к учету статистических факторов при вычислении функции $\Phi(\eta, \xi)$, тогда как в тоже время они весьма чувствительны к учету статистических факторов на других этапах вычислений. Поэтому в дальнейшем функцию $\Phi(\eta, \xi)$ мы будем вычислять

⁶ Введенный в [174] параметр σ равен квадрату σ , используемого в настоящей работе.

в больцмановском приближении, в то время как на других этапах вычислений будем удерживать статистические факторы. Тогда в больцмановском приближении $\beta_0 \approx 1/2$, и мы получим для функции Φ :

$$\dot{\Phi}(\mathbb{P}, t) = \frac{1}{2\tau_0} \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \quad (\text{VII.90})$$

и:

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\eta} \sqrt{\eta + \xi^2} - \xi^2 \ln \frac{\sqrt{\eta} + \sqrt{\eta + \xi^2}}{\xi} \right), \quad (\text{VII.91})$$

Вследствие (VII.90) $G(\eta, \xi)$ - неотрицательная монотонно возрастающая функция:

$$\Phi(\eta, \xi) \geq 0; \quad \frac{\partial \Phi(\eta, \xi)}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \geq 0, \quad (\text{VII.92})$$

причем

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \Phi(\eta, \xi) = 0. \quad (\text{VII.93})$$

VII.10 Отклонение X-бозонов от равновесия

Подставляя функцию $\Phi(\xi, \eta)$ в форме (VII.91) в выражение (VII.70) для отклонения функции распределения X-бозонов от равновесия и переходя к переменным (VII.84), (VII.85), получим:

$$\delta f_0(\xi, \eta, \sigma) = \frac{1}{2} \sigma \times \exp(-\Phi(\xi, \eta)) \int_0^\eta \frac{\exp(\Phi(\xi, \eta') + \sigma \sqrt{\eta' + \xi^2}) d\eta'}{[1 + \exp(\sigma \sqrt{\eta' + \xi^2})]^2 \sqrt{\eta' + \xi^2}}. \quad (\text{VII.94})$$

В этом разделе мы проведем прямое численное интегрирование ряда введенных нами функций с помощью средств пакета символьной математики Maple для исследования свойств полученного решения. На Рис. 24 - 26 - результаты численного интегрирования выражения (VII.94) для плотности отклонения X-бозонов от равновесия, $\xi^2 \delta f$ для $\delta f/f_0$, в зависимости от времени, η , и импульса, ξ [175].

VII.10. Отклонение X-бозонов от равновесия

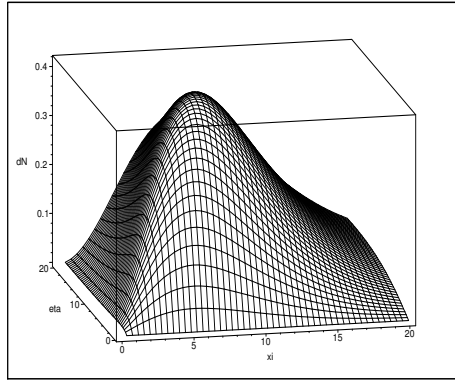


Рис.24. Плотность числа неравновесных X-бозонов $dN = \xi^2 \delta f(\xi, \eta, \sigma)$ при $\sigma = 0,3$.

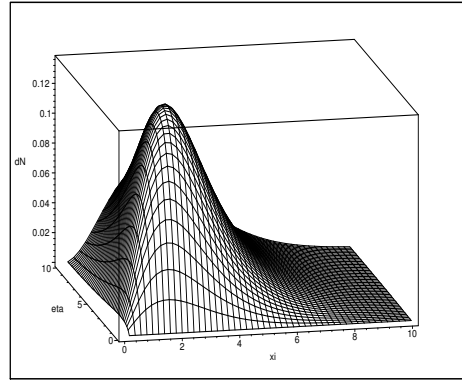


Рис.25. Плотность числа неравновесных X-бозонов $dN = \xi^2 \delta f(\xi, \eta, \sigma)$ при $\sigma = 1$.

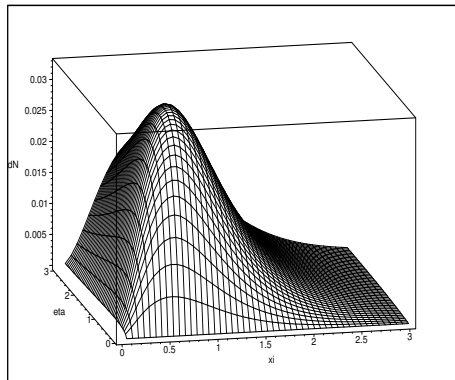


Рис.26. Плотность числа неравновесных X-бозонов $dN = \xi^2 \delta f(\xi, \eta, \sigma)$ при $\sigma = 3$.

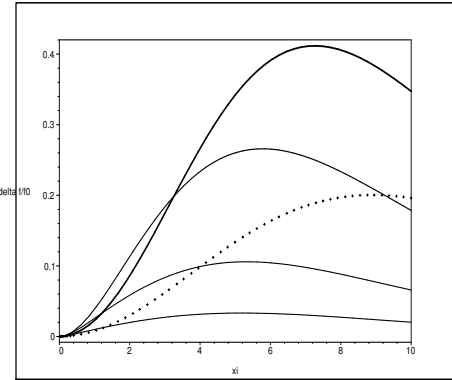


Рис.27. Эволюция плотности числа неравновесных X-бозонов $dN = \xi^2 \delta f(\xi, \eta, \sigma)$ при $\sigma = 0,3$. Тонкая линия - $\eta = 0,3$, средняя - $\eta = 1$, жирная - $\eta = 3$, самая жирная - $\eta = 10$, пунктирная - $\eta = 30$.

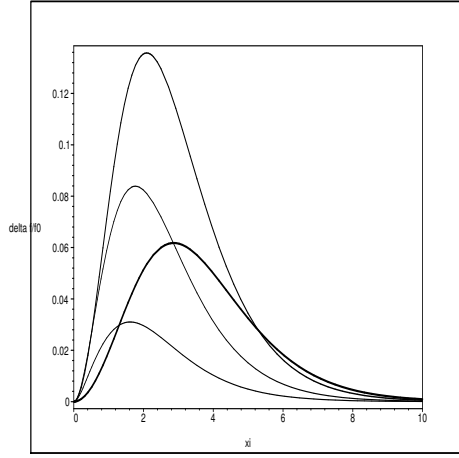


Рис.28. Эволюция плотности числа неравновесных X-бозонов $dN = \xi^2 \delta f(\xi, \eta, \sigma)$ при $\sigma = 1$. Тонкая линия - $\eta = 0.3$, средняя линия - $\eta = 1$, жирная линия - $\eta = 3$, самая жирная линия - $\eta = 10$.

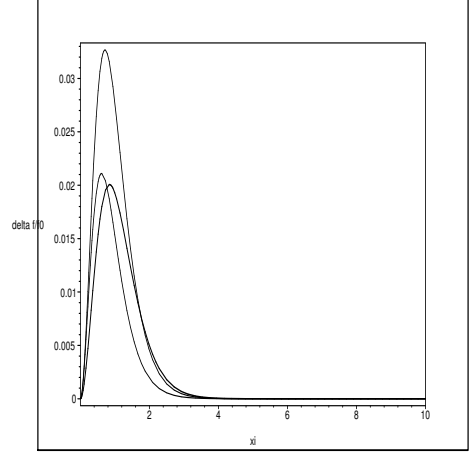


Рис.29. Эволюция плотности числа неравновесных X-бозонов $dN = \xi^2 \delta f(\xi, \eta, \sigma)$ при $\sigma = 3$. Тонкая линия - $\eta = 0.3$, средняя линия - $\eta = 1$, жирная линия - $\eta = 3$.

VII.11 Преобразование к безразмерным переменным

Используя выражение для конечной концентрации барионов (VII.77), а также выражение для плотности энтропии (VII.81), получим искомое выражение для конечной плотности удельной энтропии, приходящейся на один барион:

$$\delta_S = \frac{N_b(\infty)}{S} = \frac{30 \Delta r \mathcal{N}_X}{\pi^4 \mathcal{T}^3 \mathcal{N}} \int_0^\infty \exp\left(-\int_t^\infty \Psi(t') dt'\right) G(t) dt, \quad (\text{VII.95})$$

где функции $\Psi(t)$, $G(t)$ и $\delta f(\mathbb{P}, t)$ определяются выражениями (VII.78), (VII.80) и (VII.70), соответственно. В соответствии с формулами (VII.84), (VII.85) перейдем от временной переменной t и импульсной \mathbb{P} к безразмерным временной переменной η и импульсной переменной ξ и выберем

VII.12. Функции $\Psi(T)$ и $\Theta(T)$

нормировку масштабного фактора на ультрарелятивистской в целом стадии расширения (VII.82).

Таким образом, переходя к новым переменным, получим выражение для удельной энтропии:

$$\delta_S = \frac{15\Delta r N_X}{2\pi^6 N} \sigma^3 \int_0^\infty d\eta e^{-\Theta(\eta)} \sqrt{\eta} \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \delta f(\eta, \xi), \quad (\text{VII.96})$$

где

$$\Theta(\eta) = \int_t^\infty \Psi(t) dt.$$

Так как $\dot{\Phi} \geq 0$, то и $\Psi(t) > 0$, таким образом, $\Theta(\eta)$ - неотрицательная монотонно убывающая функция:

$$\frac{d\Theta}{d\eta} \leq 0. \quad (\text{VII.97})$$

При этом:

$$\delta f(\eta, \xi) = e^{-\Phi(\eta, \xi)} \int_0^\eta d\eta' e^{\Phi(\eta', \xi)} \frac{\partial}{\partial \eta'} \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta'+\xi^2}} - 1}. \quad (\text{VII.98})$$

VII.12 Функции $\Psi(t)$ и $\Theta(t)$

Переходя к новым переменным, получим при бoльцмановской аппроксимации функции $\Phi(x)$ (VII.91) выражение для функции $\Psi(\eta)$, в котором уже учтен статистический фактор:

$$\Psi(\eta) = \frac{\sqrt{\eta} N_X \sigma^3}{2\pi^2 \tau_0} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta+\xi^2}} - 1} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \quad (\text{VII.99})$$

Введем новые переменные x и z :

$$\xi = \sqrt{\eta} \text{sh}(x), \quad z = \sigma\sqrt{\eta}. \quad (\text{VII.100})$$

Тогда получим:

$$\Psi(\eta) = \frac{N_X}{\pi^2 \tau_0} z^3 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 t dt}{e^{z \text{ch} t} - 1}.$$

Глава VII. Релятивистская кинетика космологического бариогенезиса

Вычисляя интеграл $\int \Psi dt$ и меняя порядок интегрирования в полученном выражении, найдем:

$$\Theta(\eta) = \int_t^\infty \Psi(t') dt' = \frac{2N_X}{\pi^2 \sigma^2} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x}{\text{ch}^5 x} dx \int_{\sqrt{\eta} \sigma \text{ch} x}^\infty \frac{\nu^3}{e^\nu - 1} d\nu. \quad (\text{VII.101})$$

В частности, проводя интегрирование по всему интервалу значений t , получим произведение интегралов:

$$\Theta(0) = \int_0^\infty \Psi(t') dt' = \frac{2N_X}{\pi^2 \sigma^2} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x}{\text{ch}^5 x} dx \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^\nu - 1} d\nu,$$

один из них выражается через ζ -функцию Римана:

$$\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^\nu - 1} = \frac{\pi^4}{15},$$

а другой вычисляется элементарно:

$$\int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x}{\text{ch}^5 x} dx = \frac{\pi}{16}.$$

В результате найдем:

$$\Theta(0) = \int_0^\infty \Psi(t') dt' = \frac{\pi^3 N_X}{120 \sigma^2}. \quad (\text{VII.102})$$

Таким образом, можно записать:

$$\Theta(\eta) = \Theta(0) - \frac{2N_X}{\pi^2 \sigma^2} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x}{\text{ch}^5 x} dx \int_0^{\sqrt{\eta} \sigma \text{ch} x} \frac{\nu^3}{e^\nu - 1} d\nu.$$

Внутренний интеграл можно выразить через функцию:⁷

$$D(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \frac{t^3}{e^t - 1} dt.$$

⁷Функция $D(x)$ связана с функциями Дебая (см., например, [90]).

VII.12. Функции $\Psi(T)$ и $\Theta(T)$

Функция $D(x)$ имеет следующие асимптотики:

$$D(x) \approx \begin{cases} 3 \sum_0^{\infty} \frac{B_n}{(n+3)n!} x^n, & x \lesssim 1; \\ \frac{\pi^4}{5x^3} - 3 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} \right) e^{-x}, & x \gg 1, \end{cases} \quad (\text{VII.103})$$

где B_n - числа Бернулли. График функции $D(x)$ показан на Рис. 30.

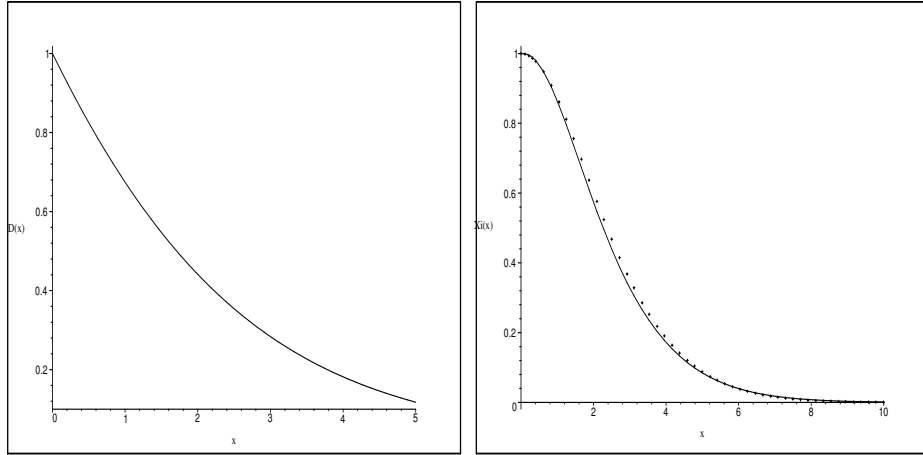


Рис.30. График функции $D(x)$, построенный с помощью пакета Maple
Рис.31. График функции $\Xi(x)$. Точками обозначен график экстраполирующей функции $F(x)$ (VII.106).

Таким образом, получим окончательно:

$$\Theta(\eta) = \frac{\pi^3 N_X}{120\sigma^2} \Xi(\sqrt{\eta}\sigma), \quad (\text{VII.104})$$

где введена монотонно убывающая функция $\Xi(x)$:

$$\Xi(x) = 1 - \frac{80}{\pi^5} x^3 \int_0^{\infty} \text{th}^2 x D(x \text{ ch } z) dz, \quad (\text{VII.105})$$

изменяющаяся на интервале

$$0 \geq \Xi(x) \leq 1.$$

Для вычислений с функциями $D(x)$ и $\Xi(x)$ Авторами была создана специальная библиотека в пакете символьной математики Maple, в которой определены процедуры быстрого вычисления этих функций с помощью их различных аппроксимаций. График функции $\Xi(x)$ показан на Рис.31. На отрезке $[0, 10]$ функция $\Xi(x)$ хорошо экстраполируется функцией

$$F(x) = \frac{e^{-\alpha x^2}}{1 + \beta x^2} \quad (\text{VII.106})$$

с параметрами $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,09$.

VII.13 Отклонение от равновесия, $\delta f(\eta, \xi)$

Перейдем теперь к вычислению функции $\delta f(\eta, \xi)$. Как нетрудно видеть, функция $\Phi(\eta, \xi)$ является медленно меняющейся функцией, так как вследствие (VII.92)

$$\Phi'_\eta < 1/2,$$

причем:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} e^{\Phi(\eta, \xi)} = 1,$$

и в широких пределах изменения переменных η, ξ $\exp(\Phi(\eta, \xi)) \approx 1$. Временная же производная равновесной функции распределения имеет порядок:

$$\frac{f'_0}{f_0} = -\frac{\sigma}{2\sqrt{\eta + \xi^2}} \frac{e^{\sigma\sqrt{\eta + \xi^2}}}{e^{\sigma\sqrt{\eta + \xi^2}} - 1} \quad (\text{VII.107})$$

и бесконечно растет в области $\sigma\sqrt{\eta + \xi^2} \rightarrow 0$; при больших же значениях этого аргумента эта производная мала. Таким образом, главный вклад в отклонение функции распределения от равновесия дают значения переменных η, ξ в области $\sqrt{\eta + \xi^2} \lesssim \sigma^{-1}$, в которой $\exp(\Phi)$ можно считать примерно постоянной. Таким образом, проводя интегрирование по частям в (VII.98), найдем приближенно:

$$\delta f(\eta, \xi) \simeq \frac{1}{e^{\sigma\xi} - 1} - \frac{e^{-\Phi(\eta, \xi)}}{e^{\sigma\sqrt{\eta + \xi^2}} - 1}. \quad (\text{VII.108})$$

VII.13. Отклонение от равновесия, $\delta F(\eta, \xi)$

Подставляя эту функцию во внутренний интеграл (VII.96) и вводя функцию:

$$\text{Df}(\eta, \sigma) = \sigma^2 \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \left[\frac{1}{e^{\sigma\xi} - 1} - \frac{e^{-\Phi(\eta, \xi)}}{e^{\sigma\sqrt{\eta + \xi^2}} - 1} \right], \quad (\text{VII.109})$$

получим:

$$\delta_S = \frac{15\Delta r \mathcal{N}_X}{2\pi^6 \mathcal{N}} \sigma \int_0^\infty d\eta e^{-\Theta(\eta)} \sqrt{\eta} \text{Df}(\eta, \sigma). \quad (\text{VII.110})$$

Заметим, что введенная выше функция $\text{Df}(\eta, \sigma)$ пропорциональна возмущенному следу тензора энергии-импульса X - бозонов:

$$\delta T_X = g_{ik} \delta T_X^{ik} = m_X^2 \int_{P(X)} \delta f_X dP.$$

Переходя к численному интегрированию в (VII.110), заметим, что неудобные для численного интегрирования интегралы как раз содержатся в функции $\text{Df}(\eta, \sigma)$, - прямое применение численного интегрирования наталкивается на проблему расходимости. Поэтому первоначально интеграл (VII.109) необходимо преобразовать к удобному для численного интегрирования виду. Для этого перепишем интеграл (VII.109) в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \text{Df}(\eta, \sigma) &= \\ &= \sigma^2 \left[\int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \left(\frac{1}{e^{\sigma\xi} - 1} - \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta + \xi^2}} - 1} \right) + \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \frac{1 - e^{-\Phi(\eta, \xi)}}{e^{\sigma\sqrt{\eta + \xi^2}} - 1} \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим первую часть интеграла:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \left(\frac{1}{e^{\sigma\xi} - 1} - \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta + \xi^2}} - 1} \right) \equiv \\ &= \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \frac{1}{e^{\sigma\xi} - 1} - \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta + \xi^2}} - 1}. \end{aligned}$$

Глава VII. Релятивистская кинетика космологического бариогенезиса

В первом интеграле сделаем подстановку $\xi = \sqrt{\eta}x$, а во втором - $\xi = \sqrt{x^2 - 1}$. Тогда получим:

$$A = \eta \left[\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta}x} - 1} - \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\eta+x^2} dx}{e^{\sigma\sqrt{\eta}x} - 1} \right].$$

Собирая эти интегралы вместе, получим:

$$A = \eta \left[\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta}x} - 1} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\eta+x^2}} \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta}x} - 1} \right].$$

Преобразуем теперь часть B интеграла:

$$B = \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta+\xi^2}} \frac{1 - e^{-\Phi(\eta,\xi)}}{e^{\sigma\sqrt{\eta+\xi^2}} - 1}.$$

Подставляя в этот интеграл выражение для $\Phi(\eta, \xi)$ и производя подстановку $\xi = \sqrt{\eta}x$, преобразуем этот интеграл:

$$B = \eta \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}\eta \left(\sqrt{1+x^2} - x^2 \ln \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right)}}{e^{\sigma\sqrt{\eta}\sqrt{1+x^2}} - 1}.$$

В этом интеграле сложности численного интегрирования возникают при $\sigma\sqrt{\eta} \rightarrow 0$. Разлагая экспоненту в ряд Тейлора при малых значениях η , получим приближенно:

$$B \approx \frac{1}{2}\eta^2 \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} \frac{\sqrt{1+x^2} - x^2 \ln \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}}{e^{\sigma\sqrt{\eta}\sqrt{1+x^2}} - 1}.$$

Численное интегрирование этих выражений уже не встречает затруднений. С учетом сделанных выше замечаний автором в пакете Maple была создана библиотека специальных процедур ускоренного вычисления функции $Df(\eta, \sigma)$ при любых значениях переменных. Графики функций $Df(\eta, \sigma)$, полученные с помощью этих процедур, показаны на Рис. 32.

VII.14. Результаты

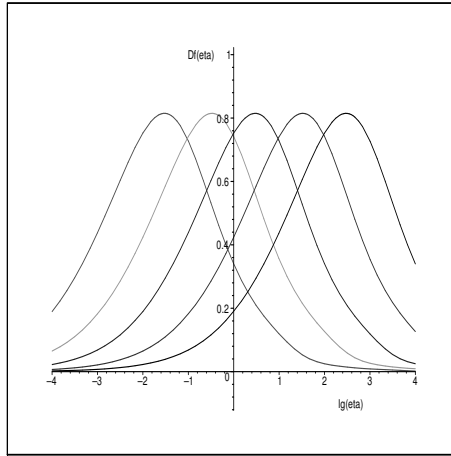


Рис.32.

Функции $Df(\eta, \sigma)$ в зависимости от параметра σ . По оси абсцисс отложен $\lg \eta$. Слева направо: $\sigma = 10, \sigma = 3, \sigma = 1, \sigma = 0,3, \sigma = 0,1$.

VII.14 Результаты

Прежде, чем перейти к изложению результатов, произведем удобную нормировку функции δ_S . Как отмечалось выше, в работах [164]-[166] была получена оценка удельной энтропии на один барион (VII.5):

$$\delta_S^0 = \frac{45\zeta(3)}{4\pi^4} \frac{N_X}{N} \Delta r. \quad (\text{VII.111})$$

Поэтому будем соотносить наши результаты к этой оценке, вводя относительную величину:

$$\Delta_S = \frac{\delta_S}{\delta_S^0} \quad (\text{VII.112})$$

- приведенную удельную энтропию. Проводя численное интегрирование в выражении (VII.110) с помощью указанных процедур в пакете Maple, получим семейство графиков функции $\Delta_S(\sigma)$. На Рис. 33 показаны рассчитанные графики зависимости $\Delta_S(\sigma)$ при различных значениях N_X - числа типов X - бозонов, которое является параметром модели взаимодействий.

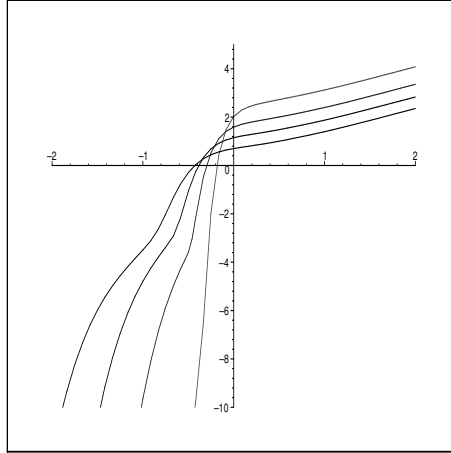


Рис. 33. Приведенная удельная энтропия на один барион, $\lg \Delta_S(\sigma, N_X)$, в зависимости от числа X -бозонов, N_X . По оси абсцисс отложены значения $\lg \sigma$. В правой части рисунка снизу вверх: $N_X = 1$; $N_X = 3$; $N_X = 10$; $N_X = 53$.

Переходя к анализу результатов, заметим, во-первых, что расчеты, проведенные на основе полной кинетической теории, показали существенную зависимость произведенного барионного заряда от количества типов X -бозонов. Отметим следующую общую тенденцию этой зависимости произведенного барионного заряда: при $\sigma \lesssim 0,4 \div 0,8$ с увеличением числа типов X -бозонов приведенная удельная энтропия увеличивается, а при $\sigma \gtrsim 0,4 \div 0,8$, наоборот, уменьшается, причем в области малых значений параметра σ зависимость приведенной энтропии от N_X особенно ощутимо. При этом надо помнить, что абсолютное значение удельной энтропии равно:

$$\delta_S = \Delta_S \delta_S^0 = \Delta_S \frac{45\zeta(3)}{4\pi^4} \frac{N_X}{N} \Delta r. \quad (\text{VII.113})$$

С другой стороны можно полагать, что фактор N_X/N (отношение числа типов X -бозонов к общему числу типов частиц) не очень сильно зависит от полевой модели взаимодействий, поэтому вывод о зависимости от числа типов X -бозонов приведенной энтропии можно с некоторой осторожностью перенести и на абсолютное значение удельной энтропии. Эти особенности зависимости удельной энтропии от числа типов X -бозонов представлены на Рис. 34.

VII.14. Результаты

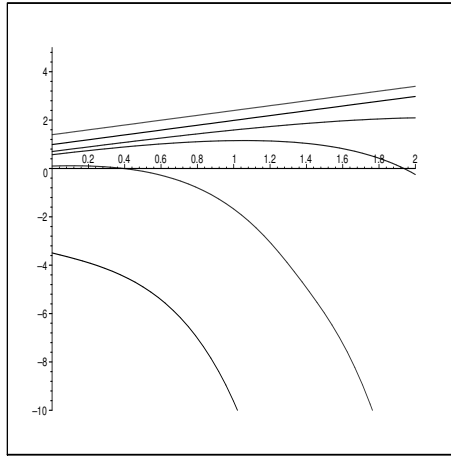


Рис.34. Зависимость приведенной удельной энтропии на один барион от числа типов X - бозонов. Снизу вверх: $\sigma = 0, 1$; $\sigma = 0, 4$; $\sigma = 0, 7$; $\sigma = 1$; $\sigma = 3$; $\sigma = 10$. По оси абсцисс отложены значения $\lg N_X$, по оси ординат - $\lg \Delta_S$.

Далее, значение (VII.111), полученное рядом авторов, в кинетической теории достигается при значениях параметра $\sigma = 0, 4 \div 0, 6$. Кроме того кинетическая модель космологического бариогенезиса обнаружила более тонкую структуру этого процесса, чем ту, которую дала гидродинамическая теория этого процесса, развитого ранее в цитированных работах [169]-[171]. Отличие наших результатов от результатов цитированных работ, особенно, в области малых значений параметра σ , вызвано существенным влиянием неравновесных процессов на окончательный результат в этой области. Нетрудно видеть, что функция распределения X -бозонов наиболее сильно отличается от равновесной именно в этой области. Этот факт, конечно, нельзя эффективно учесть в гидродинамической модели бариогенезиса.

Глава VIII

Релятивистская кинетическая модель неравновесной Вселенной

VIII.1 Стандартная точка зрения на установление ЛТР во Вселенной

Наиболее распространенная, установившаяся с самых первых работ по космологии, точка зрения на проблему локального термодинамического равновесия (ЛТР) в ранней Вселенной, ясно сформулирована в известной монографии Я.Б.Зельдовича и И.Д.Новикова [150], (1975):

«...Как уже отмечалось раньше, при высокой температуре все частицы находятся в термодинамическом равновесии. В самом деле, для существования термодинамического равновесия необходимо, чтобы процессы, устанавливающие равновесие, шли быстрее, чем расширение плазмы. Точнее говоря, необходимо, чтобы время процесса, устанавливающего равновесие (τ), было много меньше характерного времени изменения параметров плазмы (ρ , T и т.п.).

В изотропном решении $\rho = \frac{\alpha}{Gt^2}$, где α порядка единицы. Поэтому время, необходимое для изменения плотности от какого-либо значения ρ до $\left(\frac{1}{e}\right)\rho \approx 0,4\rho$, порядка $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{G\rho}}$.

VIII.1. Стандартная точка зрения на установление ЛТР во Вселенной

Таким образом, Δt порядка t . С другой стороны, время установления равновесия есть

$$\tau = \frac{1}{\sigma n v}, \quad (6.2.6)$$

где σ - сечение реакции, n - концентрация частиц, v - скорость их движения. При высоких температурах $v \approx c$. Величина n определяется по формуле (6.2.5): $n = n_1 t^{-3/2}$ ($n_1 = \text{const}$). Поэтому

$$\tau = \frac{t^{3/2}}{\sigma n_1 c}. \quad (6.2.7)SS$$

Для термодинамического равновесия необходимо:

$$\tau = \frac{t^{3/2}}{\sigma n_1 c} < \Delta t \approx t \quad (6.2.8)$$

или

$$\sigma > t^{1/2} n_1 c. \quad (6.2.9)$$

Поэтому термодинамическое равновесие имеет место при $t \rightarrow 0$, если только σ не уменьшается достаточно быстро с ростом энергии частиц. Можно надеяться, что условие (6.2.9) действительно выполняется. Так, например, не подлежит сомнению, что при высоких температурах число пар e^+ , e^- не отличается от равновесного. В самом деле, рассмотрим для примера момент, когда $T = 1$ Мэв, $t = 1$ сек, $n_{e^+} \approx n_{e^-} \approx 10^{31}$ см $^{-3}$. Сечение аннигиляции σ_1 порядка 10^{-24} см 2 , скорость частиц порядка скорости света; следовательно, время установления равновесия порядка

$$\tau = \frac{1}{\sigma_1 n c} = 10^{-17} \text{сек.}$$

Итак, τ ничтожно мало по сравнению с $t = 1$ сек. Полное равновесие $e^+ + e^- \rightleftharpoons 2\gamma$ обеспечено. ...»

Несколько позже, в 1980 году, возможно, под влиянием результатов калибровочной теории поля эта точка зрения выражена уже более осторожно [168]:

«Весьма важным является вопрос о термодинамическом равновесии в первичной плазме. Если в обычных случаях равновесие достигается по прошествии достаточно большого времени, то здесь ситуация прямо противоположна. При больших t скорость расширения Вселенной оказывается больше скорости реакций между частицами и равновесие не

успевают устанавливаться. Чем старше становится мир, тем более неравновесным он оказывается. Напротив, при малых временах t реакции между частицами из-за роста плотности становятся очень быстрыми и газ элементарных частиц, вообще говоря, оказывается равновесным. Поясним это подробнее. Скорость расширения Вселенной $\dot{a}/a \sim 1/t$. С другой стороны, скорость установления термодинамического равновесия $\dot{n}/n \sim nv\sigma$, где n - концентрация частиц, v - их скорость, а σ - сечение взаимодействия. Равновесие, нарушаемое расширением мира, успевает восстановиться, если:

$$nv\sigma t \geq 1. \quad (2.3)$$

При $T \gtrsim m$ плотность частиц n по порядку величины равна $n(t) \approx (tt_{Pl})^{-3/2}$, где $t_{Pl} = G^{1/2} \approx 10^{-43}$ с - планковское время; обратная величина $T_{Pl} = t_{Pl}^{-1} \approx 10^{19}$ Gev называется планковской температурой (или массой). Если взаимодействие частиц описывается единой калибровочной теорией, то $\sigma \sim \alpha^2 T^{-2}$; в случае если температура больше масс промежуточных бозонов, $m_X \approx 10^{15}$ Гэв. При этом константа связи α составляет по порядку величины 10^{-2} . Так как температура зависит от времени по закону $T \approx (tt_{Pl})^{-1/2}$, то условие равновесия (2.3) справедливо при $t > \alpha^{-4} t_{Pl}$. Однако при дальнейшем росте t (и падении температуры) ситуация снова становится равновесной.... Таким образом, при очень малых временах $t < t_{Pl}$ Вселенная, возможно, равновесна; далее при $t_{Pl} < t \lesssim \alpha^{-4} t_{Pl}$ имеется неравновесный период и при $\alpha^{-4} t_{Pl} > t > t_1$ ¹ снова восстанавливается равновесие... »

VIII.2 Поучительный пример

Рассмотрим подробно приведенный в книге [150] пример с реакцией аннигиляции. Только для оценки условия установления ЛТР мы используем не численные значения параметров, приведенных в этой книге, а их точные аналитические значения. Полное сечение реакции аннигиляции электронно - позитронной пары равно (см., например, [193])²:

$$\sigma = \pi r_0^2 \frac{\alpha^2}{4v_0 \varepsilon_0^2} \left\{ \frac{3 - v_0^4}{v_0} \ln \frac{1 + v_0}{1 - v_0} + 2(v_0^2 - 2) \right\}, \quad (VIII.1)$$

¹Здесь надо было бы поменять неравенства на обратные, но это - цитата. (Автор)

²Здесь и далее мы выбираем универсальную систему единиц: $G = \hbar = c = k = 1$, k - постоянная Больцмана.

VIII.2. Поучительный пример

где $\alpha = e^2/4\pi$ - постоянная тонкой структуры, ε_0 - энергия сталкивающихся частиц в системе центра масс, v_0 - их скорость в этой же системе. В частности, при ультрарелятивистских энергиях частиц $\varepsilon \gg m$; $v_0 \rightarrow 1$ формула (VIII.1) дает:

$$\sigma = \pi \frac{\alpha^2}{\varepsilon_0^2} \left(\ln \frac{2\varepsilon_0}{m} - 1 \right). \quad (\text{VIII.2})$$

Поскольку для ультрарелятивистских частиц $\varepsilon \sim t^{-1/2}$, то подставляя эту зависимость в (VIII.2), а затем в (6.2.8), получим вместо (6.2.9) противоположное неравенство:

$$t > t_1, \quad (\text{VIII.3})$$

- т.е. для реакции аннигиляции ЛТР отсутствует на ранних временах, а восстанавливается на поздних. Что же - неужели, численные оценки, приведенные в [150] неверны? Несомненно, эти оценки верны, но при их выводе молчаливо предполагалось, что в момент времени $t = 1\text{с}$:

1. число электронно-позитронных пар в плазме не отличалось от равновесного значения, определяемого температурой $T(t)$ на данный момент;
2. температура плазмы $T(t)$ на этот момент времени определялась по формулам для локально равновесной Вселенной, в которой плотность энергии пропорциональна $T^4(t)$.

Таким образом, в книге [150], как, впрочем, и во многих других, приведен интересный результат, который можно выразить следующей логической формулой:

Если в ранней Вселенной существовало ЛТР, то ЛТР существовало!

Очевидна логическая ошибка такого вывода. Но несмотря, на явную ошибочность, этот вывод: «на ранних стадиях Вселенной существовало ЛТР, которое нарушилось на поздних» - явился основой для построения идеологии космологической эволюции, которая с теми или иными вариациями во времени называется «стандартным космологическим сценарием».

VIII.3 Идеология стандартного космологического сценария и ее последствия

Рассмотрим основные черты стандартного космологического сценария (СКС), не затрагивая пока вопросы теории устойчивости Вселенной и связанные с ней проблемы образования крупномасштабной структуры.

VIII.3.1 Пространственная однородность и изотропность

Первым важным положением стандартного космологического сценария, как и подавляющего большинства космологических моделей, является предположение об однородности и изотропии трехмерного пространства, что приводит к метрике Фридмана:

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dl^2) = dt^2 - a^2(t)dl^2, \quad (\text{VIII.4})$$

где:

$$dl^2 = d\chi^2 + \rho^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (\text{VIII.5})$$

$$\rho(\chi) = \begin{cases} \text{sh}(\chi), & k = -1; \\ \chi, & k = 0; \\ \sin(\chi), & k = +1 \end{cases},$$

k - индекс кривизны трехмерного пространства: $k = 0$ для нулевой трехмерной кривизны, $k = 1$ - для постоянной положительной трехмерной кривизны, и $k = -1$ - для постоянной отрицательной трехмерной кривизны. Как известно, метрика Фридмана допускает группу вращений $O(3)$, генерируемую тремя векторами Киллинга ξ^i :

$$O(3) : \begin{cases} \xi_1^i = \delta_\varphi^i; \\ \xi_2^i = \delta_\theta^i \sin \varphi + \delta_\varphi^i \cos \varphi \text{ctg } \theta; \\ \xi_3^i = \delta_\theta^i \cos \varphi - \delta_\varphi^i \sin \varphi \text{ctg } \theta, \end{cases} \quad (\text{VIII.6})$$

лишь два из которых линейно независимы, таких что:

$$\frac{L}{\xi} g_{ij} = \xi_{(i,j)} = 0. \quad (\text{VIII.7})$$

VIII.3. Идеология стандартного космологического сценария

Кроме того, метрика (VIII.5) допускает пространственноподобное тензорное поле Киллинга ξ_{ij} :

$$\xi_{ij} = a^2(\eta)(g_{44}\delta_i^4\delta_j^4 - g_{ij}) \quad (\text{VIII.8})$$

такое что:

$$\xi_{(ij,k)} = 0, \quad (\text{VIII.9})$$

и времениподобный вектор конформного движения:

$$\xi = \delta_4^i, \quad (\text{VIII.10})$$

такой что:

$$L_{\xi} g_{ij} = \xi_{(i,j)} = 2\frac{a'}{a}g_{ij}. \quad (\text{VIII.11})$$

Как известно, тензор энергии-импульса наследует симметрию пространства времени вследствие цепочки соотношений:

$$L_{\xi} g_{ij} = 0 \Rightarrow L_{\xi} R_{ijkl} = 0 \Rightarrow$$

и уравнений Эйнштейна:

$$L_{\xi} R_{ij} = 0 \Rightarrow L_{\xi} T_{ij} = 0.$$

Поэтому тензор энергии-импульса Вселенной Фридмана принимает алгебраическую структуру метрики Фридмана, т.е., структуру ТЭИ идеальной изотропной жидкости:

$$T^{ij} = (\varepsilon + p)u^i u^j - pg^{ij}, \quad (\text{VIII.12})$$

где

$$u^i = 1/\sqrt{g_{44}}\delta_4^i \quad (\text{VIII.13})$$

- вектор скорости материи, $\varepsilon(\eta)$, $p(\eta)$ - ее плотность энергии и давление.

Уравнения Эйнштейна при этом сводятся к двум независимым уравнениям (см., например, [46]):

$$\frac{1}{a^2}(\dot{a}^2 + k) = \frac{8\pi}{3}\varepsilon; \quad (\text{VIII.14})$$

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p) = 0, \quad (\text{VIII.15})$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени t . Если нам известно уравнение состояния, т.е., зависимость вида:

$$p = p(\varepsilon), \quad (\text{VIII.16})$$

то уравнение (VIII.15) интегрируется в квадратурах:

$$a = a(\varepsilon). \quad (\text{VIII.17})$$

Подставляя решение (VIII.17) в уравнение (VIII.14), получим замкнутое дифференциальное уравнение первого порядка относительно $\varepsilon(\eta)$. В случае *баротропного* уравнения состояния:

$$p = \varrho\varepsilon \quad (\text{VIII.18})$$

уравнения Эйнштейна легко интегрируются для ранней Вселенной ($t \rightarrow 0$), как известно в этом случае поведение решений не зависит от индекса кривизны k (см., например, [46]) и не отличается от поведения решений для пространственно плоской Вселенной ($k = 0$):

$$a = a_1 t^{2/3(\varrho+1)}; \quad \varepsilon = \frac{1}{6\pi(\varrho+1)^2 t^2}, \quad \varrho+1 \neq 0 \quad (\text{VIII.19})$$

и при $\varrho = -1$ получаем инфляционное решение:

$$a = a_1 e^{\Lambda t}; \quad \varepsilon = \frac{3\Lambda^2}{8\pi} = \text{const.} \quad (\text{VIII.20})$$

Усилия многих теоретиков направлены на создание таких полевых моделей, которые обеспечивают нужное управление уравнением состояния: инфляцию, вторичное ускорение, темную материю и т.п. Этим исчерпывается динамика геометрии Вселенной Фридмана, но не исчерпывается динамика материи в этой Вселенной.

VIII.3.2 ЛТР и алгебра взаимодействий

Вторым важным положением СКС является гипотеза об изначальном термодинамическом равновесии Вселенной, которая стала определяющим фактором в формировании теории горячей Вселенной. Стартуя с современного состояния Вселенной и оборачивая вспять ее историю с учетом решения Фридмана, описывающего однородное космологическое расширение, а также с учетом закона сохранения числа частиц и энергии, мы приходим к стадии рекомбинации водорода, раньше которой

VIII.3. Идеология стандартного космологического сценария

фотоны находились в состоянии ЛТР с электронами и ионами³. Таким образом, на ранних стадиях космологического расширения действуют законы равновесной термодинамики, которые полностью определяются локально-равновесными функциями распределения частиц.

Итак, пусть в плазме протекают реакции вида:

$$\sum_A \nu_A a_A \rightleftharpoons \sum_B \nu'_B a'_B \quad (\text{VIII.21})$$

где a_A, a'_B - сорт частиц (имя), ν_A, ν'_B - их числа в этой реакции. Тогда локально-равновесные функции распределения имеют вид, (см., например, [65]):

$$f_a^0(x, p) = \left[\exp \left(\frac{-\mu_a + (u, p)}{T} \right) \pm 1 \right]^{-1} \quad (\text{VIII.22})$$

где $T(x)$ - температура а $u_i(x)$ - единичный времениподобный вектор макроскопической скорости (u, u) = 1, одинаковые для всех сортов частиц a ; $\mu_a(x)$ - химические потенциалы, которые определяются серией условий химического равновесия:

$$\sum_A \mu_A \nu_A = \sum_B \mu'_B \nu'_B, \quad (\text{VIII.23})$$

представляющих систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно μ_a . Если в k -ой реакции вида (VIII.21) сохраняются некоторые векторные токи, порождаемые соответствующими зарядами q_A и q'_B , то для таких реакций выполняется закон сохранения заряда:

$$\sum_A q_A \nu_A^K - \sum_B q'_B \nu'_B^K = 0. \quad (\text{VIII.24})$$

Алгебра взаимодействий элементарных частиц, т.е., фактически, схемы разрешенных в той или иной теоретико-полевой модели взаимодействий частиц реакций частиц вида (VIII.21), приводит к законам сохранения некоторых обобщенных токов. Действительно, алгебра взаимодействий элементарных частиц определяется целыми числами ν_n^K , равных числу частиц сорта n , участвующих в K -той реакции, т.е., матрицей $\|\nu_n^K\|$.

³В том смысле, о котором мы говорили выше.

Пусть N - число типов фундаментальных частиц, включая и античастицы, в конкретной теоретико-полевой модели. Перепишем реакции (VIII.21) в единой форме:

$$\sum_{A=1}^N \nu_A^K a_A = 0; \quad (K = 1, 2, \dots), \quad (\text{VIII.25})$$

где ν_A^K теперь уже могут принимать любые целочисленные значения: положительные, отрицательные и нулевые. В любой замкнутой полевой теории должно быть:

$$\text{rank}|\nu_A^K| < N, \quad (\text{VIII.26})$$

в противном случае найдется такая частица, которая не сможет быть получена из других ни в одной реакции (VIII.25), т.е., не будет взаимодействовать с другими, что сразу выводит ее за рамки данной полевой теории, делая последнюю незамкнутой. Вследствие (VIII.26) всегда можно выбрать N чисел G_A , одновременно не равных нулю, таких что:

$$\sum_{A=1}^N \nu_A^K G_A = 0; \quad (K = 1, 2, \dots). \quad (\text{VIII.27})$$

Пусть для определенности

$$\text{rank}|\nu_A^K| = r < N.$$

Тогда существует $N - r$ линейно независимых решений (VIII.27), которые мы обозначим символами G_A^s ($s = \overline{1, N}$) и называть обобщенными зарядами. Поскольку ν_A^K - целые числа, то решение уравнений (VIII.27) всегда представимо в рациональных числах. Поэтому, умножая уравнения (VIII.27) на подходящие множители, их решения всегда можно выразить в целых числах, т.е., обобщенным зарядам можно придать целочисленные значения. Таким образом, в любой замкнутой полевой теории мы будем иметь и соответствующие законы сохранения обобщенных макроскопических токов [49]:

$$J_s^i = \sum_{A=1}^N G_A^s \int_{P(x)} p^i f_A dP_a. \quad (\text{VIII.28})$$

VIII.3. Идеология стандартного космологического сценария

Поскольку далее условия химического равновесия (VIII.23) принимают вид, формально ничем не отличающийся от уравнений (VIII.27):

$$\sum_{A=1}^N \nu_A^K \mu_A = 0; \quad (K = 1, 2, \dots), \quad (\text{VIII.29})$$

то и решения этих уравнений с точностью до множителя не отличается от решения уравнений (VIII.27):

$$\mu_A^s = \sigma G_A^s, \quad (\text{VIII.30})$$

где σ - общий множитель для всех частиц. Отсюда, например, сразу следует, что если некоторые обобщенные токи сохраняются (например, электрический ток), то химические потенциалы безмассовых квантов такого поля равны нулю, а химические потенциалы соответствующих заряженных частиц и античастиц равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Далее, в однородной и изотропной Вселенной все термодинамические функции должны зависеть лишь от времени, а вектор макроскопической скорости должен быть равным (VIII.13). Тогда:

$$f_a^0(t, p) = \left[\exp \left(-\lambda_a(t) + \frac{E_a(p)}{T(t)} \right) \pm 1 \right]^{-1}, \quad (\text{VIII.31})$$

где:

$$E_a(p) = \sqrt{m_a^2 + p^2}, \quad (\text{VIII.32})$$

- энергия частиц ($p^2 = -g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta$ - квадрат трехмерного импульса),

$$\lambda_a(t) = \frac{\mu_a(t)}{T(t)}, \quad (\text{VIII.33})$$

- приведенные химические потенциалы, которые также удовлетворяют системе уравнений химического равновесия

$$\sum_{A=1}^N \nu_A^K \lambda_A = 0; \quad (K = 1, 2, \dots). \quad (\text{VIII.34})$$

Вследствие же однородности Вселенной и ее изотропии законы сохранения обобщенных токов (VIII.28) в метрике (VIII.4) вследствие (VIII.13) принимают вид:

$$a^3(t) \sum_A G_A \Delta n_A(t) = \text{const}, \quad (\text{VIII.35})$$

где Δn_A - разность плотностей частиц и античастиц сорта "A" с обобщенным зарядом G_A .

VIII.3.3 Высокая энтропия

Третьим важным положением СКС является положение о высокой величине удельной энтропии, приходящейся на один барион в современной Вселенной. Точнее говоря, речь идет об отношении количества фотонов к барионам. Удобно ввести обратную величину:

$$\delta_B = \frac{n_B}{n_\gamma} \approx 10^{-10} \div 10^{-9} \ll 1, \quad (\text{VIII.36})$$

где n_B , n_γ - плотности числа барионов и фотонов в современной Вселенной, соответственно.

Равновесные плотности числа частиц n , энтропии s , и энергии ε , для газа безмассовых частиц равны (см., например, [59]):

$$n = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{\rho T^3}{\pi^2} g_n \zeta(3); \quad (\text{VIII.37})$$

$$s = \frac{d}{dT} \frac{\rho}{3\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{2\pi^2 \rho T^3}{45} g_e; \quad (\text{VIII.38})$$

$$\varepsilon = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{\rho \pi^2 T^4}{30} g_e, \quad (\text{VIII.39})$$

где ρ - число независимых поляризаций (спина) частицы ($\rho = 2$ - для фотонов и безмассовых нейтрино), g_a - статистический фактор ($g_a = 1$ - для бозонов, для фермионов: $g_n = 3/4$, $g_e = 7/8$), знак «+» соответствует фермионам, «-» - бозонам, $\zeta(x)$ - ζ - функция Римана.

Суммарная плотность энергии безмассовых частиц равна:

$$\varepsilon = \sum_a \varepsilon_a = \mathcal{N} \frac{\pi^2 T^4}{15}, \quad (\text{VIII.40})$$

где

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2} \left[\sum_B (2S + 1) + \frac{7}{8} \sum_F (2S + 1) \right] \quad (\text{VIII.41})$$

VIII.3. Идеология стандартного космологического сценария

- эффективное число типов частиц (S - спин частицы)⁴; суммирование идет по бозонам (B) и фермионам (F), соответственно. Тогда суммарная плотность энтропии равна:

$$s = \sum_a s_a^0 = \mathcal{N} \frac{4\pi^2 T^3}{45} \quad (\text{VIII.42})$$

Рассмотрим теперь ультрарелятивистские частицы (барионы, лептоны), находящихся в тепловом равновесии, масса покоя которых отлична от нуля. Поскольку химические потенциалы частиц и античастиц равны по величине и противоположны по знаку, получим выражение для разницы массивных барионов (лептонов) какого-то типа:

$$\Delta n^0 = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \left[\frac{1}{e^{-\lambda + E(p)/T} + 1} - \frac{1}{e^{\lambda + E(p)/T} + 1} \right] p^2 dp. \quad (\text{VIII.43})$$

Полагая:

$$\lambda_A = \frac{\mu_A}{T} \ll 1 \quad (\text{VIII.44})$$

и переходя к пределу $m \rightarrow 0$ в интегралах типа (VIII.43), получим, разлагая эти интегралы в ряд по малости λ :

$$\Delta n^0 \approx \lambda \frac{\rho}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{p/T}}{(e^{p/T} + 1)^2} dp = \lambda \frac{T^3}{3}, \quad (\text{VIII.45})$$

где для определенности мы положили $\rho = 2$ ($S=1/2$).

Таким образом, используя формулы (VIII.37) и (VIII.45), получим выражение для равновесного отношения избытка барионов к числу фотонов:

$$\delta_B = \frac{\Delta n^0}{n_\gamma} = \lambda \frac{\pi^2}{6\zeta(3)} \quad (\approx 1, 369\lambda), \quad (\text{VIII.46})$$

- равновесный относительный избыток барионов, δ_B , практически совпадает с их приведенным химическим потенциалом:

$$\delta_B \sim \lambda. \quad (\text{VIII.47})$$

⁴В полевых моделях взаимодействий типа SU(5) $\mathcal{N} \sim 100 \div 200$.

Поскольку согласно (VIII.37) и (VIII.38) равновесная плотность энтропии ультрарелятивистских частиц пропорциональна равновесной плотности числа частиц - $\frac{0}{s} \sim \frac{0}{n}$, в стандартном космологическом сценарии делается вывод о малости химических потенциалов частиц на ультрарелятивистском этапе эволюции вселенной, т.е., об удивительно высокой степени зарядовой симметрии вселенной в начале эволюции:

$$\lambda \sim 10^{-10} \div 10^{-9} \ll 1. \quad (\text{VIII.48})$$

VIII.3.4 Далеко идущие последствия

Отсюда сразу напрашивается мысль, а не являлась ли вселенная с самого начала полностью зарядово симметричной, а небольшой избыток барионов ($\sim 10^{-10}$) возник вследствие каких-либо механизмов спонтанного нарушения симметрии, которые могли иметь место при сверхвысоких энергиях взаимодействующих частиц, далеко превышающих принципиальные экспериментальные возможности человечества. Такая идея и была высказана Сахаровым [13](1967) и затем как теория бариогенезиса была развита на основе SU(5)-модели в цитированных выше работах. Теория бариогенезиса наложила достаточно строгие условия на минимально возможные значения масс сверхмассивных X-бозонов:

$$m_X \geq 10^{16} \text{Gev}. \quad (\text{VIII.49})$$

Позже в более строгих расчетах автора этот предел был снижен на полтора порядка⁵:

$$m_X \geq 5 \cdot 10^{14} \text{Gev}, \quad (\text{VIII.50})$$

однако, это не меняет сути дела - стандартный космологический сценарий устанавливает ограничения на параметры той или иной полевой теории фундаментальных взаимодействий. Можно напомнить целый ряд таких «космологических» ограничений на массы элементарных частиц (нейтрино, адронов, гравитино и т.п.) и прочие константы фундаментальных взаимодействий, полученных на основе стандартного космологического сценария (см., например, цитированную выше книгу [150], являющейся своеобразной энциклопедией таких ограничений) и вызывавших прежде энтузиазм приверженцев горячей модели. В свою очередь, сочетание концепций термодинамического равновесия и сингулярного начального состояния вселенной с классическими результатами

⁵См. предыдущий раздел.

VIII.3. Идеология стандартного космологического сценария

Хоукинга о рождении частиц сингулярностями привело к внешне заманчивой идее вакуумного начала вселенной, тем самым сделав начальную фазу вселенной совершенно жесткой и безальтернативной.

Заметим, что такая тенденция - получение “космологических” ограничений на параметры фундаментальных взаимодействий на основе выводов СКС является чрезвычайно опасной для развития теории фундаментальных взаимодействий при высоких энергиях - теории фундаментальных взаимодействий оказываются заложницами феноменологической равновесной модели вселенной! Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 35 в виде порочного круга. Этот порочный круг и привел современную космологию к идеологическому кризису, когда пропала надежда на Хиггсовы бозоны и появился ряд новых экспериментальных данных, касающихся структуры Вселенной и однозначно интерпретированных в рамках СКС, как призыв к пересмотру фундаментальных принципов полевых теорий. Не проще ли пересмотреть обоснованность принципов самого СКС?

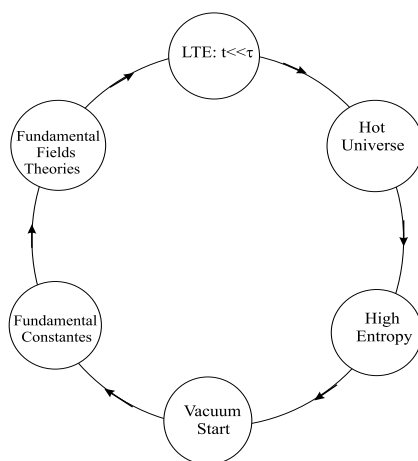


Рис. 35. Порочный круг космологии

VIII.4 Более детальный анализ ЛТР

VIII.4.1 Влияние сингулярности Вселенной на установление ЛТР

Первое отличие, которое бросается в глаза при сравнении космологического процесса установления ЛТР с обычным процессом - это наличие начала общей истории частиц и их взаимодействий в космологии по сравнению с обычной ситуацией, вызванное наличием космологической сингулярности в момент времени $t = 0$. Во-первых, вследствие принципа причинности ЛТР не может быть установлено на временах порядка и меньше планковских. Действительно, в сфере, образованной световым горизонтом какой-либо одной частицы, укладывается:

$$N_t = \frac{4\pi}{3} t^3 n(t) \quad (\text{VIII.51})$$

других частиц, где $n(t)$ - их числовая плотность. Если $N_t < 1$, взаимодействие между частицами не может иметь место, и ЛТР не установится. В горячей модели согласно (VIII.19) и (VIII.40) температура ультрарелятивистской плазмы изменяется по закону :

$$T_0(t) = \left(\frac{45}{32\pi^3 \mathcal{N}} \right)^{\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{VIII.52})$$

поэтому при использовании равновесных концентраций (VIII.37) соотношение (VIII.51) принимает в случае стандартной модели SU(5) вид:

$$N_t \sim 0,33t^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{VIII.53})$$

Таким образом, даже при использовании равновесных концентраций горячей модели ЛТР не может быть установлено при $t \lesssim t_{pl}$. Но тогда начальные концентрации вовсе не обязаны быть равновесными, - они могут оказаться значительно ниже последних. Но в этом случае установление ЛТР отодвигается на более поздние, чем планковские, времена [178, 179].

Во-вторых, более детальный динамический анализ корреляционных функций частиц также обнаруживает некоторые принципиальные отличия космологической ситуации от обычной. В качестве точно решаемой модельной задачи можно рассмотреть распад тяжелой электронейтральной покоящейся массивной частицы на две ультрарелятивистские заряженные античастицы (Рис. 36).

VIII.4. Более детальный анализ ЛТР

Строгое решение этой задачи приведено в статье А.В.Смирнова [180] и сводится к замене ядра W_{ij} релятивистского интеграла кулоновских столкновений Беляева-Будкера [33] на ядро \bar{W}_{ij} по правилу:

$$\bar{W}_{ij} = W_{ij}\Theta(t),$$

где:

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \lambda_{pl}; \\ \frac{1}{\Lambda} \ln \frac{t}{\lambda_{pl}}, & \lambda_{pl} < t < \lambda_D; \\ 1, & t > \lambda_D, \end{cases} \quad (\text{VIII.54})$$

λ_D - радиус Дебая-Хюккеля, Λ - кулоновский логарифм. Это решение строго показывает, что корреляция частиц до планковских времен отсутствует и лишь потом начинает логарифмически медленно расти до классических времен релаксации.

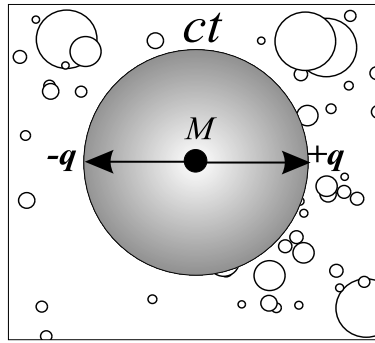


Рис. 36: Световой горизонт двух ультрарелятивистских зарядов q и $-q$, возникших при распаде электронейтральной массивной частицы M в момент времени $t = 0$.

VIII.4.2 Условия ЛТР

Перечисленные в разделе VIII.3 принципы СКС базируются на условии выполнения ЛТР в ранней Вселенной, - именно это условие и является

главным догматом СКС. Поэтому в первую очередь как раз и необходимо проверить выполнение этого условия в ранней Вселенной, используя современные представления о взаимодействии элементарных частиц в области сверхвысоких энергий.

Так как темп расширения Вселенной есть \dot{a}/a , то более строгое, чем (6.2.8) условие установления ЛТР имеет вид:

$$\tau_{eff} \frac{\dot{a}}{a} < 1. \quad (\text{VIII.55})$$

Если числа частиц, участвующих в данной реакции сохраняются:

$$n(t) = \frac{n_1}{a^3(t)}, \quad (\text{VIII.56})$$

где для определенности здесь и далее полагаем:

$$a(1) = 1 \quad (\text{VIII.57})$$

($t = 1$ соответствует планковскому моменту времени), $n_1 = n(1)$ - плотность числа частиц на этот момент. Согласно (VIII.4) выбор такой нормировки масштабного фактора соответствует выбору планковских единиц длины на планковский момент времени.

При этой нормировке в случае баротропного уравнения состояния (VIII.18) получаем из (VIII.19):

$$a = t^{2/3(\rho+1)}; \quad \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2(\rho+1)}{3t}, \quad (\rho \neq 1), \quad (\text{VIII.58})$$

и из (VIII.20):

$$a = e^{\Lambda(t-1)}; \quad \frac{\dot{a}}{a} = \Lambda, \quad (\rho = -1). \quad (\text{VIII.59})$$

Для более строгого анализа условия ЛТР необходимо учесть зависимость сечения взаимодействия σ_{eff} ультрарелятивистских частиц от их кинетической энергии E_{cm} в системе центра масс. Поскольку эта энергия является функцией космологического времени, то эффективное сечение рассеяния, вообще говоря, тоже является функцией времени: $\sigma_{eff} = \sigma_{eff}(t)$. Поэтому условие ЛТР (VIII.55) принимает вид:

$$\frac{\dot{a}a^2}{n_1\sigma_{eff}(1)} \frac{\sigma_{eff}(1)}{\sigma_{eff}(t)} < 1. \quad (\text{VIII.60})$$

Для выяснения зависимости от времени эффективного сечения взаимодействия необходимо более подробно рассмотреть кинематику четырехчастичных реакций.

VIII.4.3 Кинематика четырехчастичных реакций и полное сечение рассеяния

Четырехчастичные реакции типа:

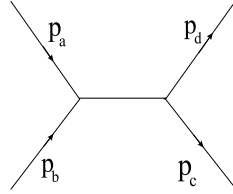


Рис. 37: Диаграмма четырехчастичной реакции

$$a + b \rightarrow c + d \quad (\text{VIII.61})$$

полностью описываются двумя кинематическими инвариантами, s и t , которые имеют следующий смысл: \sqrt{s} - энергия сталкивающихся частиц в центре масс (СЦМ):

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2, \quad (\text{VIII.62})$$

а t -релятивистский квадрат переданного импульса:⁶

$$t = (p_c - p_a)^2 = (p_b - p_d)^2, \quad (\text{VIII.63})$$

где квадраты импульсов понимаются как скалярные четырехмерные квадраты:

$$p_a^2 = (p_a, p_a) = (p^4)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = m_a^2,$$

и т.д. Так, например:

$$(p_a + p_b)^2 = p_a^2 + 2(p_a p_b) + p_b^2 = m_a^2 + 2(p_a, p_b) + m_b^2.$$

⁶Автор надеется, что читателя не смутит совпадение обозначений: t - время в метрике Фридмана, s - ее интервал, одновременно t, s - кинематические инварианты. Кроме того с помощью s мы обозначаем и плотность энтропии. Эти обозначения являются стандартными в теории элементарных частиц и мы не сочли необходимым их менять.

При этом инвариантные амплитуды рассеяния $F(s, t)$, определяемые как результат усреднения инвариантной амплитуды рассеяния по состояниям частиц, c и d , оказываются зависящими лишь от этих двух инвариантов (см., например, [142]):

$$\sum |M_{FJ}|^2 = \frac{|F(s, t)|^2}{(2S_c + 1)(2S_d + 1)}, \quad (\text{VIII.64})$$

где S_i - спины. С помощью инвариантной амплитуды $F(s, t)$ определяется полное сечение реакции (VIII.61) (см. [142]):

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{16\pi\lambda^2(s, m_a^2, m_b^2)} \int_{t_{min}}^0 dt |F(s, t)|^2, \quad (\text{VIII.65})$$

где λ - функция треугольника:

$$\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc;$$

$$t_{min} = -\frac{\lambda^2}{s}.$$

В ультрарелятивистском пределе:

$$\frac{p_i}{m_i} \rightarrow \infty \quad (\text{VIII.66})$$

имеем:

$$s \rightarrow 2(p_a, p_b); \quad t \rightarrow -2(p_a, p_b), \quad (\text{VIII.67})$$

$$\frac{s}{m_i^2} \rightarrow \infty; \quad \lambda \rightarrow s^2, \quad (\text{VIII.68})$$

и формула (VIII.65) значительно упрощается введением безразмерной переменной:

$$x = -\frac{t}{s} : \quad (\text{VIII.69})$$

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx |F(s, x)|^2. \quad (\text{VIII.70})$$

VIII.4. Более детальный анализ ЛТР

Таким образом, в ультрарелятивистском пределе полное сечение рассеяния зависит лишь от кинематического инварианта s - квадрата энергии сталкивающихся частиц в системе центра масс:

$$\sigma_{tot} = \sigma_{tot}(s).$$

Именно эта зависимость и будет управлять установлением локального термодинамического равновесия в ранней вселенной.

VIII.4.4 Влияние зависимости сечения взаимодействия от кинематического инварианта s на установление ЛТР

Полагая в дальнейшем эффективное сечение взаимодействия равным полному, исследуем зависимость установления ЛТР от вида функции $\sigma_{tot}(s)$. Предположим для ультрарелятивистских частиц степенную зависимость полного сечения рассеяния от кинематического инварианта (см. [179, 181]):

$$\sigma_{tot}(s) \sim s^\alpha, \quad \alpha = \text{Const.} \quad (\text{VIII.71})$$

Поскольку в изотропной расширяющейся вселенной интегралом движения является модуль *конформного импульса* частицы \mathbb{P} :

$$a(t)p = \mathbb{P} = \text{Const}, \quad (\text{VIII.72})$$

то в ультрарелятивистском пределе (VIII.66) согласно (VIII.67) и (VIII.72) асимптотическое поведение кинематического инварианта описывается выражением:

$$\frac{p}{m} \rightarrow \infty \Rightarrow s \rightarrow \frac{s_1}{a^2(t)}, \quad (\text{VIII.73})$$

где $s_1 = s(1)$. Таким образом, согласно (VIII.71) получим:

$$\sigma_{tot}(t) = \sigma_{tot}(1)a^{-2\alpha}(t). \quad (\text{VIII.74})$$

Подставляя эту зависимость в условие ЛТР (VIII.60), получим явную зависимость условия ЛТР от масштабного фактора:

$$\dot{a}a^{2(1-\alpha)} < n_1\sigma_{tot}(1). \quad (\text{VIII.75})$$

Таким образом, используя решения уравнений Эйнштейна для ранней вселенной в случае баротропного уравнения состояния ($\rho \neq -1$), (VIII.58), получим из (VIII.75) условие ЛТР в ранней вселенной:

$$t^{[4\alpha+3(1-\rho)]/(1+\rho)} < n_1 \sigma_{tot}(1), \quad (\text{VIII.76})$$

откуда следует, что при выполнении условия:

$$4\alpha + 3(1 - \rho) > 0, \quad (\text{VIII.77})$$

ЛТР поддерживается на ранних стадиях расширения, а на поздних нарушается, т.е., при:

$$\alpha > -\frac{3}{4}(1 - \rho) \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad (\text{VIII.78})$$

а при выполнении обратного к (VIII.78) условия ЛТР нарушается на ранних стадиях и восстанавливается на поздних. В случае ультрарелятивистского уравнения состояния $\rho = 1/3$ получим из (VIII.78) условие существования ЛТР на ранних стадиях [181]:

$$\alpha > -\frac{1}{2} \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad (p = \frac{1}{3}\varepsilon). \quad (\text{VIII.79})$$

В случае предельно жесткого уравнения состояния $\rho = 1$ условие поддержания ЛТР на ранних стадиях и нарушения на поздних эквивалентно условию:

$$\alpha > 0 \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad (p = \varepsilon). \quad (\text{VIII.80})$$

В частности, при $\alpha = 0$ (сечение взаимодействия постоянно) в случае предельно жесткого уравнения состояния время вообще выпадает из условия ЛТР [181], - на этой стадии расширения во вселенной либо всегда поддерживается ЛТР, либо его вообще нет. В случае инфляции $\rho = -1$ условие ЛТР (VIII.76) необходимо заменить следующим:

$$e^{\Lambda(3+2\alpha)(t-1)} < n_1 \sigma_{tot}(1), \quad (\text{VIII.81})$$

поэтому при:

$$\alpha > -\frac{3}{2} \quad (\text{VIII.82})$$

ЛТР поддерживается на ранних стадиях и нарушается на поздних. Таким образом, зависимость полного сечения взаимодействия частиц от кинематического инварианта *sv* в области сверхвысоких значений энергий частиц играет решающую роль при выяснении вопроса о существовании ЛТР в ранней вселенной.

VIII.5 Скейлинг взаимодействия релятивистских частиц

VIII.5.1 Ограничения на асимптотическое поведение сечения рассеяния, следующие из аксиоматической теории S-матрицы

Возникает вопрос, а какова зависимость $\sigma_{tot}(s)$ на самом деле? Для исследования кинетики процессов в ранней Вселенной необходимо знать асимптотическое поведение инвариантных амплитуд $F(s, t)$ в пределе (VIII.66). Современные экспериментальные возможности ограничены значениями \sqrt{s} порядка сотен Гэв. Было бы неосторожным опираться на ту или иную полевую модель взаимодействия для прогнозирования асимптотического поведения сечения рассеяния в области сверхвысоких энергий. Более разумно в современных условиях опираться на выводы аксиоматической теории S-матрицы, полученные на основе фундаментальных законов унитарности, причинности, масштабной инвариантности и т.п. Унитарность S-матрицы приводит к известному асимптотическому соотношению (см., например, [182]):

$$\left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_{s \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{s^2} \quad (\text{VIII.83})$$

при значениях s выше унитарного предела, т.е., при условии (VIII.66), если под m_i понимать массы всех промежуточных частиц. Но тогда из (VIII.70) следует:

$$F(s, 1)|_{s \rightarrow \infty} \sim \text{Const.} \quad (\text{VIII.84})$$

На основе аксиоматической теории S-матрицы в 60-е годы XX-го столетия были получены строгие ограничения на асимптотическое поведение полных сечений и инвариантных амплитуд рассеяния:

$$\frac{C_1}{s^2 \ln s} < \sigma_{tot}(s) < C_2 \ln^2 s, \quad (\text{VIII.85})$$

где C_1, C_2 - неизвестные константы. Верхний предел (VIII.85) был установлен в работах [183]-[185], нижний - в [186], [187] (см. также обзор в книге [188]). Отметим также ограничения на инвариантные амплитуды рассеяния (см., например, [188]):

$$|F(s, t)| \leq |F(s, 0)|; \quad (\text{VIII.86})$$

$$C'_1 < |F(s, 0)| < C'_2 s \ln^2 s. \quad (\text{VIII.87})$$

Поэтому инвариантные амплитуды рассеяния в пределе (VIII.66) должны быть функциями лишь переменной $x = -t/s$, т.е.:

$$|F(s, t)| = |F(x)|, \quad (s \rightarrow \infty). \quad (\text{VIII.88})$$

Но тогда вследствие (VIII.70)

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx |F(x)|^2 = \frac{\text{Const}}{s}, \quad (\text{VIII.89})$$

полное сечение ведет себя также, как и сечение электромагнитных взаимодействий, т.е., при сверхвысоких энергиях восстанавливается скейлинг.

Скейлинговая асимптотика сечения (VIII.89) лежит строго посредине между возможными крайними асимптотиками полного сечения рассеяния (VIII.85). Кроме того при выполнении (VIII.89) автоматически выполняются и соотношения, полученные на основе аксиоматической теории S -матрицы (VIII.83) и (VIII.84).

Далее, как мы отмечали выше, для чисто электромагнитных взаимодействий вследствие их масштабной инвариантности скейлинг всегда существует. В качестве примера приведем сечение аннигиляции ультрарелятивистских электронно-позитронной пары (VIII.2), которое может быть переписано с помощью кинематического инварианта s в явно скейлинговой форме:

$$\sigma_{ee \rightarrow \gamma\gamma} = \pi \frac{\alpha^2}{s} \left(\ln \frac{2s}{m} - 1 \right). \quad (\text{VIII.90})$$

Для лептон-адронного взаимодействия предположение о существовании скейлинга было выдвинуто в работах [189],[190]. В частности, для полного сечения реакции

$$e + e^+ \rightarrow \text{адроны}$$

было получено выражение:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sum e_i^2,$$

VIII.5. Скейлинг взаимодействия релятивистских частиц

где α - постоянная тонкой структуры, e_i - заряды фундаментальных фермионных полей. Данные, полученные на Стэнфордском накопителе, подтвердили наличие скейлинга для этих взаимодействий. Для гравитационных взаимодействий скейлинг, по-видимому, также должен восстанавливаться при сверхвысоких энергиях вследствие масштабной инвариантности гравитационных взаимодействий в ВКБ-приближении [191]. Можно привести большое количество аналогичных примеров, являющихся надежно установленными фактами.

VIII.5.2 Асимптотическая конформная инвариантность релятивистской кинетической теории

Возникает вопрос, а какие выводы об установлении термодинамического равновесия в ранней вселенной дает строгая релятивистская кинетическая теория? Фактически на этот вопрос дан ответ в разделе VI.1 (см. [51]):

В ультрарелятивистском пределе при условии конформной инвариантности негравитационных макроскопических полевых уравнений и масштабной инвариантности матричных элементов взаимодействия кинетические уравнения конформно инвариантны.

Воспользовавшись конформной инвариантностью кинетических уравнений и тем, что, во-первых, вселенная Фрийдмана (VIII.4) при $k = 0$ является конформно-плоской с конформным множителем $\sigma = a(\eta)$, и, во-вторых, что на ранних стадиях космологического расширения, когда $\eta \rightarrow 0$, метрика Фрийдмана асимптотически стремится к пространственно-плоской независимо от значения индекса кривизны трехмерного пространства, k . Поэтому согласно вышеприведенной теореме решение кинетических уравнений в метрике (VIII.4) будут совпадать с решениями соответствующих кинетических уравнений в плоском пространстве, $f_a(\eta, \bar{P}_a)$, причем в соответствующих кинетических уравнениях необходимо произвести также замену кинематического инварианта s на \bar{s} по правилу:

$$\bar{s} = a^2(\eta)s,$$

т.е., $\bar{\sigma}_{tot} = \text{Const}$. Но тогда и $\bar{\tau}_{eff} = \text{Const}$, и мы приходим к известному результату стандартной кинетической теории: ЛТР восстанавливается

в плазме при

$$\eta \geq \bar{\tau}_{eff}.$$

Таким образом, строгие выводы релятивистской кинетической теории относительно восстановления ЛТР в ультрарелятивистской плазме находятся в полном соответствии с качественным выводом, приведенном в предыдущем разделе.

VIII.5.3 Универсальное асимптотическое сечение рассеяния

Будем в дальнейшем предполагать наличие скейлинга при энергиях выше унитарного предела $s \rightarrow \infty$. Возникает вопрос о значении константы в формуле (VIII.89) а также о логарифмическом уточнении этой константы. Это значение можно оценить из следующих простых соображений. Во-первых, пусть m - масса покоя сталкивающихся частиц. Поскольку \sqrt{s} - энергия взаимодействующих частиц в системе центра масс, то минимальное значение \sqrt{s} для четырехчастичных реакций с частицами массы m равно:

$$\sqrt{s_{\min}} = 2m \Rightarrow s_{\min} = 4m^2. \quad (\text{VIII.91})$$

Далее, если верна идея объединения всех взаимодействий на планковских масштабах энергии $E_{pl} = m_{pl} = 1$, то при $s \sim 1$ все четырехчастичные взаимодействия должны описываться единым сечением рассеяния, образованным из трех фундаментальных констант G, \hbar, c , т.е., в выбранной нами системе единиц должно быть:

$$\sigma|_{s \sim 1} = 2\pi l_{pl}^2 \Rightarrow \sigma(4) = \frac{8\pi}{s_{pl}} \quad (= 2\pi), \quad (\text{VIII.92})$$

где:

$$s_{pl} = 4m_{pl}^2 = 4 \quad (\text{VIII.93})$$

- планковское значение кинематического инварианта s , соответствующее двум сталкивающимся планкеонам массой m_{pl} и комптоновского масштаба l_{pl} :

$$m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \quad (= 1), \quad l_{pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \quad (= 1). \quad (\text{VIII.94})$$

VIII.5. Скейлинг взаимодействия релятивистских частиц

Однако для того, чтобы на планковских масштабах энергии сечение рассеяния падало до такой величины, стартуя со значений порядка $\sigma_T = 8\pi\alpha^2/3m_e^2$ (m_e - масса электрона, σ_T - томпсоновское сечение рассеяния) для электромагнитных взаимодействий, т.е., при $s \sim 4m_e^2$, оно должно падать обратно пропорционально s , т.е., опять-таки по закону скейлинга. Заметим, что этот факт является еще одним независимым доводом в пользу существования скейлинга в области высоких энергий. Логарифмически уточняя эту зависимость, введем *универсальное асимптотическое сечение рассеяния* (АСР), впервые предложенного в работах [178], [179]:⁷

$$\sigma_0(s) = \frac{8\pi}{s\Lambda(s)}, \quad (\text{VIII.95})$$

где $\Lambda(s)$ - логарифмический фактор:

$$\Lambda(s) = \ln^2 \left(1 + \frac{s_0}{s} \right) > 0, \quad (\text{VIII.96})$$

являющийся монотонно убывающей функцией кинематического инварианта s (см. Рис. 38), а $s_0 = 4$ - квадрат полной энергии двух сталкивающихся планковских масс, так что на планковских масштабах энергии:

$$\Lambda(s_0) \simeq 1, \quad (\text{VIII.97})$$

- при этом на комптоновских масштабах энергии, т.е., при $s = 4m_e^2$:

$$\frac{1}{\Lambda(m_e^2)} \approx \left(\frac{1}{102} \right)^2 \simeq \alpha^2 \approx \left(\frac{1}{137} \right)^2, \quad (\text{VIII.98})$$

где m_e - масса покоя электрона, $\alpha = 1/137$ - постоянная тонкой структуры.

На рис. 38 показана зависимость обратной величины эффективной константы взаимодействия от энергии сталкивающихся частиц в системе центра масс.

⁷Здесь приводится скорректированная формула с учетом результатов работы [192].

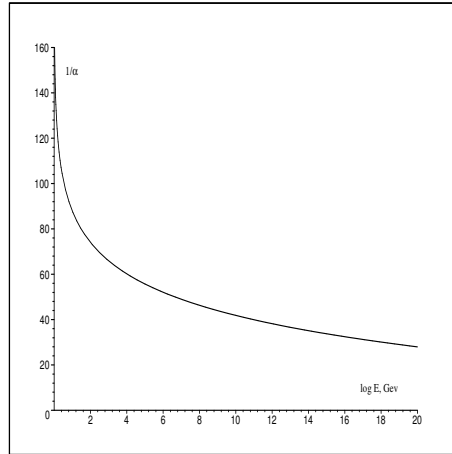


Рис. 38. Зависимость обратной величины эффективной константы взаимодействия $1/\alpha = \sqrt{\Lambda(4E^2)}$ от энергии сталкивающихся частиц в системе центра масс, E . По оси абсцисс отложены значения логарифма энергии в единицах GeV .

Заметим, что числовой коэффициент введенного здесь универсального сечения рассеяния, 8π , ровно в 4 раза больше аналогичного коэффициента в уже цитированных работах [178], [179]:

$$\sigma_0(s) = \frac{2\pi}{s(1 + \ln^2 s_0/s)}.$$

Причиной такого пересмотра величины сечения рассеяния заключается, во-первых, в том, что в цитированных работах не была учтена точная связь кинематического инварианта s с полной энергией сталкивающихся частиц в системе центра масс, ε_0 , [142]:

$$s = 4\varepsilon_0^2.$$

Именно этот фактор, 4, и не был учтен в цитированных работах. Во-вторых, мы несколько подправили логарифмический фактор, $\Lambda(s)$, поскольку логарифмический фактор, введенный в работах [178], [179], имел минимум при планковской энергии сталкивающихся частиц, а при дальнейшем росте энергии возрастал, что не имеет разумного обоснования. Заметим, что указанное уточнение формулы универсального сечения не изменяет сколь-нибудь существенно результатов цитированных

VIII.5. Скейлинг взаимодействия релятивистских частиц

статей, посвященных неравновесной космологической модели при наличии скейлинга, а лишь несколько уточняет некоторые детали процесса восстановления равновесия.

Соотношение (VIII.98) позволяет рассматривать величину:

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda(s)}} \simeq \alpha \quad (\text{VIII.99})$$

как логарифмически медленно меняющуюся эффективную константу взаимодействия.

Введенное формулой (VIII.95), сечение рассеяния σ_0 , АСР, обладает рядом замечательных свойств:

1. АСР образовано лишь из фундаментальных констант G, \hbar, c ;
2. АСР ведет себя так, что его значения лежат строго посередине между возможными крайними пределами асимптотического поведения сечения (VIII.85), установленных с помощью асимптотической теории S -матрицы;
3. АСР с логарифмической точностью является скейлинговым сечением рассеяния;
4. Для реакции рассеяния фотона на нерелятивистском электроны ($E = 2m_e$) формула (VIII.95) дает $\sigma_0 = 1,356\sigma_T \sim \sigma_T$ (томпсоновское сечение рассеяния);
5. Для электрослабых взаимодействий ($E = 2m_W$, где m_w - масса промежуточного W -бозона) при $\sin \theta_W = 0,22$ (см., например, [182]) получим из (VIII.95) $\sigma_0 = 0,586\sigma_W$, где $\sigma_W = G_F^2 m_W^2 / \pi$ - сечение νe - рассеяния с учетом промежуточного W -бозона;
6. При планковских значениях энергии $\sigma_0(4m_{pl}^2) \approx \sigma_{pl}$.

Эти замечательные качества АСР и удивительное совпадение его значений с сечениями известных процессов на огромном диапазоне значений энергии (от m_e до $10^{22}m_e$) вряд-ли могут быть случайными, что позволяет нам в дальнейшем применять АСР в качестве надежной формулы для асимптотического значения сечений рассеяния для всех взаимодействий.

На Рис. 39 показано сравнение асимптотического сечения рассеяния с крупномасштабным поведением сечений основных типов электромагнитных взаимодействий⁸

⁸Данные взяты из работы [192]

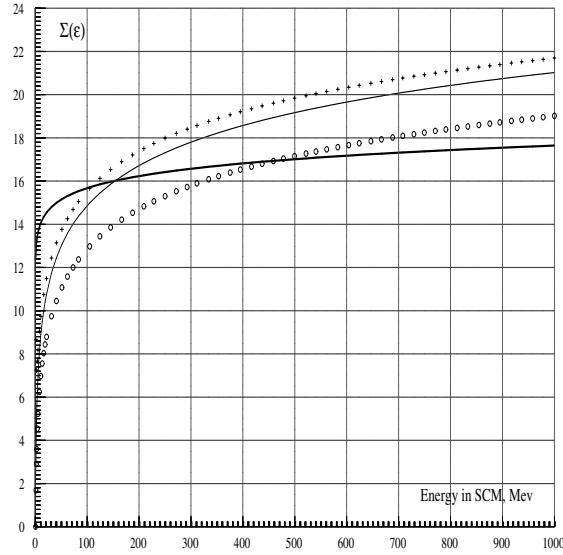


Рис. 39. Инвариантные сечения рассеяния: универсальное асимптотическое сечение рассеяния (VIII.95) - сплошная жирная линия; сечение двухфотонной электронно-позитронной аннигиляции - крестики, сечение рождения электронно-позитронной пары при столкновении двух фотонов - кружочки, сечение комптоновского рассеяния - сплошная тонкая линия. По оси абсцисс отложены значения полной энергии в системе центра масс, $\varepsilon = \sqrt{s}/2$ в Mev, по оси ординат - значения $\Sigma(\varepsilon) = 10^3 \times s\sigma(s)$.

Все указанные сечения имеют явно скейлинговое поведение в области $s \gg m^2$, т.е., с логарифмической точностью значение $s\sigma(s) \approx \text{Const}$. Значительные отклонения от скейлингового поведения возникают лишь в области низких энергий $\varepsilon \sim m_e$, т.е., в области порядка и ниже унитарного предела для электромагнитных взаимодействий, где возникают резонансы. Однако, влияние таких резонансов на общую эволюцию космологической плазмы будет исчезать по мере повышения энергии ча-

VIII.5. Скейлинг взаимодействия релятивистских частиц

стиц [194]. Действительно, массы промежуточных частиц, создающих резонанс, порядка энергии резонанса, которая, в свою очередь, равна кинетической энергии взаимодействующих частиц:

$$M \sim E \approx \sqrt{s}.$$

Поэтому с увеличением кинематического инварианта s растут и массы промежуточных частиц, определяющих резонансы. Но, как известно, между полушириной резонанса и массой промежуточной частицы имеется соотношение⁹:

$$\Gamma \sim M^{-1}.$$

Поэтому с ростом энергии резонансы становятся все более узкими:

$$\Gamma \sim \frac{1}{\sqrt{s}},$$

так что их вклад в кинетику установления ЛТР становится все более слабым.

Отметим также следующие полезные соотношения, следующие из сравнения определения полного сечения рассеяния (??) с формулой для асимптотического сечения рассеяния (VIII.95) а асимптотическими ограничениями на инвариантные амплитуды рассеяния (??), (??):

$$\overline{|F_0(s)|^2} = \frac{128\pi^2}{\Lambda(s)}, \quad (\text{VIII.100})$$

где

$$\overline{|F_0(s)|^2} = \int_0^1 |F_0(s, x)|^2 dx \quad (\text{VIII.101})$$

- среднее значение асимптотической амплитуды рассеяния, соответствующей универсальному асимптотическому сечению рассеяния (VIII.95), так что:

$$\sigma_0(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 |F_0(s)|^2 dx, \quad (\text{VIII.102})$$

⁹Это соотношение следует из соотношения неопределенности Гейзенберга.

причем справедливо неравенство:

$$|F_0(s)| \leq |F(s, 0)|; \quad (\text{VIII.103})$$

Заметим, что введение логарифмического фактора в выражение для асимптотического сечения рассеяния (VIII.95) эквивалентно слабому (логарифмическому) нарушению точной конформной инвариантности амплитуд рассеяния в ультрарелятивистском пределе (??)(см. замечание ?? на стр. ??):

$$\Lambda(\tilde{s})|\overline{F(\tilde{s}, \tilde{t})}|^2 \approx \Lambda(s)|F(s, t)|^2 \quad (\text{VIII.104})$$

Таким образом, подводя итоги этого раздела, можно сделать следующие выводы:

- Существование ЛТР на ранних стадиях эволюции вселенной определяется зависимостью сечений взаимодействий элементарных частиц в области сверхвысоких энергий от кинематического инварианта, s , - энергии взаимодействующих частиц в системе центра масс;
- В случае ультрарелятивистского уравнения состояния космологической плазмы и степенной зависимости сечения взаимодействия от кинематического $\sigma \sim s^\alpha$ ЛТР отсутствует на ранних стадиях расширения вселенной при $\alpha < -1/2$;
- Квантовая теория поля предсказывает восстановление скейлинга взаимодействий при сверхвысоких энергиях частиц вследствие конформной инвариантности в ультрарелятивистском пределе фундаментальных полевых уравнений. При этом сечения взаимодействий элементарных частиц в области сверхвысоких энергий обратно пропорциональны кинематическому инварианту s ;
- В условиях скейлинга взаимодействий ЛТР должно нарушаться в ранней вселенной и восстанавливаться на поздних;
- Поскольку ЛТР отсутствует на ранних стадиях Вселенной, первоначальное распределение частиц может быть произвольным и значительно отличаться от равновесного;
- Поскольку взаимодействия всех частиц при сверхвысоких энергиях унифицируются, взаимодействия всех частиц в этой области

VIII.6. Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц

можно качественно правильно описать с помощью универсального асимптотического сечения рассеяния, АСР, имеющего скейлинговый характер.

Поскольку в дальнейшем мы будем исследовать кинетику реакций лишь в области сверхвысоких энергий, в которой все взаимодействия описываются, как мы предполагаем, АСР, можно не делать никакого различия между частицами в интегралах взаимодействий, учитывая лишь там, где это необходимо, их спин и другие характеристики. В этом смысле при сверхвысоких энергиях все взаимодействия унифицируются, и четырехчастичные взаимодействия эффективно описываются как упругие, что значительно облегчает исследование таких процессов. В следующем разделе мы исследуем кинетику установления ЛТР в ранней вселенной, используя АСР для описания взаимодействий частиц в области сверхвысоких энергий, и выясним границы произвола первоначального распределения частиц.

VIII.6 Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц

VIII.6.1 Кинетические уравнения в мире Фридмана в ультрарелятивистском пределе

Релятивистские кинетические уравнения для однородных изотропных распределений $f_a(t, p)$ имеют вид (см. главу VI):

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial f_a}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{m_a^2 + p^2}} \sum_{b,c,d} J_{ab \rightleftharpoons cd}(t, p), \quad (\text{VIII.105})$$

где $a(t)$ - масштабный фактор мира Фридмана:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + \rho^2(\chi)(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)]; \quad (\text{VIII.106})$$

$$p^2 = -g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta, \quad (\alpha, \beta = \overline{1..3}); \quad (\text{VIII.107})$$

$J_{ab \rightleftharpoons cd}(t, p)$ - интеграл четырехчастичных реакций, который в интересующем нас ультрарелятивистском пределе:

$$\frac{p_i}{m_i} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{s}{m_i^2} \rightarrow \infty; \quad \lambda \rightarrow s^2, \quad (\text{VIII.108})$$

для 4-х частичных реакций описывается выражением (VI.110):

$$J_{ab}(p) = -\frac{(2S_b + 1)}{32(2\pi)^4 p} \int_0^\infty dq \int_0^{4pq} \frac{ds}{s} \int_0^1 dx F(x, s) \int_0^{2\pi} d\varphi \times \\ \{f_a(p)f_b(q)[1 \pm f_c(p - \Delta)][1 \pm f_d(q + \Delta)] - \\ - f_c(p - \Delta)f_d(q + \Delta)[1 \pm f_a(p)][1 \pm f_b(q)]\}, \quad (\text{VIII.109})$$

где (см. [195]):

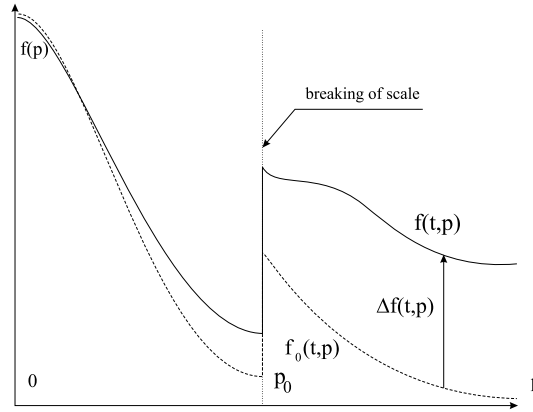
$$x = -\frac{t}{s}, \quad \Delta = x(p - q) - \cos \varphi \sqrt{x(1-x)(4pq - s)}. \quad (\text{VIII.110})$$

VIII.6.2 Интеграл столкновений для слабого отклонения распределений от равновесия

Исследуем сначала слабое нарушение термодинамического равновесия в горячей модели, когда основная часть частиц, $n_0(t)$, находится в состоянии теплового равновесия, и лишь для небольшой доли частиц, $n_1(t)$ тепловое равновесие нарушено (см. Рис. 40) [196]:

$$n_1(t) \ll n_0(t). \quad (\text{VIII.111})$$

Причем в дальнейшем в этой статье мы будем полагать, что функции распределения мало отличаются от равновесных в области малых значений энергии, меньших некоторого унитарного предела, $p = p_0$ (или $T = T_0$), ниже которого отсутствует скейлинг, и может сильно нарушаться при энергиях, выше унитарного предела:



VIII.6. Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц

Рис. 40. Схематическое изображение отклонения функции распределения от равновесия.

$$f_a(p) \approx \begin{cases} f_a^0 = \frac{1}{\exp\left(\frac{-\mu_a + E_a(p)}{T}\right) \pm 1}, & p < p_0; \\ \Delta f_a(p); f_a^0(p) \ll \Delta f_a(p) \ll 1, & p > p_0, \end{cases} \quad (\text{VIII.112})$$

где $\mu_a(t)$ - химические потенциалы, $T(t)$ - температура равновесной компоненты плазмы. Таким образом, в области $p > p_0$ может наблюдаться аномально большое по сравнению с равновесным число частиц, но при этом малое (см. (VIII.111)) по сравнению с полным числом равновесных частиц.

Исследуем процесс релаксации распределения $f_a(p)$ к равновесному $f_a^0(p)$. Задача в такой постановке для частного случая первоначального распределения $f(t=0, p)$ решалась ранее в [178], [179]. Здесь мы дадим общее решение этой задачи [196]. При этом, как будет видно из дальнейшего, космологическую плазму формально можно рассматривать как двухкомпонентную систему - равновесную с распределением $f_a^0(t, p)$, и неравновесную, *сверхтепловую*, с распределением $\delta f_a(t, p) = \Psi(t, p)$, причем число частиц в неравновесной компоненте мало, но плотность ее энергии, вообще говоря, произвольна.

Исследуем интеграл столкновений (VIII.214) в области

$$p \geq p_0 \gg T. \quad (\text{VIII.113})$$

Вследствие неравенства (VIII.112) в этой области можно пренебречь столкновениями сверхтепловых частиц между собой, ограничиваясь учетом рассеяния сверхтепловых частиц на равновесных. Поэтому в интеграле столкновений значение одного из импульсов, $P' = p - \Delta$, либо $q' = q + \Delta$ должно лежать в тепловой области, второго - в сверхтепловой, за унитарным пределом. Вне этой области подынтегральное значение интеграла столкновений чрезвычайно мало. Вследствие этого обстоятельства вторым членом в фигурных скобках (VIII.214) можно пренебречь, так как он может конкурировать с первым в асимптотически малых областях изменения переменных x и φ : $x(1-x) \lesssim T/p \rightarrow 0$. Статистические факторы вида $[1 \pm f_a(p')]$ в первом члене интеграла (VIII.214) могут заметно отличаться от единицы опять-таки лишь в области тепловых значений импульсов. В результате в исследуемой нами

области значений импульсов интеграл столкновений (VIII.214) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 J_{ab\leftrightarrow cd}(p)|_{p\geq p_0} &= \\
 &= \frac{(2S_b + 1)\Delta f_a(p)}{(2\pi)^3 p} \int_0^\infty \frac{q f_b^0(q) dq}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \int_{2p(q^4 - q)}^{2p(q^4 + q)} \frac{ds}{16\pi} \int_0^1 dx F(x, s). \quad (\text{VIII.114})
 \end{aligned}$$

Используя здесь определение полного сечения рассеяния (VIII.214), получим из (VIII.114):

$$\begin{aligned}
 J_{ab\leftrightarrow cd}(p)|_{p\geq p_0} &= \\
 &= \frac{(2S_b + 1)\Delta f_a(p)}{(2\pi)^3 p} \int_0^\infty \frac{q f_b^0(q) dq}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \int_{2p(q^4 - q)}^{2p(q^4 + q)} \sigma_{tot} s(s) ds. \quad (\text{VIII.115})
 \end{aligned}$$

Подставляя, наконец, во внутренний интеграл выражение для σ_{tot} в форме АСР, (VIII.95), проводя интегрирование с логарифмической точностью и суммируя полученное выражение по всем каналам реакций, найдем окончательно:

$$\begin{aligned}
 J_a(p)|_{p\geq p_0} &= \\
 &= -\Delta f_a(p) \sum_b \frac{(2S_b + 1)\nu_{ab}}{\pi} \int_0^\infty \frac{q^2 f_b^0(q)}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \frac{dq}{\Lambda(\bar{s})}, \quad (\text{VIII.116})
 \end{aligned}$$

где $\bar{s} = \frac{1}{2}pq^4$, ν_{ab} - число каналов реакций, в которых может участвовать частица сорта a . Вычислим значения интеграла (VIII.116) в предельных случаях.

Рассеяние на нерелятивистских частицах. Если равновесные частицы сорта b нерелятивистские, т.е., $q \ll m_b$, то интеграл (VIII.116) сводится к выражению:

$$J_a(p)|_{p\geq p_0} =$$

VIII.6. Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц

$$= -8\pi^2 \Delta f_a(p) \sum_b \frac{n_b^0(t)}{m_b} \frac{\nu_{ab}}{1 + \ln^2 \frac{pm_b}{2}}, \quad (m_b > T). \quad (\text{VIII.117})$$

Рассеяние на ультрарелятивистских частицах. Если равновесные частицы сорта b являются ультрарелятивистскими, т.е., $m_b \ll T$, причем их химический потенциал мал, - $\mu_b \ll T$, то вычисляя интеграл (VIII.116) относительно равновесного распределения (VIII.112), найдем:

$$\begin{aligned} J_a(p)|_{p \geq p_0} &= \\ &= -\frac{\pi}{3} \frac{\tilde{N} T^2(t)}{1 + \ln^2 Tp/2} \Delta f_a(p), \quad (m_b \ll T, \mu_b \ll T), \end{aligned} \quad (\text{VIII.118})$$

где

$$\tilde{N} = \frac{1}{2} \left[\sum_B (2S + 1) + \frac{1}{2} \sum_F (2S + 1) \right] = N_B + \frac{1}{2} N_F;$$

N_B - число сортов равновесных бозонов, F - фермионов.

Чтобы оценить вклады в интеграл столкновений нерелятивистских и ультрарелятивистских частиц в равновесной компоненте, вычислим сначала их концентрации. Концентрация ультрарелятивистских частиц в горячей модели получается из выражения (VIII.112) для функции распределения равновесной компоненты подстановкой

$$E(p) = p; \quad \mu_a = 0 \quad (\text{VIII.119})$$

в формулу для определения плотности числа частиц (см. [195]):

$$n_a(t) = \frac{2S_a + 1}{2\pi^2} \int_0^\infty f_a(t, p) p^2 dp. \quad (\text{VIII.120})$$

Таким образом найдем (см. [195]):

$$n_a(t) = \frac{(2S_a + 1)T^3}{\pi^2} g_n \zeta(3) \quad (\text{VIII.121})$$

Концентрация нерелятивистских равновесных частиц *при условии сохранения их числа* изменяется пропорционально $a^{-3}(t)$. Поэтому в условиях слабого нарушения равновесия отношение плотности нерелятивистских частиц к плотности реликтовых фотонов примерно постоянно (так как $T \sim a(t)^{-1}$):

$$\frac{n_0(t)}{n_\gamma(t)} \approx \text{Const} = \delta \sim 10^{-10} \div 10^{-9}. \quad (\text{VIII.122})$$

Вычисляя отношение вкладов в интеграл столкновений нерелятивистских и ультрарелятивистских равновесных частиц, получим:

$$J_{non}/J_{ultra} \sim \frac{24\pi n_b^0}{m_b T^2} = \zeta(3) \delta \frac{64T(t)}{\pi m_b} \sim 10^{-9} \frac{T}{m_b}, \quad (\text{VIII.123})$$

- отношение вкладов мало при $T \ll 10^9 m_b$ и уменьшается со временем. Поэтому в дальнейшем вкладом нерелятивистских частиц в интеграл столкновений будем пренебрегать.

VIII.7 Релаксация сверхтепловой компоненты на равновесных частицах

Подставляя полученное выражение (VIII.118) для интеграла столкновений в кинетические уравнения (VIII.105), получим кинетическое уравнение, описывающее эволюцию ультрарелятивистской сверхтепловой компоненты в равновесной космологической плазме:

$$p \left(\frac{\partial \Delta f_a}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial \Delta f_a}{\partial p} \right) = - \frac{\pi \tilde{N}}{3} \frac{T^2(t)}{1 + \ln^2 pT/2} \Delta f_a. \quad (\text{VIII.124})$$

Учитывая тот факт, что переменная:

$$\mathcal{P} = a(t)p, \quad (\text{VIII.125})$$

является интегралом движения [51], перейдем в уравнении (VIII.124) к переменным t, \mathcal{P} ; при этом для любой функции $\Psi(t, p)$ имеет место соотношение:

$$\frac{\partial \Psi(t, p)}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial \Psi(t, p)}{\partial p} = \frac{\partial \Psi(t, \mathcal{P})}{\partial t}. \quad (\text{VIII.126})$$

При такой подстановке кинетическое уравнение (VIII.124) легко интегрируется в квадратурах. Для удобства в дальнейшем несколько уточним нормировку переменной \mathcal{P} . При этом возникает необходимость сопоставления величин, используемых в неравновесной модели, с соответствующими величинами стандартного космологического сценария, поскольку все наблюдаемые космологические параметры интерпретированы уже в терминах СКС. При этом мы должны иметь перед глазами две *синхронные* модели вселенной: реальную - неравновесную модель \mathcal{M} с макроскопическими параметрами $P(t)$ и идеальную - равновесную модель \mathcal{M}_0 , имеющую на данный момент времени t некоторые макроскопические параметры $P_0(t)$.

VIII.7.1 Ультрарелятивистская вселенная

Рассмотрим вселенную с ультрарелятивистским уравнением состояния¹⁰ (показатель баротропы $\rho = 1/3$):

$$\varepsilon = 3p. \quad (\text{VIII.127})$$

Тогда согласно уравнениям Эйнштейна плотность энергии вселенной изменяется по закону:

$$\varepsilon a^4 = \text{Const}; \quad \varepsilon = \frac{1}{32\pi t^2}, \quad (\text{VIII.128})$$

а масштабный фактор изменяется по закону:

$$a(t) \sim t^{1/2}. \quad (\text{VIII.129})$$

С другой стороны, плотность энергии равновесной плазмы определяется через ее температуру соотношением (см. [195]):

$$\varepsilon_0 = \mathcal{N} \frac{\pi^2 T^4}{15}. \quad (\text{VIII.130})$$

Поэтому, если бы вселенная была заполнена *только* равновесной плазмой, ее температура $T_0(t)$ изменялась бы по закону (см. [195]):

$$\mathcal{N}^{1/4} T_0(t) = \left(\frac{45}{32\pi^3} \right)^{1/4} t^{-1/2} \quad (\sim a^{-1}), \quad (\text{VIII.131})$$

- здесь мы учитываем возможную слабую зависимость эффективного числа равновесных типов частиц от времени, $\mathcal{N}(t)$. Итак, уточним формулу (VIII.125) следующим образом:

$$p = \mathcal{P} \mathcal{N}^{1/4} T_0(t). \quad (\text{VIII.132})$$

Согласно этой формуле смысл импульсной переменной \mathcal{P} таков: *с точностью до числового множителя порядка единицы \mathcal{P} есть отношение энергии частиц к их средней энергии на этот же момент времени в локально-равновесной ультрарелятивистской вселенной.*

Таким образом, решая кинетическое уравнение (VIII.124) с учетом соотношений (VIII.126) и (VIII.132), найдем его решение:

$$\Delta f_a(t, \mathcal{P}) = \Delta f_a^0(\mathcal{P}) \exp \left[-\frac{\xi(t, \mathcal{P})}{\mathcal{P}} \int_0^t \frac{y^2(t') dt'}{\sqrt{t'}} \right], \quad (\text{VIII.133})$$

¹⁰Заметим, что давление и импульс имеют одинаковые обозначения.

где:

$$\Delta f_a^0(\mathcal{P}) = \Delta f_a(0, \mathcal{P}),$$

- начальное отклонение от равновесия, введена безразмерная функция:

$$y(t) = \frac{T(t)}{T_0(t)} \quad (\text{VIII.134})$$

и параметр, слабо зависящий от переменных t, \mathcal{P} :

$$\xi(t, \mathcal{P}) = \frac{\pi \tilde{\mathcal{N}}}{3\sqrt{\mathcal{N}}} \left(\frac{45}{32\pi^3} \right)^{1/4} \frac{1}{\Lambda(\mathcal{P}TT_0/2)}; \quad (\text{VIII.135})$$

$$\Lambda(x) = 1 + \ln^2 x. \quad (\text{VIII.136})$$

Приближению $p \gg p_T \approx T(t)$ соответствуют значения $\mathcal{P} \gg 1$.

Поскольку $T(t)$ - температура равновесной компоненты плазмы, а $T_0(t)$ - температура на данный момент времени полностью равновесной вселенной, всегда выполняется условие:

$$y(t) \leq 1. \quad (\text{VIII.137})$$

Для того, чтобы быть правильным решением кинетических уравнений, функция $\Delta f_a(t, \mathcal{P})$ во все времена должна удовлетворять интегральному условию (VIII.111). Поскольку согласно решению (VIII.132) отклонение от равновесия функции распределения $\Delta f_a(t, \mathcal{P})$ строго убывает со временем, для справедливости решения (VIII.132) достаточно, чтобы функция $\Delta f_a(t, \mathcal{P})$ удовлетворяла условию (VIII.111) в начальный момент времени. Это дает:

$$\int_0^\infty \Delta f_a^0(\mathcal{P}) \mathcal{P}^2 d\mathcal{P} \gg \frac{2}{\mathcal{N}^{3/4}} y_0^3, \quad (\text{VIII.138})$$

где $y_0 = y(0) \leq 1$.

В качестве примера рассмотрим релаксацию сверхтепловой компоненты при первоначальном распределении в виде ступенчатой функции для плотности числа частиц:

$$\Delta f^0(\mathcal{P}) = \begin{cases} \frac{\pi^2 \Delta \tilde{\mathcal{N}}}{\mathcal{P}_0 \mathcal{P}^2}, & \mathcal{P} \leq \mathcal{P}_0; \\ 0, & \mathcal{P} > \mathcal{P}_0; \end{cases}, \quad (\text{VIII.139})$$

VIII.7. Релаксация сверхтепловой компоненты на равновесных частицах

так что:

$$\Delta\tilde{N} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \Delta f^0(\mathcal{P}) \mathcal{P}^2 d\mathcal{P} \quad (\text{VIII.140})$$

- первоначальная конформная плотность числа неравновесных частиц. На Рис. 41 показана эволюция сверхтепловой компоненты для такого распределения, при этом мы положили $y(t) \equiv 1$.

Напомним, что космологическое время t вычисляется в планковских единицах. Поэтому возникает естественный вопрос, а можно ли пользоваться методами классической (неквантовой) кинетики на временах порядка нескольких планковских? Условием применимости квазиклассического описания частиц в космологической ситуации является соотношение, вытекающее из соотношения неопределенности Гейзенберга:

$$Et \gg 1. \quad (\text{VIII.141})$$

Согласно (VIII.131) и (VIII.132):

$$E = p = \mathcal{P} \left(\frac{45}{32\pi^3} \right)^{1/4} t^{-1/2}. \quad (\text{VIII.142})$$

Поэтому условие применимости квазиклассического описания частиц (VIII.141) принимает вид:

$$t\mathcal{P}^2 \gg \sqrt{\frac{32\pi^2}{45}} \approx 2,65. \quad (\text{VIII.143})$$

При $t \sim 1$ такое рассмотрение оправдано для достаточно больших значений конформного импульса $\mathcal{P} \gg 1$, которые как раз и соответствуют сверхтепловым частицам. Таким образом, *квазиклассическое описание частиц применимо на планковских временах эволюции вселенной с тем большей достоверностью, чем больше энергия частиц тепловой*. Таким образом, описание эволюции сверхтепловой (неравновесной) компоненты не требует квантового рассмотрения.

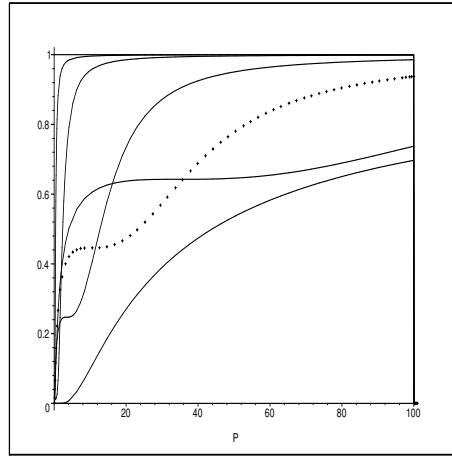


Рис. 41. Релаксация сверхтепловой компоненты для распределения (VIII.139) в предположении $y(t) = 1$ при $\mathcal{P}_0 = 100$, $\tilde{\mathcal{N}}/\sqrt{\mathcal{N}} = 10$. Показана относительная величина функции распределения плотности числа частиц по конформным энергиям \mathcal{P} . Сверху вниз (по левому краю рисунка) - сплошные линии: $t = 0$, $t = 0,01$, $t = 0,1$, $t = 1$, $t = 10$ и $t = 100000$; пунктирная линия - $t = 3$. Время измеряется в секундах.

VIII.7.2 Нерелятивистская вселенная

Рассмотрим теперь вселенную на нерелятивистском этапе расширения. В этом случае уравнение состояния есть

$$p = 0 \tag{VIII.144}$$

и масштабный фактор изменяется по закону:

$$a(t) \sim t^{2/3}. \tag{VIII.145}$$

При этом будем рассматривать рассеяние сверхтепловых частиц на равновесных безмассовых реликтовых частицах, которых в СКС примерно в 10^9 больше нерелятивистских частиц. Пусть t_0 - момент смены ультра-релятивистского уравнения состояния нерелятивистским в неравновесной вселенной и $T_\gamma^0(t)$ - температура реликтовых фотонов в равновесной

VIII.8. Разогрев равновесной компоненты сверхтепловыми частицами

вселенной. Тогда:

$$T_\gamma^0(t) = \left(\frac{45}{32\pi^3 \mathcal{N}} \right)^{1/4} \frac{t_0^{1/6}}{t^{2/3}}. \quad (\text{VIII.146})$$

Интегрируя кинетическое уравнение (VIII.124), найдем в этом случае:

$$\Delta f_a(t, \mathcal{P}) = \Delta f_a(t_0, \mathcal{P}) \exp \left[-\frac{\chi(t, \mathcal{P})}{\mathcal{P}} \int_{t_0}^t \frac{y^2(t') dt'}{t'^{2/3}} \right], \quad (\text{VIII.147})$$

где $\Delta f_a(t_0, \mathcal{P})$ определяется решением (VIII.133), а

$$\chi(t, \mathcal{P}) = \frac{\pi \tilde{\mathcal{N}} T_\gamma^0(t_0) t_0^{2/3}}{\Lambda(\frac{1}{2} \mathcal{P} T_\gamma^0(t))} \quad (\text{VIII.148})$$

- медленно меняющийся параметр, $\tilde{\mathcal{N}}$ определяется для безмассовых реликтовых частиц.

VIII.8 Разогрев равновесной компоненты сверхтепловыми частицами

VIII.8.1 Уравнение энергобаланса

Несмотря на малое по сравнению с равновесным число неравновесных частиц, энергия, заключенная в неравновесном хвосте, может оказаться значительно большей энергии равновесной компоненты, если существенные искажения распределения имеются в сверхтепловой области, которым отвечают большие значения импульсной переменной $\mathcal{P} \gg 1$. Сверхтепловые частицы, сталкиваясь с равновесными, передают им свою энергию и тем самым разогревают равновесную компоненту плазмы. Для нахождения истинной температуры, $T(t)$, ультрарелятивистской плазмы с учетом подогрева ее сверхтепловыми частицами воспользуемся уравнением (VIII.128), являющегося следствием закона сохранения энергии и определяющего зависимость плотности энергии, ε , ультрарелятивистской вселенной от космологического времени. Эта плотность энергии складывается из плотности энергии равновесной плазмы, ε_0 (VIII.129), и плотности энергии сверхтепловой компоненты, ε_1 :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1, \quad (\text{VIII.149})$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\mathcal{N}T_0^4}{\pi^2} \sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty \Delta f_a(t, \mathcal{P}) \mathcal{P}^3 d\mathcal{P}. \quad (\text{VIII.150})$$

Для дальнейшего удобно ввести безразмерную переменную $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon_1} \leq 1. \quad (\text{VIII.151})$$

Поскольку полная плотность энергии $\varepsilon(t)$ с другой стороны определяется четвертой степенью температуры, $T_0(t)$, полностью равновесной вселенной, а плотность энергии равновесной компоненты $\varepsilon_0(t)$ - четвертой степенью температуры $T(t)$, введенная нами безразмерная переменная связана простым соотношением с безразмерной переменной $y(t) = T(t)/T_0(t)$, введенной нами ранее (VIII.134):

$$\sigma(t) = y^4(t), \quad (\text{VIII.152})$$

откуда сразу следует неравенство (VIII.137).

Таким образом из (VIII.149) с учетом решения (VIII.133) для неравновесной функции распределения получим интегральное уравнение относительно функции $y(t)$, которое в дальнейшем будем называть *уравнением энергоданса*:

$$y^4 + \frac{15}{\pi^4} \sum_a (2S_a + 1) \times \\ \times \int_0^\infty \mathcal{P}^3 \Delta f_a^0(\mathcal{P}) \exp \left[-\frac{\xi(t, \mathcal{P})}{\mathcal{P}} \int_0^t \frac{y^2(t') dt'}{\sqrt{t'}} \right] d\mathcal{P} = 1. \quad (\text{VIII.153})$$

Из этого уравнения в нулевой момент времени получим соотношение:

$$\frac{15}{\pi^4} \sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty \mathcal{P}^3 \Delta f_a^0(\mathcal{P}) d\mathcal{P} = 1 - \sigma_0. \quad (\text{VIII.154})$$

VIII.8.2 Решение уравнения энергоданса

При заданных функциях $\Delta f_a^0(\mathcal{P})$ уравнение (VIII.153) всегда интегрируется с логарифмической точностью в квадратурах. Действительно,

VIII.8. Разогрев равновесной компоненты сверхтепловыми частицами

вместо переменной t и функции $y(t)$ введем новые безразмерные переменную τ :

$$\tau = \frac{\bar{\xi}}{\bar{\mathcal{P}}_0} \sqrt{t} \quad (\text{VIII.155})$$

и функцию $Z(\tau)$:

$$Z(\tau) = 2 \int_0^\tau y^2(\tau') d\tau', \quad (\text{VIII.156})$$

где $\bar{\xi} = \xi(\bar{\mathcal{P}}_0)$, а

$$\bar{\mathcal{P}}_0 = \frac{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\mathcal{P} \mathcal{P}^3 \Delta f_a^0(\mathcal{P})}{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\mathcal{P} \mathcal{P}^2 \Delta f_a^0(\mathcal{P})} \quad (\text{VIII.157})$$

- среднее значение импульсной переменной \mathcal{P} в момент времени $t = 0$. При этом получим:

$$y = \sqrt{\frac{1}{2} Z'_\tau}; \quad Z(0) = 0; \quad Z'_\tau(0) = 2\sqrt{\sigma_0}, \quad (\text{VIII.158})$$

где $\sigma_0 = \sigma(0) = y^2(0)$. Тогда после вычисления интеграла с логарифмической точностью уравнение (VIII.153) с учетом соотношения (VIII.154) приводится к виду [178]:

$$Z'_\tau = 2\sqrt{1 - (1 - \sigma_0)\Phi(Z)}, \quad (\text{VIII.159})$$

где введена функция $\Phi(Z)$:

$$\Phi(Z) = \frac{\bar{\mathcal{P}}(t)}{\bar{\mathcal{P}}(0)} = \frac{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\mathcal{P} \mathcal{P}^3 \Delta f_a^0(\mathcal{P}) e^{-Z\bar{\mathcal{P}}_0/\mathcal{P}}}{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\mathcal{P} \mathcal{P}^3 \Delta f_a^0(\mathcal{P})}. \quad (\text{VIII.160})$$

В дальнейшем удобно перейти к новой безразмерной импульсной переменной:

$$\rho = \frac{\mathcal{P}}{\bar{\mathcal{P}}_0}, \quad (\text{VIII.161})$$

так что:

$$1 = \frac{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\rho \rho^3 \Delta f_a^0(\rho)}{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\rho \rho^2 \Delta f_a^0(\rho)} \Rightarrow \bar{\rho}_0 \equiv 1. \quad (\text{VIII.162})$$

Тогда:

$$\Phi(Z) = \frac{\bar{\rho}(\tau)}{\bar{\rho}(0)} = \frac{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\rho \rho^3 \Delta f_a^0(\rho) e^{-Z/\rho}}{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\rho \rho^3 \Delta f_a^0(\rho)}. \quad (\text{VIII.163})$$

Очевидно, что $\Phi(Z)$ является монотонно убывающей функцией Z , так как всегда

$$\Phi'_Z < 0, \quad Z \in (0, \infty), \quad (\text{VIII.164})$$

причем $\Phi(0) = 1$ и $\Phi(\infty) = 0$. Отсюда следует:

$$0 \leq \Phi(Z) \leq 1. \quad (\text{VIII.165})$$

Из определения (VIII.163) также следует, что всегда

$$\Phi''_{ZZ} > 0, \quad (Z \in (0, \infty)), \quad (\text{VIII.166})$$

поэтому график функции $\Phi(Z)$ вогнутый. Вследствие строгой монотонности и непрерывной дифференцируемости функции $\Phi(Z)$ согласно уравнению (VIII.162) функция $Z(\tau)$ вместе со своей первой производной являются монотонно возрастающими функциями переменной x . Интегрируя уравнение (VIII.162), получим:

$$\frac{1}{2} \int_0^Z \frac{dU}{\sqrt{1 - (1 - \sigma_0)\Phi(U)}} = \tau. \quad (\text{VIII.167})$$

Указанные свойства монотонности функций $\Phi(Z)$ и $Z(\tau)$ гарантируют нам то, что уравнение (VIII.167) при каждом заданном значении τ имеет единственное решение $Z(\tau)$. При найденном значении функции $Z(\tau)$ значение температуры $T(t)$ (или $y(t)$) равновесной компоненты можно получить согласно (VIII.161) и (VIII.162) по формуле:

$$y = [1 - (1 - \sigma_0)\Phi(Z)]^{1/4}. \quad (\text{VIII.168})$$

VIII.8. Разогрев равновесной компоненты сверхтепловыми частицами

Таким образом, задача о подогреве равновесной компоненты плазмы формально решена.

Заметим, что условие применимости приближения слабого нарушения ЛТР (VIII.138) в терминах введенных здесь величин $\bar{\mathcal{P}}_0$ и σ_0 принимает вид:

$$\mathcal{N}^{1/4} \sigma_0^{3/4} \bar{\mathcal{P}}_0 \gg 1 - \sigma_0. \quad (\text{VIII.169})$$

VIII.8.3 Исследование процесса установления теплового равновесия

Перейдем теперь к исследованию полученного решения.

VIII.8.3.1 Асимптотическое поведение при малых временах

Рассмотрим сначала асимптотическое поведение решений при малых космологических временах:

$$t \rightarrow 0 \Rightarrow \tau \ll 1. \quad (\text{VIII.170})$$

Разлагая подинтегральное выражение в правой части (VIII.163) в ряд Тейлора по степеням малости Z , получим с учетом определения (??) асимптотическое разложение функции $\Phi(Z)$:

$$\Phi(Z) = 1 - Z + O^2(Z). \quad (\text{VIII.171})$$

Подставляя (VIII.171) в уравнение (VIII.160) и интегрируя полученное уравнение с учетом начальных условий (VIII.158), найдем асимптотическое при малых временах решение:

$$Z = \tau \sqrt{\sigma_0} + \tau^2(1 - \sigma_0), \quad (\text{VIII.172})$$

откуда с учетом (VIII.158) получим:

$$y(t) = \sqrt{\sqrt{\sigma_0} + \tau(1 - \sigma_0)}. \quad (\text{VIII.173})$$

Случай $\sigma_0 \ll 1$ соответствует малой плотности энергии равновесной компоненты по сравнению с плотностью энергии неравновесной компоненты плазмы в момент времени $t = 0$. Согласно (VIII.169) рассмотрение этого случая оправдано для достаточно больших значений $\bar{\mathcal{P}}_0$:

$$\bar{\mathcal{P}}_0 \gg \sigma_0^{-3/4}. \quad (\text{VIII.174})$$

В этом случае получим из (VIII.173) асимптотический закон изменения температуры в ранней вселенной:

$$T(t) = T_\gamma^0(t) \left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{\mathcal{P}}_0} \right)^{1/2} t^{1/4} \sim t^{-1/4} \quad (\text{VIII.175})$$

- температура плазмы падает медленнее, чем в СКС, но на каждый данный момент времени реальная температура ниже, чем соответствующая температура СКС:

$$y(t) \leq 1 \Rightarrow T(t) \leq T_0(t), \quad (\text{VIII.176})$$

и сравнивается с последней в некоторый момент времени \bar{t} . Найдем это время. Подставляя (VIII.175) в решение (VIII.133), найдем закон эволюции распределения сверхтепловых частиц на ранней стадии вселенной:

$$\Delta f_a(t, \mathcal{P}) = \Delta f_a^0(\mathcal{P}) \exp \left(-\frac{\bar{\xi}^2 t}{\bar{\mathcal{P}}_0 \mathcal{P}} \right). \quad (\text{VIII.177})$$

Согласно (VIII.175) и (VIII.177) ЛТР в целом восстанавливается во времени

$$t > \bar{t} = \left(\frac{\bar{\mathcal{P}}_0}{\bar{\xi}} \right)^2, \quad (\text{VIII.178})$$

- это и есть время установления равновесия. Температура плазмы при этом достигает своего равновесного значения $T_0(t)$ (при этом все время падая со временем). Однако, для частиц с энергиями, большими средней $\bar{\mathcal{P}}_0$, равновесие еще не достигнуто и в это время.

VIII.8.3.2 Асимптотическое поведение при больших временах в ультрарелятивистской вселенной

Полагая $t > \bar{t}$ и, следовательно, $y(t) \approx 1$, получим асимптотику (VIII.133) на больших временах:

$$\Delta f_a(t, \mathcal{P}) = \Delta f_a^0(\mathcal{P}) \exp \left(-2 \frac{\xi(\mathcal{P}) \sqrt{t}}{\mathcal{P}} \right); \quad (\text{VIII.179})$$

таким образом, время установления теплового равновесия для частиц с импульсом \mathcal{P} есть:

$$t_{\mathcal{P}} = \left[\frac{\mathcal{P}}{\xi(t, \mathcal{P})} \right]^2 \approx \left(\frac{\mathcal{P}}{\bar{\mathcal{P}}_0} \right)^2 t. \quad (\text{VIII.180})$$

VIII.8. Разогрев равновесной компоненты сверхтепловыми частицами

Предположим, что в области больших значений \mathcal{P} начальное распределение сверхтепловых частиц экстраполируется степенным законом:

$$\Delta f_a^0(\mathcal{P}) \sim \mathcal{P}^{-\lambda}; \quad (\mathcal{P} \gg 1; \lambda > 4). \quad (\text{VIII.181})$$

Тогда средняя энергия сверхтепловых частиц, $\overline{\text{VIII.E}_1}(t)$, для которых тепловое равновесие к моменту времени t еще не достигнуто, равна:

$$\overline{\text{E}_1}(t) = \xi(t, \mathcal{P}) T_0(t) \sqrt{t} \approx \frac{1}{\Lambda(T_0^2(t) \overline{\mathcal{P}}_0)} \sim \text{Const} \quad (\text{VIII.182})$$

- практически не зависит от времени. В предыдущей статье [195] мы отмечали, что на современной стадии $1/\Lambda \sim \alpha^2$, где α - постоянная тонкой структуры. Таким образом, получаем из (VIII.182) оценку:

$$\overline{\text{E}_1}(t) \sim 10^{-4} \quad (\text{VIII.183})$$

- в обычных единицах $\overline{\text{E}_1}(t) \sim 10^{15}$ Gev - т.е., частицы с энергией порядка и выше характерной энергии Великого объединения всегда остаются неравновесными. Этот вывод является принципиально важным для космологических сценариев.

VIII.8.3.3 Асимптотическое поведение при больших временах в нерелятивистской вселенной

Рассмотрим теперь эволюцию сверхтепловых ультрарелятивистских частиц в нерелятивистской вселенной, в которой тепловое равновесие в среднем уже восстановлено. Полагая в этом случае $y = 1$ в выражении (VIII.147) для функции распределения сверхтепловых частиц, получим:

$$\begin{aligned} \Delta f_a(t, \mathcal{P}) &= \Delta f_a(t_0, \mathcal{P}) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{3(\pi \mathcal{N})^{1/4} \chi(\mathcal{P})}{\mathcal{P}} \sqrt{t_0} \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/3} - 1 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{VIII.184})$$

- распределение сверхтепловых частиц эволюционирует медленнее, чем (VIII.179). Время установление теплового равновесия для частиц с импульсом \mathcal{P} в этом случае равно:

$$t_{\mathcal{P}} \simeq \frac{1}{\sqrt{t_0}} \left[\frac{\mathcal{P}}{\xi(t, \mathcal{P})} \right]^3, \quad (\text{VIII.185})$$

а средняя энергия сверхтепловых частиц медленно падает с течением времени:

$$\bar{E}_1(t) \simeq \frac{\bar{\mathcal{N}}}{\sqrt{\bar{\mathcal{N}}\Lambda(T_0^2(t)\mathcal{P}/2)} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/3} \sim \quad (\text{VIII.186})$$

$$\sim 10^{15} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/3} \text{Gev.}$$

В современную эпоху эта величина порядка $10^{12} \div 10^{13} \text{Gev}$ при вариации t_0 в пределах $10^9 \div 10^{12} \text{sec}$.

VIII.8.3.4 Численная модель

Перейдем теперь от оценок к численным расчетам. Представим первоначальное отклонение функции распределения от равновесия в форме:

$$\Delta f^0(x) = \frac{A}{\mathcal{P}_0^3(k^2 + x^2)^{3/2}} \chi(1 - x), \quad k \rightarrow 0, \quad (\text{VIII.187})$$

где $\chi(z)$ - функция Хевисайда (ступенчатая функция), $x = \mathcal{P}/\mathcal{P}_0$ - безразмерная импульсная переменная, A , \mathcal{P}_0 и k - некоторые параметры; параметр k введен для обеспечения сходимости всех моментов функции распределения в области малых значений импульса. При этом функция распределения плотности энергии сверхтепловых частиц имеет форму, близкую к спектру так называемого *белого шума*, когда все значения энергии равновероятны (см. Рис. 42 и [196]).

VIII.8. Разогрев равновесной компоненты сверхтепловыми частицами

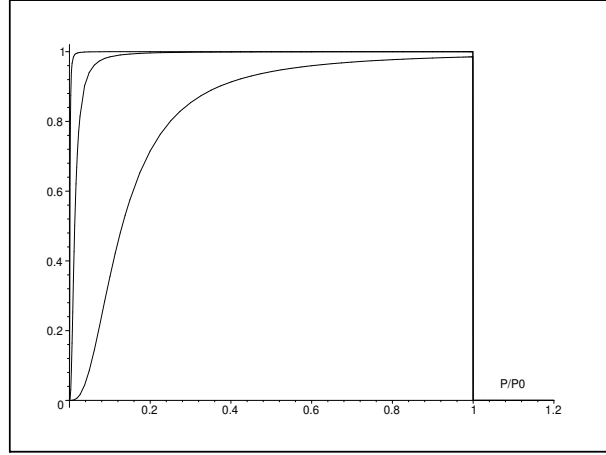


Рис. 42. Начальное отклонение функции распределения энергии сверхтепловых частиц $\Delta f^0(x)x^3$ от равновесия по формуле (VIII.187), снизу вверх: $k = 0, 1, k = 0, 01, k = 0, 001$.

Вычисляя плотность числа частиц относительно распределения (VIII.187), найдем согласно (VIII.120):

$$n_1(t) = \frac{A(2S_a + 1)\mathcal{N}^{3/4}}{2\pi^2} T_0^3(t) \left(\ln \frac{k}{\sqrt{1+k^2}-1} - \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \right).$$

Таким образом, получим в пределе:

$$n_1(t) \simeq A \frac{(2S_a + 1)\mathcal{N}^{3/4}}{2\pi^2} T_0^3(t) \ln \frac{2}{k} \quad (k \rightarrow 0).$$

откуда следует, для выполнения условия (VIII.111) во все времена необходимо и достаточно выполнение условия:

$$A\mathcal{N}^{3/4} \ln \frac{2}{k} \ll 2\sigma_0^{3/2} \zeta(3).$$

Вычисляя теперь плотность энергии относительно распределения (VIII.187), найдем:

$$\varepsilon_1(t) = A \frac{\mathcal{N} T_0^4(t) (2S + 1)}{\pi^2} P_0 (1 - k)^2.$$

Таким образом, с учетом (VIII.132) получим зависимость среднего значения импульсной переменной через параметры \mathcal{P}_0 и k (Рис. 43):

$$\bar{\mathcal{P}}_0 = \mathcal{P}_0 \frac{(1-k)^2}{\ln \frac{k}{\sqrt{1+k^2}-1} - \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}}$$

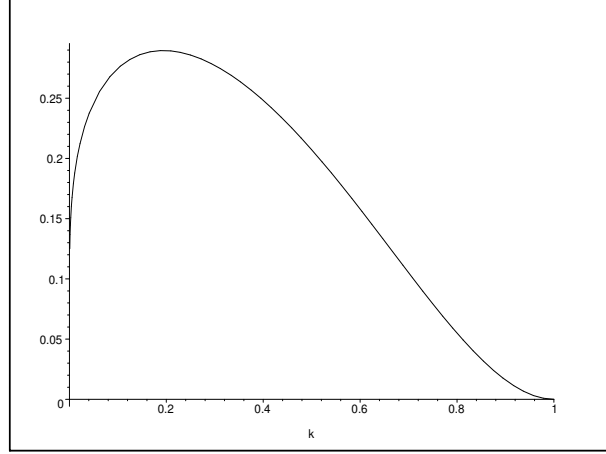


Рис. 43. Зависимость относительного среднего переменной $\bar{\mathcal{P}}_0/\mathcal{P}_0$ от параметра k распределения (VIII.187).

Тогда уравнение энергобаланса (VIII.149) или (VIII.153) при $t \rightarrow 0$ приводят к соотношению между параметрами распределения (VIII.187):

$$\frac{15}{\pi^4} A(2S+1)\mathcal{P}_0(1-k)^2 = 1 - \sigma_0. \quad (\text{VIII.188})$$

Таким образом, должно выполняться условие:

$$A\mathcal{P}_0 < \frac{\pi^4}{30}, \quad (\text{VIII.189})$$

налагающее ограничение на параметры модели. Вычисляя функцию $\Phi(Z)$ относительно распределения (VIII.187) согласно формуле (VIII.163), найдем, переходя к пределу $k \rightarrow 0$:

$$\Phi(Z) = e^{-Z} + \text{Ei}(-Z), \quad (\text{VIII.190})$$

VIII.8. Разогрев равновесной компоненты сверхтепловыми частицами

где $\text{Ei}(z)$ - интегральная показательная функция [85]:

$$\text{Ei}(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t} dt, \quad |\arg(-z)| < \pi. \quad (\text{VIII.191})$$

Уравнение (VIII.167) при учете соотношения (VIII.191) принимает вид:

$$\tau = \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{1 - (1 - \sigma_0)(\exp(-u) + u\text{Ei}(-u))}}, \quad (\text{VIII.192})$$

где $\tau = x/\mathcal{P}_0$. Если бы мы могли проинтегрировать (VIII.192) и найти зависимость $\theta(\tau) \rightarrow Z(x)$, то нужную нам зависимость $y(x)$ мы смогли бы получить из соотношений (VIII.158)-(VIII.160) в форме:

$$y = \left[1 - (1 - \sigma_0)(e^{-\theta(\tau)} + \theta(\tau)\text{Ei}(-\theta(\tau))) \right]^{1/4}. \quad (\text{VIII.193})$$

Однако, зависимость $\theta(\tau)$ найти, естественно, не удастся. Поэтому мы поступим следующим образом: из уравнения (VIII.192) найдем прямым численным интегрированием зависимость $\tau(\theta)$. Тогда уравнение (VIII.193) можно рассматривать, как уравнение вида $y = y(\theta)$, а систему двух уравнений (VIII.192) и (VIII.193) можно рассматривать как параметрические уравнения графика $y = y(\tau)$:

$$\tau(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{1 - (1 - \sigma_0)(\exp(-u) + u\text{Ei}(-u))}}, \quad (\text{VIII.194})$$

$$y(\theta) = \left[1 - (1 - \sigma_0)(e^{-\theta(\tau)} + \theta(\tau)\text{Ei}(-\theta(\tau))) \right]^{1/4}$$

На Рис. 45 показаны результаты численного моделирования процесса разогрева равновесной компоненты сверхтепловыми частицами для первоначального распределения (VIII.187) на основе уравнений (VIII.194).

Из этого рисунка видно, что при $\tau \sim 1$ температура равновесной компоненты плазмы фактически насыщается до значения $T_0(t)$, т.е., к моменту времени $t \sim \mathcal{P}_0^2/\xi^2$, что совпадает с асимптотической оценкой (VIII.178).

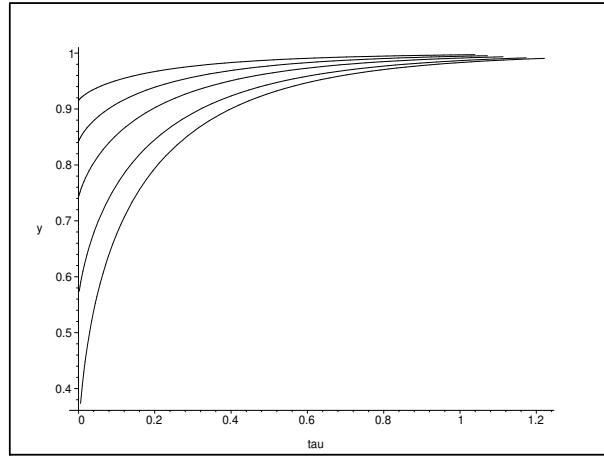


Рис. 44. Релаксация температуры плазмы к равновесной: $y = T(t)/T_0(t)$ в зависимости от параметра σ_0 : – снизу вверх $\sigma_0 = 0,01; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7$. По оси абсцисс отложены значения безразмерной временной переменной τ .

VIII.9 Основные закономерности космологической модели с изначально слабо нарушенным тепловым равновесием

VIII.9.1 Концентрации ультрарелятивистских реликтовых частиц

Равновесные концентрации ультрарелятивистских частиц во вселенной со слабо нарушенным термодинамическим равновесием определяются соотношением (VIII.121), которое с учетом определения (VIII.134) можно переписать в терминах введенной нами функции $y(t)$:

$$n_a(t) = \frac{\rho T^3(t)}{\pi^2} g_n \zeta(3) = n_a^0(t) y^3(t) \leq n_a^0(t), \quad (\text{VIII.195})$$

где $n_a^0(t)$ - равновесные концентрации этих же частиц в СКС:

VIII.9. Закономерности слабонервновесной космологической модели

$$n_a^0(t) = \frac{\rho T_0^3(t)}{\pi^2} g_n \zeta(3) = \frac{\rho}{\pi^2} g_n \zeta(3) \left(\frac{45}{3\pi^3 \mathcal{N}} \right)^{3/4} t^{-3/2}. \quad (\text{VIII.196})$$

Таким образом, в каждый данный момент времени t количество ультррелятивистских частиц, находящихся в равновесии, меньше, чем в СКС. Если взаимодействие между частицами описывается скейлинговым сечением вида (VIII.95), то количество неравновесных частиц описывается функцией распределения вида (VIII.133). Рассмотрим реакции частиц в области низких энергий, в которых скейлинг может нарушаться. Пусть $\tau_{eff}^a(t)$ - эффективное время взаимодействий частиц сорта « a » с другими частицами, и пусть в исследуемой области энергий неравенство:

$$\tau_{eff}^a(t) > t \quad (\text{VIII.197})$$

имеет своим решением:

$$t > t_a^*. \quad (\text{VIII.198})$$

Тогда в момент времени $t = t_a^*$ частицы сорта « a » перестают взаимодействовать с остальными, т.е., становятся *реликтовыми* — число таких стабильных частиц во времена более поздние, чем t_a^* , сохраняется, а их плотность эволюционирует в дальнейшем по закону:

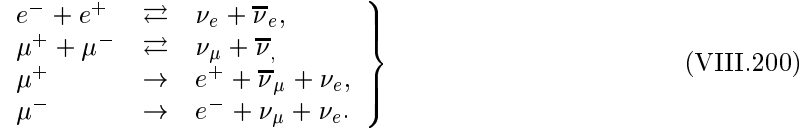
$$n_a(t) = n_a^0(t_a^*) y^3(t_a^*) \left[\frac{a(t_a^*)}{a(t)} \right]^3. \quad (\text{VIII.199})$$

Поэтому, если на момент времени $t = t_a^*$ равновесие в целом еще не восстановлено, число реликтовых частиц сорта « a » будет в $y^3(t_a^*)$ меньше, чем получается в стандартном сценарии¹¹. Таким образом, при $\sigma_0 \ll 0$ меняя параметр модели неравновесной вселенной $\bar{\mathcal{P}}_0$, можно регулировать количество реликтовых частиц и делать это число сколь угодно малым [181] - при увеличении $\bar{\mathcal{P}}_0$ количество реликтовых частиц уменьшается. Так, при $\bar{\mathcal{P}}_0 > 10^2$ и $\sigma_0 \ll 1$ исчезают реликтовые сверхмассивные бозоны, при $\bar{\mathcal{P}}_0 > 3 \cdot 10^{17}$ и $\sigma_0 \ll 1$ исчезают реликтовые нейтрино. Эту приближенную оценку, сделанную в работах, [178], [181], мы уточним ниже.

¹¹Время t_a^* часто называют временем закалки (см., например [150]).

VIII.9.2 Реликтовые нейтрино

Итак, исследуем вопрос о выходе реликтовых нейтрино в процессе за-
калки. Тепловое равновесие электронных и мюонных нейтрино устанавливается, в основном, реакциями:



Сечение электрослабых взаимодействий, соответствующим реакциям нейтринной аннигиляции (VIII.200) в интересующей нас области достаточно низких энергий E , описывается выражением:

$$\sigma_{nu} \approx \frac{G_\mu^2 E^2}{\hbar^4 c^4}, \quad (\text{VIII.201})$$

где $G_\mu \approx G_{nu} := 1,4358 \cdot 10^{-49} \text{erg/cm}^3$ - константа электрослабых взаимодействий. Вычисляя время закалики электронных нейтрино, t_ν по формуле:

$$\tau_{eff} = \frac{1}{n_E(t_\nu) \sigma_\nu(t_\nu) c} = t_\nu, \quad (\text{VIII.202})$$

куда необходимо подставить $E = T(t)$, выражение для равновесной плотности ультрарелятивистских электронов (VIII.121) и температуру равновесной компоненты $T(t)$, вычисленную выше. Тогда отношение числа электронных нейтрино после закалики в неравновесной модели к этому же числу в равновесной, N_ν , определится выражением:

$$N_\nu = \frac{T(t_\nu)^3}{T_0(t_\nu)^3} = y^{3/4}(t_\nu). \quad (\text{VIII.203})$$

На Рис. 45 показаны результаты численных расчетов выхода электронных нейтрино в слабонеравновесной модели вселенной. Эти результаты, в общем, подтверждают указанные выше качественные оценки предыдущих работ.

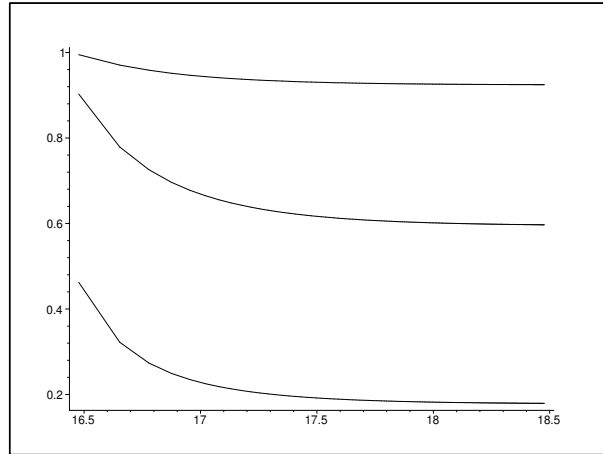


Рис. 45. Выход электронных реликтовых нейтрино после закалки по отношению к стандартной модели, n_ν/n_ν^0 , (ось ординат) в зависимости от параметра неравновесной модели, $\lg \mathcal{P}_0$, (ось абсцисс). Сверху вниз: $\sigma_0 = 0,9$, $\sigma_0 = 0,5$, $\sigma_0 = 0,1$.

VIII.9.3 Закалка нейтронов и образование космологического гелия

Тепловое равновесие нерелятивистских нейтронов устанавливается в реакциях типа:



Относительная концентрация реликтовых нейтронов, N_n , определяется кинетическим уравнением¹²:

$$\frac{dN_n}{dt} + (a + b)N_n = b, \quad (\text{VIII.205})$$

где:

$$N_n(t) + N_p(t) = 1, \quad (\text{VIII.206})$$

¹²Подробности см., например, в [150].

(N_p - относительная концентрация протонов), коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ (скорости реакций (VIII.204)) связаны тождеством:

$$b(t) = a(t)e^{-\Delta mc^2/T(t)}, \quad (\text{VIII.207})$$

$\Delta m = m_n - m_p \approx 1,3 \text{ Мев}$ - дефект массы нейтрона.

Исследуем уравнение (VIII.205). При $t \rightarrow 0$ согласно (VIII.207) $a(t) \rightarrow b(t)$, поэтому при $t \rightarrow 0$ из (VIII.201) получим соотношение:

$$\left. \frac{dN_n}{dt} \right|_{t \rightarrow 0} = a(t)[1 - 2N_n(0)]. \quad (\text{VIII.208})$$

Из (VIII.208) сразу следует, что при $N_n(0) > 1/2$ концентрация нейтронов с самого падает со временем, а при $N_n(0) < 1/2$ - растет. Во втором случае функция $N_n(t)$ всегда имеет максимум в момент времени t_* , определяемый соотношением:

$$N_n(t_*) = \frac{1}{1 + e^{\Delta mc^2/T(t_*)}} < \frac{1}{2}. \quad (\text{VIII.209})$$

При $N_n(0) = 1/2$ разлагая в ряд Тейлора $N_n(t)$ по малому t и используя при этом уравнение (VIII.205) и предельные соотношения при $t \rightarrow 0$, получим:

$$N_n(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{4} a(t) \frac{\Delta mc^2}{T^2} \frac{dT}{dt} \Big|_{t=0} t^2 + \dots$$

Поскольку второй член в правой части разложения отрицателен, то и при $N_n(0) = 1/2$ концентрация нейтронов падает.

Перейдем теперь к численному моделированию. Коэффициент $a(t)$ в единицах sec^{-1} при высоких температурах описывается приближенным выражением (см., например, [150]):

$$a(t) \approx 1,61 \cdot \tilde{T}^5(t), \quad (\text{VIII.210})$$

где $\tilde{T}(t)$ - температура в Мев. При низких температурах $a(t) = W \approx 10^{-3} \text{ sec}^{-1}$, где W - вероятность распада свободного нейтрона. Полагая в (VIII.131) вслед за [150] $\mathcal{N} = 4, 5$, получим для $\tilde{T}_0(t)$ соотношение:

$$\tilde{T}_0 = 0,89t^{-1/2}, \quad (\text{VIII.211})$$

где время измеряется в секундах. Как показывают численные расчеты, этот момент времени достигается достаточно быстро¹³, - дальнейшая

¹³При этом значение N_n в максимуме составляет примерно 0,45.

VIII.9. Закономерности слабонеравновесной космологической модели

история нуклеосинтеза практически не зависит от начальной относительной концентрации нейтронов.

Рассмотрим реакции (VIII.204) в условиях, пока равновесие в плазме в целом еще не достигнуто, т.е., $y(t) < 1$. Полагая, что при этом функция $y(t)$ подчиняется асимптотике (VIII.173), и при интересующих нас масштабах времен $\Lambda \simeq \alpha^{-2} \approx (137)^2$, получим:

$$\tilde{T} \approx 0,89 \frac{1}{\sqrt{t}} \sqrt{\sqrt{\sigma_0} + 0,523(1 - \sigma_0) \frac{\sqrt{t}}{P_0}}, \quad (\text{VIII.212})$$

где:

$$P_0 = \frac{\mathcal{P}_0}{10^{17}}.$$

На 46-49 показаны результаты численного интегрирования уравнения (VIII.212).

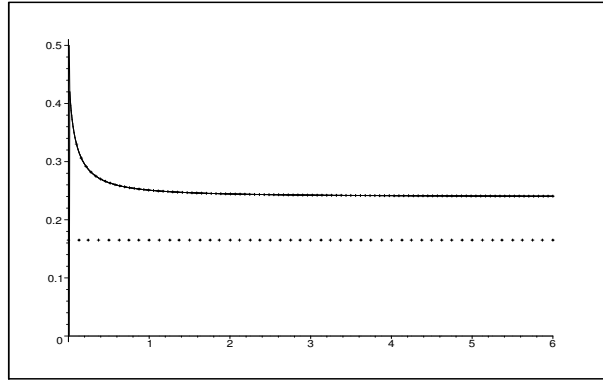


Рис. 46. Влияние начальной концентрации нейтронов на нуклеосинтез в неравновесной вселенной при значении параметров $\mathcal{P}_0 = 10^{18}$ и $\sigma_0 = 0,1$: по оси абсцисс отложено время в секундах, по оси ординат - концентрация нейтронов, $N_n(t)$. Тонкая линия линия - $N_n(0) = 0$, жирная линия - $N_n(0) = 0,5$, пунктирная линия - $N_n(0) = 1$; пунктирной прямой отмечено значение $N_n = 0,165$. Как видно из рисунка, все три кривые практически совпадают, отличаясь лишь для малых значений времени, $t < 0,2 \text{ sec}$.

Результаты численного интегрирования, приведенные на 46, подтверждают тот факт, что конечная концентрация нейтронов практически не зависит от их начальной концентрации. При $\mathcal{P}_0 \lesssim 10^{17}$ количество нейтронов после заковки практически совпадает с аналогичным количеством в горячей модели (СКС). При $\mathcal{P}_0 > 10^{17}$ конечный выход нейтронов после заковки растет с увеличением \mathcal{P}_0 , однако при постоянном значении \mathcal{P}_0 медленно уменьшается с ростом параметра равновесности σ_0 .

Приведенные результаты численных расчетов заковки нейтронов в неравновесной вселенной, в общем, подтверждают оценки, полученные ранее в работах [178] и [181], лишь уточняя их в деталях. Заметим, что максимальная весовая концентрация космологического He_4 , N_{He_4} , равна (см. [150]):

$$\max(N_{\text{He}_4}) = 2N_n. \tag{VIII.213}$$

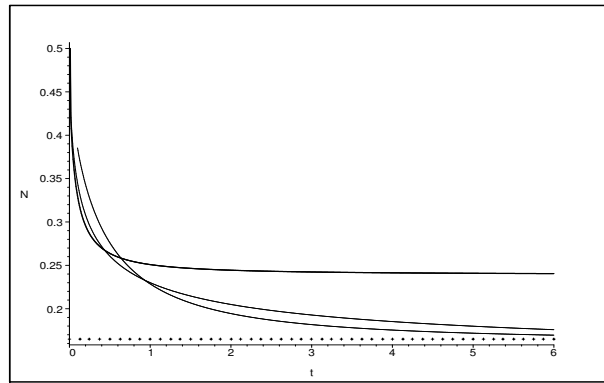


Рис. 47. Влияние параметра \mathcal{P}_0 на нуклеосинтез в неравновесной вселенной в зависимости от при $N_n(0) = 0,5$ и $\sigma_0 = 0,1$: по оси абсцисс отложено время в секундах, по оси ординат - концентрация нейтронов, $N_n(t)$. Нижняя линия - классический результат (см. [150]), средняя - $\mathcal{P}_0 = 10^{17}$, жирная линия - $\mathcal{P}_0 = 10^{18}$; пунктирной линией отмечено значение $N_n = 0,165$.

VIII.9. Закономерности слабонервновесной космологической модели

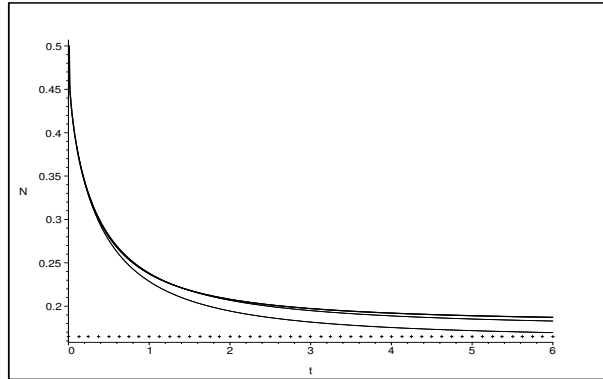


Рис. 48. Влияние параметра \mathcal{P}_0 на нуклеосинтез в неравновесной вселенной при $N_n(0) = 0,5$ и $\sigma_0 = 0,9$: по оси абсцисс отложено время в секундах, по оси ординат - концентрация нейтронов, $N_n(t)$. Нижняя линия - классический результат (см. [150]), средняя - $\mathcal{P}_0 = 10^{17}$, жирная линия - $\mathcal{P}_0 = 10^{18}$; пунктирной линией отмечено значение $N_n = 0,165$.

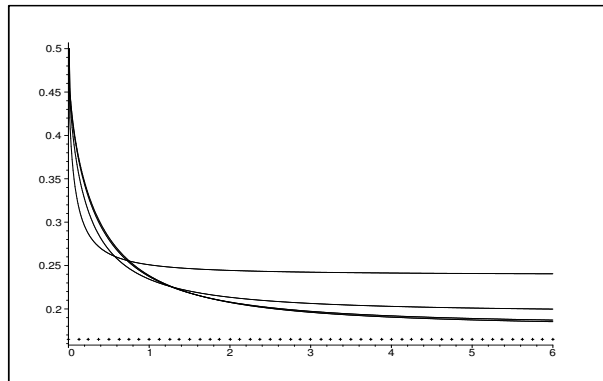


Рис. 49. Влияние параметра σ_0 на нуклеосинтез в неравновесной вселенной при $N_n(0) = 0,5$ и $\mathcal{P}_0 = 10^{18}$: по оси абсцисс отложено время в секундах, по оси ординат - концентрация нейтронов, $N_n(t)$. Сверху вниз: $\sigma_0 = 0,1$, $\sigma_0 = 0,5$, $\sigma_0 = 0,9$, $\sigma_0 = 0,99$; пунктирной линией отмечено значение $N_n = 0,165$. Последние две линии практически неразличимы.

VIII.9.4 Наблюдательные ограничения на параметры неравновесного распределения

В связи с ростом концентрации космологического He_4 при увеличении параметра \mathcal{P}_0 наблюдательные данные о содержании He_4 во вселенной на уровне не выше 35% налагают ограничения на верхние значения параметра неравновесной модели \mathcal{P}_0 при заданном значении ее другого параметра σ_0 . На этот факт указывалось ранее в работах [178], [181], в которых на основе количественных оценок была указана область допустимых значений параметров неравновесной модели. Однако, оценки эти, верные при небольших значениях параметра σ_0 , требуют уточнения в области $\sigma_0 \sim 1$. Эта уточненная картина изображена на Рис. 50.

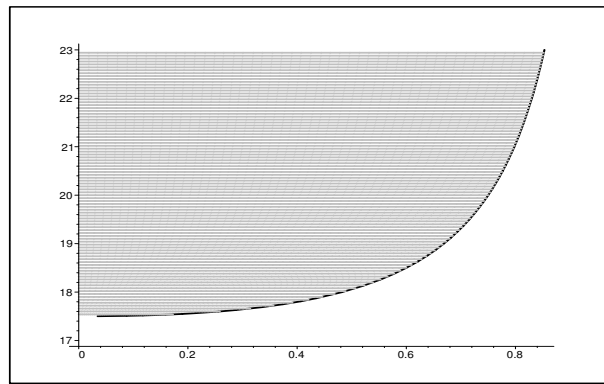


Рис. 50. Допустимая по концентрации He_4 область параметров слаборавновесной модели $\lg \mathcal{P}_0$ (ось ординат) и σ_0 (ось абсцисс) - заштрихована запрещенная область значений параметров.

Заключение

Резюмируя результаты раздела, заметим, что современные данные наблюдательной космологии не противоречат предположению о слабом изначальном нарушении теплового равновесия вселенной в смысле условия (VIII.111), т.е., изначальной малости числа сверхтепловых частиц по сравнению с числом тепловых (см. условие (VIII.111)). Эволюция неравновесной вселенной в случае слабого отклонения первоначального распределения от теплового равновесия, в основном, управляется двумя

VIII.10. Интеграл столкновений в форме Фоккера - Планка

безразмерными параметрами параметрами: $0 \leq \sigma_0 \leq 1$ - относительным вкладом в плотность энергии равновесной компоненты и $1 < \overline{P}_0 < +\infty$ - отношением средней энергии сверхтепловых частиц к температуре равновесной вселенной в один и тот же момент времени. Можно сказать и так: параметр \overline{P}_0 равен средней энергии неравновесных частиц в планковских масштабах энергии на планковский же момент времени. При этом наблюдательные данные, в основном, распространенность космологического He_4 , налагают некоторые ограничения на область допустимых значений параметров слабонеравновесной модели, но не противостоят значениям параметра $\overline{P}_0 \lesssim 3 \cdot 10^{17}$, т.е. превышения средней энергии частиц сверхтепловой компоненты на 17(!) порядков температуры равновесной компоненты. Соответствующая этому параметру энергия в современной вселенной при температуре реликтового излучения $3^\circ K$ составляет $0,8 \cdot 10^5 GeV(!)$.

VIII.10 Вывод релятивистского интеграла столкновений в форме Фоккера - Планка

Рассмотрим снова интеграл 4-х частичных столкновений в ультрарелятивистском пределе (VI.110):

$$J_{ab}(p) = -\frac{(2S_b + 1)}{32(2\pi)^4 p} \int_0^\infty dq \int_0^{4pq} \frac{ds}{s} \int_0^1 dx F(x, s) \int_0^{2\pi} d\varphi \times \\ \{f_a(p)f_b(q)[1 \pm f_c(p - \Delta)][1 \pm f_d(q + \Delta)] - \\ - f_c(p - \Delta)f_d(q + \Delta)[1 \pm f_a(p)][1 \pm f_b(q)]\}, \quad (VIII.214)$$

где (см. [195]):

$$x = -\frac{t}{s}, \quad \Delta = x(p - q) - \cos \varphi \sqrt{x(1-x)(4pq - s)}. \quad (VIII.215)$$

Будем предполагать, что при столкновениях частиц в среднем передается небольшой импульс, т.е.,

$$\overline{(p_a - p_c)^2} \ll \overline{p^2}, \quad (VIII.216)$$

чему соответствуют значения переменной $x \rightarrow 1$. Полагая

$$x = 1 - \xi^2, \quad (\text{VIII.217})$$

разложим в ряд Тейлора интеграл столкновений по малости передаваемого импульса, т.е., по малости параметра $\xi^2 \ll 1$. Из формулы (??) имеем:

$$\Delta p = (1 - \xi^2)(p - q) - \cos \varphi \xi \sqrt{4pq - s}. \quad (\text{VIII.218})$$

Удерживая члены порядка ξ^2 , запишем разложения функций распределения:

$$f(p') = f(q) + \frac{df}{dq} [\cos \varphi \xi \sqrt{4pq - s} + \xi^2(p - q)] + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dq^2} \xi^2 (4pq - s) \cos^2 \varphi;$$

$$f(q') = f(p) - \frac{df}{dp} [\cos \varphi \xi \sqrt{4pq - s} + \xi^2(p - q)] + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dp^2} \xi^2 (4pq - s) \cos^2 \varphi.$$

При интегрировании по угловой переменной интегралы, линейные по ξ , исчезнут, поэтому для внутреннего интеграла мы получим выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi [f(p')f(q') - f(p)f(q)] = \\ & = f(p)f(q) + (p - q)\xi^2 \left[f(p) \frac{df(q)}{dq} - f(q) \frac{df(p)}{dp} \right] + \\ & \frac{1}{4} \xi^2 (4pq - s) \left[f(p) \frac{d^2 f(q)}{dq^2} - 2 \frac{df(p)}{dp} \frac{df(q)}{dq} + f(q) \frac{d^2 f(p)}{dp^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{VIII.219})$$

Проводя интегрирование по переменной x , положим:

$$A = \int_0^1 |F(s, x)|^2 (1 - x) dx; \quad B = \int_0^1 x |F(s, x)|^2 dx, \quad (\text{VIII.220})$$

так что:

$$A + B = \int_0^1 |F(s, x)|^2 dx. \quad (\text{VIII.221})$$

VIII.10. Интеграл столкновений в форме Фоккера - Планка

Таким образом, согласно (VIII.70), (VIII.95), (VIII.96), (VIII.85) имеют место соотношения:

$$A + B \approx \frac{32\pi^2}{\Lambda(s)}, \quad A \approx \frac{16\pi^2}{\Lambda(s)}.$$

В дальнейшем будем учитывать тот факт, при сверхвысоких энергиях восстанавливается скейлинг, т.е., выполняется соотношение (VIII.89), согласно которому $F(s, x) \approx F(x)$, так что $A \approx \text{Const}$, $B \approx \text{Const}$. Тогда, произведя интегрирование по переменной s в полученном выражении, найдем:

$$J_{ab}(p) = A \frac{2S_b + 1}{(4\pi)^3 p} \int_0^\infty dq \left\{ \left[f(p) \frac{df(q)}{dq} - f(q) \frac{df(p)}{dp} \right] + \right. \\ \left. + 2p^2 q^2 \left[f(p) \frac{d^2 f(q)}{dq^2} - 2 \frac{df(p)}{dp} \frac{df(q)}{dq} + f(q) \frac{d^2 f(p)}{dp^2} \right] \right\}.$$

Произведем интегрирование по частям в части интеграла, содержащего вторые производные по переменной q , при этом:

$$\int_0^\infty q^2 \frac{d^2 f(q)}{dq^2} dq = q^2 \frac{df(q)}{dq} \Big|_0^\infty - 2 \int_0^\infty q \frac{df(q)}{dq} dq = \\ = -2qf(q) \Big|_0^\infty + 2 \int_0^\infty f(q) q^2 dq = 2 \int_0^\infty f(q) q^2 dq,$$

где мы учли необходимое условие сходимости выражений для плотности числа частиц и энергии:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} q^n f(q) = 0, \quad (0 \leq n \leq 3). \quad (\text{VIII.222})$$

Таким образом, проводя интегрирование по частям, получим окончательно интеграл столкновений в форме Фоккера - Планка [181]:

$$J_{ab}(p) = A \frac{2S + 1}{4(2\pi)^3 p} \frac{\partial}{\partial p} \left[p^2 \int_0^\infty q^2 \left(f(q) \frac{\partial f(p)}{\partial p} - f(p) \frac{\partial f(q)}{\partial q} \right) dq \right]. \quad (\text{VIII.223})$$

VIII.11 Кинетическое уравнение для сверх-тепловой компоненты в диффузионном приближении

Подставляя полученный интеграл столкновений в форме Фоккера - Планка (VIII.269) в кинетическое уравнение (VIII.105), приведем его к виду уравнения типа Фоккера - Планка:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial f_a}{\partial p} = A \frac{2S+1}{4(2\pi)^3 p^2} \times \frac{\partial}{\partial p} \left[p^2 \int_0^\infty q^2 \left(f(q) \frac{\partial f(p)}{\partial p} - f(p) \frac{\partial f(q)}{\partial q} \right) dq \right]. \quad (\text{VIII.224})$$

Производя еще раз интегрирование по частям в уравнении (VIII.281) и учитывая соотношения:

$$n(t) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty q^2 f(q) dq, \quad (\text{VIII.225})$$

- плотность числа частиц,

$$T_S(t) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty q f(q) dq, \quad (\text{VIII.226})$$

- след тензора энергии-импульса частиц, приведем уравнение (VIII.281) к виду:

$$\frac{\partial f_a}{\partial \eta} - \frac{a'}{a} p \frac{\partial f_a}{\partial p} = \frac{A}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \left[n(\eta) \frac{\partial f(p)}{\partial p} + 2T_S(\eta) f(p) \right]. \quad (\text{VIII.227})$$

Вследствие неразличимости частиц выполняются законы сохранения числа частиц:

$$n(\eta) a^3(\eta) = \text{Const} \Rightarrow n(\eta) = \frac{n_*}{a(\eta)^3}. \quad (\text{VIII.228})$$

В универсальной системе единиц ($G = \hbar = c = 1$) выберем масштабный фактор в виде:

$$a(t) = \sqrt{2t} = \eta,$$

VIII.11. Диффузионное уравнение для сверхтепловых частиц

так что на «полупланковский» момент времени ($\eta = 1, t = \frac{1}{2}$) — $a = 1$, $n = n_0$, и перейдем к конформному импульсу \mathcal{P} , являющемуся интегралом движения в метрике Фрийдмана:

$$p = a(\eta)\mathcal{P}, \quad (\text{VIII.229})$$

так что на планковский момент времени $p = \mathcal{P}$. Далее введем согласно (VIII.281), (VIII.225) и (VIII.229) конформные плотности числа частиц и энергии:

$$n_*(\eta) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f(\eta, \mathcal{P}) \mathcal{P}^2 d\mathcal{P} \quad (= \text{Const} = n_0);$$

$$\varepsilon_*(\eta) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f(\eta, \mathcal{P}) \mathcal{P}^3 d\mathcal{P},$$

а также средний конформный импульс $\langle \mathcal{P} \rangle$ с помощью соотношения [181]:

$$\varepsilon_*(\eta) = \langle \mathcal{P}(\eta) \rangle n_*. \quad (\text{VIII.230})$$

так что:

$$n = \frac{n_*}{a^3}; \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_*}{a^4}; \quad \Rightarrow \varepsilon = \langle p \rangle n. \quad (\text{VIII.231})$$

Введем также безразмерную функцию $\beta(\eta)$ с помощью отношения:

$$\beta(\eta)n_* = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f(\eta, \mathcal{P}) \mathcal{P} d\mathcal{P}. \quad (\text{VIII.232})$$

В результате приведем уравнение (VIII.227) к более изящной форме относительно функции $f(\eta, \mathcal{P})$ [179, 181]:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{An_*}{\mathcal{P}^2} \frac{\partial}{\partial \mathcal{P}} \mathcal{P}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \mathcal{P}} + 2\beta(\eta)f \right), \quad (\text{VIII.233})$$

- это и есть искомое кинетическое уравнение в диффузионном приближении.

Заметим, что вследствие определения (VIII.232) функция $\beta(\eta)$ сама определяется через интеграл от функции распределения. Таким образом, несмотря на внешнюю простоту, уравнение (VIII.233) остается интегро - дифференциальным. Заметим также, что ультрарелятивистская равновесная функция распределения:

$$f_0 = C(\eta)e^{-2\frac{\beta(\eta)}{\mathcal{P}}}, \quad (\text{VIII.234})$$

где $C(\eta)$ - произвольная функция, обращает в нуль полученный интеграл столкновений. Это означает, что с течением времени $\eta \rightarrow \infty$ решение уравнения (VIII.233) стремится к равновесному распределению (VIII.234) с температурой:

$$T(\eta) = \frac{\beta(\eta)}{a(\eta)} \Rightarrow T_* = \beta(\eta), \quad (\text{VIII.235})$$

где T_* - конформная температура.

VIII.12 Эволюция сверхтепловых частиц в сильно неравновесной Вселенной

VIII.12.1 Нормировка диффузионного уравнения для ультрарелятивистской Вселенной

Рассмотрим Вселенную на ультрарелятивистской стадии расширения, и пусть \mathcal{E} - полная плотность энергии материи, а \mathcal{E}_* - ее конформное значение. Тогда из уравнений Эйнштейна следует:

$$\mathcal{E} = \frac{3}{32\pi t^2} = \frac{3}{8\pi a^4} = \frac{3}{8\pi \eta^4} \Rightarrow \mathcal{E}_* = \frac{3}{8\pi}. \quad (\text{VIII.236})$$

В отличие от разделов VIII.6 - VIII.9 рассмотрим эволюцию сверхтепловых частиц, когда число равновесных частиц в области энергий порядка и ниже унитарного предела, n_T меньше числа сверхтепловых частиц в скейлинговой области,

$$n_T \ll n. \quad (\text{VIII.237})$$

Такая ситуация, в принципе, может быть реализована в очень ранней Вселенной. Нас будет интересовать процесс термализации неравновесных частиц. В этом случае \mathcal{E}_* можно с большой точностью полагать

VIII.12. Космологическая эволюция с сильно нарушенным равновесием

равной конформной плотности неравновесных частиц, которая, следовательно, приближенно постоянна, как и конформная плотность числа частиц. Итак, будем в дальнейшем полагать:

$$\varepsilon_* = \frac{3}{8\pi} = \text{Const}; \quad n_* = n_0 = \text{Const}. \quad (\text{VIII.238})$$

Наличие двух макроскопических интегралов позволяет провести дальнейшее упрощение диффузионного уравнения. Введем еще одну безразмерную константу — среднее значение конформной энергии сверхтепловых частиц:

$$\mathcal{P}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathcal{P} \rangle \equiv \frac{\varepsilon_*}{n_*} = \text{Const}. \quad (\text{VIII.239})$$

Эта безразмерная величина является, фактически, свободным параметром модели, — большим значениям этой константы соответствует большое превышение средней энергии частиц над тепловой. Введем с помощью этой константы безразмерную импульсную переменную x :

$$x = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} \quad (\text{VIII.240})$$

и новую безразмерную функцию распределения $G(x)$:

$$f(\eta, x) = \frac{3\pi}{4(2S+1)} \frac{G(\eta, x)}{\mathcal{P}_0^4}, \quad (\text{VIII.241})$$

так что

$$\int_0^{\infty} G(\eta, x) x^2 dx = 1, \quad (\text{VIII.242})$$

Произведя замену переменных, получим соотношения:

$$\beta(\eta) = \frac{b(\eta)}{\mathcal{P}_0}; \quad (\text{VIII.243})$$

где

$$b(\eta) = \int_0^{\infty} G(\eta, x) x dx; \quad (\text{VIII.244})$$

$$\int_0^{\infty} G(\eta, x) x^3 dx = 1. \quad (\text{VIII.245})$$

Таким образом, в выбранных нами переменных функция нормированная распределения $G(\eta, x)$ должна удовлетворять двум соотношениям нормировки - (VIII.249) и (VIII.250). Введем, наконец, безразмерное время τ :

$$\tau = \frac{3A\eta}{8\pi\mathcal{P}_0^3}, \quad (\text{VIII.246})$$

и запишем окончательно диффузионное уравнение (VIII.236) относительно функции $G(\tau, x)$ [179, 181]:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left(\frac{\partial G}{\partial x} + 2b(\tau)G \right). \quad (\text{VIII.247})$$

Уравнение (VIII.247) должно решаться с начальными и граничными условиями вида:

$$G(0, x) = G_0(x); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} G(\tau, x)x^3 = 0, \quad (\text{VIII.248})$$

причем функция $G_0(x)$ должна удовлетворять интегральным условиям (VIII.249), (VIII.250):

$$\int_0^{\infty} G_0(x)x^2 dx = 1; \quad (\text{VIII.249})$$

$$\int_0^{\infty} G_0(x)x^3 dx = 1. \quad (\text{VIII.250})$$

Отметим далее следующее обстоятельство [179] — точным решением кинетического уравнения (VIII.247), удовлетворяющим соотношениям нормировки (VIII.249), (VIII.250), является равновесное ультрарелятивистское бoльцмановское распределение с конформной температурой $\mathcal{T} = 1/3$:

$$f_0 = \frac{27}{2} e^{-3x}. \quad (\text{VIII.251})$$

Можно показать, что при больших временах τ функция $\beta \rightarrow 0$. При $\beta = 0$ уравнение (VIII.247) сводится к уравнению теплопроводности в сферической системе координат в случае сферической симметрии:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right). \quad (\text{VIII.252})$$

VIII.12. Космологическая эволюция с сильно нарушенным равновесием

Стандартное решение уравнения трехмерного теплопроводности, отвечающее начальному условию:

$$U(x, y, z, 0) = U_0(x, y, z) \quad (\text{VIII.253})$$

имеет вид (см., например, [201]):

$$U(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi t^{3/2}} \int_{V_0} U_0(\vec{r}_0) e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2}{4t}} dV_0 \quad (\text{VIII.254})$$

Для того, чтобы получить на основе этого решения сферически симметричное решение уравнения (VIII.247) выберем временно систему координат:

$$\vec{r}_0 = (0, 0, r)$$

и перейдем в интеграле (VIII.254) к сферической системе координат:

$$x = r_0 \cos \phi \cos \theta; y = r_0 \sin \phi \cos \theta; z = r_0 \sin \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \sin \theta$$

и проведем интегрирование по угловым переменным. В результате получим решение, которое на ранних стадиях расширения описывает нормированную функцию распределения в унитарном пределе:

$$G(\tau, x) = \frac{1}{2x\sqrt{\pi\tau}} \times \int_0^\infty G(y) \left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4\tau}} \right] y dy. \quad (\text{VIII.255})$$

Заметим, что в приближении $\beta \rightarrow 0$ функция G в изучаемой области уже не обязана удовлетворять интегральным соотношениям нормировки (VIII.249) и (VIII.250), так как данное приближение не учитывает процессы притока частиц в рассматриваемую область за счет столкновения с низкоэнергетическими частицами, приводящими к термализации распределения. Тем не менее, начальное распределение должно удовлетворять этим соотношениям нормировки.

VIII.12.2 Проверка законов сохранения

Как известно (см. разделы II.2, II.3), интегральными следствиями кинетических уравнений являются законы сохранения макроскопических потоков — в случае упругих столкновений, каковыми формально являются четырехчастичные реакции в унифицированной теории, должны выполняться законы сохранения числа сверхтепловых частиц и их энергия. Поскольку диффузионное уравнение VIII.247 получено из кинетического уравнения, оно должно поддерживать выполнение указанных законов сохранения. Проверим, так ли это. Умножая обе части (VIII.247) на x^2 и интегрируя по частям на всем множестве значений $x \in [0, +\infty)$, получим:

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} x^2 G(x, \tau) dx = \left\{ x^2 \left(\frac{\partial G}{\partial x} + 2b(\tau)G \right) \right\} \Big|_0^{\infty}.$$

Учитывая условия (VIII.248), получим отсюда:

$$\int_0^{\infty} x^2 G(x, \tau) dx = \text{Const.}$$

Эта постоянная согласно (VIII.249) равна 1, следовательно, закон сохранения числа частиц тождественно выполняется. Умножая теперь обе части (VIII.247) на x^3 и интегрируя по частям на всем множестве значений $x \in [0, +\infty)$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} x^3 G(x, \tau) dx &= \\ &= \left\{ x^3 \left(\frac{\partial G}{\partial x} + 2b(\tau)G \right) \right\} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x^2 \left(\frac{\partial G}{\partial x} + 2b(\tau)G \right). \end{aligned} \quad (\text{VIII.256})$$

Учитывая условия (VIII.248) еще раз интегрируя по частям (VIII.256), получим:

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} x^3 G(x, \tau) dx = -x^2 G \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x G dx - 2b(\tau) \int_0^{\infty} x^2 G dx.$$

VIII.12. Космологическая эволюция с сильно нарушенным равновесием

Учитывая теперь соотношение нормировки (VIII.249) и определение функции $b(\tau)$, (VIII.244), получим отсюда:

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} x^3 G(x, \tau) dx = 0,$$

следовательно, энергия частиц также сохраняется.

Дальнейшее аналитическое исследование интегро - дифференциального уравнения (VIII.247) возможно в двух крайних приближениях:

1. Приближение малых времен эволюции:

$$\tau \ll 1, \quad (\text{VIII.257})$$

соответствующее ранним стадиям эволюции Вселенной;

2. Приближение очень больших импульсов:

$$x \ll 1, \quad (\text{VIII.258})$$

соответствующее высокоэнергетическому хвосту распределения.

VIII.12.3 Разложение уравнения типа Фоккера-Планка по малости τ

При выполнении (VIII.257) член в левой стороне диффузионного уравнения (VIII.247) является главным, что сразу дает с учетом начального условия:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = 0, \Rightarrow G(x, \tau) = G_0(x). \quad (\text{VIII.259})$$

В следующем приближении будем иметь:

$$\frac{\partial G_1}{\partial \tau} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left(\frac{\partial G_0(x)}{\partial x} + 2b_0 G_0(x) \right). \quad (\text{VIII.260})$$

Заметим, что b_0 , определенная относительно функции $G_0(x)$ от времени не зависит, поэтому решение для первого порядка приближения имеет вид:

$$G_1 = \tau g_1(x); \quad g_1(x) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left(\frac{\partial G_0(x)}{\partial x} + 2b_0 G_0(x) \right). \quad (\text{VIII.261})$$

Таким образом, очевидно, что приближение малого времени τ полностью эквивалентно разложению точной функции $G(x, \tau)$ в ряд Тейлора по степеням τ . Учитывая это, сразу положим:

$$G(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \tau^n. \quad (\text{VIII.262})$$

Далее, очевидно, что функции $G_n(x, \tau)$, как и функции $g_n(x)$, вследствие результатов, приведенных выше, должны удовлетворять соотношениям ¹⁴:

$$\int x^2 G_n(x, \tau) dx = 0; \quad \int x^3 G_n(x, \tau) dx = 0, \quad (n = \overline{1, \infty}); \quad (\text{VIII.263})$$

$$\int x^2 g_n(x) dx = 0; \quad \int x^3 g_n(x) dx = 0, \quad (n = \overline{1, \infty}), \quad (\text{VIII.264})$$

смысл которых заключается в том, что поправки к функции распределения не может изменить ни полное число частиц, ни полную энергию. Отсюда, кстати, следует и тот простой факт, что эти поправки знакопеременна на положительном промежутке $[0, +\infty)$.

Подставляя разложение (VIII.262) в диффузионное уравнение (VIII.247) и последовательно повторяя указанную выше процедуру, получим рекуррентную формулу для нахождения более высоких приближений:

$$G_{k+1} = \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \left\{ \frac{\partial^2 g_k}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial g_k}{\partial x} + 2 \sum_{i=0}^k \left[\left(\frac{\partial g_i}{\partial x} + \frac{2g_i}{x} \right) \int_0^{\infty} g_{k-i} x dx \right] \right\} \quad (\text{VIII.265})$$

Аналогично можно получить также рекуррентную формулу для определения функции $b(\tau)$ в уравнении (VIII.247):

$$b_{k+1} = \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial g_k}{\partial x} + 2 \sum_{i=0}^k (g_i b_{k-i}) \right] dx. \quad (\text{VIII.266})$$

¹⁴ Подробное доказательство этого факта приведено в [199].

VIII.12.3.1 Начальное распределение

Рассмотрим конкретную модель начального распределения $G_0(x)$:

$$G_0(x) = \frac{A}{e^{\xi x - y} + 1}, \quad (\text{VIII.267})$$

где A, ξ, y - параметры начального распределения. Эти параметры должны быть таковыми, чтобы автоматически выполнялись соотношения нормировки (VIII.249), (VIII.250). Таким образом, имеем 2 алгебраических соотношения на три параметра, разрешая которые через параметр y , найдем:

$$\xi(y) = \frac{\int_0^{\infty} \frac{t^3 dt}{\exp(t - y) + 1}}{\int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{\exp(t - y) + 1}}; \quad A(y) = \frac{a^3(y)}{\int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{\exp(t - y) + 1}} \quad (\text{VIII.268})$$

На Рис. 51, 52 показаны графики функций (VIII.268):

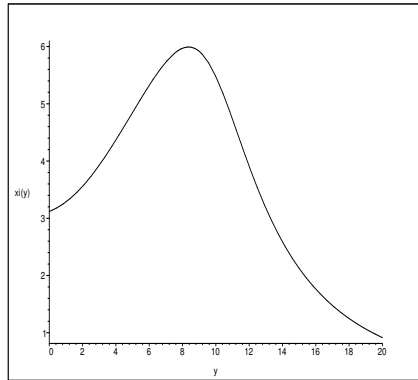


Рис. 51. График функции $\xi(y)$.

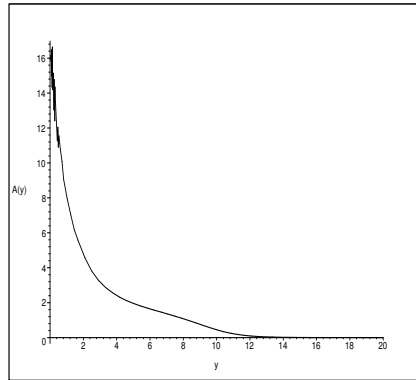


Рис. 52. График функции $A(y)$.

Таким образом, нормированная начальная функция распределения определяется одним произвольным параметром, y :

$$G_0(x, y) = \frac{A(y)}{\exp[\xi(y)x - y] + 1}. \quad (\text{VIII.269})$$

Подставляя найденную функцию в соотношение (VIII.266), найдем $b_0(y)$ (см. Рис. 53, 54).

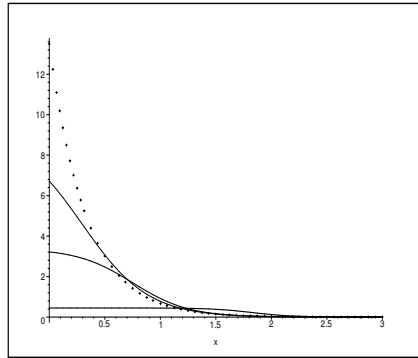


Рис. 53. Начальное нормированное распределение $G_0(x, y)$ в зависимости от параметра y : сверху - вниз: $y = 1$, $y = 3$, $y = 10$. Точечной линией показано равновесное распределение (VIII.251).

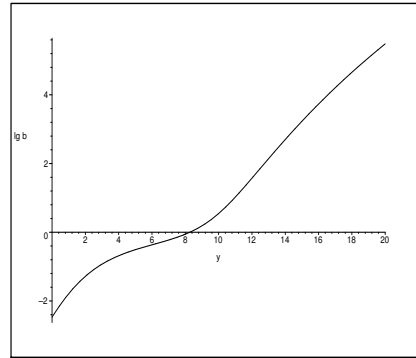


Рис. 54. График функции $\lg b_0(y)$. Графики функций на Рис. 51-54 построены с помощью пакета Maple с помощью приемов, описанных ниже.

Из Рис. 53 видно, что с увеличением параметра y увеличивается степень неравновесности начального распределения (VIII.268).

Как показали численные расчеты, параметры распределения вычисляются крайне неустойчиво, что связано, с одной стороны, с не вполне правильным определением функции «polylog» в пакете Maple, а с другой стороны медленной сходимостью указанных интегралов. Для того, чтобы нам избавиться от этих погрешностей, произведем замену переменных в несобственных интегралах (VIII.268) и представим исследуемые три типа интегралов в форме:

VIII.12. Космологическая эволюция с сильно нарушенным равновесием

$$\begin{aligned}
 J_1(y) &= \int_0^{\infty} \frac{t dt}{\exp(t-y)+1} = \\
 &= y \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x+1} + \int_0^{\infty} \frac{xdx}{e^x+1} + y \int_0^y \frac{dx}{e^{-x}+1} - \int_0^y \frac{xdx}{e^x+1}; \quad (\text{VIII.270})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_2(y) &= \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{\exp(t-y)+1} = y^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x+1} + 2y \int_0^{\infty} \frac{xdx}{e^x+1} + \\
 &+ \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x+1} + y^2 \int_0^y \frac{dx}{e^{-x}+1} - 2y \int_0^y \frac{xdx}{e^x+1} + \int_0^y \frac{x^2 dx}{e^x+1}. \quad (\text{VIII.271})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_3(y) &= \int_0^{\infty} \frac{t^3 dt}{\exp(t-y)+1} = \\
 &= y^3 \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x+1} + 3y^2 \int_0^{\infty} \frac{xdx}{e^x+1} + 3y \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x+1} + \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x+1} + \\
 &+ y^3 \int_0^y \frac{dx}{e^{-x}+1} - 3y^2 \int_0^y \frac{xdx}{e^x+1} + 3y \int_0^y \frac{x^2 dx}{e^x+1} - \int_0^y \frac{x^3 dx}{e^x+1}. \quad (\text{VIII.272})
 \end{aligned}$$

Используя представление ζ - функций Римана и чисел Бернулли:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{e^x+1} dx &= (1-2^{1-n})\Gamma(n)\zeta(n); \\
 \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^x+1} dx &= \frac{2^{2n-1}-1}{2n} \pi^{2n} B_n \quad (\text{VIII.273})
 \end{aligned}$$

и вводя функции:

$$S(n, y) = \int_0^y \frac{x^n}{e^{-x}+1} dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (\text{VIII.274})$$

так что:

$$S(0, y) = \frac{1}{2} \ln(1 + e^y), \quad (\text{VIII.275})$$

получим:

$$J_1(y) = y \ln 2 + \frac{\pi^2}{12} + yS(0, y) - S(1, y); \quad (\text{VIII.276})$$

$$J_2(y) = y^2 \ln 2 + y \frac{\pi^2}{6} + \frac{9}{2} \zeta(3) + y^2 S(0, y) - 2yS(1, y) + S(2, y); \quad (\text{VIII.277})$$

$$J_3(y) = y^3 \ln 2 + y^2 \frac{\pi^2}{4} + y \frac{27}{2} \zeta(3) + \frac{7}{120} \pi^4 + y^3 S(0, y) - 3y^2 S(1, y) + 3yS(2, y) - S(3, y). \quad (\text{VIII.278})$$

Функции $S(n, y)$ удобнее функций $J_n(y)$ при численном моделировании, поскольку при вычислении с ними не возникают указанные выше проблемы с функциями полилогарифмов. При этом численные процедуры надо создавать с помощью методов численного интегрирования, а не по стандарту Maple. Таким образом, получим с помощью введенных функций:

$$\begin{aligned} b_0(y) &= A(y) \int_0^\infty \frac{xdx}{e^{\xi(y)x-y} + 1} \equiv \\ &\equiv \frac{A(y)}{\xi^2(y)} \int_0^\infty \frac{xdx}{e^{x-y} + 1} = \frac{J_3(y)J_1(y)}{J_2^2(y)}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.279})$$

VIII.12.3.2 Первое приближение

В первом приближении согласно рекуррентным формулам (VIII.265), (VIII.266) найдем:

$$b_1(\tau) = \tau A(y) \left[\frac{2b_0 \ln(1 + e^y)}{a(y)} - \frac{e^y}{e^y + 1} \right]. \quad (\text{VIII.280})$$

VIII.12. Космологическая эволюция с сильно нарушенным равновесием

Подставляя далее функцию $G_0(x, y)$, а также $b_0(y)$ в (VIII.261), найдем в явном виде поправку к начальному распределению:

$$g_1(x, y) = \frac{2A(y) e^{\xi(y)x-y} [2b_0(y) - \xi(y)] - 2b_0(y)}{x (e^{\xi(y)x-y} + 1)^2} - \frac{A(y)\xi(y)[\xi(y) + 2b_0(y)]e^{\xi(y)x-y}}{(e^{\xi(y)x-y} + 1)^2} + \frac{2A(y)\xi^2(y)e^{2(\xi(y)x-y)}}{(e^{\xi(y)x-y} + 1)^3}. \quad (\text{VIII.281})$$

На Рис. 55 - 58 показана эволюция распределений плотности числа частиц и плотности их энергии в первом приближении, при значениях параметра $y = 1, 3, 6, 10$, когда значительная часть частиц начального распределения находится в области с малыми значениями энергии.

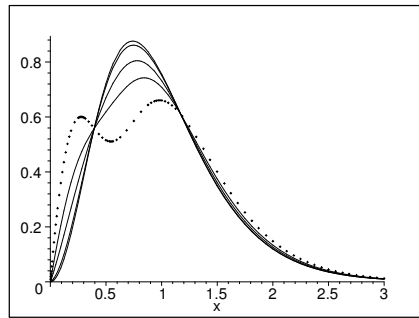


Рис. 55. Эволюция распределения плотности числа частиц, $dn(\tau, x, y) = x^2 G(\tau, x, y)$, в первом приближении при $y = 1$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0, 01; 0, 05; 0, 1$, точечная линия- $\tau = 0, 2$.

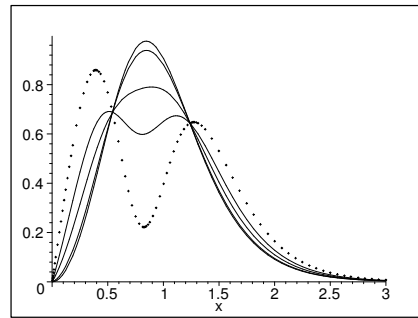


Рис. 56. Эволюция распределения плотности числа частиц, $dn(\tau, x, y) = x^2 G(\tau, x, y)$, в первом приближении при $y = 3$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0, 01; 0, 05; 0, 1$, точечная линия- $\tau = 0, 2$.

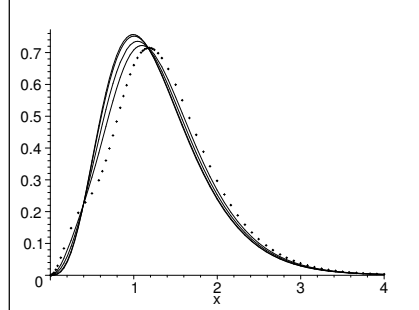


Рис. 57. Эволюция распределения плотности энергии частиц, $d\varepsilon(\tau, x, y) = x^3 G(\tau, x, y)$, в первом приближении при $y = 1$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0,01; 0,05; 0,1$, точечная линия $\tau = 0,2$.

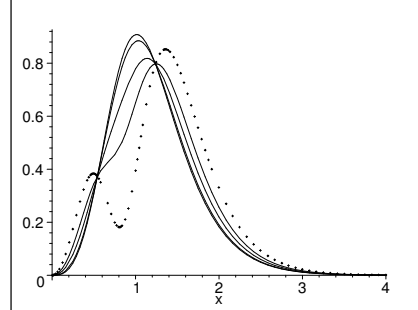


Рис. 58. Эволюция распределения плотности энергии частиц, $d\varepsilon(\tau, x, y) = x^3 G(\tau, x, y)$, в первом приближении при $y = 3$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0,01; 0,05; 0,1$, точечная линия $\tau = 0,2$.

Поскольку функция распределения частиц по определению неотрицательна, ясно что проникновение минимума распределения в область отрицательных значений является следствием нарушения условий малости поправок в области определенных значений энергии. Тем не менее рассмотренные приближения достаточно полно описывают глобальные свойства распределения сверхтепловых частиц. Нам представляется весьма важным факт появления двух максимумов в распределении сверхтепловых частиц. С точки зрения ранее предложенной модели происхождения частиц сверхвысоких энергий [178], [179], [181] первый из этих максимумов может в дальнейшем эволюционировать в равновесное распределение, что подтверждают наши расчеты, а второй дать высокоэнергетический хвост сверхтепловых реликтовых частиц. Второе приближение рассмотрено в работе [199].

VIII.12.4 Асимптотическое приближение модели Фоккера - Планка при сверхвысоких энергиях частиц

VIII.12.4.1 Функция распределения нулевого приближения

Рассмотрим космологическую эволюцию высокоэнергетического хвоста распределения сверхтепловых частиц при больших временах эволюции [199, 200]. При этом для простоты в качестве начального распределения частиц рассмотрим простое ступенчатое распределение:

$$G_0(x) = a\chi(x_0 - x), \quad (\text{VIII.282})$$

где $\chi(z)$ - функция Хевисайда. Подставляя эту функцию в соотношения нормировки (VIII.249) и (VIII.250), определим параметры распределения (VIII.282):

$$x_0 = \frac{4}{3}; \quad a = \frac{81}{64}. \quad (\text{VIII.283})$$

Следует заметить, что, поскольку нас интересует эволюция распределения сверхтепловых частиц при больших временах эволюции, конкретные детали первоначального распределения будут мало влиять на асимптотическое поведение функции распределения — об этом говорилось в предыдущих разделах. Нас не должен смущать тот факт, что полученное нормированное распределение не имеет свободных параметров, на самом деле свободный параметр есть, но он скрыт в определении безразмерных импульсных и временных переменных:

$$x = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}; \quad \tau = \frac{3A}{8\pi\mathcal{P}_0^3}$$

Поэтому, фактически, начальное распределение и эволюция распределения регулируется в данном случае одним параметром, \mathcal{P}_0 , который указывает, во сколько раз средняя энергия частиц на данный момент времени превышает тепловую энергию в горячей модели на этот же момент.

Подставляя распределение (VIII.282) в решение (VIII.255) и используя четность подынтегральных функций, получим:

$$\mathcal{G}(\tau, x) = \frac{81}{128x\sqrt{\pi\tau}} \int_{-x_0}^{x_0} e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}} z dz. \quad (\text{VIII.284})$$

Проводя интегрирование, найдем окончательно:

$$\mathcal{G}(\tau, x) = \frac{81}{128} \left[\Phi \left(\frac{x + x_0}{2\sqrt{\tau}} \right) - \Phi \left(\frac{x - x_0}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] - \frac{81\sqrt{\tau}}{64\sqrt{\pi}x} \left[e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\tau}} \right], \quad (\text{VIII.285})$$

где $\Phi(z)$ - интеграл вероятности (ошибок):

$$\Phi(x) = \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz. \quad (\text{VIII.286})$$

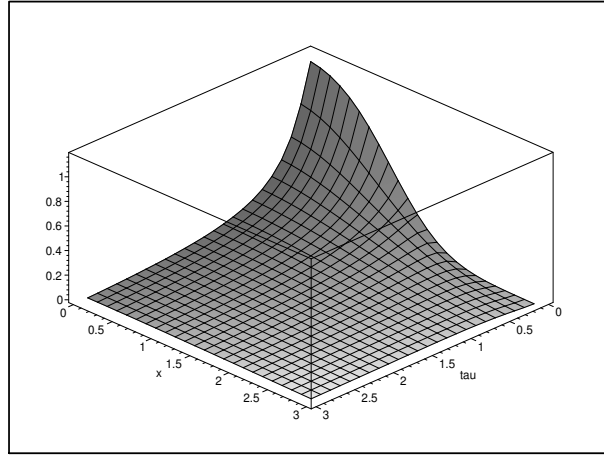


Рис. 59. График функции (VIII.285).

Временная эволюция этого распределения показана на VIII.12.4.1. На VIII.12.4.1 и VIII.12.4.1 показана временная эволюция распределения плотности числа частиц и плотности энергии относительно распределения (VIII.285):

VIII.12. Космологическая эволюция с сильно нарушенным равновесием

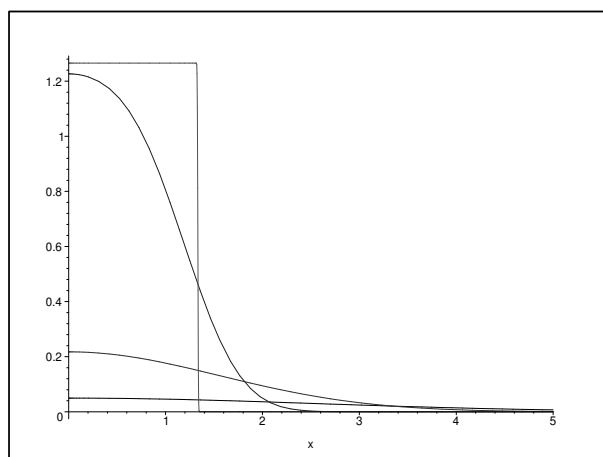


Рис. 60. Эволюция распределения (VIII.285); сверху вниз: $\tau = 0$, $\tau = 0,1$, $\tau = 1$, $\tau = 3$.

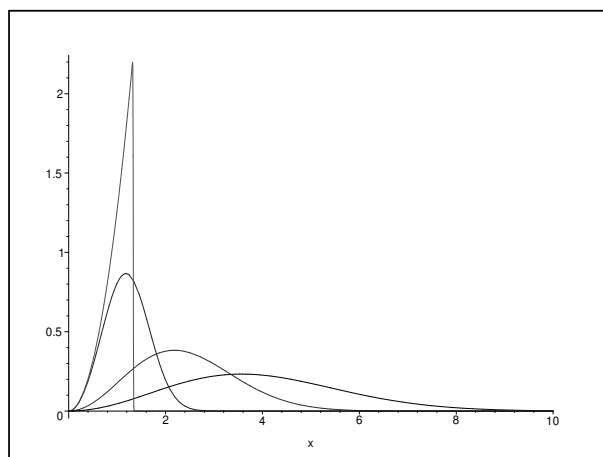


Рис. 61. Эволюция распределения конформной плотности числа частиц, $dN = x^2 \mathcal{G}(\tau, x)$ относительно распределения (VIII.285); слева-направо: $\tau = 0$, $\tau = 0,1$, $\tau = 1$, $\tau = 3$.

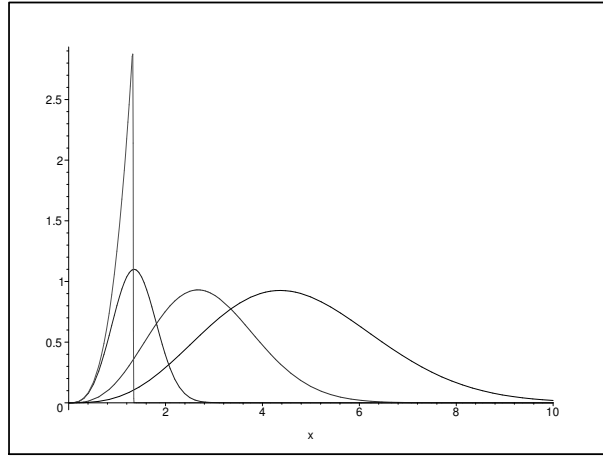


Рис. 62. Эволюция распределения конформной плотности энергии частиц, $d\mathcal{E} = x^3 \mathcal{G}(\tau, x)$ относительно распределения (VIII.285); слева-направо: $\tau = 0, \tau = 0, 1, \tau = 1, \tau = 3$.

VIII.12.4.2 Поправка к нулевому приближению

Заметим, что выполнение закона сохранения энергии обеспечивается наличием члена с функцией $b(\tau)$ в правой части диффузионного уравнения (VIII.247), отсутствие которого не учитывает процесса перекачки энергии при малых временах эволюции. Будем теперь полагать, что $b(\tau)$ - малая, но отличная от нуля величина. Тогда разлагая уравнение (VIII.247) в ряд по малости $b(\tau)$ и представляя его решение в виде ряда:

$$G = G_0 + G_1 + \dots, \quad (\text{VIII.287})$$

в нулевом приближении получим уравнение теплопроводности в сферической системе координат относительно функции G_0 . Таким образом, функция распределения нулевого приближения определяется решением (VIII.285). Тогда для линейной по $b(\tau)$ поправки получим неоднородное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial G_1}{\partial \tau} + f(\tau, x) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} \right), \quad (\text{VIII.288})$$

VIII.12. Космологическая эволюция с сильно нарушенным равновесием

где введены обозначения

$$f(\tau, x) = -\frac{2b_0(\tau)}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 G_0(\tau, x); \quad (\text{VIII.289})$$

$$b_0(\tau) = \int_0^\infty G_0(\tau, x) x dx. \quad (\text{VIII.290})$$

Учитывая (VIII.285) и интегрируя в (VIII.290), получим:

$$b_0(\tau) = a \left[\Phi \left(\frac{x_0}{2\sqrt{\tau}} \right) \left(\frac{x_0^2}{2} - t \right) + \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} x_0 \exp \left(-\frac{x_0^2}{4\tau} \right) \right], \quad (\text{VIII.291})$$

куда необходимо в дальнейшем подставить из (VIII.283) значения для a и x_0 .

Используем решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности:

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} + f(t, \vec{r}) \quad (\text{VIII.292})$$

(см., например, [201]):

$$u(t, \vec{r}) = \frac{1}{8\pi^{2/3} t^{3/2}} \iiint_{V_0} e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2}{4t}} u(0, \vec{r}_0) d^3 \vec{r}_0 - \frac{1}{8\pi^{2/3}} \int_0^t \frac{dt_0}{t_0^{3/2}} \iiint_{V_0} e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2}{4t_0}} f(t_0, \vec{r}_0) d^3 \vec{r}_0, \quad (\text{VIII.293})$$

где интегрирование проводится по всему трехмерному пространству V_0 . Перейдем затем к сферической системе координат в пространстве импульсов и проведем интегрирование по его угловым переменным, учитывая тот факт, что по определению начальное значение нулевого приближения функции $G_0(0, x)$ совпадает с начальным значением самой функции $G(0, x)$. Тогда в формуле (VIII.293)

$$G(0, x) = 0,$$

и мы получим:¹⁵

$$G_1(\tau, x) = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{t}} b_0(t) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{dy}{y} \left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right] \frac{\partial}{\partial y} y^2 G_0(t, y). \quad (\text{VIII.294})$$

Поскольку решение (VIII.284) (или (VIII.294)) является четной функцией переменной x , что легко проверить -

$$G_0(\tau, -x) = G_0(\tau, x), \quad (\text{VIII.295})$$

то решение для поправки к функции распределения можно представить в более компактном виде:

$$G_1(\tau, x) = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{t}} b_0(t) \int_{-\infty}^\infty \frac{dy}{y} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \frac{\partial}{\partial y} y^2 G_0(t, y). \quad (\text{VIII.296})$$

Проводя интегрирование по частям во внутреннем интеграле (VIII.296), получим окончательно:

$$G_1(\tau, x) = \\ = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{t}} b_0(t) \int_{-\infty}^\infty dy e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} G_0(t, y) \left(1 + \frac{y^2}{2t} - \frac{xy}{2t} \right). \quad (\text{VIII.297})$$

Необходимо отметить, что встречающиеся здесь и далее интегралы вида (VIII.297) крайне неудобны для численного анализа как при малых временах, при которых показатель подынтегральной экспоненты стремится к $-\infty$, так и при малых значениях импульсной переменной. В обоих этих случаях интегралы медленно сходятся. Наличие экспоненты в подынтегральном выражении (VIII.297) приводит к тому, что главный вклад в интеграл дают значения y , близкие к x . В связи с этим рассмотрим асимптотическое значение этих интегралов при $t \rightarrow 0$. Согласно

¹⁵Здесь и далее мы для простоты обозначений мы вводим переменную $t = \tau'$

VIII.12. Космологическая эволюция с сильно нарушенным равновесием

известной теореме метода Лапласа (см., например [202]) справедливо разложение:

$$F(t) = \int_{-a}^a e^{-tz^2} \varphi(z) dz \approx \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2n)}(0)}{n! 2^{2n}} t^{-n-1/2}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (\text{VIII.298})$$

где $\varphi(x)$ - аналитическая функция, регулярная в точках отрезка $-a, +a$. Для функций $F(t, x)$ вида:

$$F(t, x) = \int_{-a}^a e^{-t(z-x)^2} \varphi(z) dz$$

выражение (VIII.298) принимает вид:

$$F(t, x) \approx \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2n)}(x)}{n! 2^{2n}} t^{-n-1/2}, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{VIII.299})$$

Таким образом, при $t \rightarrow +0$ имеет место асимптотическая оценка:

$$\int_{-a}^a e^{-\frac{(z-x)^2}{4t}} \varphi(z) dz \approx \sqrt{\frac{\pi}{t}} \varphi(x), \quad (\text{VIII.300})$$

для $x \in (-a, a)$. Применяя асимптотическую оценку (VIII.300) к выражению (VIII.297) получим асимптотическую оценку для функции $\mathcal{G}_1(\tau, x)$:

$$\mathcal{G}_1(\tau, x) \approx \frac{1}{x} \int_0^{\tau} \frac{dt}{t} \mathcal{G}_0(t, x) b_0(t). \quad (\text{VIII.301})$$

Таким образом, при подстановке нулевого приближения (VIII.285), а также (VIII.291) в (VIII.301), получим явное выражение для первой поправки.

На Рис. 51, 51 показаны результаты численного моделирования процесса эволюции сверхтеплого ультрарелятивистского компонента космологической плазмы на основе оценки (VIII.301).

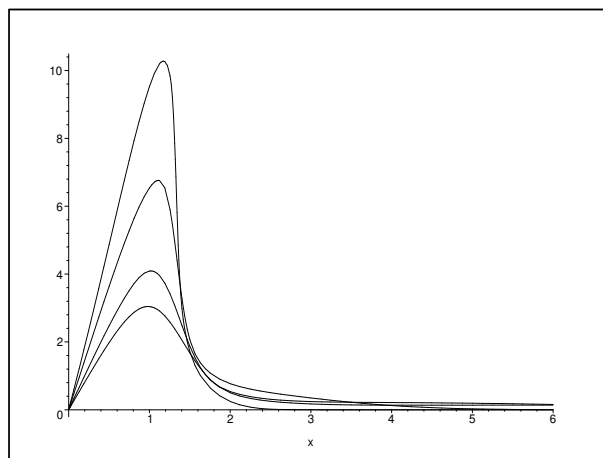


Рис. 63. Временная эволюция плотности числа частиц, функции $x^2 \mathcal{G}(\tau, x)$, сверху вниз: $\tau = 0, 1, \tau = 1, \tau = 3, \tau = 10$.

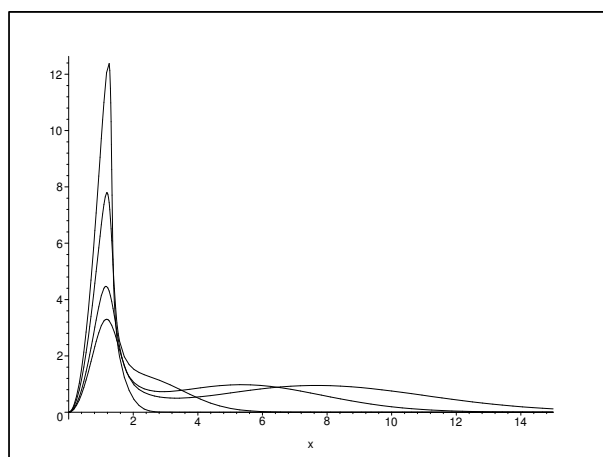


Рис. 64. Временная эволюция плотности энергии частиц, функции $x^3 \mathcal{G}(\tau, x)$, сверху вниз: $\tau = 0, 1, \tau = 1, \tau = 3, \tau = 10$.

Глава IX

Проблемы динамического обоснования кинетической теории частиц в пространствах общей теории относительности

IX.1 Функции источников, уравнения поля и функции распределения

В этом разделе мы будем рассматривать классическую статистическую теорию в пренебрежении тепловым движением полей, т.е. статистическую теорию с исключенными полевыми степенями свободы. Это приближение соответствует учету лишь запаздывающего взаимодействия частиц без учета свободных полей (фотонов, гравитонов). Применительно к системам с электромагнитным воздействием такое приближение подразумевает не слишком высокие средние энергии частиц [33]

$$\langle E \rangle \ll m_e \sqrt{137\Lambda}; \quad (\text{IX.1})$$

Глава IX. Динамическое обоснование кинетической теории

Для систем с гравитационным воздействием аналогичное условие имеет вид

$$\langle E \rangle \ll m_p \sqrt{\Lambda}. \quad (\text{IX.2})$$

Хотя статистическая теория с исключенными полевыми степенями свободы и не является полной, подлинно релятивистской теорией, нам представляется все же оправданным и необходимым на первых этапах развивать аппарат такой теории, так как этого требует решение ряда проблем теории детектирования гравитационных волн, космологии и т.п. Известно, например, что аналогичное спецрелятивистское кинетическое уравнение для заряженных частиц без учета полевых степеней свободы, полученное и исследованное в работах С.Г. Беляева, Г.И. Будкера [33], Ю.Л.Климонтовича [203], [42], В.И. Силина [204] и др. способствовало прогрессу физики плазмы и решению ряда важных проблем термоядерного синтеза.

Геометрическим образом классической частицы является времени-подобная мировая линия $x^i = x^i(S_a) \equiv x_a^i$, вдоль которой задан некоторый геометрический объект $\omega_a(x_a) \equiv \omega_a(S_a)$, характеризующий ее физические свойства. Будем называть этот объект источником. Классической частице поставлен в соответствие лишь один тензорный объект - вектор скорости, $u_a^i = dx_a^i/dS_a$ и некоторые скалярные «заряды»: e_a , m_a , q_a . Определим функцию источника

$$\Omega_a(x) = \int \omega_a(S_a) \delta(x|x_a) dS_a, \quad (\text{IX.3})$$

где $\delta(x|x_a)$ - инвариантная 4-х мерная симметричная δ - функция Дирака

$$\int_{X_2} \delta(x_1|x_2) F(x_2) dX_2 = \begin{cases} F(x_1); & x_1 \in X_2 \\ 0; & x_1 \notin X_2, \end{cases} \quad (\text{IX.4})$$

$dX_2 = \sqrt{-g} dx^1 \dots dx^4$ - инвариантный элемент объема V_4 . Имеет место символическое правило дифференцирования δ - функции

$$\frac{1}{\nabla_i} \delta(x_1|x_2) = \delta(x_1|x_2) \frac{2}{\nabla_i}, \quad (\text{IX.5})$$

IX.1. Функции источников, уравнения поля и функции распределения

где ∇_i^a - оператор ковариантного дифференцирования, действующий в точке $x = x_a$. Вследствие определения инвариантной δ - функции интегрирование в (IX.3) переносит тензорные свойства объекта ω_a с траектории частицы на многообразие $R(x)$, задавая тензорное поле $\Omega_a(x)$. Введем в рассмотрение следующие плотности источников, имеющие простой физический смысл:

$$n^i(x) = \sum n_a^i(x) = \sum \int u_a^i(S_a) \delta(x|x_a) dS_a \quad (\text{IX.6})$$

- вектор плотности потока частиц (числовой вектор),

$$j^i(x) = \sum e_a n_a^i(x) = \sum e^a \int u_a^i(S_a) \delta(x|x_a) dS_a \quad (\text{IX.7})$$

- вектор плотности тока,

$$T_p^{ik}(x) = \sum T_a^{ik}(x) = \sum (m_a + q_a \Phi) \int u_a^i(S_a) u_a^k(S_a) \delta(x|x_a) dS_a \quad (\text{IX.8})$$

- тензор энергии импульса частиц. Вычислим ковариантные дивергенции от этих величин. Учитывая символическое правило дифференцирования δ - функции (IX.5), получим для непрерывных траекторий $x^i(S_a)$:

$$\nabla_i n_a^i(x) = 0; \quad (\text{IX.9})$$

$$\nabla_i j^i(x) = 0; \quad (\text{IX.10})$$

$$\nabla_i T_p^{ik}(x) = \sum \int \delta(x|x_a) dS_a \{q_a \Phi_{,i} u_a^i u_a^k + u_{a,i}^k u_a^i (m_a + q_a \Phi)\}. \quad (\text{IX.11})$$

Пусть $V_i(x)$ - единичное времениподобное поле наблюдателей:

$$(V, V) = 1.$$

Промежуток времени, измеренный по часам наблюдателя, необходимый для бесконечно малого перемещения частицы вдоль ее собственной траектории, есть

$$d\tau = (V, u_a) dS_a. \quad (\text{IX.12})$$

Глава IX. Динамическое обоснование кинетической теории

При каждом $\tau = \text{Const}$ построим пространственноподобную гиперповерхность, ортогональную полю $V_i(x)$:

$$\Sigma : V_i dx^i = 0 \quad (\text{IX.13})$$

и выполняя интегрирование в (IX.3), запишем функцию источника в виде 3-х мерной функции Дирака, определенной на гиперповерхности Σ :

$$\Omega_a(x) = \omega_a(\tau) \frac{\delta(\tilde{x}|\tilde{x}_a(\tau))}{(v, u_a)|_{\tau_a=\tau}}, \quad (\text{IX.14})$$

где \tilde{x}^α - внутренние координаты гиперповерхности Σ .

Уравнения поля для системы частиц, взаимодействующих посредством скалярных, векторных и гравитационных полей, с помощью функций источников могут быть записаны в виде [17]:

$$R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik} = 8\pi T^{ik} = 8\pi(T_p^{ik} + T_S^{ik} + T_v^{ik}); \quad (\text{IX.15})$$

$$F^{ik}_{,k} - \mu_v^2 A^i = -4\pi \sum e_a \int u_a^i \delta(x|x_a) dS_a; \quad (\text{IX.16})$$

$$F^{ik}_{,k}{}^* = 0; \quad (\text{IX.17})$$

$$\Delta_2 \Phi - \frac{R}{6} \Phi + \mu_S^2 \Phi + \lambda \Phi^3 = -4\pi \sum q_a \int \delta(x|x_a) dS_a, \quad (\text{IX.18})$$

где T_v^{ik} , T_S^{ik} , T_p^{ik} описываются выражениями (II.28), (II.29) и (IX.8). Уравнения поля (IX.15) -, (IX.17), (IX.18) содержат в себе обычные уравнения движения. Чтобы показать это, применим к обеим частям (IX.15) оператор ∇_i и учтем тождества Бианки:

$$\begin{aligned} 0 = \sum \int & \left[(m_a + q_a \Phi) u_a^k \overset{a}{\nabla}_k u_a^i + q_a \overset{a}{\Phi}_{,k} u_a^i u_a^k \right], \delta(x|x_a) dS_a + \\ & + \frac{1}{4\pi} \left[F^i_{,k} (F^{kj} - \mu_v^2 A^k) + A^i A^k_{,k} \mu_v^2 + \right. \\ & \left. + \Phi^i \left(\Delta_2 \Phi - \frac{R}{6} \Phi + \mu_S^2 \Phi + \lambda \Phi^3 \right) \right]. \quad (\text{IX.19}) \end{aligned}$$

IX.1. *Функции источников, уравнения поля и функции распределения*

Подействуем оператором ∇_i на обе части уравнений (IX.16):

$$\mu_v^2 A^k_{,k} = 4\pi \sum e_a \nabla_k \int u_a^k \delta(x|x_a) dS_a,$$

откуда с учетом (IX.10) для непрерывных траекторий частиц получим

$$A^k_{,k} = 0 \quad (\text{при } \mu_v^2 \neq 0).$$

(Для безмассовых полей этот член равен тождественному нулю). Используя этот факт, а также уравнения поля (IX.16) и (IX.18), приведем (IX.19) к виду

$$\begin{aligned} 0 = \sum \int (m_a + q_a \Phi) u_a^k \overset{a}{\nabla}_k u_a^i \delta(x|x_a) dS_a - e_a F^i_{,k} \int u^k \delta(x|x_a) dS_a - \\ - q_a \nabla_k \Phi \int \delta(x|x_a) dS_a (g^{ik} - u_a^i u_a^k). \end{aligned} \quad (\text{IX.20})$$

Выберем собственное время частицы « b » - в качестве координаты x^4 и проинтегрируем (IX.20) по курсу гиперповерхности Σ_b , ортогональной траектории $x_b^i(S_b)$, такому, что его заведомо пересекает частица « b » - и не пересекает ни одна другая частица. В результате получим уравнения движения

$$\left(1 + \frac{q_a \Phi(x_a)}{m_a}\right) \frac{Dp_a^i}{dS_a} = e_a F^i_{,k}(x_a) u_a^k + q_a \overset{a}{\nabla}_k \Phi [g^{ik}(x_a) - u_a^i u_a^k], \quad (\text{IX.21})$$

где $p_a^i = m_a u_a^i$ - кинематический импульс частицы. Уравнения (IX.21) полностью совпадают с уравнениями движения (I.23).

Полевые функции $\Phi(x)$, $A_i(x)$, $g_{ik}(x)$, входящие в уравнения движения (IX.21), вычисляются в точке нахождения « a » - той частицы. Уравнения (IX.21) можно сформулировать и с помощью гамильтонова формализма, предложенного Ю.Л.Климонтовичем [203], [40], несколько отличающегося от стандартного формализма. Обозначим

$$\mathcal{H}_a(\xi_a/1, \dots, N) \equiv \mathcal{H}_a(\xi_a)$$

- функцию Гамильтона (I.20), в которую подставлены координаты « a » - той частицы, в точке нахождения которой вычисляются поля $\Phi(x)$, $A_i(x)$, $g_{ik}(x)$, порожденные остальными частицами ансамбля.

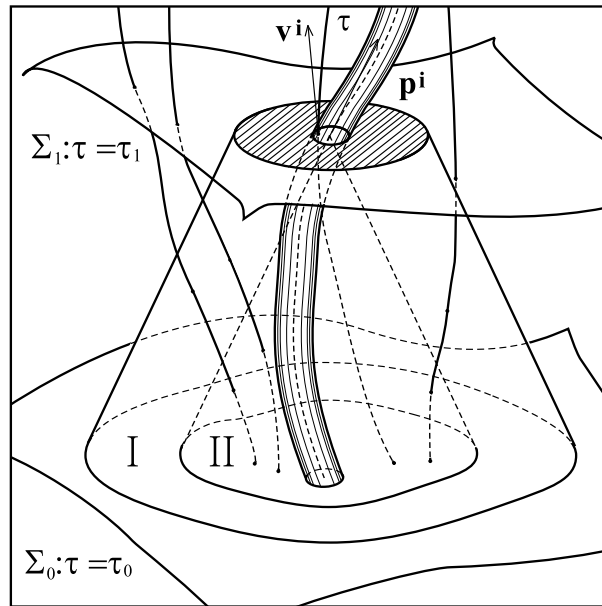


Рис. 65. Измерение состояния ансамбля взаимодействующих частиц. Заштрихованная область на гиперповерхности Σ_1 соответствует объему прибора наблюдателя. Гиперповерхность Σ_1 протыкается мировыми линиями взаимодействующих частиц. В случае безмассовых полей и плоского пространства-времени вклад во взаимодействие частиц в приборе наблюдателя вносит лишь область I гиперповерхности Σ_0 . В случае массивных полей и искривленности пространства-времени вклад во взаимодействие вносит объединение областей I и II на гиперповерхности Σ_0 . На рисунке также показана мировая трубка частицы, замеченная ее эффективным радиусом взаимодействия. Если эту трубку не пронизывают мировые линии других частиц, то взаимодействия частиц являются слабыми, если не учитывать свободные поля.

Индексы $1, \dots, N$ справа от вертикальной черты отмечают тот факт, что эти поля каким-то образом связаны с траекторией остальных частиц: $\Phi(x/, 1, \dots, N)$; $A_i(x/, 1, \dots, N)$ и т.д. Явная связь между моментальными координатами N частиц и наблюдаемым значением полей, вообще говоря, отсутствует. Действительно, во взаимодействие, осуществ-

IX.1. Функции источников, уравнения поля и функции распределения

ляемое безмассовым полем в плоском пространстве-времени, вклад вносят лишь точки пересечения мировых линий заряженных частиц с изотропным конусом « a » - той частицы, направленным в прошлое (Рис. 65). В этом случае имеется прямая связь между координатами частиц на изотропном конусе и наблюдаемым значением полей. Однако, уже для массивных полей ($\mu \neq 0$) точечных частиц такая связь исчезает, так как амплитуды массивных полей складываются из гармоник, распространяющихся с групповыми скоростями $v = k/\sqrt{\mu^2 + k^2} \in [0, 1)$. Поэтому во взаимодействия, осуществляемые массивными полями, вносят вклад все точки, лежащие внутри изотропного конуса прошлого « a » - той частицы. В искривленном пространстве-времени уже лишь высокочастотные гармоники безмассовых полей распространяются со скоростью света. Поэтому и в релятивистских полях тяготения вклад во взаимодействие вносят все отрезки мировых линий частиц, находящиеся внутри изотропного конуса прошлого данной частицы. К аналогичному эффекту расплывания волнового пакета приводит и учет гравитационных взаимодействий. Запишем многовременную функцию Гамильтона ансамбля частиц без учета полевых степеней свободы в виде

$$\mathcal{H}(\xi_1, \dots, \xi_N) = \sum \mathcal{H}_a(\xi_a) = \frac{1}{2} \sum m_a^2, \quad (\text{IX.22})$$

где $\xi_a = (x_a^i(S_a), \mathbb{P}_i^a(S_a))$ и соответствующие канонические уравнения движения в виде

$$\frac{dx_a^i}{dS_a} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbb{P}_i^a} = \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial \mathbb{P}_i^a}; \quad \frac{d\mathbb{P}_i^a}{dS_a} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_a^i} = -\frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial x_a^i}, \quad (\text{IX.23})$$

где по переменным, находящимся справа от вертикальной черты, дифференцирование не производится. Многовременные уравнения движения (IX.23) при подстановке \mathcal{H}_a в виде (I.20) приводят к уравнениям (IX.21), где соответствующие поля определяются уравнениями (IX.15) - (IX.18). Введем также многовременную динамическую функцию

$$\Psi_N \{\xi_1(S_1), \dots, \xi_N(S_N)\} \equiv \Psi_N(S_1, \dots, S_N) \quad (\text{IX.24})$$

и проведем синхронизацию этой функции по часам наблюдателей, ассоциированных с геодезическим полем $V_i(x)$, [17]:

$$\Psi_N(\tau) = \int \prod_{a=1}^N \delta[S_a - S_a^*(\tau)] \Psi_N(S_1, \dots, S_N) dS_a, \quad (\text{IX.25})$$

Глава IX. Динамическое обоснование кинетической теории

где $S_a^*(\tau)$ получается разрешением уравнений движения (IX.23) относительно канонического параметра S_a : $dx_a^i/dS_a^* = p_a^i(\tau)$; при этом имеет место дифференциальное соотношение (IX.12).

Вычислим производную от $\Psi_N(\tau)$:

$$\Psi_N(\tau) = S_N(\tau) [\mathcal{H}, \Psi]_{N_S}, \quad (\text{IX.26})$$

где мы ввели многовременную скобку Пуассона [17]:

$$[\mathcal{H}, \Psi]_{N_S} = \sum_{a=1}^N \frac{dS_a}{d\tau_a} \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbb{P}_i^a} \frac{\partial \Psi}{\partial x_a^i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_a^i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_a^i} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{P}_i^a} \right\} \quad (\text{IX.27})$$

и оператор синхронизации ансамбля частиц по полю наблюдателей V_i :

$$S_N(\tau) \Psi_N(S_1, \dots, S_N) = \int \prod_{a=1}^N \delta[S_a - S_a^*(\tau)] \Psi_N(S_1, \dots, S_N) dS_a \quad (\text{IX.28})$$

Многовременное фазовое пространство ансамбля частиц определены как прямое произведение фазовых пространств отдельных частиц

$$\Gamma = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \dots \otimes \Gamma_N. \quad (\text{IX.29})$$

Согласно этому определению, инвариантный элемент объема равен

$$d\Gamma = \prod_{a=1}^N d\Gamma_a, \quad (\text{IX.30})$$

где

$$d\Gamma_a = dx_a^1 \wedge dx_a^2 \wedge dx_a^3 \wedge dx_a^4 \wedge d\mathbb{P}_1^a \wedge d\mathbb{P}_2^a \wedge d\mathbb{P}_3^a \wedge d\mathbb{P}_4^a. \quad (\text{IX.31})$$

Ансамбль N частиц, взятых во времена S_1, \dots, S_N , изображается точкой в фазовом пространстве. Введем инвариантную многовременную функцию распределения ансамбля N частиц, $(\mathcal{D}_N(S_1, \dots, S_N))$, которую определим следующим образом [17]:

$$dW_{N_S} = \prod_{a=1}^N \delta(S_a - S'_a) \mathcal{D}_{N_S} [\xi_1(S'_1), \dots, \xi_N(S'_N)] d\Gamma = \quad (\text{IX.32})$$

IX.1. Функции источников, уравнения поля и функции распределения

= вероятность найти ансамбль в области $d\Gamma$ с центром в точке $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$. В соответствии с (IX.32) должно выполняться соотношение нормировки

$$\int_{\Gamma} dW_{N_S} = \int_{\Gamma} \prod_{a=1}^N \delta(S_a - S'_a) \mathcal{D}_{N_S} [\xi_1(S'_1), \dots, \xi_N(S'_N)] d\Gamma = 1, \quad (\text{IX.33})$$

где интегрирование проводится по всему фазовому пространству. Заметим, что функция \mathcal{D}_{N_S} симметрична по перестановкам тождественных частиц. Для синхронизации вероятности dW_{N_S} введем в V_4 единичное времениподобное поле геодезических наблюдателей $V_i(x)$, предполагая это поле пробным, не влияющим на динамику ансамбля. Тогда при переходе к формализму фазового пространства поле наблюдателей отобразится в фазовом пространстве каждой частицы, как и любое другое поле на V_4 : $V_i(x) \rightarrow V_i(x_a)$. Тогда синхронизированную по полю наблюдателей $V_i(x)$ вероятность можно определить с помощью оператора синхронизации (IX.28)

$$dW_{\tau} = S_N(\tau) dW_{N_S} = \prod_{a=1}^N \delta[S_a - S_a^*(\tau)] \mathcal{D}_{N_S}(S_1, \dots, S_N) d\Gamma. \quad (\text{IX.34})$$

Введем также S -частичные синхронизованные функции распределения

$$\begin{aligned} F_S(\xi_1, \dots, \xi_S) \prod_{a=1}^N \delta(S_a - S'_a) d\Gamma_a &= S_{N-S}(\tau) dW_{N_S} = \\ &= \prod_{a=1}^N \delta(S_a - S'_a) d\Gamma_a \prod_{b=s+1}^N \delta[S_b - S_b^*(\tau)] d\Gamma_b \mathcal{D}_{N_S}(S_1, \dots, S_N). \end{aligned} \quad (\text{IX.35})$$

Если ансамбль состоит не из тождественных частиц, кроме функций (IX.35) необходимо рассмотреть и другие наборы. В интегралах (IX.35) можно провести интегрирование по временным переменным. Учитывая (IX.12) и очевидное соотношение

$$\delta[S_a - S_a^*(\tau)] dS_a = \delta(\tau_a - \tau) d\tau_a, \quad (\text{IX.36})$$

получим после интегрирования [17]

$$F_S(\xi_1, \dots, \xi_S) = \int \prod_{b=S+1}^N d\sum_i p^i d\mathbb{P} \mathcal{D}_{N_S}(\xi_1, \dots, \xi_S, \xi_{S+1}, \dots, \xi_N) \quad (\text{IX.37})$$

где $d \sum_i^a = dV_a V_i(x_a)$. Наиболее простым смыслом обладают I -частичные функции распределения, $- F_1(\xi_a) d\Gamma_a$ - вероятность найти частицу в элементе объема фазового пространства. Вследствие этого

$$\int_{V_a} d \sum_i^a \int_{\mathbb{P}_a(x_a)} F_1(\xi_a) p^i d\mathbb{P} = 1. \quad (\text{IX.38})$$

Заметим также, что соотношение (IX.33) может быть записано в виде

$$\int \prod_{a=1}^N d \sum_i^a p_a^i d\mathbb{P}_a \mathcal{D}_{N_S}(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_N) = 1, \quad (\text{IX.39})$$

где $\tilde{\xi}_a = \tilde{\xi}_a[S_a(\tau)]$.

IX.2 Средние по ансамблю от динамических переменных и уравнения Лиувилля

Пусть $\Psi_N(S_1, \dots, S_N)$ - многовременная динамическая функция (см. (IX.24)); определим среднее по ансамблю от функции Ψ_N :

$$\langle \langle \Psi_N(S_1, \dots, S_N) \rangle \rangle = \int_{\Gamma} \Psi_N(S_1, \dots, S_N) dW_{N_S}(S_1, \dots, S_N). \quad (\text{IX.40})$$

В частности, синхронизованное среднее функции Ψ_N равно

$$\begin{aligned} \langle \langle \Psi_N(\tau) \rangle \rangle &= \int_{\Gamma} S_N(\tau) \Psi_N(S_1, \dots, S_N) dW_{N_S}(S_1, \dots, S_N) \stackrel{def}{=} \\ &= \int_{\Gamma} \Psi_N(\tau) dW_{\tau} = \int \prod_{a=1}^N d \sum_i^a d\mathbb{P}_a \Psi_N(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_N) \mathcal{D}_{N_S}(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_N). \end{aligned} \quad (\text{IX.41})$$

Предположим, что синхронные наблюдатели в каждый момент собственного времени τ регистрируют на гиперповерхности \sum_{τ} неизменное число частиц, N , т.е. имеет место закон сохранения числа частиц. Это означает, что синхронизованная по полю этих наблюдателей вероятность dW_{τ} не зависит от времени τ :

$$\frac{\delta dW_{\tau}}{d\tau} = 0. \quad (\text{IX.42})$$

IX.3. Интегральное представление уравнения Лиувилля...

Учитывая правило дифференцирования δ -функций, (IX.26) и (IX.27), запишем (IX.42) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\delta dW_\tau}{d\tau} &= \\ &= S_N(\tau) [\mathcal{H}, \mathcal{D}_{N_S}] d\Gamma + \prod_{a=1}^N \delta[S_a - S_a^*(\tau)] \mathcal{D}_{N_S}(S_1, \dots, S_N) \sum_{b=1}^N \frac{dS_b^*}{d\tau} \frac{\delta d\Gamma}{dS_b}. \end{aligned}$$

Вследствие многовременного характера $d\Gamma$ имеем

$$\frac{\delta d\Gamma}{dS_a} = \frac{\delta d\Gamma_a}{\delta S_a} \prod_a' d\Gamma_b,$$

где « \prime » означает, что произведение берется по всем частицам кроме « a » - той. Вследствие канонических уравнений движения (IX.23) $\delta d\Gamma_a = 0$ при движении вдоль траектории « a » - той частицы. Таким образом, локальным выражением закона сохранения числа частиц (IX.42) является уравнение Лиувилля [17]:

$$S_N(\tau) [\mathcal{H}, \mathcal{D}_{N_S}] = 0. \quad (\text{IX.43})$$

Вместо (IX.43) можно рассматривать и многовременное уравнение Лиувилля [205], [16]

$$[\mathcal{H}, \mathcal{D}_{N_S}] = 0, \quad (\text{IX.44})$$

а затем уже при вычислении средних по ансамблю (IX.41) проводить синхронизацию.

IX.3 Интегральное представление уравнения Лиувилля и цепочка Боголюбова нулевого приближения

Обратимся к уравнению (IX.43). Рассмотрим интегралы вида

$$J_a = \int d\Gamma_a \delta[S_a - S_a^*(\tau)] \frac{dS_a}{d\tau} [\mathcal{H}_a, \mathcal{D}_{N_S}], \quad (\text{IX.45})$$

Легко увидеть, что скобка Пуассона $[\mathcal{H}_a, \mathcal{D}_{N_S}]$ может быть представлена в виде

$$[\mathcal{H}_a, \mathcal{D}_{N_S}] = \overset{a}{\nabla}_i \left(\mathcal{D}_{N_S} \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial \mathbb{P}_i^a} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbb{P}_i^a} \left(\mathcal{D}_{N_S} \overset{a}{\nabla}_i \mathcal{H}_a \right). \quad (\text{IX.46})$$

Глава IX. Динамическое обоснование кинетической теории

Учитывая соотношение (IX.36), представим интеграл (IX.45) в виде

$$J_a = \int dV_a \int_{\mathbb{P}_a} d\mathbb{P}_a \left\{ \overset{a}{\nabla}_i \left(\mathcal{D}_{N_S} \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial \mathbb{P}_i^a} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbb{P}_i^a} \left(\mathcal{D}_{N_S} \overset{a}{\nabla}_i \mathcal{H}_a \right) \right\}.$$

С помощью (I.89) запишем последний интеграл в более простой форме

$$J_a = \int_{\Sigma_a} dV_a \overset{a}{\nabla}_i \int_{\mathbb{P}_a} d\mathbb{P}_a \mathcal{D}_{N_S} p_a^i - \int_{\Sigma_a} dV_a \int_{\mathbb{P}_a} d\mathbb{P}_a \frac{\partial}{\partial \mathbb{P}_a^i} \left(\mathcal{D}_{N_S} \overset{a}{\nabla}_i \mathcal{H}_a \right) \quad (\text{IX.47})$$

В первом интеграле, проводя 3 + 1 - разбиение, получим

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Sigma_a} dV_a \int_{\mathbb{P}_a} d\mathbb{P}_a \mathcal{D}_{N_S} p_a^4 + \int_{\Sigma_a} dV_a \overset{a}{\nabla}_\alpha \int_{\mathbb{P}_a} d\mathbb{P}_a \mathcal{D}_{N_S} p_a^\alpha.$$

Второе слагаемое в последнем выражении преобразуем по теореме Гаусса для гиперповерхности Σ , первое же слагаемое с учетом соотношения $p_a^4 = dx^4/dS_a$ преобразуем к виду

$$\frac{d}{d\tau} \int d\Gamma_a \delta[S_a - S_a^*(\tau)] \mathcal{D}_{N_S} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \tau_a} F_{N-1} \right)_{\tau_a=\tau}$$

- это слагаемое обращается в нуль, поскольку F_{N-1} не зависит от временной координаты « a » - той частицы. Представляя \mathcal{D}_{N_S} в виде

$$\mathcal{D}_{N_S} = \prod_{a=1}^N \delta(\mathcal{H}_a - \frac{1}{2} m_a^2) \bar{\mathcal{D}}_{N_S}, \quad (\text{IX.48})$$

где $\bar{\mathcal{D}}_{N_S}$ - функция, не сингулярная на массовой поверхности ансамбля, и преобразуя второе слагаемое по теореме Гаусса, получим для (IX.47)

$$J_a = \iint_{S_a} dS_\alpha^{(a)} \int_{\mathbb{P}_a} d\mathbb{P}_a p_a^\alpha \bar{\mathcal{D}}_{N_S} - \int_{\Sigma_a} dV_\alpha^{(a)} \int_{\mathcal{P}_a} d\mathcal{P}_\beta p_a^\alpha \bar{\mathcal{D}}_{N_S} \overset{a}{\nabla}^\beta \mathcal{H}_a, \quad (\text{IX.49})$$

где наружное интегрирование в первом члене выполняется по замкнутой двумерной поверхности S_a , ограничивающей пространственноподобную гиперповерхность Σ_a конфигурационного пространства « a » - той частицы; внутреннее интегрирование во втором слагаемом проводится по двумерной поверхности \mathcal{P}_a ограничивающей псевдосферу в импульсном пространстве. На этой поверхности

$$p^2 = -g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta \rightarrow \infty; \quad p_4 \rightarrow \infty.$$

IX.3. Интегральное представление уравнения Лиувилля...

Обобщая принятую в классической статистике гипотезу [206], будем предполагать, что функция распределения ансамбля частиц $\bar{\mathcal{D}}_{N_S}$ достаточно быстро стремится к нулю при приближении конфигурационных координат любой частицы к двумерной S_a , охватывающей пространственноподобную гиперповерхность Σ_a , либо \mathcal{P}_a , охватывающей псевдосферы ее импульсного пространства. При этом предположении получим окончательно [17]

$$\int d\Gamma_a \delta[S_a - S_a^*(\tau)] [\mathcal{H}_a, \mathcal{D}_{N_S}] \frac{dS_a}{d\tau} = 0. \quad (\text{IX.50})$$

Интегрируя теперь уравнение Лиувилля (IX.43) по фазовым координатам различных частиц, получим с учетом (IX.50) цепочку уравнений [17]:

$$\sum_{a=1}^S \frac{dS_a^*}{d\tau} \int \prod_{b=s+1}^N d\bar{\Gamma}_b [\mathcal{H}_a, \mathcal{D}_{N_S}] = 0; \quad (S = 1, \dots, N-1) \quad (\text{IX.51})$$

$$d\bar{\Gamma}_e = d\Sigma_i^{(b)} p_{(b)}^i d\bar{\mathbb{P}}_{(b)} = \frac{(V, p)_b}{|p^4|} d\tilde{x}^1 \wedge d\tilde{x}^2 \wedge d\tilde{x}^3 \wedge d\mathbb{P}_1 \wedge d\mathbb{P}_2 \wedge d\mathbb{P}_3.$$

Уравнения (IX.51) являются интегральным представлением уравнения Лиувилля (IX.43). К ним необходимо добавить уравнения, полученные возможными перестановками тождественных частиц.

Следствиями уравнениями Лиувилля (IX.43) должны быть макроскопические законы сохранения. Покажем это, для чего подействуем оператором статистического усреднения в соответствии с (IX.41) на локальные микроскопические величины (IX.6) - (IX.8). При вычислении средних встречаются интегралы вида

$$\int d\Gamma_a \delta[S_a - S_a^*(\tau)] \int \delta(x|x'_a) \Psi[\xi_a(S'_a)] dS'_a.$$

С помощью (IX.14) найдем значения этих интегралов:

$$\int \Psi(x, \mathbb{P}_a) d\mathbb{P}_a.$$

Таким образом, учитывая определение (IX.41), получим

$$\langle n^i(x) \rangle_N = \sum \int p_a^i F_1(x, \mathbb{P}_a) d\mathbb{P}_a, \quad (\text{IX.52})$$

Глава IX. Динамическое обоснование кинетической теории

$$\langle j^i(x) \rangle_N = \sum \int e_a p_a^i F_1(x, \mathbb{P}_a) d\mathbb{P}_a, \quad (\text{IX.53})$$

$$\langle T_p^{ik}(x) \rangle_N = \sum [m_a + q_a \Phi(x)] \int p_a^i p_a^k F_1(x, \mathbb{P}_a) d\mathbb{P}_a, \quad (\text{IX.54})$$

Значения этих макроскопических величин совпадают с их феноменологическими определениями (I.113), (II.14) и (I.116).

Для установления макроскопических законов сохранения рассмотрим уравнения (IX.51) при $s = 1$ для векторного взаимодействия

$$\int \left\{ p_a^i \overset{a}{\nabla}_i \bar{\mathcal{D}}_{N_s} + e_a F^i{}_{.k}(x_a) p_a^k \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}_{N_s}}{\partial p_a^i} \right\} \frac{dS_a^*}{d\tau} \prod_{b=1}^N d\bar{\Gamma}_b = 0. \quad (\text{IX.55})$$

Интегрируя эти уравнения по импульсному пространству «а» - той частицы, получим вследствие (I.89)

$$\overset{a}{\nabla}_i \int d\mathbb{P}_a p_a^i \int \prod_{b=1}^N d\bar{\Gamma}_b \bar{\mathcal{D}}_{N_s} + e_a \int p_a^k d\mathbb{P}_a \frac{\partial}{\partial p_a^i} \int \bar{\mathcal{D}}_{N_s} F^i{}_{.k}(x_a) \prod_{b=1}^N d\bar{\Gamma}_b = 0.$$

Интегрируя второе слагаемое по частям, учитывая кососимметричность F_{ik} и определение многочастичных функций (IX.37), найдем

$$\overset{a}{\nabla}_i \int F_1(x_a, \mathbb{P}_a) p_a^i d\mathbb{P}_a = 0. \quad (\text{IX.56})$$

Это соотношение можно записать в виде закона сохранения

$$\nabla_i \ll n_a^i \gg_N = 0, \quad (\text{IX.57})$$

где

$$\langle n_a^i \rangle_N = \int F_1(x_a, \mathbb{P}_a) p_a^i d\mathbb{P}_a. \quad (\text{IX.58})$$

Следствие (IX.57) выполняются и законы сохранения числа частиц и заряда

$$\nabla_i \langle n^i(x) \rangle_N = 0, \quad \nabla_i \ll j^i(x) \gg_N = 0. \quad (\text{IX.59})$$

Умножим (IX.55) на p_a^k и повторим всю проделанную процедуру; затем просуммируем результат по всем частицам; тогда получим

IX.3. Интегральное представление уравнения Лиувилля...

$$\begin{aligned} \nabla_i \langle T_p^{ik}(x) \rangle_N - \\ - \sum e_a \int d\mathbb{P}_a p_a^k \int \prod_{b=1}^N d\bar{\Gamma}_b \bar{\mathcal{D}}_{N_S} F_{.k}^i(x_a|1, \dots, N) = 0. \end{aligned} \quad (\text{IX.60})$$

Из микроскопических уравнений (IX.16) - (IX.17) имеем известное соотношение

$$\nabla_k T_v^{ik} = -j_k F^{ik}. \quad (\text{IX.61})$$

Усредним формально эти соотношения по ансамблю, полагая, что макроскопические полевые функции получаются усреднением по рецепту (IX.41):

$$\langle \Psi(x) \rangle_N = \int S_N(\tau) \bar{\mathcal{D}}_{N_S} \Psi(x|1, \dots, N) \delta[S_a - S_a^*(\tau)] d\bar{\Gamma}. \quad (\text{IX.62})$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \nabla_k \langle T_v^{ik} \rangle_N = - \\ - \sum e_a \int d\bar{\mathbb{P}}_a p_a^i \int \prod_b d\bar{\Gamma}_b \bar{\mathcal{D}}_{N_S} F_{.k}^i(x_a|1, \dots, N). \end{aligned} \quad (\text{IX.63})$$

Здесь мы провели интегрирование δ -функций источников. Складывая (IX.60) и (IX.63), получим макроскопический закон «сохранения» энергии

$$\nabla_k \langle T_p^{ik} + T_v^{ik} \rangle = 0. \quad (\text{IX.64})$$

Мы подчеркнули, что соотношение (IX.62) является формальным. Действительно, как мы отмечали в разделе IX.1, поле $\Psi(x|1, \dots, N)$ частиц ансамбля в точке $\{x\}$ определяется не моментальными фазовыми координатами частиц, а отрезками их траекторий, лежащими в нижней половине изотропного конуса с вершиной в точке $\{x\}$. Поэтому формула (IX.62) не дает фактического рецепта вычисления среднего значения поля ансамбля частиц. Подстановка моментальных фазовых координат в полевые функции $\Psi(x|1, \dots, N)$ соответствует учету лишь кулоновских взаимодействий частиц и игнорированию излучения. Такое приближение имеет смысл лишь при выполнении условия (IX.1). Среднее

Глава IX. Динамическое обоснование кинетической теории

значение поля, определенное по рецепту (IX.62) без учета излучения, можно тем не менее найти непосредственно из микроскопических полевых уравнений (IX.16), (IX.17). Подействуем на обе части этих уравнений оператором усреднения (IX.41), учитывая определение (IX.62) и тот факт, что мы знаем, как действует этот оператор на функции источников (см. (IX.3)). Действуя таким способом, получим

$$\begin{aligned} \Delta_2 \langle A_i(x) \rangle_N + R_i^k \langle A_k \rangle_N + \mu^2 \langle A_i \rangle_N &= \\ &= \sum e_a \int F_1(x, \mathbb{P}_a) p_{(a)i} d\mathbb{P}_a; \\ \nabla^i \langle A_i(x) \rangle_N &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IX.65})$$

Общим решением этих уравнений является сумма общего решения соответствующих однородных уравнений и частного решения неоднородных. Если частное решение определить таким образом, чтобы оно обращалось в нуль в отсутствие источников, данное решение и будет соответствовать усредненному значению поля (IX.62), в которое подставлены моментальные фазовые координаты заряженных частиц, общему же решению однородных уравнений (IX.65) соответствует поле излучения. В дальнейшем мы будем игнорировать полевые степени свободы. Их корректный учет возможен лишь в рамках полностью квантовой теории.

Вследствие нелинейного характера гравитационного взаимодействия частиц из системы (IX.51) невозможно получить цепочку уравнений типа Боголюбова, т.е. уравнений, связывающих S -частичные функции распределения с $S + 1$ -частичными. Рассмотрим случай, когда гравитационным взаимодействием частиц можно пренебречь, т.е. когда гравитационное поле является фоновым: $g_{ik} = g_{ik}(x)$. Из соображений методической простоты мы ограничимся учетом лишь векторных взаимодействий. Учитывая структуру гамильтониана заряженной частицы, получим

$$[\mathcal{H}_a, \mathcal{D}_{N_S}] = p_a^i \overset{a}{\nabla}_i \mathcal{D}_{N_S} + e_a F^i{}_{.k}(x_a) p_a^k \frac{\partial \mathcal{D}_{N_S}}{\partial p_a^i}. \quad (\text{IX.66})$$

Вследствие принципа суперпозиции для векторного поля имеем

$$A_i(x_a) = \overset{0}{A}_i(x_a) + \sum_{b=1}^N A_i(x_a|b), \quad (\text{IX.67})$$

IX.3. Интегральное представление уравнения Лиувилля...

где

$$F_{ik}(x_a) = \overset{a}{\nabla}_k A_i - \overset{a}{\nabla}_i A_k, \quad (\text{IX.68})$$

причем микроскопические поля $A_i(x_a|b)$ находятся как решения сингулярных уравнений

$$\begin{aligned} [\delta_i^k(\Delta_2 + \mu^2) - R_i^k] A_k(x|b) &= 4\pi e_b \int u_b^i \delta(x|x_b) dS_b; \\ \nabla^i A_i(x|b) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IX.69})$$

Итак, согласно (IX.67), (IX.68) представим скобку Пуассона (IX.66) в виде

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_a, \mathcal{D}_{N_S}]_a &= \left[p_a^i \overset{a}{\nabla}_i + e_a \overset{0}{F}{}^i{}_{.k}(x_a) p_a^k \frac{\partial}{\partial p_a^i} \right] \mathcal{D}_{N_S} + \\ &+ e_a p_a^k \frac{\partial}{\partial p_a^i} \sum_{b=1}^N \overset{i}{F}{}^i{}_{.k}(x_a|b) \mathcal{D}_{N_S}. \end{aligned} \quad (\text{IX.70})$$

Используя (IX.70) в (IX.51), приведем последние к виду

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^S \frac{dS_a}{d\tau} \int \prod_{b=S+1}^N d\bar{\Gamma}_b \left[\overset{0}{\mathcal{H}}_a, \bar{\mathcal{D}}_{N_S} \right]_a + \sum_{a=1}^S \frac{dS_a}{d\tau} \sum'_{b=1}^N \int \prod_{c=S+1}^N d\bar{\Gamma}_c \left[\mathcal{H}_{ab}, \bar{\mathcal{D}}_{N_S} \right]_a \\ + \sum_{a=1}^S \frac{dS_a}{d\tau} \sum_{b=S+1}^N \int \prod_{c=S+1}^N d\bar{\Gamma}_c \left[\mathcal{H}_{ab}, \bar{\mathcal{D}}_{N_S} \right]_a = 0. \end{aligned} \quad (\text{IX.71})$$

Используя теперь определение S -частичных функций распределения (IX.35), получим цепочку уравнений [17], [205], [16]:

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^S \frac{dS_a}{d\tau} \left\{ \left[\overset{0}{\mathcal{H}}_a, \bar{F}_S(S_1, \dots, S_S) \right]_a + \sum'_{b=1}^N \left[\mathcal{H}_{ab}, \bar{F}'_S(S_1, \dots, S_S) \right]_a + \right. \\ \left. + \sum_{b=S+1}^N \int d\Gamma_b \delta[S_b - S_b^*(\tau)] \left[\mathcal{H}_{ab}, F_{S+1}(S_1, \dots, S_S; S_b) \right]_a \right\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{IX.72})$$

Глава IX. Динамическое обоснование кинетической теории

В частности, для ансамбля тождественных частиц и векторных взаимодействий (IX.72) принимают вид:

$$\sum_{a=1}^S \frac{dS_a}{d\tau} \left\{ \left[p_a^i \frac{\partial}{\partial p_a^i} + e_a \left(F^i \cdot k + \sum_{b=1}^S F^i \cdot k(x_a|b) \right) p_a^k \frac{\partial}{\partial p_a^k} \right] \bar{F}_S + e_a p_a^k (N-S) \frac{\partial}{\partial p_a^k} \int d\bar{\Gamma}_{S+1} F^i \cdot k(x_a|S+1) \bar{F}_{S+1} \right\} = 0. \quad (\text{IX.73})$$

Несмотря на неопределенность операции усреднения полевых величин, величины вида

$$G^{S+1}(x_a) \equiv \int d\bar{\Gamma}_{S+1} G(x_a|S+1) \bar{F}_{S+1}(\xi_1, \dots, \xi_S; \tilde{\xi}_{S+1})$$

можно вычислить в указанном выше смысле. Действительно, введем в рассмотрение величины

$$G^{S+1}(x; x_a) \equiv \int d\bar{\Gamma}_{S+1} F^i \cdot k(x_a|S+1) \bar{F}_{S+1}(\xi_1, \dots, \xi_S; \tilde{\xi}_{S+1}),$$

такие, что

$$G^{S+1}(x_a) = G^{S+1}(x; x_a)|_{x=x_a}.$$

Применяя оператор статистического усреднения к обеим частям полевых уравнений (IX.69), получим:

$$\left\{ \delta_i^k (\Delta_2 + \mu^2) - R_i^k \right\}_x A_i^{S+1}(x; x_a) = 4\pi e \int d\mathbb{P}_{S+1} p_{S+1}^i \bar{F}_{S+1}(\xi_1, \dots, \xi_S; \tilde{\xi}_{S+1}).$$

Решение этих уравнений можно записать в виде

$$A_i^{S+1}(x; x_a) = 4\pi e \mathcal{L}_{ik}(x) \int_{P(x)} d\mathbb{P}_{S+1} p_{S+1}^k \bar{F}_{S+1}(\xi_1, \dots, \xi_S, x, p_{S+1}),$$

где $\mathcal{L}_{ik}(x)$ - некоторый оператор, действующий на координаты $\{x\}$. Таким образом искомые величины $A_i^{S+1}(x_a)$ в приближении, соответствующем игнорированию полевых степеней свободы, можно записать в виде:

$$A_i^{S+1}(x_a) = 4\pi e \left[\mathcal{L}_{ik}(x) \int_{\mathbb{P}(x)} d\mathbb{P}_{S+1} p_{S+1}^k \bar{F}_{S+1}(\xi_1, \dots, \xi_S, x, P_{S+1}) \right] \Big|_{x=x_a}.$$

IX.4 Вывод уравнения Власова для плазмы в гравитационном поле

Рассмотрим уравнения для одночастичной функции распределения $F_1(\xi)$, для чего положим в (IX.72) $S = 1$. Вследствие определения операции \sum' второй член в левой части (IX.72) исчезнет, и мы получим

$$\left[p_a^i \tilde{\nabla}_i + e_a F^i{}_{.k} p_a^k \frac{\partial}{\partial p_a^i} \right] F_1(\xi_a) + e_a p_a^k \frac{\partial}{\partial p_a^i} \sum_{b=2}^N \int d\bar{\Gamma}_b \bar{F}_2(\xi_a, \xi_b) F^i{}_{.k}(x_a|b) = 0. \quad (\text{IX.74})$$

Предположим, что функция распределения ансамбля частиц мультипликативная, т.е.

$$\mathcal{D}_{N_S}(\xi_1, \dots, \xi_N) = \prod_{a=1}^N F_1(\xi_a), \quad (\text{IX.75})$$

тогда

$$F_S(\xi_1, \dots, \xi_S) = \prod_{a=1}^S F_1(\xi_a). \quad (\text{IX.76})$$

При этом отсутствует корреляция между движением отдельных частиц, частицы взаимодействуют лишь посредством макроскопического сглаженного поля $\langle F_{ik} \rangle_a$. Согласно смыслу функции распределения, среднее значения этого поля в точке $\{x_a\}$ есть

$$\langle F_{ik}(x_a) \rangle_a = \int \prod_{b=1}^N d\bar{\Gamma}_b F_{ik}(x_a|1, \dots, N) \bar{\mathcal{D}}_{N_S}(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_N).$$

Используя принцип позиции, получим отсюда

$$\langle F_{ik}(x_a) \rangle_a = \sum_{b=1}^N F_1(\xi_b) F_{ik}(x_a|b) d\bar{\Gamma}_b. \quad (\text{IX.77})$$

Таким образом, полагая в (IX.74) отсутствие корреляций, получим окончательно

$$\left[p^i \tilde{\nabla}_i + e_a F^i{}_{.k} p^k \frac{\partial}{\partial p^i} \right] F_1(x, p) = 0, \quad (\text{IX.78})$$

где

$$F_{ik} = \overset{0}{F}_{ik} + \sum_{b=1}^N \int d\bar{\Gamma}_b F_1(\xi_b) F_{ik}(x_a|b) \quad (\text{IX.79})$$

- суммарное среднее векторное поле. Мы получили так называемое бесстолкновительное кинетическое уравнение [16], или уравнение Власова [7]. С другой стороны, результат действия оператора статистического усреднения на полевые уравнения (IX.65) можно записать в виде

$$\nabla_k \langle\langle F^{ik} \rangle\rangle_N - \mu_v^2 \langle\langle A^i \rangle\rangle = -4\pi \langle\langle j^i \rangle\rangle_N; \quad (\text{IX.80})$$

$$\nabla_k \langle\langle F^{ik} \rangle\rangle_N^* = 0,$$

где вектор плотности тока $\langle\langle j^i \rangle\rangle_N$ определен с помощью одночастичной функции распределения выражения (IX.53). Проводя согласно (IX.62) формальное усреднение тензора Максвелла, получим

$$\langle\langle F_{ik}(x) \rangle\rangle_N = \sum_{a=1}^N \int d\bar{\Gamma}_a F_1(\xi_a) F_{ik}(x|a) + \overset{0}{F}_{ik}. \quad (\text{IX.81})$$

Таким образом, среднее макроскопическое поле $\langle\langle F_{ik}(x) \rangle\rangle_N$ отличается от среднего макроскопического $\langle F_{ik} \rangle_a$, действующего на «а» - тую частицу, лишь на величину среднего поля «а» - той частицы:

$$\langle\langle F_{ik}(x) \rangle\rangle_N = F_{ik} + \int d\bar{\Gamma}_a F_1(\xi_a) F_{ik}(x|a).$$

В частности для системы N тождественных частиц

$$\langle F_{ik} \rangle_a = (N-1) \int d\bar{\Gamma}_b F_1(\xi_b) F_{ik}(x_a|b).$$

Если этой разницей пренебречь, переходя к пределу $N \rightarrow \infty$, то

$$\langle\langle F_{ik} \rangle\rangle_N = F_{ik}(x), \quad N \rightarrow \infty.$$

Таким образом, уравнение (IX.78) и уравнения поля (IX.80) посредством определения вектора плотности тока составят замкнутую систему общерелятивистских уравнений Власова, которая рассматривалась нами, в разделах I, II.

IX.5 Вывод кинетических уравнений для плазмы в гравитационном поле

Перейдем теперь к рассмотрению следующего приближения, полагая вместо (IX.75), (IX.76) [40]:

$$\begin{aligned}
 F_1(\xi_a) &= N_a^{-1} f_a(\xi_a); \\
 F_2(\xi_a, \xi_b) &= N_a^{-1} N_b^{-1} \{f_a(\xi_a) f_b(\xi_b) + g_{ab}(\xi_a, \xi_b)\}; \\
 F_3(\xi_a, \xi_b, \xi_c) &= N_a^{-1} N_b^{-1} N_c^{-1} \{f_a(\xi_a) f_b(\xi_b) f_c(\xi_c) + g_{ab}(\xi_a, \xi_b, \xi_c)\}; \\
 \dots\dots\dots F_S(\xi_1, \dots, \xi_S) &= \prod_{a=1}^S N_a^{-1} f_a(\xi_a); \quad S \geq 4, \quad (\text{IX.82})
 \end{aligned}$$

где N_a - полное число частиц сорта «а», симметрирование в (IX.82) проводится без фактора $(n!)^{-1}$ и

$$\int g_{ab}(\xi_a, \xi_b) d\Gamma_b = 0. \quad (\text{IX.83})$$

Выпишем два первых уравнения цепочки (IX.73), переходя к пределу $N_a \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
 p_a^i \overset{a}{\nabla}_i f_a + e_a \ll F^i \cdot k \gg_N p_a^k \frac{\partial f_a}{\partial p_a^i} + \\
 + e_a p_a^k \frac{\partial}{\partial p_a^i} \int d\bar{\Gamma}_b F^i \cdot k(x_a|b) g_{ab}(\bar{\xi}_a, \bar{\xi}_b) = 0; \quad (\text{IX.84})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_a}{d\tau_a} \left\{ f_b \left[p_a^i \overset{a}{\nabla}_i f_a + e_a \ll F^i \cdot k \gg_N p_a^k \frac{\partial f_a}{\partial p_a^i} + e_a F^i \cdot k(x_a|b) p_a^k \frac{\partial f_a}{\partial p_a^i} \right] + p_a^i \overset{a}{\nabla}_i g_{ab} + \right. \\
 + e_a p_a^k \frac{\partial g_{ab}}{\partial p_a^i} \left[F^i \cdot k(x_a) + F^i \cdot k(x_a|b) \right] + e_a p_a^k \frac{\partial}{\partial p_a^i} \left[\int d\Gamma_i F^i \cdot k(x_a|c) g_{ac} f_b + \right. \\
 \left. \left. + \int d\Gamma_c F^i \cdot k(x_a|c) g_{ab} f_c + \int d\Gamma_c F^i \cdot k(x_a|c) g_{bc} f_a \right] \right\} + \\
 + (a \iff b) = 0. \quad (\text{IX.85})
 \end{aligned}$$

Уравнение (IX.85) многовременное; оно соответствует уравнению Лиувилля в форме (IX.44). Решение этого уравнения затем необходимо синхронизировать на момент времени $\tau_a = \tau$; $\tau_b = \tau$, т.е. положить в решении $g_{ab}(S_a, S_b)$; $S_a = S_a^*(\tau)$; $S_b = S_b^*(\tau)$: $g_{ab}(S_a^*(\tau), S_b^*(\tau)) = g_{ab}(\bar{\xi}_a, \bar{\xi}_b)$. Заметим, что корреляционная функция g_{ab} , получающаяся из (IX.85), автоматически является симметричной по перестановкам частиц в отличие от функции, введенной в [40], которую необходимо симметризовать. Учитывая в (IX.85) следствие уравнений (IX.84) и определение макроскопического поля (IX.81), запишем это уравнение в более простой форме:

$$\begin{aligned} \frac{dS_a}{d\tau_a} \left\{ e_a F^i_{.k}(x_a|b) f_b p_a^k \frac{\partial f_a}{\partial p_a^i} + [\bar{\mathcal{H}}_a, g_{ab}] + e_a p_a^k \frac{\partial g_{ab}}{\partial p_a^i} F^i_{.k}(x_a|b) + \right. \\ \left. + e_a p_a^k \frac{\partial f_a}{\partial p_a^i} \int d\Gamma_c F^i_{.k}(x_a|c) g_{bc} \right\} + (a \longleftrightarrow b) = 0, \end{aligned} \quad (\text{IX.86})$$

где $\bar{\mathcal{H}}_a$ - функция Гамильтона $\ll a \gg$ - частицы, определенная относительно макроскопического поля $\ll F^i_{.k} \gg_N$. Пренебрегая в (IX.86) произведением локального поля $F^i_{.k}(x_a|b)$ на корреляционную функцию, запишем это решение уравнения

$$g_{ab}(S_a, S_b) = -e_a f_b \int^{S_a(\tau_a)} F^i_{.k}(x_a|b) p_a^k \frac{\partial f_a}{\partial p_a^i} dS_a + (a \longleftrightarrow b), \quad (\text{IX.87})$$

где интегрирование проводится вдоль макроскопической мировой линии «a» - той частицы $x_a^i = x_a^i(S_a)$; $p_a^i = p_a^i(S_a)$, определяемой уравнениями

$$\frac{dx_a^i}{dS_a} = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_a}{\partial p_a^i}; \quad \frac{dp_a^i}{dS_a} = -\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_a}{\partial x_a^i}. \quad (\text{IX.88})$$

Подставляя (IX.87) в (IX.84), получим нелокальные кинетические уравнения:

$$\begin{aligned} [\bar{\mathcal{H}}_a, f_a] = -\frac{\partial}{\partial p_a^i} p_a^k \int d\bar{\Gamma}_b \left\{ e_a^2 F^i_{.k}(x_a|b) f_b \int^{S_a(\tau)} F^l_{.m}(x'_a|b) p_a^m \frac{\partial f_a}{\partial p_a^l} dS_a + \right. \\ \left. + e_a e_b F^i_{.k}(x_a|b) f_a \int^{S_b(\tau)} F^l_{.m}(x_b|a) p_b^m \frac{\partial f_b}{\partial p_b^l} dS_b \right\}. \end{aligned} \quad (\text{IX.89})$$

IX.5. Кинетические уравнения для плазмы в гравитационном поле

Обозначим с помощью $f_{lm}(x|b)$ кососимметрический тензор, являющийся решением сингулярных уравнений

$$\begin{aligned} f_{,k}^{ik} &= -4\pi \int \delta(x|x_b) u_b^i dS_b; \\ f_{,k}^{*ik} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IX.90})$$

Тогда кинетические уравнения (IX.89) можно записать в виде

$$\begin{aligned} [\bar{\mathcal{H}}_a, f_a] &= -\frac{\partial}{\partial p_a^i} J_a^i; \\ j_a^i &= e_a^2 e_b^2 p_a^k \int d\bar{\Gamma}_b \left[f_b f_{,k}^i(x_a|b) \int_{S_a(\tau)} f_{,m}^l(x'_a|b) p_a^m \frac{\partial f_a}{\partial p_a^l} dS_a + \right. \\ &\quad \left. + f_a f_{,k}^i(x_a|b) \int_{S_b(\tau)} f_{,m}^l(x'_b|a) p_b^m \frac{\partial f_b}{\partial p_b^l} dS_b \right]. \end{aligned} \quad (\text{IX.91})$$

В приближении ВКБ мы должны полагать одночастичную функцию распределения слабоменяющейся на четырехмерном интервале взаимодействия, что в свою очередь предполагает малость изменения на этом интервале макроскопических полей $g_{ik}(x)$ и $\ll F_{ik} \gg_N$, т.е. выполнено условие четырехточечности столкновения (I.171)

$$r_{eff} \ll L_x; \quad r_{eff}/\bar{v} \ll L_t \quad (\text{IX.92})$$

где L_x, L_t - характерные масштабы пространственной и временной неоднородности макроскопических полей. Предполагая эти условия выполненными, приведем интеграл (IX.91) к виду

$$\begin{aligned} J_a^i &= p_a^k e_a^2 e_b^2 \int d\bar{\Gamma}_b \left[f_b(x_a, p_b) p_a^m \frac{\partial f_a(x_a, p_a)}{\partial p_a^l} f_{,k}^i(x_a|b) \int_{S_a(\tau)} f_{,m}^l(x'_a|b) dS_a + \right. \\ &\quad \left. + f_a(x_a, p_a) p_b^m \frac{\partial f_b(x_a, b)}{\partial p_b^l} f_{,k}^i(x_a|b) \int_{S_b(\tau)} f_{,m}^l(x'_b|a) dS_b \right]. \end{aligned}$$

Для вычисления внутренних интегралов необходимо найти ВКБ-решение уравнений (IX.90). Проще всего это сделать в геодезической системе координат с центром в точке нахождения «а» - той частицы. Находя это

решение и подставляя в последнее выражение, получим интеграл столкновений в форме Беляева - Будкера [207]. Следующие, нелокальные, члены разложения интеграла столкновений имеют первый порядок по малым параметрам (IX.92).

IX.6 Усреднение локальных флуктуаций метрики

Изложенная выше теория является по существу теорией *на фоне гравитационного поля*. При попытке распространить эту теорию на гравитационные взаимодействия возникают трудности принципиального характера.

Во - первых, нелинейность полевых уравнений Эйнштейна не позволяет отыскать общее решение уравнений (IX.15).

Во - вторых, проводя формальное усреднение уравнений Эйнштейна по правилу (IX.62), получим

$$\langle\langle G_{ik} \rangle\rangle_N = 8\pi \langle\langle T_{ik} \rangle\rangle_N. \quad (\text{IX.93})$$

Нелинейная структура тензора Эйнштейна не позволяет записать равенство

$$\langle\langle G_{ik}(g_{lm}) \rangle\rangle = G_{ik}(\langle\langle g_{lm} \rangle\rangle),$$

в результате чего *макроскопический тензор энергии - импульса не определяет макроскопическую метрику пространства - времени*.

В - третьих, выделение времениподобного поля геодезических наблюдателей, т.е. гиперповерхности Коши, становится невозможным до тех пор, пока не определена макроскопическая метрика пространства - времени.

Выход из создавшегося положения состоит в том, что согласно принципам, сформулированном в разделе I.1, наблюдатель должен быть макроскопическим, т.е. масштабы его линеек и часов должны быть гораздо больше соответствующих масштабов длин и времен, определяющих локальные флуктуации гравитационного поля. Выделение макроскопического поля наблюдателей, времениподобных и геодезических в некоторой макроскопической метрике $\langle\langle g_{ik} \rangle\rangle$ подразумевает существование макроскопического пространства - времени \bar{V}_4 , геометрия которого устанавливается макроскопическими измерениями. В свою очередь,

IX.6. Усреднение локальных флуктуаций метрики

знание этой макроскопической геометрии позволяет сделать некоторые выводы и о микроскопическом распределении взаимодействующих частиц. При таком подходе микроскопическое поле $g_{ik}(x|1, \dots, N)$ можно рассматривать как локальные отклонения макроскопической метрики $\langle\langle g_{ik}(x) \rangle\rangle$ в координации $\{x^i\}$ (Рис.66). Общая теория относительности налагает неизгладимый отпечаток на статистическую картину — часы и линейки на микроуровне не совпадают с макроскопическими часами и линейками. Геодезические линии в микроскопическом пространстве - времени V_4 не выглядят таковыми в терминах макроскопического \bar{V}_4 . Дальнодействующий характер гравитационного взаимодействия и неотрицательность масс частиц позволяют предположить, что микроскопическое гравитационное поле ансамбля большого числа частиц имеет, в основном, макроскопический характер и лишь малые в среднем локальные флуктуации вблизи массивных частиц [16].

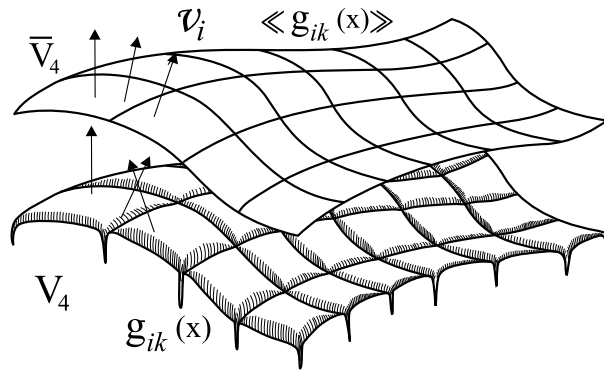


Рис. 66. Микроскопическая и макроскопическая геометрия пространства - времени ансамбля взаимодействующих частиц. Стрелками изображены поля геодезических наблюдателей в микроскопическом, V_4 , и макроскопическом, \bar{V}_4 , пространствах.

В самосогласованной теории должны автоматически появляться некоторые характерные масштабы корреляций, на которых локальные микроскопические поля врастают в среднее самосогласованное поле ансамбля. Как мы увидим из дальнейшего, таким характерным масштабом является звуковой горизонт частицы. Кинетическая теория, отталкивающая как от первоосновы, от самосогласованного гравитационного поля, будет являться гравитационным аналогом кинетической теории

Глава IX. Динамическое обоснование кинетической теории

Балеску - Леонарда [208], [209], приводящей к сходящимся на больших прицельных расстояниях интегралам столкновений [210].

Итак, предположим, что микроскопическую метрику пространства - времени V_4 можно записать в виде

$$g_{ik}(x|1, \dots, N) = \bar{g}_{ik}(x) + \delta g_{ik}(x|1, \dots, N), \quad (\text{IX.94})$$

где

$$\langle \delta g_{ik} \delta g^{kl} \rangle \ll 1, \quad (\text{IX.95})$$

причем

$$\langle \delta g_{ik} \rangle = 0. \quad (\text{IX.96})$$

В нулевом приближении по малости гравитационного взаимодействия можно положить

$$\bar{g}_{ik}(x) = \overset{0}{g}_{ik}(x), \quad (\text{IX.97})$$

где макроскопическая метрика $\overset{0}{g}_{ik}(x)$ определяется уравнениями Эйнштейна относительно макроскопического ТЭИ

$$G_{ik}(\overset{0}{g}_{lm}) = 8\pi \langle T_{ik} \rangle. \quad (\text{IX.98})$$

Разложим уравнения Эйнштейна в ряд Тейлора по малости

$$h_{ik} = g_{ik}(x|1, \dots, N) - \overset{0}{g}_{ik}(x); \quad (\text{IX.99})$$

$$G_{ik} = G_{ik}(\overset{0}{g}_{kl}) + \delta G_{ik}^{(1)}(h_{kl}) + G_{ik}^{(2)}(h_{kl}) + \dots \quad (\text{IX.100})$$

При этом удобно воспользоваться следующим представлением возмущенных величин [211]:

$$g_{ik} - \overset{0}{g}_{ik} = h_{ik}; \quad g^{ik} - \overset{0}{g}^{ik} = \gamma^{ik}; \quad (\text{IX.101})$$

$$(g_{ik}^0 + h_{ik})(g^{kl} + \gamma^{kl}) = \delta_i^l; \quad (\text{IX.102})$$

$$\Gamma_{ik}^l - \overset{0}{\Gamma}_{ik}^l \equiv \Omega_{ik}^l = \frac{1}{2} g^{lj} (h_{ij,k} + h_{kj,i} - h_{ik,j}); \quad (\text{IX.103})$$

$$R_{ik} - \overset{0}{R}_{ik} = \Omega_{ik,l}^l - \Omega_{l(i,k)}^l - \Omega_{jk}^l \Omega_{il}^j + \Omega_{ik}^l \Omega_{lj}^j, \quad (\text{IX.104})$$

IX.6. Усреднение локальных флуктуаций метрики

где ковариантное дифференцирование определено относительно метрического тензора $\overset{0}{g}_{ik}$. Из (IX.102) следует

$$\gamma^{ik} = -h^{ik} + h_i^i h^{kl} + \dots, \quad (\text{IX.105})$$

где операция поднятия индексов осуществляется метрическим тензором $\overset{0}{g}^{ik}$. В первом по взаимодействию приближении положим

$$\overset{1}{h}_{ik} = \sum_a \overset{1}{h}_{ik}(x|a) \quad (\text{IX.106})$$

и определим $\overset{1}{h}_{ik}(x|a)$ как решение линейризованных уравнений Эйнштейна

$$\delta \overset{(1)}{G}_{ik}(\overset{1}{h}) = 8\pi \left[\int m_a u_a^i u_a^k \delta(x|x_a) dS_a - \langle T^{ik} \rangle_a \right], \quad (\text{IX.107})$$

такое, чтобы выполнялись условия сшивки метрики с макроскопической метрикой нулевого приближения

$$\overset{1}{h}_{ik}/S = 0; \quad \overset{1}{h}_{ik,l} h^l/S = 0, \quad (\text{IX.108})$$

где S - двумерная поверхность, охватывающая трехмерную область \sum_τ , в которой находится « a » - тая частица; n^i - вектор нормали к ней. Поскольку $\overset{0}{g}_{ik} \neq \bar{g}_{ik}$, то и $\bar{h}_{ik} \neq 0$. Перенормируем поэтому макроскопическую метрику

$$\overset{1}{g}_{ik}(x) = \overset{0}{g}_{ik} + \overset{1}{h}_{ik}(x) \quad (\text{IX.109})$$

и ее локальные флуктуации

$$\delta \overset{1}{g}_{ik} = \overset{1}{h}_{ik} - \bar{h}_{ik}, \quad (\text{IX.110})$$

так что теперь

$$\langle\langle \delta \overset{1}{g}_{ik} \rangle\rangle = 0. \quad (\text{IX.111})$$

В следующем приближении по порядку взаимодействия получим уравнения для локальных флуктуаций второго порядка

$$\delta \overset{(1)}{G}_{ik}(\overset{2}{h}) = -\delta \overset{(2)}{G}_{ik}(\overset{1}{h}), \quad (\text{IX.112})$$

Глава IX. Динамическое обоснование кинетической теории

усредняя которые, получим линейные уравнения на поправку к макроскопическому метрическому тензору $\bar{g}_{ik}(x)$:

$$\delta G_{ik}^{(1)}(\bar{h}) = -\langle\langle \delta G_{ik}^{(2)}(h) \rangle\rangle. \quad (\text{IX.113})$$

Следуя методу Айзексона [212], [213] суммарную макроскопическую метрику \bar{V}_4 в квадратичном приближении по порядку взаимодействия мы можем определить из уравнений Эйнштейна

$$G_{ik}(\bar{g}) = 8\pi \langle\langle T_{ik} \rangle\rangle - \langle\langle \delta G_{ik}^{(2)}(h) \rangle\rangle, \quad (\text{IX.114})$$

т.е. с поправкой на плотность энергии $\overline{h_{ik}^{(2)}}$ локальных флуктуаций гравитационного поля. После нахождения $\overline{h_{ik}^{(2)}}$ перенормируем локальные флуктуации метрики второго порядка

$$\delta g_{ik}^2 = h_{ik}^2 - \overline{h_{ik}^2},$$

так что и в этом приближении выполняется условие (IX.96). Здесь необходимо сделать несколько замечаний. Во - первых, макроскопический наблюдатель регистрирует уже перенормированную макроскопическую метрику $\bar{g}_{ik}(x)$, поэтому второй член в правой части (IX.114) должен обладать такими же симметриями, как и первый. Во - вторых, при выводе уравнений (IX.112), (IX.113) мы полагали, что нам известны точные микроскопические мировые линии частиц, порождающих гравитационное поле. Однако, фактически мы не обладаем такой информацией. Поэтому мировые линии взаимодействующих частиц мы также можем восстановить лишь последовательными приближениями по порядку взаимодействия. Малым параметром разложения является масса точечной частицы, m_a . Таким образом, в нулевом и первом порядках теории в качестве мировых линий частиц могут быть взяты их геодезические линии в макроскопической метрике \bar{g}_{ik} . Если мы строим теорию второго порядка по порядку взаимодействия, то в правую часть уравнения (IX.112) необходимо добавить поправку к микроскопическому ТЭИ, обязанную отклонению частиц от макроскопических траекторий $x^i = x_o^i(S)$; $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}_i^0(S)$:

$$\delta T^{ik(2)} = \sum_a \int m [\delta(x|x(S))u^i u^k - \delta(x|x(S))u_0^i u_0^k] dS.$$

IX.6. Усреднение локальных флуктуаций метрики

Поскольку эта поправка линейна по локальным флуктуациям метрики, она не внесет вклад в уравнение (IX.113) для поправки к макроскопическому метрическому тензору. В - третьих, величина $\langle \delta G_{ik}^{(2)}(\hbar) \rangle$ является расходящимся интегралом. Расходимость этих интегралов вызвана неправомерностью линейного приближения уравнений поля вблизи массивной частицы и устраняется стандартной процедурой перенормировки массы точечных частиц, m_a . Наконец, в - четвертых, масса точечных частиц, определяемых как аддитивный сингулярный источник ТЭИ в уравнениях поля (IX.15), в присутствии непрерывной среды становится функцией координат частицы: $m = m(S)$. Такая зависимость возникает в результате процессов аккреции среды на точечную частицу и обратного процесса испарения. Поэтому классическая точечная частица движется в среде по мировой линии, определяемой каноническими уравнениями движения (I.18) с функцией

$$\mathcal{H}(x, \mathbb{P}) = \frac{1}{2} \left[\frac{g^{ik} \mathbb{P}_i \mathbb{P}_k}{m} - m \right] = 0, \quad (\text{IX.115})$$

где $m = m(x)$ находится из уравнений Эйнштейна с сингулярными источниками (IX.15). Соответствующие уравнения движения в терминах переменных x^i, p^i совпадают с уравнениями движения частицы в скалярном поле $\Phi(x)$, если в последних положить $m + q\Phi \rightarrow m(x)$:

$$\frac{Du^i}{dS} = (\ln m)_{,k} (g^{ik} - u^i u^k). \quad (\text{IX.116})$$

Следует также заметить, что в этом разделе мы рассматриваем ансамбль гравитирующих классических точечных частиц. Для классического описания гравитационных взаимодействий частиц, необходимо, чтобы масштаб локализации частиц был гораздо меньше характерного радиуса кривизны пространства - времени. Выражая среднюю плотность числа частиц через их массу и характерный радиус кривизны макроскопического пространства - времени \bar{V}_4, L , запишем указанное условие классического рассмотрения гравитационных взаимодействий в планковских масштабах

$$Lm^2 \gg 1. \quad (\text{IX.117})$$

IX.7 Кинетическое уравнение для безмассовых частиц с учетом гравитационного взаимодействия с массивными частицами в пространственно плоском мире Фридмана

В [214] показано, что в рамках макроскопически однородной космологической модели, основанной на ньютоновской теории гравитации, можно построить кинетические уравнения с интегралом гравитационных столкновений, сходящимся при больших прицельных расстояниях. Ядро полученного в [214] интеграла столкновений совпадает с ядром интеграла столкновений Ландау [215], однако «кулоновский» логарифм оказывается конечным при любых конечных космологических временах. В независимой работе [216] получен аналогичный результат, но интеграл столкновений отличается от полученного в [214], - он не обращается в нуль равновесным распределением. Различие ядер интегралов столкновений в [214] и [216] вызвано, по - видимому, следующими обстоятельствами:

1. В мире Фридмана отсутствует однородность по времени, в связи с чем энергия частиц не является интегралом движения.
2. Вследствие дальнедействующего характера гравитационного взаимодействия акт столкновения растянут во времени.

Сочетание временной нелокальности гравитационного взаимодействия с отсутствием временной однородности и приводит к интегралу столкновений [216]. В [217] получен интеграл кулоновских столкновений для нерелятивистских заряженных частиц в мире Фридмана, с точностью до переобозначений совпадающий с интегралом столкновений [216], хотя все вычисления в [217] проведены в рамках эйнштейновской теории гравитации. Заметим, что привлечение эйнштейновской теории гравитации к задаче о кулоновском взаимодействии нерелятивистских частиц излишне, так как нерелятивистские частицы взаимодействуют посредством кулоновского поля одинаково, в эйнштейновской и ньютоновской трактовке, сама же кулоновская составляющая электромагнитного поля в изотропном однородном пространстве, будучи связана с законом сохранения заряда, не отличается от классической. . Вывод кинетических уравнений без учета излучения для нерелятивистских частиц

IX.7. Кинетическое уравнение для безмассовых частиц

на фоне мира Фрийдмана всегда можно осуществить в рамках ньютоновской теории гравитации и ньютоновской механики. Принципиально другая ситуация имеет место для ультррелятивистских частиц - описание гравитационного воздействия на такие частицы можно провести лишь в рамках релятивистской теории гравитации. Ниже мы частично реализуем программу, описанную в предыдущем разделе, и построим кинетическое уравнение для ультррелятивистских частиц в мире Фрийдмана с учетом их взаимодействия с массивными центрами, распределенными хаотически, но однородно в среднем, причем обратным гравитационным воздействием безмассовых частиц на массивные будем пренебрегать [218, 219, 220].

Для нахождения гравитационного поля массивной точечной частицы в мире Фрийдмана удобнее всего воспользоваться изотропными координатами, в которых интервал имеет вид

$$dS^2 = e^\nu d\eta^2 - e^\lambda [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (\text{IX.118})$$

где $\nu = \nu(r, \eta)$; $\lambda = \lambda(r, \eta)$. Тогда мировой линией массивной частицы, определяемой уравнениями движения (IX.116) является линия времени, причем $m = m(\eta)$ - произвольная функция. Нетривиальные уравнения Эйнштейна для метрики (IX.118) принимают вид (см., например, [46])

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e^{-\lambda} \left[\frac{\lambda'^2}{2} + \lambda'\nu' + \frac{2}{r}(\lambda' + \nu') \right] - e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} + \frac{3}{4}\dot{\lambda}^2 \right) &= \\ &= 8\pi[P + v^2(\mathcal{E} + P)]; \\ -e^{-\lambda} \left(\lambda'' + \frac{\lambda'^2}{4} + \frac{2}{r}\lambda' \right) + \frac{3}{4}e^{-\nu}\dot{\lambda}^2 &= 8\pi \left[me^{-\frac{3}{2}\lambda}\delta(\vec{r}) + \mathcal{E} + v^2(\mathcal{E} + P) \right]; \\ \frac{1}{2}e^{-\lambda}(2\dot{\lambda}' - \nu'\dot{\lambda}) &= 8\pi(\mathcal{E} + P)e^{\frac{1}{2}(\nu+\lambda)}v\sqrt{1+v^2}, \end{aligned} \quad (\text{IX.119})$$

где $v = u^r e^{\lambda/2}$ - реперная проекция радиальной скорости жидкости. Функция Дирака $\delta(\vec{r})$ определена в трехмерном плоском пространстве

$$4\pi \int \delta(r)r^2 dr = 1.$$

Вычитая из первого уравнения системы (IX.119) второе, получим

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left[\frac{\lambda'^2}{2} + \lambda'\nu' - \frac{\nu'^2}{2} + \frac{1}{r}(\lambda' + \nu') - (\lambda'' + \nu'') \right] = 8\pi(\mathcal{E} + P)v^2.$$

Будем считать m, v, λ', ν' - величины первого порядка малости. Тогда в линейном приближении последнее уравнение легко интегрируется: $\lambda + \nu = C_1(\eta)r^2 + C_2(\eta)$. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что $C_1(\eta) = 0$. производя допустимые преобразования координат, сохраняющие вид метрики (IX.118), положим

$$\lambda = \ln a^2 + \xi(r, \tau); \quad \nu = \ln a^2 - \xi(r, \eta), \quad (\text{IX.120})$$

где $a = a(\eta)$; $\xi \ll 1$. Линеаризируя уравнения (IX.119) по малости ξ, m, v , получим систему

$$\frac{1}{a^2} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = -8\pi P_0; \quad 3\frac{\dot{a}^2}{a^4} = 8\pi \mathcal{E}_0; \quad (\text{IX.121})$$

$$\ddot{\xi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\xi} + \left(2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \xi = -8\pi a^2 \frac{dP}{d\mathcal{E}} \delta\mathcal{E}; \quad (\text{IX.122})$$

$$-\frac{1}{a^2 r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \xi') + 3\frac{\dot{a}}{a^4} \frac{\partial}{\partial \eta} (a\xi) = 8\pi \frac{m}{a^3} \delta(\vec{r}) + 8\pi \delta\mathcal{E}; \quad (\text{IX.123})$$

$$v = \frac{1}{8\pi(\mathcal{E}_0 + P_0)} \frac{\partial}{\partial \eta} (a\xi'), \quad (\text{IX.124})$$

где $P_0 = P_0(\eta)$; $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0(\eta)$, и мы положили $\delta P = \frac{dP}{d\mathcal{E}} \delta\mathcal{E}$.

Уравнения (IX.121) описывают эволюцию пространственно - плоской Вселенной Фридмана; уравнение (IX.124) является определением радиальной скорости жидкости. Для решения сингулярных уравнений (IX.122), (IX.123) положим

$$\xi = \frac{2}{ra} (m - \Psi), \quad (\text{IX.125})$$

причем $m = m(\eta)$ и

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Psi(r, \eta)}{r} < \infty. \quad (\text{IX.126})$$

IX.7. Кинетическое уравнение для безмассовых частиц

Подставляя (IX.125) в (IX.123) и учитывая (IX.126), найдем

$$4\pi a^3 \delta\mathcal{E} = \frac{1}{r} \Psi'' + \frac{3\dot{a}}{ra} \frac{\partial}{\partial \eta} (m - \Psi). \quad (\text{IX.127})$$

Используя (IX.127) в правой части (IX.122), получим уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{m} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{m} \left(1 + 3 \frac{dP}{d\mathcal{E}}\right) + m \left(\frac{\ddot{a}}{a} - 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) - \\ - \left[\ddot{\Psi} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Psi} \left(1 + 3 \frac{dP}{d\mathcal{E}}\right) + \Psi \left(\frac{\ddot{a}}{a} - 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) - \Psi'' \frac{dP}{d\mathcal{E}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{IX.128})$$

Разделяя переменные в этом уравнении, получим:

$$\ddot{m} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{m} \left(1 + 3 \frac{dP}{d\mathcal{E}}\right) + m \left(\frac{\ddot{a}}{a} - 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) = \Theta(\eta); \quad (\text{IX.129})$$

$$\ddot{\Psi} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Psi} \left(1 + 3 \frac{dP}{d\mathcal{E}}\right) + \Psi \left(\frac{\ddot{a}}{a} - 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) - \Psi'' \frac{dP}{d\mathcal{E}} = \Theta(\eta), \quad (\text{IX.130})$$

где $\Theta(\eta)$ - произвольная функция. Пусть общим решением однородного уравнения (IX.129) является $m = m_0(\eta)$, а частным решением неоднородного - $m_1(\eta)$; $m = m_0(\eta) + m_1(\eta)$. Пусть далее $\Psi_0(r, \eta)$ - общее решение однородного уравнения (IX.130). Тогда общим решением (IX.130) будет $\Psi = \Psi_0(r, \eta) + m_1(\eta)$. Таким образом, $m - \Psi = m_0(\eta) - \Psi_0(r, \eta)$, следовательно решение задачи определяется решениями однородных уравнений, соответствующих (IX.129), (IX.130). На нерелятивистской стадии расширения $P_0 = 0$ и согласно (IX.121) $a \sim \eta^2$. Тогда (IX.129), (IX.130) легко интегрируются:

$$m = \sigma \left(\frac{\eta_0}{\eta}\right)^3 + \mu \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^2; \quad \Psi = W(r) \left(\frac{\eta_0}{\eta}\right)^3 + V(r) \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^2, \quad (\text{IX.131})$$

где σ, μ - произвольные константы, $W(r), V(r)$ - произвольные функции. Для определения этих функций необходимо рассмотреть эволюцию метрики на ультрарелятивистской стадии расширения, тогда уравнения (IX.129), (IX.130) принимают вид:

$$\ddot{m} + \frac{2}{\eta} \dot{m} - \frac{2}{\eta^2} m = 0; \quad \ddot{\Psi} + \frac{2}{\eta} \dot{\Psi} - \frac{2}{\eta^2} \Psi - \frac{1}{3} \Psi'' = 0. \quad (\text{IX.132})$$

Глава IX. Динамическое обоснование кинетической теории

Первое из этих уравнений легко интегрируется

$$m = \sigma' \left(\frac{\eta_0}{\eta} \right)^2 + \mu' \frac{\eta}{\eta_0}; \quad (\text{IX.133})$$

Для решения второго уравнения сделаем замену $\eta = \sqrt{3}\tau$ и

$$\Psi = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{\tau} \Phi(r, \tau) \right]. \quad (\text{IX.134})$$

После подстановки (IX.134) и изменения порядка интегрирования, приведем (IX.132) к виду

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{\tau} (\Phi_{\tau\tau} - \Phi_{rr}) \right] = 0, \quad (\text{IX.135})$$

откуда с точностью до аддитивного слагаемого, не изменяющего величину $\Psi(r, \eta)$, найдем

$$\Phi = \Phi_+(r + \tau) + \Phi_-(r - \tau), \quad (\text{IX.136})$$

где Φ_+ , Φ_- - произвольные функции. Частным решением (IX.136) является $\Phi = 0$. Тогда согласно (IX.125) получим ньютоновский потенциал, создаваемый точечной частицей переменной массы $m(\eta)$. Однако, такое решение не соответствует образованию этой частицы за счет перераспределения фридмановской метрики, так как противоречит принципу причинности. Поэтому граничные условия должны быть сформулированы таким образом, чтобы по крайней мере за световым горизонтом потенциал $\xi(r, \eta)$ исчезал вместе со своими производными. Фактически, однако, таким горизонтом является не световой, а звуковой горизонт, соответствующий характеристикам уравнения (IX.132) и следующий из известных решений Лифшица [46] для продольных возмущений гравитационного поля. Для того, чтобы при $\eta \rightarrow 0$ масса частицы оставалась ограниченной, в решении (IX.133) необходимо положить $\sigma' = 0$. Граничные условия, удовлетворяющие принципу причинности на звуковом горизонте, имеют вид

$$\xi(r, \tau)|_{r=\tau} = 0; \quad \xi'(r, \tau)|_{r=\tau} = 0.$$

Используя эти условия в решении (IX.136), а также требуя, чтобы вследствие (IX.126)

IX.7. Кинетическое уравнение для безмассовых частиц

$\Phi(r, \tau)|_{r \rightarrow 0} \rightarrow 0$, получим окончательно

$$\Psi(r, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu' \frac{r}{\tau_0} \left(3 - \frac{r^2}{\tau^2} \right), & r \leq \tau; \\ -\mu' \frac{\tau}{\tau_0}, & r > \tau. \end{cases} \quad (\text{IX.137})$$

Сшивая это решение с нерелятивистским (IX.131) в момент смены уравнения состояния $\eta = \eta_0$, получим на нерелятивистской фазе расширения:

$$\xi(r, \eta) = \frac{2\mu}{r} \left[1 - \frac{r}{2\tau_0} \left(3 - \frac{r^2}{\tau_0^2} \right) \right] U_+(\tau_0 - r). \quad (\text{IX.138})$$

Найденный потенциал не зависит от времени, поэтому синхронный в метрике Фридмана наблюдатель, находящийся на расстоянии большем звукового горизонта до частицы, никогда не испытает ее локального гравитационного воздействия. Таким образом в мире Фридмана радиус действия локальных гравитационных полей ограничен звуковым горизонтом частицы. Указанное частицеподобное решение для ультрарелятивистского уравнения состояния жидкости, удовлетворяющее принципу причинности, получено автором в [221], затем в более строгой постановке задачи исследовано и получено в [222, 223]. В работе [224] было показано, что решение (IX.137) является автомодельным и получен класс автомодельных решений для баротропного уравнения состояния с произвольным показателем баротропы. В частности, в последней работе показано, что при показателе баротропы, $\kappa \geq 1/3$ решение описывает ударную сферическую волну.

Пусть теперь в мире Фридмана имеется не одна, а несколько массивных тождественных частиц с координатами $\vec{r}_a = \{x_a, y_a, z_a\}$. Тогда в линейном по m приближении суммарную метрику пространства - времени можно записать в виде

$$dS^2 = (g_{ik} + h_{ik}) dx^i dx^k, \quad (\text{IX.139})$$

где g_{ik} - метрика Фридмана.

$$h_{ik} = -a^2 \delta_{ik} \sum_a \xi_a (|\vec{r} - \vec{r}_a|). \quad (\text{IX.140})$$

Введем поле макроскопических в метрике (IX.139) наблюдателей, координатная сетка которых натянута на массивные частицы. Такие наблюдатели являются геодезическими относительно метрике Фридмана.

Глава IX. Динамическое обоснование кинетической теории

Пусть координаты массивных частиц принимают случайные равновероятные значения на всем множестве $\{x, y, z\}$, причем корреляция между положениями частиц отсутствует. Пусть $N = \text{Const}$ - среднее число массивных частиц, приходящихся на конформный объем $V = \frac{4}{3}\pi r_0^3$, где $r_0 = \sqrt{3}\eta_0$. В соответствии с правилом (IX.62)

$$\langle\langle \varphi(x) \rangle\rangle = \prod_a V_a^{-1} \int d^3 r_a \varphi(x|x_1, x_2, \dots), - \quad (\text{IX.141})$$

— тогда среднее от локальных флуктуаций фридмановской метрики (IX.140) согласно (IX.138) есть

$$\frac{1}{\hbar_{ik}}(r, \eta) = -a^2 \delta_{ik} \frac{3\mu N}{5r_0} = a^2 \text{Const}. \quad (\text{IX.142})$$

Производя перенормировку метрики в соответствии с правилами (IX.109) - (IX.110), получим для перенормированного поля

$$\xi_a \rightarrow \left(\xi_a - \frac{3\mu}{5r_0}\right);$$

перенормировка же макроскопической метрики сводится к умножению g_{44} и $g_{\alpha\beta}$ на постоянные числа, которые масштабным преобразованием координат можно превратить в единицы, восстановив тем самым прежнее значение макроскопической метрики. Используя переопределенное значение функции $\xi(r)$ можно убедиться в том, что изменение полной массы внутри радиуса r_0 , вызванное локализацией массивной частицы, равно нулю. вычисляя согласно (IX.141) $\langle\langle \xi^2(F) \rangle\rangle$, получим

$$\langle\langle \xi^2(F) \rangle\rangle = \frac{108}{175} N \left(\frac{2\mu}{r_0}\right)^2. \quad (\text{IX.143})$$

Для того, чтобы были малы локальные и средние возмущения метрики, необходимо выполнение двух условий:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_a| &\gg 2\mu; \\ N \left(\frac{2\mu}{r_0}\right)^2 &\ll 1. \end{aligned} \quad (\text{IX.144})$$

IX.7. Кинетическое уравнение для безмассовых частиц

Используя свойства изотропии и однородности пространства - времени \bar{V}_4 , можно показать справедливость равенств

$$\begin{aligned}\langle\langle h_{ik} h_{lm} \rangle\rangle &= \delta_{ik} \delta_{lm} a^4 \langle\langle \xi^2 \rangle\rangle; \\ \langle\langle \partial_j h_{ik} h_{lm} \rangle\rangle &= 0; \quad \langle\langle \partial_4 h_{ik} \partial_j h_{lm} \rangle\rangle = 0.\end{aligned}\tag{IX.145}$$

Средние же вида $\langle\langle \partial_\alpha h_{ik} \partial_j h_{lm} \rangle\rangle$ расходятся как $1/r$; расходимость этих величин связана с известной расходимостью собственной энергии. Производя стандартную процедуру перенормировки массы, получим для этих величин

$$\langle\langle \delta_\alpha \xi \partial_\beta \xi \rangle\rangle = \delta_{\alpha\beta} \frac{6\pi N}{r_0^2} \left(\frac{2\mu}{r_0}\right)^2.\tag{IX.146}$$

Вычисляя средние от поправок к тензору Эйнштейна, вызванные флуктуациями метрики, найдем поправки к ТЭИ фридмановской пыли, обусловленные энергией локальных гравитационных полей

$$\delta T_{ij}^G = -\frac{1}{8\pi} \langle\langle \delta G_{ij}^{(2)} \rangle\rangle = \frac{9N}{4r_0^2} \left(\frac{2\mu}{r_0}\right)^2 \frac{g_{ij}}{a^2}.\tag{IX.147}$$

Таким образом, учет локальных флуктуаций гравитационного поля в уравнениях Эйнштейна эквивалентен добавлению к фридмановской пыли жидкости с предельно жестким уравнением состояния с отрицательным давлением, или, что эквивалентно, — добавлению в макроскопические уравнения Эйнштейна λ -члена

$$\lambda = -\frac{18\pi N}{r_0^2 a^2} \left(\frac{2\mu}{r_0}\right)^2.$$

Пусть теперь $f(x, \mathbb{P} | x_1, x_2, \dots) \equiv \tilde{f}(x, \mathbb{P})$ - микроскопическая функция распределения безмассовых частиц. Подсчитывая полное число этих частиц в синхронной по отношению к макроскопической метрике системе отсчета и усредняя затем его по координатам массивных частиц, получим обычную формулу для полного числа частиц, определяемого функцией распределения

$$f(x, \mathbb{P}) = \langle\langle \tilde{f}(x, \mathbb{P}) \rangle\rangle,\tag{IX.148}$$

Глава IX. Динамическое обоснование кинетической теории

если вместо микроскопических импульсов $\tilde{\mathbb{P}}_i$ мы введем макроскопические \mathbb{P}_i по рецепту

$$\mathbb{P}_\alpha = \tilde{\mathbb{P}}_\alpha; \quad \mathbb{P}_4 = \tilde{\mathbb{P}}_4 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}. \quad (\text{IX.149})$$

Отметим, что при преобразовании (IX.149) микроскопическая функция Гамильтона преобразуется по рецепту

$$\tilde{\mathcal{H}}(x, \tilde{\mathbb{P}}) = \frac{1}{1+\xi} \mathcal{H}(x, \mathbb{P}),$$

где $\mathcal{H}(x, \mathbb{P})$ определена по отношению к метрике Фридмана. Полагая далее

$$\tilde{f}(x, \tilde{\mathbb{P}}) = f(x, \mathbb{P}) + \sum_a g_a(x, \mathbb{P}|x_a), \quad (\text{IX.150})$$

причем

$$\langle\langle g_a(x, \mathbb{P}) \rangle\rangle = 0 \quad (\text{IX.151})$$

и усредняя микроскопическое бесстолкновительное кинетическое уравнение для безмассовых частиц, получим

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + \left[1 + \frac{1}{2} \langle\langle \xi^2 \rangle\rangle \right] \mathbb{P}^4 \frac{\partial f}{\partial \eta} + \\ + \mathbb{P}^4 \langle\langle \xi \frac{\partial g}{\partial \eta} \rangle\rangle - \mathbb{P}_4 \mathbb{P}^4 \frac{\partial}{\partial \mathbb{P}_\alpha} \langle\langle \partial_\alpha \xi g \rangle\rangle = 0; \end{aligned} \quad (\text{IX.152})$$

$$\mathbb{P}^i \frac{\partial g_a}{\partial x^i} = -\xi_a \mathbb{P}^4 \frac{\partial f}{\partial \eta} + \mathbb{P}_4 \mathbb{P}^4 \frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}_\alpha} \partial_\alpha \xi_a. \quad (\text{IX.153})$$

Интегрируя (IX.153) вдоль траектории с учетом (IX.138), вычисляя затем необходимые средние и подставляя их в (IX.152), после весьма громоздких вычислений получим искомое кинетическое уравнение для макроскопической функции распределения [220]:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^4 \left[1 + \frac{5}{2} \langle\langle \xi^2 \rangle\rangle \right] \frac{\partial f}{\partial \eta} + \mathbb{P}^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \\ = \frac{3N}{2r_0} \left(\frac{2\mu}{r_0} \right)^2 \Lambda \mathbb{P}_4 \mathbb{P}^4 \frac{\partial}{\partial \mathbb{P}_\alpha} \left[\mathbb{P}_4 \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{\mathbb{P}_\alpha \mathbb{P}_\beta}{\mathbb{P}_4^2} \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}_\beta} \right], \end{aligned} \quad (\text{IX.154})$$

IX.8. Изотропизация фотонов гравитационными взаимодействиями

где

$$\Lambda = \frac{1}{3} + \ln \frac{r_0}{4\mu}. \quad (\text{IX.155})$$

При получении (IX.154) появлялась логарифмическая в пределе $|\bar{r} - \bar{r}_a| \rightarrow 0$ расходимость, которая обрезалась условием малости локальных флуктуаций гравитационного поля (IX.144) на гравитационном радиусе частицы $r = 2\mu$.

Нетрудно проверить, что вследствие (IX.154) сохраняется полное число безмассовых частиц. В левой части кинетического уравнения член $\frac{5}{2} \langle \xi^2 \rangle \mathbb{P}^4 \frac{\partial f}{\partial \eta}$ перенормирует макроскопическую скорость безмассовых частиц

$$v = c / \left(1 + \frac{5}{2} \langle \xi^2 \rangle \right) < c. \quad (\text{IX.156})$$

Нетрудно, однако, видеть, что этот член мал по сравнению с правой частью кинетического уравнения вследствие малости звукового горизонта частицы по сравнению с ее звуковым горизонтом. Отбрасывая этот малый член и ковариантно обобщая уравнение (IX.154), получим:

$$[\mathcal{H}, f] = - \frac{\partial J_i}{\partial \mathbb{P}_i}, \quad (\text{IX.157})$$

где

$$J_i = 8\pi\Lambda\rho_m m W_{ik} \frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}_k}, \quad (\text{IX.158})$$

ρ_m - плотность массы точечных частиц,

$$W_{ik} = (u, \mathbb{P})[\mathbb{P}_i \mathbb{P}_k + g_{ik}(u, \mathbb{P})^2 - (u, \mathbb{P})(u_i \mathbb{P}_k + u_k \mathbb{P}_i)]; \quad (\text{IX.159})$$

u^i - вектор средней скорости массивных точечных частиц. Нетрудно видеть, что тензорная структура W_{ik} совпадает со структурой ядра интеграла Беляева - Будкера, если в последнем одну из частиц положить ультррелятивистской, а вторую - нерелятивистской.

IX.8 Изотропизация однородного распределения безмассовых частиц гравитационными взаимодействиями

Точным решением кинетического уравнения (IX.154) является произвольное изотропное распределение $f(\mathbb{P})$. Если же первоначальное рас-

Глава IX. Динамическое обоснование кинетической теории

пределение анизотропно, то оно будет изотропизоваться гравитационными взаимодействиями. Пусть в момент $\eta = \eta_0$ распределение безмассовых частиц в синхронной системе отсчета имеет вид

$$f(\eta_0, \mathbb{P}_\alpha) = \sum f_{lm}(\eta_0, p) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (\text{IX.160})$$

где θ, φ азимутальный и полярный углы в импульсном пространстве, $Y_l^m(\theta, \varphi)$ - шаровые функции. Представляя распределение $f(\eta, \mathbb{P}_\alpha)$ в виде аналогичном (IX.160) и разделяя переменные, получим уравнения для функций $f_{lm}(\eta, p)$:

$$\frac{\partial f_{lm}}{\partial \eta} = 8\pi l(l+1)m\Lambda a\rho_m \cdot f_{lm}, \quad (\text{IX.161})$$

решая которые с начальными условиями (IX.160), найдем [220]:

$$f_{lm}(\eta, p) = f_{lm}(\eta_0, p) e^{-l(l+1)24\pi\Lambda m\rho_m t [1 - (t_0/t)^{1/3}]}, \quad (\text{IX.162})$$

где $m = m(t)$, $\rho_m = \rho_m(t)$. При $t \rightarrow \infty$ выражение под знаком экспоненты растет пропорционально t . Поэтому при $t \rightarrow \infty$ в выражении (IX.162) остается лишь одна гармоника с $l = 0$, т.е. распределение изотропизуется. В действительности это, однако, не совсем так. Полученное кинетическое уравнение пригодно лишь до тех пор, пока масса массивных частиц будет гораздо меньше массы всей области под звуковым горизонтом, что приводит к условию

$$N\mu \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \ll \frac{2t_0}{\sqrt{3}}. \quad (\text{IX.163})$$

На современном этапе эволюции Вселенной условие (IX.163) принимает вид $m \ll 10^{18} M_\odot / N$. При этом степень изотропизации первоначального распределения еще мала. Однако гармоники распределения с высоким орбитальным числом l могут затухнуть к настоящему времени. Гармонике с номером l соответствует угловой масштаб $\Delta\varphi = 2\pi(l+1)$. Поэтому при заданных современных значениях массы частиц $m(t)$ и их средней плотности $\rho_m(t)$ исчезают все гармоники с угловым размером

$$\Delta\varphi < 2\pi\sqrt{24\pi\Lambda m\rho_m t}. \quad (\text{IX.164})$$

При $m \sim 10^{16} M_\odot$, $\rho_m \sim 10^{-30}$ г/см³ и $t = 2 \times 10^{10}$ лет получим из (IX.164) $\Delta\varphi < 10$ угловых минут. Таким образом, любое реликтовое излучение должно быть в высокой степени однородно на масштабах, меньших 10 угловых минут.

Литература

- [1] *Черников Н.А.* Релятивистское кинетическое уравнение и равновесное состояние газа в статическом сферически - симметричном гравитационном поле. - Докл. Акад. Наук СССР, **133** (1960) - 333-336.
- [2] *Tauber E., Weinderg J.W.* Internal state of a graviting gas. - Phys. Rev., **122** (1961) - 1342-1365.
- [3] *Черников Н.А.* Кинетическое уравнение для релятивистского газа в произвольном гравитационном поле. - Докл. Акад. Наук СССР, **144** (1962) - 89-92.
- [4] *Черников Н.А.* Вектор потока и тензор массы релятивистского идеального газа. - Докл. Акад. Наук СССР, **144** (1962) - 314-317.
- [5] *Черников Н.А.* Релятивистское распределение Максвелла - Больцмана и интегральная форма законов сохранения. - Докл. Акад. Наук СССР, **144** (1962) - 544-547.
- [6] *Chernikov N.A.* The microscopic foundation of the relativistic hydrodynamics. - Acta Phys. Polon., **27** (1965) - 723-739.
- [7] *Власов А.А.* Статистические функции распределения. - Наука, М. (1966).
- [8] *Lindquist E.W.* Relativistic transport theory. - Ann. Phys., **37** (1966) - 487-518.
- [9] *Stewart J.M.* Non - Equilibrium Relativistic Kinetic Theory. - Lect. Notes in Physics, **10** (1971) - 78-81.

Литература

- [10] *Ehlers J.* General Relativity and Kinetic Theory. - General Relativity and Cosmology, proceeding of course 47 of the International School of Physics "Enrico Fermi", ed. Sachs R.K.. New York, Academic Press (1971) - 358
- [11] *Ehlers J.* Kinetic theory of gases in general relativity theory. - Lect. Notes in Physics, **28** (1974) - 78-105.
- [12] *Israel W., Stewart J.M.* Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory. - Ann. Phys., **118** (1977) - 341-372.
- [13] *Сахаров А.Д.* Нарушение СР-инвариантности, С-асимметрия и барионная асимметрия Вселенной. - Письма в журн. эксперим. и теорет. физ., **5** (1967) - 32-35.
- [14] *Кузьмин В.А.* СР-неинвариантность и барионная асимметрия Вселенной. - Письма в журн. эксперим. и теорет. физ., **12** (1970) - 335-337.
- [15] *Fry J.N., Clive K.A., Turner M.S.* Hierachy of cosmological baryon generation. - Phys. Rev. Let., **45** (1980) - 2074-2077.
- [16] *Игнатьев Ю.Г.* О статистической динамике ансамбля частиц в ОТО. - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р.//Казань, изд-во КГУ, вып. 14 (1978) - 90-107.
- [17] *Игнатьев Ю.Г.* Статистическая динамика ансамбля классических частиц в гравитационном поле. - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р.//Казань, изд-во КГУ, вып. 20 (1983) - 50-109.
- [18] *de Groot S.R., van Leeuwen W.A., van Weert Ch.G.* Relativistic Kinetic Theory. - North - Holland Publishing Company Amsterdam - New-York - Oxford (1980).
Русский перевод: *де Гроот С., ван Леувен В., ван Верт Х.* Релятивистская кинетическая теория. Принципы и применения. Москва: Мир, 1983, 422 с.
- [19] Jüttner F.. Ann. d. Phys., **34**, 146, (1911).
- [20] Jüttner F.. Ann. d. Phys., **35**, 145, (1911).
- [21] Tolman R.C.. Phil. Mag. **28**, 1953, (1914).

Литература

- [22] Jüttner F.. Zs. Phys., **47**, 542, (1928).
- [23] Walker A.G.. Proc. Edinburgh Math. Soc., **2**, 238, (1935).
- [24] D. Van Dantzing. Nederl. Akad. Wetensch. Proc., **42**, 608, (1939).
- [25] Lichnerovich A., Marrot R.. Comp.Rend., **210**, 759, (1940).
- [26] Marrot R.. Math. Pur. Appl., **25**, 93, (1946).
- [27] Taub A.H.. Phys. Rev., **74**, 328, (1948).
- [28] Корпе Н.. Ann. d. Phys., **112**, 103, (1948).
- [29] Власов А.А.. Теория многих частиц, ГИТТЛ, М.-Л. (1950).
- [30] Климонтович Ю.Л. Релятивистское уравнение для квантовой функции распределения. ДАН СССР, **87**, вып. 6, 927, (1952).
- [31] Lindhard J.L. Det. Kong. Dansske Videnskab.Selskab. Dan.Mat.Fyz. Medd., **28**, 8, (1954).
- [32] Климонтович Ю.Л.. Труды Московского авиационного технологического института, **26**, 233, (1955).
- [33] *Беляев С.Г., Будкер Г.И.* Релятивистское кинетическое уравнение. - Докл. Акад. Наук СССР, **107** No 6 (1956) - 807-810.
- [34] Synge J.L.. The relativistic gas. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, (1957).
- [35] Черников Н.А.. ЖЭТФ, **32**, 389 (1957).
- [36] Черников Н.А.. ЖЭТФ, **33**, 541 (1957).
- [37] Черников Н.А.. ДАН СССР, **112**, 1030 (1957).
- [38] Черников Н.А.. ДАН СССР, **114**, 530 (1957).
- [39] Власов А.А.. Труды VI-го совещания по вопросам космогонии, Изд-во АН СССР; Scientia Sinica, v. 3, 266 (1959).
- [40] *Климонтович Ю.Л.* Релятивистские кинетические уравнения для плазмы. I. - Журн. эксперим. и теорет. физ., **37** (1959) - 735-746.

Литература

- [41] *Syng J.L.* Relativity: The General Theory. - North - Holland Publishing Company, Amsterdam (1960).
- [42] *Климонтович Ю.Л.* Релятивистское кинетическое уравнения для плазмы. II. - Журн. эксперим. и теорет. физ., **38** (1960) - 1212-1221.
- [43] *Игнатъев Ю.Г.* Дисперсия гравитационных волн в релятивистском газе. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **17** No 12 (1974) - 136-142.
- [44] *Ignat'ev Yu.G.* The propagation of electromagnetic plasma oscillations in the gravitational field. - Acta Phys. Polon. No2, **36** (1975) - 203-223.
- [45] *Игнатъев Ю.Г.* Равновесные состояния релятивистского заряженного газа в рамках общей теории относительности. - Укр. физ. журн., **21** No 12 (1976) - 1970-1977.
- [46] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. - М., Наука (1973).
- [47] *Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A.* Gravitation. - W.H. Freeman & Company, San Francisco (1973).
- [48] *Барабаненков Ю.Н., Озрин В.Д., Петрова О.А.* О волновом выводе релятивистского кинетического уравнения для скалярных частиц в заданной метрике. - "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц"/Под редакцией Станюковича К.П.//М., Атомиздат, вып 7 (1977) - 119-124.
- [49] *Игнатъев Ю.Г.* Релятивистские кинетические уравнения для неупруго взаимодействующих частиц в гравитационном поле. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **26** No 8 (1983) - 19-23.
- [50] *Игнатъев Ю.Г.* Релятивистский канонический формализм и инвариантная одночастичная функция распределения в ОТО. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **26** No 8 (1983) - 15-19.
- [51] *Игнатъев Ю.Г.* Релятивистская кинетическая теория и конформные преобразования. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **25** No 4 (1982) - 92-96.
- [52] *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относительности. - Наука, М. (1966).
- [53] *Cartan E.* Sur les espaces de Finsler. - Compt. Rend., **196** (1933) - 582.

Литература

- [54] *Захаров А.В., Игнатьев Ю.Г.* К методу кинетического уравнения в общей теории относительности. - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р.//Казань, изд-во КГУ, вып. 13 (1976) - 49-56.
- [55] *Захаров А.В., Игнатьев Ю.Г.* О распространении излучения в плазме, находящейся в гравитационном поле. I. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **19** No 9 (1976) - 57-62.
- [56] *Рашиевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. - Наука, М. (1964).
- [57] *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. - ГИФМЛ, М. (1961).
- [58] *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика. - Наука, М. (1982).
- [59] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. - Наука, М. (1964).
- [60] *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Релятивистская квантовая теория. Т.1. - Наука, М. (1968).
- [61] *Alvares E.J.* On the transport equations for a one component relativistic gas. - J. Phys. and Math. Gen., **9** (1976) - 1861-1875.
- [62] *Иванов Г.Г.* Уравнение Улинга - Уленбека и квантовая статистика идеальных газов в ОТО. - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р.//Казань, изд-во КГУ, вып. 14 (1978) - 80-89.
- [63] *Исихира А.* Статистическая физика. - Мир, М. (1973).
- [64] *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - Наука, М. (1965).
- [65] *Игнатьев Ю.Г.* Законы сохранения и термодинамическое равновесие в общерелятивистской кинетической теории неупруго взаимодействующих частиц. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **26** No 12 (1983) - 9-14.
- [66] *Иванов Г.Г.* О самогравитирующем скалярном поле с кубической нелинейностью. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **23** No 12 (1980) - 18-22.

Литература

- [67] *Bancel D., Choquet-Bruhat Y.* Existence, Uniqueness and Local Stability for the Einstein - Maxwell - Boltzman System. - Commun. Math. Phys., **33** (1973) - 83-96.
- [68] *Игнатьев Ю.Г., Кузеев Р.Р.* Термодинамическое равновесие самогравитирующей плазмы со скалярным взаимодействием. - Укр. физ. журн., **29** No 7 (1984) - 1021-1025.
- [69] *Игнатьев Ю.Г.* Равновесные макроскопические движения релятивистского гравитирующего газа заряженных частиц. - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р./Казань, изд-во КГУ, вып. 17 (1980) - 56-70.
- [70] *Мухамедов А.М.* О свойствах симметрии заряженной жидкости в ОТО. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **21** No 11 (1978) - 113-117.
- [71] *Захаров А.В., Игнатьев Ю.Г.* О распространении излучения в плазме, находящейся в гравитационном поле. II. Электромагнитные волны в приближении геометрической оптики. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **19** No 9 (1976) - 62-69.
- [72] *Иванов Г.Г., Даишев Р.А.* Макроскопические движения идеального газа и симметрия пространства - времени. - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р./Казань, изд-во КГУ, вып. 14-15 (1978) - 74-79.
- [73] *Иванов Г.Г.* Стационарные макроскопические движения релятивистского газа и их связь с симметриями гравитационных полей. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **22** No 6 (1979) - 15-20.
- [74] *Игнатьев Ю.Г., Шуликовский В.Ю.* Столкновительная релаксация плазмы в поле плоской гравитационной волны. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **25** No 10 (1982) - 85-89.
- [75] *Игнатьев Ю.Г.* Дисперсия гравитационных волн в релятивистском газе. - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р./Казань, изд-во КГУ, вып. 12 (1977) - 73-94.
- [76] *Игнатьев Ю.Г., Фазлеева А.З.* Столкновительное затухание гравитационных волн в ультрарелятивистской плазме. - Укр. физ. журн., **26** No 1 (1981) - 28-38.

Литература

- [77] *Bondi H., Pirani F., Robinson I.* Gravitational waves in general relativity. III. Exact plane waves. - Proc. Roy. Soc. A., **251** (1959) - 519-533.
- [78] *Asseo E., Gerbal D., Heyvaev J., Signore M.* General relativistic kinetic theory of waves in a massive particle medium. - Phys. Rev., **13 D** (1976) - 2724-2737.
- [79] *Ignat'ev Yu.G., Zakharov A.V.* The reflection of gravitational waves from compact stars. - Phys. Letters, **66 A** (1978) - 3-4.
- [80] *Gayer S., Kennel C.F.* Possibility of Landau damping of gravitational waves. - Phys. Rev., **19 D** (1979) - 1070-1083.
- [81] *Захаров А.В.* Гравитационные волны в релятивистском газе. - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р./Казань, изд-во КГУ, вып. 16 (1979) - 37-53.
- [82] *Игнат'ев Ю.Г.* Бесстолкновительный газ в поле плоской гравитационной волны. - Журн. эксперим. и теорет. физ., **81** (1981) - 3-12.
- [83] *Игнат'ев Ю.Г., Балакин А.Б.* Нелинейные гравитационные волны в плазме. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **24** No 7 (1981) - 20-24.
- [84] *Балакин А.Б., Игнат'ев Ю.Г.* Действие плоских гравитационных волн на бесстолкновительные плазмopodobные среды. - "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц"/Под редакцией Станюковича К.П./М., Энергоатомиздат, вып. 14 (1984) - 43-62.
- [85] *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. - ГИФМЛ, М.-Л. (1963).
- [86] *Игнат'ев Ю.Г.* Релятивистские кинетические уравнения и космология. - "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц"/Под редакцией Станюковича К.П./М., Атомиздат, Выпуск 11 (1980) - 113-125.
- [87] *Игнат'ев Ю.Г.* Релятивистская кинетика и космология. I. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **23** No 8 (1980) - 42-47.
- [88] *Игнат'ев Ю.Г.* Релятивистская кинетика и космология. II. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **23** No 9 (1980) - 27-32.

Литература

- [89] *Игнатъев Ю.Г.* Космология, кинетика и масса покоя нейтрино. - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р.//Изд-во КГУ, Казань, Выпуск 18 (1981) - 73-75.
- [90] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М., Физматгиз (1963).
- [91] *Synge J.L.* Geometrical optics in moving dispersive media. - Comm. Dublin Inst. Adv. Stud., **12A** (1956) - 29-43.
- [92] *Игнатъев .Г.* Кинетическое уравнение и массовая поверхность. - Казань, изд-во КГУ, вып. 19 (1980).79-88
- [93] *Игнатъев Ю.Г.* Релятивистская кинетика анизотропной плазмopodobной среды с затуханием в поле гравитационного излучения . - Известия ВУЗов, сер. Физика, **27** No 12 (1984) - 70-74.
- [94] *Игнатъев Ю.Г.* Резонансная генерация плазменных колебаний плоской гравитационной волной . - Известия ВУЗов, сер. Физика, **28** No 1 (1985) - 74-77.
- [95] *Игнатъев Ю.Г., Балакин А.Б.* Кинетика бесстолкновительной плазмы в поле плоской гравитационной волны.. - Москва, II Всесоюзн. совещ. по избранным проблемам статистической физики. Тез. докл., (1982) - 47-48.
- [96] *Игнатъев Ю.Г.* Действие плоских гравитационных волн на плазмopodobные среды и жидкости. - Киев, Космические исследования на Украине. Тез. докл.Всесоюзн. совещ., **12** (1983) - 65-66.
- [97] *Balakin A.B., Ignat'ev Yu.G.* The effect of gravitational waves at the contact of conductors. - Phys. Letters, **V.96A** (1983) - 10-11.
- [98] *Игнатъев Ю.Г.* Магнитоактивная бесстолкновительная плазма в поле длинноволнового гравитационного излучения. - Укр. физ. журн., **29** No 7 (1984) - 1025-1029.
- [99] Ю.Г.Игнатъев. Кинетические процессы в релятивистских полях тяготения. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ. - мат. наук. Казань, 1987. (Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ-мат. наук, Минск, (1988)).

Литература

- [100] Балажин А.Б. О воздействии сильной гравитационной волны на анизотропную плазму . - Известия ВУЗов, сер. Физика, **25** No 9 (1982) - 48-52.
- [101] Игнатъев Ю.Г., Хуснутдинов Н.Р. Действие плоских гравитационных волн на однородную магнитоактивную плазму. Укр. физ. журн., **31** No 5 (1986), с. 707-715.
- [102] Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М: Высшая школа, 1978. -407 с.
- [103] Гальцов Д.В., Грац Ю.В., Петухов В.И. Излучение гравитационных волн электродинамическими системами . - , Москва Изд-во Московского ун-та (1984) - 128.
- [104] Игнатъев Ю.Г., Шуликовский В.Ю. Релятивистская кинетика столкновительного затухания гравитационных волн в горячей Вселенной. // В сб. Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции Вселенной. Казань: Изд-во Казанского пед-института. (1987), с. 84-96.
- [105] Баранов В.Б., Краснобаев К.В. Гидродинамическая теория космической плазмы. - , Москва "Наука" (1977) - 336.
- [106] Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. - , 1 Москва Мир (1978) - 404.
- [107] Игнатъев Ю.Г. Движение идеальной жидкости в поле плоской гравитационной волны. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **25** No 11 (1982) - 96-99.
- [108] Игнатъев Ю.Г. Идеальная жидкость с предельно жестким уравнением состояния в поле плоской гравитационной волны. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **25** No 11 (1982) - 99-102.
- [109] Игнатъев Ю.Г., Шуликовский В.Ю. Действие гравитационной волны на радиационно-доминированную плазму. - , **1532** Деп. в ВИНТИ (1984) - 2.
- [110] Игнатъев Ю.Г. Идеальная жидкость с коротким скалярным взаимодействием в поле плоской гравитационной волны. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **26** No 12 (1983) - 7-9.

Литература

- [111] Игнатъев Ю.Г., Смирнов А.В. Колебания анизотропной ограниченной плазмы в поле слабой гравитационной волны.// Укр. физ. журн., **31**, (1986), с. 1917-1925.
- [112] Ю.Г.Игнатъев. «Теоретические и экспериментальные проблемы гравитации». Тезисы докладов 8 Российской гравитационной конференции, М, (1993), с. 47.
- [113] Yu. G. Ignat'ev, Excitation of Magnetohydrodynamic Shock Waves by a Gravitational Wave. *Gravitation & Cosmology*, **1**, No 4, (1995), p. 287-300
- [114] Yu.G.Ignat'ev, About on the magnetohydrodynamic shock waves, *Gravitation & Cosmology*, 2, No. 2,1996, p. 174.
- [115] Yu.G.Ignat'ev, Gravimagnetic shock waves and gravitational -waves experimenttes, *Gravitation & Cosmology*, 2, No. 4, 1996, p. 167-174.
- [116] Yu.G.Ignat'ev, Gravitational magnetic shocks as a detector of a gravitational waves, *Physics Letters A*. 230, 1997, p. 171-176.
- [117] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика. М: Наука, (1975), 204 с.
- [118] Yu.G.Ignat'ev. Kinetic model of GMSW in an anisotropic plasma. *Gravitation & Cosmology*, **3**, No 4, (1997), p. 254-260.
- [119] Yu.G.Ignat'ev, D.N.Gorokhov. Gravimagnetic shock waves in an anisotropic plasma. *Gravitation & Cosmology*, **3**, No 4, (1997), p. 261-265.
- [120] F.G.Smith, Pulsars, Cambridge University Press, Cambridge, (1977).
- [121] Yu.G.Ignat'ev, V.A. Markov. Local GMSW -response of a magnetoactive plasma to the gravitational wave. *Gravitation & Cosmology*, 4, No. 1, (1998), p. 40-48.
- [122] Yu. G. Ignatyev and A. A. Agafonov. Bremsstrahlung Response of a Homogeneous Magnetoactive Plasma to a Gravitational Wave. *Gravitation and Cosmology*, 2010, Vol. 16, No. 1, pp. 16–24.
- [123] *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. - , Москва: Мир (1978) - 496.
- [124] Копвиллем У.Х., Нагибаров В.Н. Письма в ЖЭТФ, **2** (1965), 529.

Литература

- [125] K.R.Lang, *Astrophysical Formulae*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New-York, (1974).
- [126] Зельдович Я.Б., Новиков И.Д., *Теория тяготения и эволюция звезд*. М: Наука, (1971), 484 с.
- [127] Агемян Т.А. *Звезды, галактики и метagalактика*. М: Наука, (1966) 320с.
- [128] Т.А.Лозинская, *Итоги науки и техники, Астрономия*, **22**, Москва, (1988),33 (в России).
- [129] W.D.Langer, A.G.W.Cameron, *Ap.& Spa. Sci.*, **5**, (1969),213.
- [130] S.Tsuruta, A.G.W.Cameron, *Can. J. Phys.*, **43**, (1965),2056.
- [131] C.M.Varma, *Nature*, **267**, (1977),686.
- [132] F.Pacini, *Nature*, **219**,(1968), N5150, 145.
- [133] Агафонов А.А., Игнатъев Ю.Г. Гравимагнитные ударные волны в магнитосферах нейтронных звезд. Труды 2-й Российской школы-семинара по теории гравитации и космологии - «Gracos-2009». Казань-Яльчик: Изд-во «Фолиант», 2009. - с. 16-20.
- [134] Игнатъев Ю.Г. Физические процессы на границе раздела плазмы в сильном гравитационном поле. II. Рождение электронно-позитронных пар. *Украинский физический журнал*, **24**, No 6, (1979), с. 742-747.
- [135] Игнатъев Ю.Г., Иванов Г.Г. Равновесие и стратификация плазмы в гравитационном поле. *Украинский физический журнал*, **23**, No 12, (1978), с. 2044-2051.
- [136] Игнатъев Ю.Г. Физические процессы на границе раздела плазмы в сильном гравитационном поле. Тормозное излучение, *Украинский физический журнал*, **24**, No 5, (1979), с. 646-653.
- [137] Игнатъев Ю.Г. Равновесие магнитоактивной плазмы в гравитационном поле, *Украинский физический журнал*, **24**, No 11, (1979), с. 1631-1636.

Литература

- [138] Игнатъев Ю.Г., Чепкунова Е.Г. Гравимагнитные ударные волны в неоднородной плазме. Труды математического центра имени Н.И.Лобачевского, **11**,(2001), 120-133.
- [139] Yu.G. Ignat'ev, E.G. Cherkunova. The moving semibounded magnetoactive plasma in field of a plane gravitational wave. *Gravitation & Cosmology*, **10**, No 4, (2004), p. 123-127.
- [140] Игнатъев Ю.Г., Чепкунова Е.Г. Точное плоско-симметричное нестационарное решение самосогласованных уравнений Эйнштейна -Максвелла для плазмы. Вестник КГПУ, вып. 2, 2004, с. 40-49.
- [141] Yu.G. Ignat'ev, E.G. Cherkunova, Exact plane symmetric non-stationary solution to the Einstein Maxwell equations for a magneto active plasma. *Gravitation & Cosmology*. **10**, No 3, 2004г p. 1-6.
- [142] *Пилькун Х.* Физика релятивистских частиц. - Мир, М. (1983).
- [143] *Черников Н.А., Шавахина Н.С.* Принцип конформной инвариантности. . - Новейшие проблемы гравитации, Тез. доклал. Всесоюзн. симпозиум, М., (1973) - 40-42.
- [144] *Ehlers I., Geren P., Sachs R. K.* Isotropic solutions of the Einstein - Liouville equations . - *J. Math. Phys.*, **9** (1968) - 1344 - 1361.
- [145] *Игнатъев Ю.Г.* О кинетическом уравнении в общей теории относительности. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **22** No 2 (1979) - 72-76.
- [146] Магалинский В.Б. Кинетика малых возмущений пространственно однородной гравитирующей среды. *Астроном. ж.*, **49**, вып. 5, (1972). с. 1017-1025.
- [147] *Игнатъев Ю.Г.* Локальная температура статистической системы в общей теории относительности . - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р.//Изд-во КГУ, Казань, Выпуск 16 (1980) - 73-75.
- [148] *Игнатъев Ю.Г.* Локальная температура неравновесного релятивистского газа в стационарных полях тяготения . - Всесоюзн. научн. конф. по неевклидовой геометрии. Тез. докл. Казань, (1976) - 85.

Литература

- [149] Орлов С.В. Релятивистское расширение бозе- конденсата. - Проблемы теории гравитации и элементарных частиц , М: Энергоатомиздат, Выпуск 16 (1985) - 119-122.
- [150] Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция Вселенной . - , М: Наука, (1975) - 736.
- [151] Козик В.С, Любимов В.А. Новиков Е.Г., Нозик В.З., Третьяков Е.Ф. Об оценке массы по спектру β - распада трития в валине.. - , Ядерная физика (1985) - 301-303.
- [152] Балакин А.Б., Игнатьев Ю.Г., Шуликовский В.Ю. Кинетика изотропного расширения однородной электронно-фотонной плазмы. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **25** No 9 (1982) - 53-57.
- [153] Брагинский С.Н. Явления переноса в плазме. - Вопросы теории плазмы , М: Госатомиздат, Выпуск 1 (1963) - 183-272.
- [154] Балакин А.Б., Игнатьев Ю.Г., Шуликовский В.Ю. Кинетика изотропного расширения оптически прозрачной плазмы на комптоновской стадии. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **25** No 10 (1982) - 82-85.
- [155] Компанеев А.С. Об установлении теплового равновесия между квантами и электронами . - Журн. эксперим. и теор. физ., **31** (1956) - 876-885.
- [156] Игнатьев Ю.Г., Шуликовский В.Ю. Затухание гравитационных волн в ранней Вселенной. - , **1532** Деп. в ВИНТИ (1984) - 10.
- [157] Yu.G. Ignat'ev, V.Yu. Shulikovsky Relativistic kinetics of collisional damping of gravitational waves in a hot Universe. - Gravitation & Cosmology, **12** No 4 (2006) - p. 321-327.
- [158] Полнарев А.Г. О возможности бесстолкновительного затухания гравитационных волн . - Релятивистская астрофизика. Космология. Гравитационный эксперимент, Тез. доклал.IV Всесоюзн. конф.по гравитации, Минск, (1976) - 74-76.
- [159] Grishchuk B.P., Polnarev A. G. Gravitational waves and their interaction with matter and fields. - General Relativity and Gravitation, New York: Plenum Press, ed. A.Meld., **11** (1980) - 393-434.

Литература

- [160] *Клоуз Ф.* Кварки и лептоны. Введение в теорию. - , Москва: Мир (1982) - 438.
- [161] *Игнатъев Ю.Г.* Релятивистская кинетика бариогенезиса в горячей Вселенной . - *Астроном. журн.* , **62** Москва, Выпуск 4 (1985) - 633-638.
- [162] *Hawking S.W.* Pertubations of an expending universe. - *Astrophys. Journ.*, **145** (1966) - 544-554.
- [163] L.B.Okun L.B., Ja.B.Zeldovich, *Comments on Nucl. and Part. Physics* **6**, 69 (1976).
- [164] A.Yu. Ignat'ev, N.V. Krasnikov, V.A. Kusmin, A.N. Tavheligze, *Phys. Lett* **76B**, 436 (1976).
- [165] *Yoshimura H.* Unified Gauge Theories and the Baryon Number of the Universe . - *Phys. Rev. Let.*, **41** (1978) - 281-284.
- [166] *Weinberg S.* Cosmological Production of Baryons . - *Phys. Rev. Let.*, **42** (1979) - 850-853.
- [167] *Weinberg S.* Beyond the first Three Minuts. - *Physica Scripta*, , **21** (1981) - 773-781.
- [168] *Долгов А.Д., Зельдович Я.Б.* Космология и элементарные частицы . - *Успехи физ. наук*, **130** (1980) - 559-614.
- [169] *J.M. Fry, K.A. Olive, M.S. Turner.* Evolution of cosmological baryon asymmetries. I. The role of gauge bosons. *Phys. Rev.D* **22**, 2953 (1980).
- [170] *Fry J.N., Olive K.A., Turner M.S.* Evolution of cosmological baryon asymmetries. II. The role of Higgs bozons . - *Phys. Rev.D.*, **22** (1980) - 2977-2988.
- [171] *J.M. Fry, K.A. Olive, M.S. Turner.* Hierarchy of cosmological Baryon Generation. *Phys. Rev. Lett* **45**, 2074 (1980).
- [172] *Игнатъев Ю.Г.* Релятивистская кинетика бариогенезиса в горячей Вселенной . - *Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации, Тез. доклал. Всесоюзн. конф., М.,* (1984) - 19-21.

Литература

- [173] Ю.Г. Игнатьев. Релятивистская кинетика бариогенезиса в горячей Вселенной. *Астрономический журнал*, **62**, 633 (1985).
- [174] Ю.Г. Игнатьев. Кинетическая модель бариогенезиса в симметричной горячей Вселенной. В сб.: «Классические и квантостатистические проблемы релятивистской теории гравитации», Казань: Изд-во КГПУ, 1991, с. 6-21.
- [175] *Yu.G.Ignatyev, K.Alsmadi*. A complete relativistic kinetic model of symmetry violation in isotropic expanding plasma. I. Exact model. *Gravitation & Cosmology*, **11** No 3, 252 (2005).
- [176] *Yu.G.Ignatyev, K.Alsmadi*. A complete relativistic kinetic model of symmetry violation in isotropic expanding plasma. II. Numerical model. *Gravitation & Cosmology*, **11** No 4, 363 (2005).
- [177] *Yu.G.Ignatyev, K.Alsmadi*. A complete relativistic kinetic model of symmetry violation in isotropic expanding plasma. III. Specific Entropy Calculation *Gravitation & Cosmology*, **13** No 2, 114 (2007).
- [178] *Игнатьев Ю.Г.* Нарушение термодинамического равновесия в ранней Вселенной . - Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации, Тез. доклад. Всесоюзн. конф., М., (1984) - 18-19.
- [179] *Игнатьев Ю.Г.* Возможность нарушения термодинамического равновесия в горячей Вселенной. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **29** No 2 (1986) - 27-32.
- [180] *Смирнов А.В.* В сб.: «Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции Вселенной», Казань: изд-во КГПИ, 1988, с. 59-61.
- [181] *Игнатьев Ю.Г.* В сб.: «Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции Вселенной», Казань: изд-во КГПИ, 1988, с. 62-83.
- [182] *Окунь Л.Б.* Лептоны и кварки. Москва: Наука, (1981), 304 с.
- [183] *M. Froissart*. Phys. Rev., 123, (1961), p. 1053.
- [184] *A. Martin*. Phys. Rev., 129, (1963), p. 1432.

Литература

- [185] *A. Martin*. Nuovo. Cim., 142, (1966), p. 930.
- [186] *Y.S. Jin, A. Martin*. Phys. Rev. **B** 135, (1964), p. 1369
- [187] *M. Sugawara*. Phys. Rev. Lett., **14**, (1965), p. 336.
- [188] *R.I. Eden*. High Energy Collisions of Elementary Particles, Cambridge At the University Press, 1967.
Русский перевод: Р. Иден. Соударения элементарных частиц при высоких энергиях. М: Наука, 1970, 392 с.
- [189] *J.D. Bjorken, E.A. Paschos*. Phys. Rev., **185**, (1969), p. 1975.
- [190] *R.P. Feynman*. Phys. Rev. Lett., **23**, (1969), p. 1415.
- [191] *Грицук Л.П.* ЖЭТФ. **67**, (1974), с. 825.
- [192] *Игнатьев Д.Ю., Игнатьев Ю.Г.* Обоснование кинетической модели неравновесной Вселенной. Труды международного семинара «Современные проблемы теории гравитации и космологии — Gracos - 2009», Казань - Яльчик - 2009. Изд-во «Фолиантъ», 2009, с. 59-67.
- [193] *А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий*. Квантовая электродинамика, Москва: Наука, 1969, 624 с..
- [194] *Шуликовский В.Ю.* Влияние процессов множественного рождения частиц на эволюцию неравновесной Вселенной. В сб.: «Классические и квантово - статистические проблемы релятивистской теории гравитации». Казань: Изд-во КГПИ, 1991, с. 39-45.
- [195] *Yu.G. Ignatyev*. Kinetics of the nonequilibrium Universe. I. Local thermodynamic equilibrium condition. Gravitation & Cosmology, 13 (2007), No 1, pp. 31-42.
- [196] *Yu.G. Ignatyev and D.Yu.Ignatyev*. Kinetics of the nonequilibrium Universe. II. Kinetics of local thermodynamic equilibrium recovery. Gravitation & Cosmology, **13**, No 2, (2007), pp. 101-113.
- [197] *Yu.G. Ignatyev and D.Yu.Ignatyev*. Kinetics of a Non-Equilibrium Universe. III. Stability of the Non-Equilibrium Scenario. Gravitation and Cosmology, **14**, No. 4, 2008, pp. 309–313.

Литература

- [198] *Yu. G. Ignatyev and R. A. Ziatdinov*. Diffusion model of evolution of superthermal high-energy particles in the expanding Universe. *Gravitation & Cosmology*, **12**, No 4, (2006), p. 289-298.
- [199] *Yu. G. Ignatyev and R. A. Ziatdinov*. Diffuzion model of evolution of superthermal high-energy particles under scalling in the early universe. II. Evolution at the Early Stages of Universe Expanction. *Gravitation & Cosmology*, Vol. 14 (2008), No 4, pp. 291-298.
- [200] Игнатъев Ю.Г., Зиатдинов Р.А. Асимптотическое приближение модели Фоккера - Планка космологической эволюции сверхтепловых ультрарелятивистских частиц при наличии скейлинга взаимодействий. *Известия ВУЗов, Физика*, 2008, **41**, No 9, с. 67-76.
- [201] Соболев С.Л. Уравнения математической физики, М.: Наука, 1966, 444 с.
- [202] Евграфов М.А. Аналитические функции, М: Наука, 1991, 326 с.
- [203] *Климонтович Ю.Л.* Релятивистское уравнение для квантовой функции распределения . - Докл. Акад. Наук СССР, **87** No6 (1952) - 927-930.
- [204] *Силлин В.П.* К теории электромагнитных флуктуаций . - Журн. эксперим. и теорет. физ., **41** (1961) - 969-978.
- [205] *Игнатъев Ю.Г.* О статистической динамике ансамбля гравитирующих заряженных частиц в ОТО . - Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации, Тез. доклал. Всесоюзн. конф., Минск., (1976) - 148-151.
- [206] *Tauber G. E., Weinberg J. W.* Internal state of a graviting gas. - *Phys. Rev.*, **122** 4 (1961) - 1342-1365.
- [207] *Игнатъев Ю.Г.* Вывод кинетических уравнений из общерелятивистской цепочки Боголюбова . - Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации, Тез. доклал. Всесоюзн. конф., Минск., (1976) - 146-148.
- [208] *Benard A.* On Bogolubovs kinetic equation for a spetieally homogeneous plasma . - *Ann. Phys.*, **3** (1960) - 390-405.

Литература

- [209] *Balescu R.* Irreversible processes in ionized gases . - Phys. of Fluid, **3** (1960) - 52-67.
- [210] *Балеску Р.* Статистическая механика заряженных частиц, - , Москва “Мир” (1967) - 512.
- [211] *Игнатьев Ю.Г.* Теория возмущений гравитационного поля . - “Гравитация и теория относительности”/Под редакцией Кайгородова В.Р./Изд-во КГУ, Казань, Выпуск 11 (1976) - 195-201.
- [212] *Isaakson R.A.* Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. Linear Approximation and Geometrical optics. - Phys. Rev., **166** (1968) - 1263-1271.
- [213] *Isaakson R.A.* Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. II. Nonlinear Terms and the Effective Stress Tensor. - Phys. Rev., **166** (1968) - 1272-1281.
- [214] *Бисноватый-Коган Г.С., Шухман Н.Г.* Столкновения частиц в расширяющейся Вселенной . - Журн. эксперим. и теор. физ., **82** вып.1 (1982) - 3-8.
- [215] *Ландау Л.Д.* Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия . - Журн. эксперим. и теор. физ., **7** (1937) - 203-209.
- [216] *Kandrup H.V.* Correlation dynamics in an expanding newtonian cosmology: the derivation of an exact equation. - Astrophys. Journ., **259** (1982) - 1-8.
- [217] *Захаров А.В.* Интеграл столкновений в мире Фридмана . - Журн. эксперим. и теор. физ., **86**, вып.1 (1984) - 3-12.
- [218] *Игнатьев Ю.Г., Попов А.А.* Кинетические уравнения для ультрарелятивистских частиц в мире Фридмана и изотропизация реликтового излучения гравитационными взаимодействиями. «Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции Вселенной», Казань: Изд-во КГПИ, 1988, с. 5-16.
- [219] *Игнатьев Ю.Г., Попов А.А.* О статистическом описании ансамбля ультрарелятивистских частиц в пространственно - плоской Вселенной, Известия ВУЗов, Физика, **31**, No 5 (1989) с. 82-87.

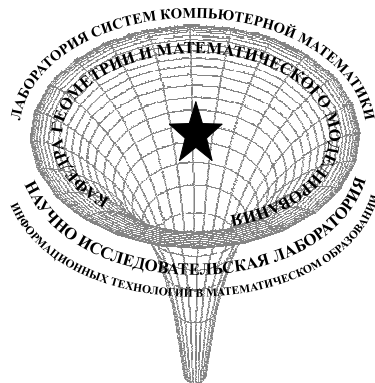
Литература

- [220] *Yu. G. Ignat'ev, A. A. Popov*. Kinetic equations for ultrarelativistic particles in a Robertson - Walker universe and isotropization of relict radiation by gravitational interactions, *Actrophysics and Space Science*, **163**, (1990), p. 153-174.
- [221] *Yu. G. Ignat'ev, A. A. Popov*. Spherically symmetric perturbation of a ultrarelativistic fluid in a homogeneous and isotropic universe. *Physics Letters A*. **220**, (1996), p. 22-29.
- [222] *Игнатъев Ю.Г., Эльмахи Н.* Динамическая модель сферических возмущений во вселенной Фридмана. I. *Известия Вузов, Физика*, **41** No 1, (2008), с. 66-76.
- [223] *Игнатъев Ю.Г., Эльмахи Н.* Динамическая модель сферических возмущений во вселенной Фридмана. II. Запаздывающие решения для ультрарелятивистского уравнения состояния. *Известия ВУЗов, Физика*, **41**, No 7, (2008), с. 69-76.
- [224] *Игнатъев Ю.Г., Эльмахи Н.* Динамическая модель сферических возмущений во вселенной Фридмана. III. Автомодельные решения. *Известия ВУЗов, Физика*, **41**, No 10, (2008), с. 72-80.
- [225] *Зельдович Я.Б.* Структура Вселенной. - *Итоги науки и техники. Астрономия*, М. ВИНТИ , **22** (1983) - 4 - 32.
- [226] *Yu. G. Ignatyev, K. Alsmadi* A complete relativistic kinetic model of symmetry violation in isotropic expanding plasma. I. Exact model. - *Gravitation & Cosmology*, **11** No 3 (2005) - pp. 252-258.

Набор монографии осуществлен в издательском пакете LaTeX_{2 ϵ} в научно-исследовательской лаборатории «Информационных технологий в математическом образовании» ТГГПУ.

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления - Ю.Г.Игнатъев

Техническая редакция, набор и верстка: Ю.Г.Игнатъев, В.И.Ковтун.



Оформление обложки - А.А. Агафонов.

Объем монографии 508 страниц, в монографии содержатся 66 иллюстраций, 5 таблиц. Библиография: 226 наименований.

Подписано в печать 26.07.10. Формат 60×84/8
Печать офсетная. Бумага офсетная. Печ. л. 32. Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии «Фолиантъ»
420052, г. Казань, ул. Дементьева, 1а. Тел. (843) 292-27-25