ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 140 (2017). С. 78–87

УДК 517.983, 517.986

О τ-КОМПАКТНОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ τ-ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

© 2017 г. **А. М. БИКЧЕНТАЕВ**

Аннотация. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Получены неравенства для перестановок произведений τ-измеримых операторов. Эти неравенства применены для получения новых субмажоризаций (по Харди—Литтлвуду—Полиа) произведений τ-измеримых операторов и вывода достаточного условия ортогональности некоторых неотрицательных τ-измеримых операторов. Установлены достаточные условия τ-компактности произведений самосопряженных τ-измеримых операторов. Получен критерий τ-компактности произведения неотрицательного τ-измеримого оператора с произвольным τ-измеримым оператором. Приведен пример, показывающий существенность неотрицательности одного из сомножителей. Установлен критерий элементарности произведения неотрицательных операторов из $\mathcal{M}$. Результаты являются новыми и для *-алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$, снабженной каноническим следом $\tau = \mathrm{tr}$.

***Ключевые слова*:** гильбертово пространство, линейный оператор, алгебра фон Неймана, нормальный полуконечный след, τ-измеримый оператор, τ-компактный оператор, элементарный оператор, нильпотент, перестановка, субмажоризация.

***AMS Subject Classification*:** 47C15, 46L51

Введение. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Произведения τ-измеримых операторов возникают в различных задачах теории некоммутативного интегрирования (например, в [24] при определении дуального по Кёте пространства; в неравенствах Голдена—Томпсона [3] и Паейрлса—Боголюбова [16] и др.). Достаточные условия интегрируемости произведений τ-измеримых операторов были найдены в [18]. Настоящая работа продолжает исследования автора (см. [2, 5]), в которых были установлены критерии τ-компактности произведений неотрицательных τ-измеримых операторов. Близкие вопросы изучались в [4, 12, 14, 31]. Компактные произведения операторов были исследованы в [20, 21, 23, 27–29, 32]. Приложения компактных (соответственно, τ-компактных) произведений операторов см., например, в [26] (соответственно, в [15]).

В разделе 3 получены неравенства для перестановок произведений τ-измеримых операторов. Эти неравенства применены для получения новых субмажоризаций (по Харди—Литтлвуду—Полиа) произведений τ-измеримых операторов и вывода достаточного условия ортогональности некоторых неотрицательных τ-измеримых операторов. В разделе 4 установлены достаточные условия τ-компактности произведений самосопряженных τ-измеримых операторов. Получен критерий τ-компактности произведения неотрицательного τ-измеримого оператора с произвольным τ-измеримым оператором. Приведен пример, показывающий существенность неотрицательности одного из сомножителей. Из известного свойства перестановок (см. п. (6) леммы 2.1) имеем: неотрицательный оператор $A \in \mathcal{M}$ элементарен тогда и только тогда, когда элементарен A^p для всех $p > 0$. В теореме 4.2 показано, что аналогичная картина имеет место и для произведения неотрицательных операторов $A, B \in \mathcal{M}$: элементарность оператора AB эквивалентна элементарности операторов A^pB^r для всех $p, r > 0$. Получены приложения полученных результатов к симметричным пространствам на $(\mathcal{M}, \tau)$. Результаты являются новыми и для *-алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$, снабженной каноническим следом $\tau = \mathrm{tr}$.

ISSN 0233–6723