Образ оператора. Ядро оператора. Ранг матрицы

Пусть $A: X \to Y$ – лин. оператор. Мн-во всех векторов $y \in Y$ таких, что $y = Ax$ для некоторого $x \in X$, называется областью значений или образом оператора и обозначается через $Im(A)$. Мн-во $Im(A)$ – линейное подпростр. простр. Y. Размерность подпростр $Im(A)$ наз-ся рангом оператора A и обозначается через $rank(A)$.

Мн-во всех векторов $x \in X$ что $Ax = 0$ — ядро оператора A ($ker(A)$).

это мн-во линейное подпростр. простр-а X.

Размерность подпростр. $ker(A)$ – дефект оператора A и обозначается через $def(A)$.

Для любого лин. оператора $A: X_n \to Y_k$

$rank(A) + def(A) = n$.

Пусть в пространстве X дана система вект. $\{a^i\}_{i=1}^m$. Будем считать, что не все векторы этой системы нулевые. Тогда упомянутая система обязательно содерж. лин. незав. подсистему.

Подсистема векторов $\{a^i\}_{k=1}^n \subset \{a^i\}_{i=1}^m$, состоящая из лин. независимых векторов, называется максимальной, если добавление к ней любого нового вектора из $\{a^i\}_{i=1}^m$ приводит к лин. зависимой системе.

РАНГОМ системы векторов называется кол-во векторов в максим. линейно независимой подсистеме.

Пусть $A(m,n)$ – произв. прямоуг. матрица. Будем трактовать ее столбцы как систему векторов пространства C^m. Ранг этой системы векторов наз. рангом матрицы $A(m,n)$. Ранг матрицы обозначаем через $rank(A)$.

Упр. 1 Д-ть, что $ker(A)$ – лин. подпр. простр. X $\forall$ лин. оператора $A: X \to Y$.

Согласно определению $ker(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$.

Пусть x, y – произв. векторы из $\ker(A)$, α, β – числа. Тогда $A(\alpha x+\beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0$, т.е. линейная комбинация $\alpha x+\beta y \in \ker(A)$

Упр 2 Показать что $\forall$ допускающих умножение прямоугол. матриц A, B справедливо: $\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$.

Обозначим $C = AB$. Столбцы матрицы C линейно выражаются через столбцы матрицы A, которые лин. выражаются через максим. подсистему лин. независимых столбцов матрицы A.

Число столбцов в этой подсистеме $= \operatorname{rank}(A)$. Назовем столбцы этой подсистемы базисными. Можно сказать, что столбцы матрицы C принадлежат подпространству, натянутому на базисные столбцы матрицы A.

$\Rightarrow$ число линейно незав. столбцов матрицы C не м. превышать $\operatorname{rank}(A)$.

С другой стороны, строки матрицы C линейно выражаются через строки матрицы B. Заключаем, $\operatorname{rank}(C) \leq \operatorname{rank}(B)$.

Упр 3. Найти макс. лин. независимую подсистему след. системы векторов пространства $\mathbb{R}^3$:

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Что можно сказать о базисе?

Рассмотрим систему векторов. Векторы a^1, a^2 линейно независимы. Они образуют максимальную линейно независимую подсистему, т.к. определители составленные из компонентов векторов a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ векторы a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 лин. зависимы.

Это не единственная максимальная линейно независимая подсистема. Таким же свойством обладают пары векторов

a^1, a^3 и a^1, a^4. Любая из указанных пар лин. независимых векторов образует базис подпространства, натянутого на векторы a^1, a^2, a^3, a^4. Тогда ранг этой системы $= 2$.

<u>Упр 4</u>. Пусть $A: X_n \to Y_m$ — лин. опер.

$e^1 \dots e^n$ — базис пространства X_n. Д-ть, что

$$Im(A) = \underbrace{L(Ae^1, \dots Ae^n)}_{\substack{\text{подпространство} \\ \text{пространства } Y_m, \\ \text{натянутое на} \\ \text{векторы } Ae^1 \dots Ae^n.}}$$

Пусть $y \in Im(A)$. Тогда $y = Ax$ для некоторого вектора $x \in X_n$, т.е.

$$y = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) \in L(Ae^1 \dots Ae^n)$$

С другой стороны, если $y \in L(Ae^1 \dots Ae^n)$, то

$$y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = Ax, \text{ где}$$

$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i$, т.е. $y \in Im(A)$. Значит,

$$Im(A) = L(Ae^1 \dots Ae^n)$$

<u>Упр 5</u>. Построить базис образа, найти ранг и дефект. $\mathbb{R}^3$

а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

Дефект: $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{def}(A) = n$

Построим векторы Ax^1, Ax^2, Ax^3.

$Ax^1 = x^1 + x^2 + x^3$

$Ax^2 = x^1 + x^2 + x^3$

$Ax^3 = x^1 + x^2 + x^3$

$$\Rightarrow A_k \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Базис образа $(1, 1, 1)$ состоит из 1 вектора!

$\mathrm{rank}(A) = 1 \quad \mathrm{def}(A) = 3 - 1 = 2$

б) $Ax^1 = 2x^1 - x^2 - x^3$
$Ax^2 = x^1 - 2x^2 + x^3$
$Ax^3 = x^1 + x^2 - 2x^3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

базис вектора Ax^1 и Ax^2
$\mathrm{rank}(A) = 2$
$\mathrm{def}(A) = 3 - 2 = 1$

с) $Ax^1 = -x^1 + x^2 + x^3$
$Ax^2 = x^1 - x^2 + x^3$
$Ax^3 = x^1 + x^2 - x^3$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

базис Ax^1, Ax^2, Ax^3 (т.к. остались цифры в каждой строчке)

$\mathrm{rank}(A) = 3 \Rightarrow \mathrm{def}(A) = 0$.

(6) Описать образ и ядро оператора дифференц. D в пространстве P_n полиномов степени не выше n с вещ. коэф.

Каждому элементу пространства P_n оператор D ставит в соответствие полином из P_{n-1}.

Поэтому $\mathrm{Im}(D) = P_{n-1}$, и можно считать, что $D: P_n \to P_{n-1}$. Любой полином нулевой степени (вещ. число) оператор D обращает в ноль. Полиномы более высоких степеней в результате дифференц. не могут обратиться в ф-цию, $= 0$.

Поэтому $\mathrm{Ker}(D) = P_0$.

7. Описать образ и ядро оператора проектирования P пр. X на подпр. L_1 параллельно подпрост. L_2.

$P: X \to L_1$, $X = L_1 \dotplus L_2$

Вектор проектирования P ставит в соответст. вектору x вектор из L_1, т.е.

$Im(P) = L_1$.

$Ker(P) = L_2$

8. Описать образ и ядро оператора отражения R пространства X относительно подпространства L_1 параллельно подпрост. L_2.

$R: X \to X$, полагая $Rx = x^1 - x^2$

Вектор отражения R ставит в соответств. вектору x вектор из X, т.е.

$Im(R) = X$, $Ker(X) = \{0\}$.

9. Найти образ и ядро лин. оператора A, действующ. в геометрич. пространстве V_3 по правилу: $Ax = [x, a]$, где a — ненул. вектор

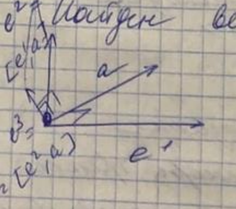
Образ — плоскость $(x, a) = 0$

Ядро — прямая $[x, a] = 0$.

Построим базис пространства V_3.

В качестве первого вектора возьмем a, $2 - e^1$ (где $e^1 \perp a$), $3 - e^2 = [e^1, a]$.

Найдем вектора $[e^1, a]$ и $[e^2, a]$.



Они ортогональны a $\Rightarrow$ (и. коор.) проведем через них плоскость, натянутую на эти вектора $[e^1, a]$ и $[e^2, a]$.

10. Что можно сказать о матрице оператора $A: X_n \to Y_m$ ранга r, если в базисе $e^1 \ldots e^n$ пространства X_n вектора $e^{r+1} \ldots e^n$ принадлежат ядру этого оператора.

— Последние $n-r$ столбцов матрицы A нулевые, в то время, как первые r — линейно независимы

(71) Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Метод:

1) Просматриваем эл-ты матрицы. Если они нули — ранг $= 0$ и останавливаем процесс.

2) Если найден эл-т матрицы $\neq 0$ то окаймляем его, т.е. составляем определители второго порядка, присоединяя к нему эл-ты других строк и столбцов.

Если все эл-ты второго порядка $= 0$, то у матрицы только 1 лин. независимый столбец (и одна лин. независимая строка).

Значит ранг $= 1$.

3) Если обнаружен ненулевой определитель второго порядка то путем окаймления строим определители 3 порядка, пока не получим среди них определитель $\neq 0$, и т.д. Если на k-ом шаге описанного алгоритма получен определ. $\neq 0$ а все определители порядка $k+1$, построенные его окаймлением — нули, то $\Rightarrow$ ранг $= k$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ составлен из столбцов $a^1, a^2, a^3, a^3 \Rightarrow$ ранг $= 2$.

Заметим, что в матрице A содержится минор $d = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Оба минора третьего порядка (2) и (3), окаймляющие минор d, $= 0$

$\Rightarrow$ и этим методом получили

$\operatorname{rank}(A) = 2$

(12) Найти ранг матрицы с помощью элемент. преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$$

Иногда при вычислении ранга матрицы бывает удобно выполнить нек. преобразования:

1) из второй строки матрицы вычтем 1, умноженную на 2

2) из третьей строки матрицы вычтем 1, умноженную на 3

3) из послед. строки вычтем первую, умноженную на 2

Получим $A \sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Заметим, что в получившейся матрице минор третьего порядка

$$d = \begin{vmatrix} 24 & 19 & 36 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$ оба

окаймляющих его минора четвертого порядка $= 0$, т.к. четвертая строка преобразованной матрицы состоит из нулей. т.о. ранг матрицы $A = 3$

$$\mathrm{rank}(A) = 3.$$

(13) Найти ранг методом окаймляющих миноров

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ $M_1 = 0.$

$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0. = 10 - 12 = -2$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A) \geq 2$

$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ составим другие $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0$ и все нули $\Rightarrow$

$\mathrm{rank}(A) = 2$

Вычти 2 строку из 4 строки =>

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Вычти 3 строку из 4 стр.

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 строки => $\operatorname{rank}(A) = 3$

(14) Найти α при которых матрица имеет наим. ранг

Пусть $\alpha = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = A \Rightarrow$$ Методом эл-ных преобразований получим $\operatorname{rank}(A) = 2$

Пусть $\alpha = 1$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = A.$$ Тут $\operatorname{rank}(A =) = 3$.

16) a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8.$$

(16). Ранг при помощи элементарных преобразований

а) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \Big| :25 \cdot 75$

Вычли 1 строку из 2-й строки

$\begin{pmatrix} 75 & 93 & 51 & 129 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$

Вычли 1 строку из 3, : 25

$\begin{pmatrix} 1 & \frac{31}{25} & \frac{17}{25} & \frac{43}{25} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} * 25$

Вычли 1 строку из 4 строки

$\begin{pmatrix} 1 & \frac{31}{25} & \frac{17}{25} & \frac{43}{25} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Big| \cdot 25$

Вычли 2 строку из 3 стр.

(17) Чему равен ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Допустим, пусть $\lambda > 0$, $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad rank(A) = 3$$

$\lambda = 1$ $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad rank(A) = 3$$

$\lambda = 2 \Rightarrow rank(A) = 3$

$\lambda = 3$ $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad rank(A) = 2$$

(18) Вычислить ранг матрицы при помощи эл. преобразований.

$$\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 22 \end{pmatrix} \Big| : 47 \quad \overset{①}{\cdot} -26 \quad \overset{②}{\cdot} -16$$

1) складываем 1 строку со 2
2) складываем 1 стр. с 3
3) делим 2 строку на $\frac{6348}{47}$.
4) домножаем 2 строку на $\frac{67}{47}$ и складываем с 1 строкой.
5) домножаем 2 строку на $\frac{19044}{47}$ и складываем с 3 строкой.
6) делим 3 строку на 30
7) домножаем 3 строку на $-\frac{335}{3174}$ и складываем с 1 строкой

8) Домножаем 3 строку на $\frac{9287}{3174}$ и складываем с 2 строкой: =>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1657}{2116} & \frac{10811}{3174} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{57}{2116} & \left(\frac{1}{529} - \frac{9287}{3174}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

число лин. незав. строк = 3 =>

$\text{rank}(A) = 3$